

EQUALIZAÇÃO DE CANAL EM SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES  
UTILIZANDO TRANSMISSÃO EM BLOCOS

Cássio Barboza Ribeiro

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

---

Prof. Marcello Luiz Rodrigues de Campos, Ph.D.

---

Prof. Eduardo Antônio Barros da Silva, Ph.D.

---

Prof. José Antônio Apolinário Jr., D.Sc.

---

Prof. Ricardo Merched, Ph.D.

---

Prof. Vítor Heloiz Nascimento, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2002

RIBEIRO, CÁSSIO BARBOZA

Equalização de Canal em Sistemas de  
Comunicações Utilizando Transmissão em  
Blocos [Rio de Janeiro] 2002

XII, 98 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ,  
M.Sc., Engenharia Elétrica, 2002)

Tese - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1.Equalização de Canal 2.Bancos de  
Filtros

I.COPPE/UFRJ      II.Título (série)

## **Agradecimentos**

Aos meus orientadores, Prof. Paulo S. R. Diniz e Prof. Marcello L. R. de Campos, um sincero agradecimento pela orientação valiosa e pelo apoio dispensado nas horas mais difíceis. Agradeço também ao Prof. Markku Renfors pela grande contribuição prestada pelo Laboratório de Comunicações da Universidade de Tampere, Finlândia.

Apesar de o apoio técnico ter sido essencial para o desenvolvimento deste trabalho, pouco teria sido realizado sem o apoio pessoal daqueles que mantêm uma torcida constante pelo meu sucesso. Por isso, meu muito obrigado a meus pais, José Marcos e Vera Lúcia, meu irmão, Leonardo, e minha noiva, Patrícia.

Agradeço também aos alunos, funcionários e professores do Laboratório de Processamento de Sinais, por proporcionarem um ambiente agradável e estimulante. Por fim gostaria de agradecer à CAPES e à FAPERJ pelas bolsas de estudo concedidas, que tornaram viável a realização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

EQUALIZAÇÃO DE CANAL EM SISTEMAS DE COMUNICAÇÕES  
UTILIZANDO TRANSMISSÃO EM BLOCOS

Cássio Barboza Ribeiro

Abril/2002

Orientadores: Paulo Sérgio Ramirez Diniz

Marcello Luiz Rodrigues de Campos

Programa: Engenharia Elétrica

Neste trabalho utilizamos bancos de filtros com reconstrução perfeita ou quase perfeita para realizar a equalização em sistemas de comunicações utilizando transmissão em blocos. Buscamos também estabelecer condições teóricas sobre o projeto do equalizador de modo a garantir a reconstrução perfeita do sinal transmitido. Estendemos os resultados existentes na literatura, permitindo assim a utilização de equalizadores com ordem reduzida e um melhor aproveitamento da banda disponível, além de evitar as restrições quanto ao comprimento da resposta ao impulso do canal. Utilizamos também bancos de filtros com reconstrução quase perfeita para simplificar o projeto do equalizador e comparamos o desempenho com os resultados obtidos para bancos de filtros modulados por cosseno. Por fim mostramos um sistema de transmissão em blocos onde a equalização de todos os símbolos de um bloco é realizada calculando o filtro de Wiener responsável por estimar um dos símbolos do bloco e em seguida aplicando transformações lineares triviais a este filtro.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

CHANNEL EQUALIZATION FOR COMMUNICATIONS SYSTEMS USING  
BLOCK TRANSMISSIONS

Cássio Barboza Ribeiro

April/2002

Advisors: Paulo Sérgio Ramirez Diniz

Marcello Luiz Rodrigues de Campos

Department: Electrical Engineering

In this work we employ filter banks with the property of perfect reconstruction or near-perfect reconstruction in order to perform equalization in communications systems using block transmissions. We also establish theoretical restrictions for the design of the equalizer in order to guarantee perfect reconstruction of the transmitted symbols. We extended the existing results in literature, allowing the use of equalizers with reduced order and smaller amount of redundancy, and also avoid restrictions upon the length of the channel impulse response. We have also used near-perfect reconstruction filter-banks in order to simplify the design of the equalizer and compare its performance with the results obtained for cosine modulated filter banks. At last we show a communications system using block transmissions where the equalization of all symbols in one block is accomplished by calculating the Wiener filter that estimates one symbol of the block and then applying trivial linear transformations to the designed filter.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Bancos de Filtros em Sistemas de Comunicações</b>	<b>8</b>
2.1	Processamento de Sinais em Múltiplas Taxas . . . . .	8
2.1.1	Identidades Nobres . . . . .	9
2.2	Bancos de Filtros . . . . .	11
2.3	O Transmultiplexador Digital . . . . .	12
2.4	Representação Polifásica do Transmultiplexador . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Equalização Independente nas Sub-bandas</b>	<b>19</b>
3.1	Transmultiplexador Baseado em Atrasos Fracionários . . . . .	20
3.2	Aproximação dos Atrasos Fracionários . . . . .	23
3.2.1	Filtro de Nyquist . . . . .	23
3.2.2	Estrutura de Farrow Modificada . . . . .	24
3.2.3	Aproximação por Mínimos Quadrados . . . . .	25
3.2.4	Erro de Reconstrução do Banco de Filtros . . . . .	26
3.3	Complexidade Computacional . . . . .	27
3.4	Resultados Experimentais . . . . .	28
3.5	Conclusão . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Estrutura Eficiente Utilizando Filtragem de Wiener</b>	<b>35</b>
4.1	Descrição do sistema de comunicações . . . . .	36
4.2	Equalizador . . . . .	39
4.2.1	Estrutura Eficiente . . . . .	40
4.3	O Filtro de Wiener em Múltiplos Estágios . . . . .	43
4.3.1	Estrutura Eficiente Utilizando MSWF . . . . .	46

4.3.2	Equalização Balanceada . . . . .	47
4.4	Resultados Experimentais . . . . .	50
4.5	Conclusão . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Análise Teórica do Transmultiplexador no Domínio <math>Z</math></b>	<b>55</b>
5.1	Descrição do Sistema de Comunicações . . . . .	55
5.2	Propriedades da Matriz de Canal . . . . .	57
5.3	Transmultiplexadores com Redundância Mínima . . . . .	60
5.3.1	Determinação da Redundância Mínima . . . . .	63
5.4	Exemplos . . . . .	65
5.5	Conclusão . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Análise Teórica do Transmultiplexador no Domínio do Tempo</b>	<b>69</b>
6.1	Equalização . . . . .	72
6.1.1	Equalizador ZF . . . . .	72
6.1.2	Equalizador ZF Variante no Tempo . . . . .	80
6.2	Conclusão . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>86</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>90</b>
<b>A</b>	<b>Matriz Pseudocirculante</b>	<b>93</b>
<b>B</b>	<b>Decomposição Espectral de Matriz Pseudocirculante</b>	<b>96</b>

# Lista de Figuras

2.1	Blocos construtores para processamento de sinais em múltiplas taxas: (a) decimador, (b) interpolador. . . . .	9
2.2	Efeito do interpolador e do decimador no domínio da transformada $Z$ : (a) sinal original; (b) interpolação com $L = 4$ ; (c) decimação com $M = 2$ . . . . .	10
2.3	Identities Nobres. . . . .	10
2.4	Bancos de filtros: (a) análise; (b) síntese. . . . .	11
2.5	Transmultiplexador Discreto. . . . .	12
2.6	Transmultiplexador discreto com equalizador. . . . .	14
2.7	Representação polifásica do transmultiplexador. . . . .	16
2.8	Representação polifásica modificada do transmultiplexador. . . . .	17
2.9	Representação alternativa do transmultiplexador supondo sincro- nização do sinal na entrada do receptor. . . . .	18
3.1	Transmultiplexador. . . . .	20
3.2	Equalização de canal. . . . .	21
3.3	Parte fracionária do atraso de grupo para $K = 5$ e $N = 128$ . . . . .	24
3.4	Estrutura de Farrow modificada. . . . .	25
3.5	Erro médio quadrático (EMQ) para o FDFB avaliado para três métodos de projeto: NYQ – filtro de Nyquist; FARROW – estru- tura de Farrow modificada; LS-11 – LS com 11 coeficientes; e LS-20 – LS com 20 coeficientes. . . . .	26
3.6	Razão entre o número de multiplicações por símbolo de entrada do FDFB e a ELT em função de $N$ para diferentes valores de $K$ . . . . .	28
3.7	BER para transmissões através de um canal com ruído aditivo gaus- siano e com interferência de banda estreita adicional. . . . .	30



3.8	BER para transmissões através de um canal com ruído gaussiano e com interferência de banda estreita adicional. . . . .	31
3.9	SIR para um canal sem ruído aditivo. . . . .	32
3.10	SIR para um canal com ruído aditivo gaussiano. . . . .	32
3.11	SIR para um canal com ruído aditivo gaussiano e ruído de banda estreita. . . . .	33
3.12	BER para transmissões através de um canal com ruído gaussiano e com interferência de banda estreita adicional. . . . .	34
4.1	Diagrama em blocos do sistema de comunicações. . . . .	38
4.2	Equalizador de canal para transmissão em blocos baseado em filtros de Wiener. . . . .	41
4.3	Diagrama de blocos da estrutura de equalização proposta. . . . .	43
4.4	Banco de filtros de análise para um MSWF de quatro estágios. . . . .	44
4.5	Banco de filtros de síntese de erro para um MSWF de quatro estágios. . . . .	45
4.6	Equalizador de canal para transmissão em blocos baseado em filtros de Wiener em múltiplos estágios. . . . .	46
4.7	Equalizador balanceado usando filtros de Wiener em múltiplos estágios. . . . .	49
4.8	Magnitude da resposta em frequência do modelo de canal considerado para o primeiro conjunto de simulações. . . . .	51
4.9	BER média para o primeiro conjunto de simulações. . . . .	52
4.10	Magnitude da Resposta em Frequência. . . . .	53
4.11	BER média para o segundo conjunto de simulações. . . . .	54
4.12	BER média para posto variando de 4 a 128 com SNR=15 dB. . . . .	54
5.1	Transmultiplexador. . . . .	56
5.2	Transmultiplexador como sistema MIMO. . . . .	57
6.1	Transmultiplexador no domínio do tempo. . . . .	70
A.1	Transmultiplexador. . . . .	93

# Lista de Tabelas

3.1	Valores de $T_{FDFB}$ e $T_{ELT}$ para diferentes valores de $N$ e $K$ . . . . .	29
-----	--	----

# Lista de Abreviações

**AM** - Modulação de amplitude (*Amplitude Modulation*)

**BER** - Taxa de erros de bit (*Bit Error Rate*)

**CDMA** - Acesso múltiplo por divisão de código (*Code Division Multiple Access*)

**CMFB** - Banco de filtros modulado por cosseno (*Cosine Modulated Filter Bank*)

**DMT** - *Discrete MultiTone*

**DWMT** - *Discrete Wavelet MultiTone*

**ELT** - *Extended Lapped Transforms*

**FDFB** - Banco de filtros com atrasos fracionários (*Fractional-Delay Filter Bank*)

**FIR** - Resposta ao impulso finita (*Finite Impulse Response*)

**FM** - Modulação de frequência (*Frequency Modulation*)

**IBI** - Interferência entre blocos (*Inter Block Interference*)

**IIR** - Resposta ao impulso infinita (*Infinite Impulse Response*)

**ISI** - Interferência entre símbolos (*InterSymbol Interference*)

**MIMO** - Múltiplas entradas e múltiplas saídas (*Multiple Input Multiple Output*)

**MSWF** - Filtro de Wiener em múltiplos estágios (*Multistage Wiener Filter*)

**OFDM** - *Orthogonal Frequency Division Multiplex*

**PR** - Reconstrução perfeita (*Perfect Reconstruction*)

**QPSK** - *Quadrature Phase Shift Keying*

**RLS** - *Recursive Least Squares*

**SIR** - Relação sinal inteferência (*Signal to Interference Ratio*)

**SNR** - Relação sinal ruído (*Signal to Noise Ratio*)

**WLS** - *Weighted Least Squares*

**ZF** - *Zero Forcing*

# Capítulo 1

## Introdução

Em 1898, o livro “The War of The Worlds” (A Guerra dos Mundos) de H. G. Wells aterrorizou a Inglaterra com a descrição da invasão da Terra por seres provenientes de Marte, sendo estes possuidores de máquinas e equipamentos muito superiores aos existentes na Terra. Sua tecnologia era incompreensível para os seres humanos da época, dado seu grau de desenvolvimento. Quando a invasão já estava em estágio avançado, o autor descreve as máquinas de guerra imbatíveis dos “marcianos”, capazes de se comunicar à distância utilizando... sinais sonoros, em uma espécie de código musical: “*They communicated with one another by means of siren-like howls, running up and down the scale from one note to another.*”<sup>1</sup> Por que não utilizavam comunicação sem fio através de ondas de rádio? Talvez por que mesmo às vésperas do século XX seria mais fácil os leitores acreditarem (e de fato muitos acreditaram) em invasores de Marte do que em comunicação à distância sem fios, que provavelmente seria encarada como uma espécie de *telepatia eletrônica*.

Esse episódio serve para que possamos compreender a grandiosidade das mudanças trazidas ao mundo nas últimas décadas. A descoberta da propagação das ondas de rádio no vácuo e a utilização desse fenômeno para realizar a comunicação a grandes distâncias sem a utilização de fios revolucionaram tanto a vida dos cientistas e engenheiros como a do cidadão comum, que nem se dá conta que ao ligar a televisão ou utilizar o controle remoto sem fio está utilizando dispositivos que por muito tempo fizeram parte do campo do misticismo e não da ciência.

---

<sup>1</sup>Tradução livre: “Eles se comunicavam uns com os outros através de sons semelhantes a sirenes, subindo e descendo a escala de uma nota para outra.”

Esse grande avanço tecnológico foi capaz não apenas de tornar realidade a comunicação a grandes distâncias sem a utilização de fios de qualquer espécie como também tornar obsoletas as tecnologias inicialmente empregadas para esse fim. As primeiras aplicações para o rádio foram transmissões de mensagens telegráficas para uso militar, razão pela qual muito do desenvolvimento inicial do rádio era considerado sigiloso, o que impede que os créditos pelas primeiras descobertas possam ser dados corretamente. Com a invenção da válvula em 1905, foi possível transmitir não apenas sinais telegráficos, mas também sinais de voz e música, iniciando uma nova era nas comunicações.

Surgiram então as rádios comerciais, colocando o cidadão comum em contato com tecnologias antes reservadas apenas para uso militar, e mesmo o mais cético não teria como não acreditar na maravilha que se tornava realidade diante de seus olhos e ouvidos. O desenvolvimento de novos componentes eletrônicos, menores e mais baratos, possibilitaram a difusão dos aparelhos de rádio e o surgimento da televisão, mais uma grande maravilha tornada realidade quando mesmo a existência do rádio era desconhecida para muitas pessoas.

A sucessão de novas tecnologias passou a vir em uma taxa tão assustadoramente rápida que trouxe consigo o sentimento de que mesmo a mais absurda das idéias é possível, apenas ainda não sabemos como realizá-la. Os computadores vieram para corroborar esse pensamento, já que aquilo que se considerava a característica mais particular do ser humano, a inteligência, passou a ser compartilhada com uma máquina criada pelo homem.

Com os computadores, veio também a necessidade de compartilhar informações entre os mesmos. Como os computadores não eram capazes de se comunicar eficientemente utilizando voz ou sinais visuais, era necessário repensar a forma de realizar a comunicação. Como os computadores armazenavam a informação na forma de dígitos binários (“0” ou “1”) estes eram os símbolos que precisavam ser transmitidos, e esta forma de comunicação ficou conhecida como *digital*.

Hoje, a tendência é utilizar cada vez mais a transmissão de informações em formato *digital*, no lugar do formato *analógico* utilizado nas rádios AM e FM. Ao transmitir a informação em formato digital, o sinal a ser transmitido deve ser convertido em uma seqüência de símbolos, escolhidos dentre um alfabeto conhecido

tanto pelo transmissor como pelo receptor. Essa forma de comunicação é mais resistente a interferências já que o símbolo não precisa chegar ao receptor exatamente em sua forma original, mas apenas de forma tal que ainda possa ser reconhecido corretamente. Essa é uma característica importante, já que quando utilizamos o ar como o meio em que os sinais são transmitidos, o nível de distorção presente no sinal recebido pode ser elevado ao ponto de inviabilizar a comunicação analógica.

Existem várias alternativas para tornar possível o reconhecimento dos símbolos por parte do receptor, como utilizar sinais de alta potência para transmissão, ou posicionar as antenas de modo a ter uma linha de visada direta entre o transmissor e o receptor. Embora algumas dessas alternativas sejam viáveis para comunicação entre pontos fixos, as mesmas são dispendiosas, não sendo viáveis para o cidadão comum, que deseja ter um telefone que possa carregar junto de si, ou deseja que seus eletrodomésticos possam interagir entre si e com outros sistemas de computadores apenas utilizando sinais de rádio.

Para tornar essas e outras aplicações possíveis é necessário acrescentar ao sistema de comunicações um elemento chamado de *equalizador*. O conceito de equalização é bastante simples, sendo normalmente utilizado no dia-a-dia mesmo por pessoas que não compreendem os princípios para a construção de um equalizador, mas podem perceber claramente o seu efeito. Ainda não estamos falando de sistemas de comunicações, telefones celulares etc., mas simplesmente do equalizador de áudio encontrado na maioria dos equipamentos de som caseiros e *walkmans*. Mesmo que não compreenda o funcionamento exato desse dispositivo, o ouvinte de música sabe como utilizar o equalizador para compensar as distorções introduzidas pelo sistema de gravação e reprodução ou para destacar o som de algum instrumento. Sem perceber, esse ouvinte já conhece os elementos fundamentais de um sistema de comunicação, onde nesse caso os músicos são a fonte de informação, o ouvinte é o receptor, e tudo o mais (microfone, mesa de som, CD) compõe o *canal* de comunicação.

Vamos extrapolar um pouco esse modelo para podermos falar sobre sistemas de comunicação de forma geral, onde a fonte de informação pode ser tanto contínua quanto discreta. O transmissor realiza operações sobre os dados para facilitar — e eventualmente, possibilitar — a recepção e insere os mesmos no meio físico; o canal

representa um sistema linear que insere as distorções introduzidas nos dados que saem do transmissor e também o ruído aleatório adicionado aos mesmos; finalmente, o receptor/equalizador recebe os dados do meio físico e opera sobre os mesmos de modo a tentar recuperar a informação transmitida originalmente.

Tradicionalmente a equalização é realizada de forma serial, ou seja, a recepção é realizada símbolo a símbolo, e não existe nenhuma “fronteira” separando grupos de símbolos. Outro esquema de equalização conhecido como *equalização em blocos* tem sido bastante considerado atualmente. Nesse esquema a recepção é realizada quando do recebimento de um bloco de símbolos, que normalmente é separado dos demais blocos por *símbolos de guarda*. Em um sistema de comunicações com essas características, o transmissor e o receptor/equalizador podem ser interpretados como um banco de filtros, o que justifica parte do interesse dedicado a esse esquema de comunicações, já que toda a teoria desenvolvida para bancos de filtros pode ser diretamente aplicada.

Recentemente alguns avanços foram conquistados no estabelecimento de uma base teórica que garanta a existência de equalizadores conhecendo-se o banco de filtros utilizado e as características do canal de comunicação. Como consequência desses esforços, demonstrou-se que para ser possível receber exatamente os símbolos transmitidos independentemente do canal de comunicação, é necessário inserir símbolos de guarda nos blocos transmitidos. Considerando a taxa de transmissão dos símbolos fixa, a inserção dos símbolos de guarda (ou símbolos redundantes) reduz a taxa efetiva de transmissão de informação e, portanto, é importante conhecer a quantidade mínima de símbolos de guarda que precisa ser inserida, de modo a poder utilizar de forma eficiente os meios disponíveis.

Diante desse quadro atual de pesquisas em equalizadores, podemos afirmar que este trabalho se insere em duas frentes distintas: primeiramente buscamos utilizar a teoria já desenvolvida para bancos de filtros com reconstrução perfeita ou quase perfeita para realizar a equalização. Dentro desse contexto, nosso trabalho dividiu-se ainda em duas partes: utilização de bancos de filtros que permitam equalização independente nas sub-bandas e a utilização de um filtro de Wiener associado a transformações lineares triviais para a recepção.

A busca por uma equalização independente nas sub-bandas surge porque



quando utilizamos processamento em blocos o equalizador deixa de ser um filtro para se tornar uma matriz de filtros. Dessa forma a complexidade do sistema pode se tornar proibitivamente alta, pois onde era necessário estimar  $N$  filtros, torna-se necessário estimar  $N^2$  filtros.

É possível mostrar [1, 2] que caso filtros de resposta ao impulso infinita sejam permitidos, é possível parametrizar uma solução para o equalizador em função de um banco de filtros que implemente atrasos fracionários, de forma que a equalização possa ser realizada de forma independente nas sub-bandas, ou seja, apenas  $N$  filtros necessitam ser estimados. No Capítulo 3 descrevemos essa estrutura e mostramos três alternativas para aproximar os atrasos fracionários através de filtros com resposta ao impulso finita. Um transmultiplexador implementado dessa forma pode ser dividido em uma parte fixa e outra variável, estando a primeira responsável por tornar independente a informação de cada sub-banda, e a segunda responsável pela equalização propriamente dita.

Os resultados foram comparados com transmultiplexadores baseados em bancos de filtros modulados por cosseno (*Cosine Modulated Filter Bank*, CMFB), onde foi possível verificar que o banco de filtros com atrasos fracionários (*Fractional-Delay Filter Bank*, FDFB) possui desempenho equivalente ao primeiro. Dessa forma, o FDFB é uma alternativa de projeto mais simples e flexível do que o CMFB. Além disso, a equalização também pode ser realizada de forma menos complexa, possibilitando o uso de algoritmos mais elaborados e que melhorem o desempenho do sistema.

Para a segunda estrutura de equalização, utiliza-se um filtro de Wiener associado a transformações lineares triviais para a recepção, aproveitando o fato de atualmente vários sistemas comerciais utilizarem tecnologias de transmissão baseadas em OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplex*) ou DMT (*Discrete MultiTone*), onde uma grande quantidade de redundância é introduzida de modo a possibilitar a equalização com reconstrução perfeita em qualquer canal de comunicações. Em sistemas desse tipo, as informações são transmitidas em sub-bandas distintas de frequência. Se uma determinada região da resposta em frequência do canal apresentar uma grande atenuação, a informação transmitida na sub-banda correspondente não será recebida adequadamente. Como as sub-bandas se sobrepõem,

as sub-bandas vizinhas também serão afetadas.

No Capítulo 4 mostramos uma alternativa a esses sistemas, que consiste na utilização de um sistema onde não há separação em sub-bandas, mas todos os sinais são transmitidos diretamente no canal. Conseguimos mostrar que o receptor necessita apenas realizar a estimação de um elemento do bloco transmitido; para receber os demais basta aplicar uma transformação linear trivial no bloco de entrada e utilizar o mesmo filtro já calculado anteriormente.

Foram realizadas simulações comparando o sistema proposto com o DMT, e verificamos que o sistema proposto possui desempenho superior ao DMT em uma larga faixa de relação sinal-ruído (*Signal to Noise Ratio*, SNR) e desempenho equivalente para outros valores de SNR.

A complexidade de implementação deste sistema é bastante baixa, pois o transmissor possui complexidade praticamente nula, e o receptor apenas precisa calcular um filtro para receber todo o bloco. As transformações lineares na realidade representam apenas circulações no bloco recebido, podendo ser implementadas em processadores digitais de sinais sem a utilização de multiplicações ou adições.

Na segunda frente de trabalho, buscamos estabelecer condições teóricas sobre o projeto do equalizador de modo a garantir a reconstrução perfeita do sinal transmitido. Alguns trabalhos importantes foram realizados recentemente nesse sentido, como em [1, 3, 4], e buscamos estender esses resultados de modo a possibilitar um projeto mais eficiente do equalizador.

No Capítulo 5 descrevemos a análise teórica realizada em [1], com algumas adaptações para compatibilizar a estrutura do transmultiplexador com a utilizada neste trabalho. Neste capítulo a análise é realizada no domínio da transformada  $Z$ , sendo possível obter condições sobre os zeros do canal e a quantidade de redundância inserida nos blocos que garantam a existência de equalizadores com reconstrução perfeita do sinal transmitido. Além disso, descrevemos a parametrização dada em [1] para um equalizador que satisfaça essas condições, onde é necessário que ambos o transmissor e o receptor possuam informação sobre o canal. Generalizamos essa parametrização para permitir equalizadores onde o transmissor seja fixo e apenas o receptor possua informação sobre o canal.

No Capítulo 6 estendemos a análise teórica encontrada em [4], porém re-

tirando várias restrições presentes em [4], de modo que a análise presente neste trabalho segue de forma independente. Os resultados obtidos oferecem uma base teórica para a utilização de equalizadores menos complexos do que os encontrados em [4], além de englobar situações onde a resposta ao impulso do canal é longa, ou seja, maior do que o comprimento dos blocos.

# Capítulo 2

## Bancos de Filtros em Sistemas de Comunicações

Inicialmente, vamos introduzir parte da terminologia e dos blocos básicos utilizados em processamento de sinais em múltiplas taxas. Vamos introduzir também o conceito de bancos de filtros e discutir algumas de suas propriedades mais importantes. Mostraremos ainda a estrutura do transmultiplexador, que será largamente utilizado neste trabalho. Por fim, mostraremos duas alternativas para a decomposição polifásica do transmultiplexador que serão utilizadas neste trabalho.

Este capítulo tem o propósito de servir como referência rápida para o leitor e não ensinar o assunto ou servir como uma revisão aprofundada do mesmo. Maiores detalhes podem ser encontrados em [2, 5, 6, 7].

### 2.1 Processamento de Sinais em Múltiplas Taxas

As operações essenciais em processamento de sinais em múltiplas taxas são a *decimação* e a *interpolação*. Tais operações são representadas pelos blocos mostrados na Figura 2.1. O decimador recebe uma seqüência de entrada  $x(n)$  e produz uma seqüência de saída

$$y_D(n) = x(Mn), \quad (2.1)$$

com  $M$  inteiro. Dessa forma, apenas as amostras de  $x(n)$  que ocorram em intervalos de tempo múltiplos de  $M$  serão retidas pelo decimador. O interpolador recebe uma

seqüência de entrada  $x(n)$  e produz uma seqüência de saída

$$y_I(n) = \begin{cases} x(n/L), & \text{se } n \text{ for múltiplo inteiro} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.2)$$

com  $L$  inteiro. Ao contrário do decimador, o interpolador não provoca perda de informação, e portanto  $x(n)$  pode ser sempre recuperado a partir de  $y_I(n)$ .

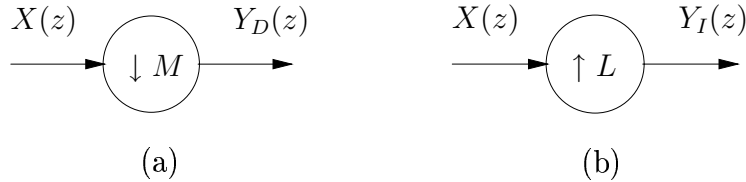


Figura 2.1: Blocos construtores para processamento de sinais em múltiplas taxas: (a) decimador, (b) interpolador.

As relações de entrada e saída do decimador e do interpolador podem ser representadas no domínio da transformada  $Z$  como [2, 6]

$$Y_D(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X(z^{1/M} W_M^k), \quad W_M = e^{-j2\pi/M} \quad (2.3)$$

$$Y_I(z) = X(z^L) \quad (2.4)$$

A Figura 2.2(b) mostra o efeito da interpolação no domínio da transformada  $Z$ . Podemos observar que ao interpolarmos o sinal  $X(z)$ , criamos réplicas comprimidas do mesmo, e portanto não há perda de informação. Já para a decimação, é evidente que se  $X(z)$  não for limitado em  $\pi/M$  haverá *aliasing*<sup>1</sup> e conseqüente perda de informação, como mostrado na Figura 2.2(c).

### 2.1.1 Identidades Nobres

As *identidades nobres* são propriedades para a interconexão em cascata de um decimador seguido de um filtro digital e a interconexão em cascata de um filtro digital seguido de um interpolador. Essas interconexões surgem quando implementamos sistemas em múltiplas taxas de forma polifásica (c.f. Seção 2.4). As identidades nobres encontram-se resumidas na Figura 2.3.

---

<sup>1</sup>O fenômeno de *aliasing* ocorre quando senóides de alta freqüência comportam-se como senóides de baixa freqüência após decimação [2, 6].

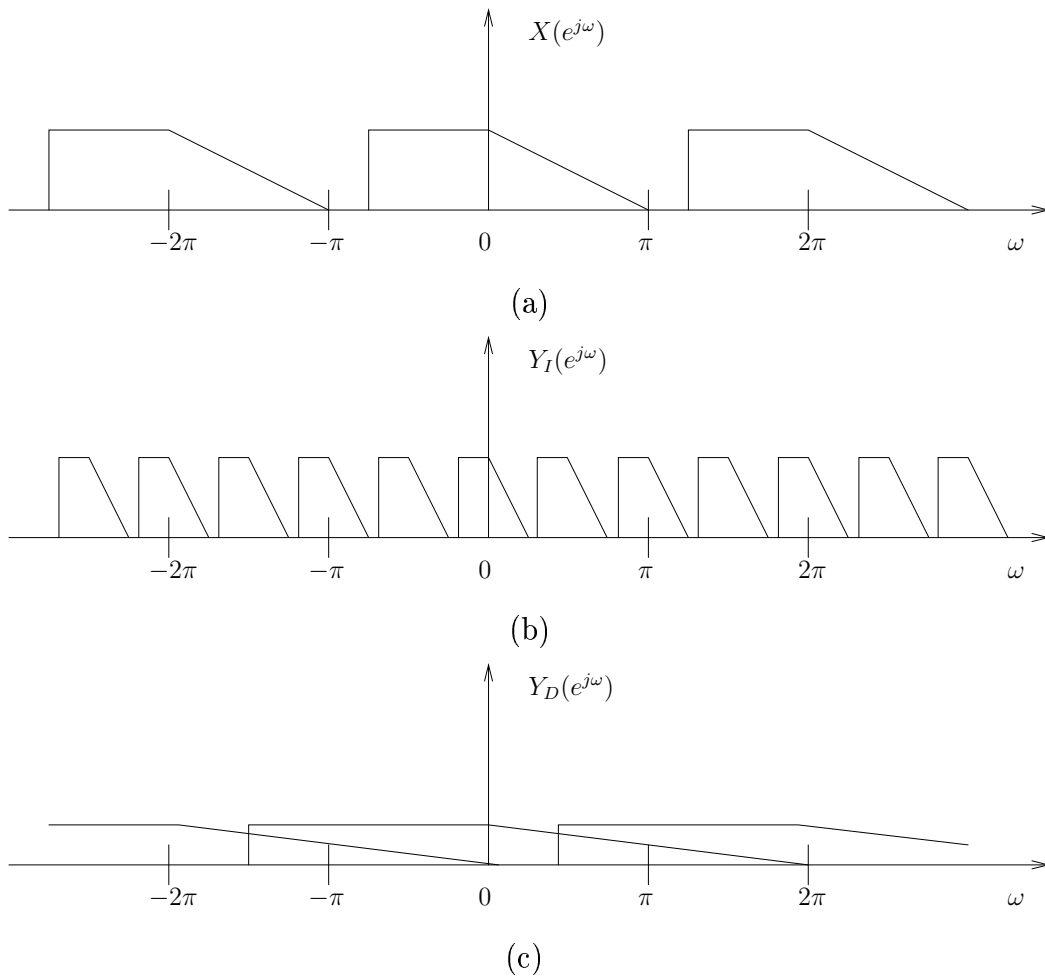


Figura 2.2: Efeito do interpolador e do decimador no domínio da transformada  $Z$ :  
 (a) sinal original; (b) interpolação com  $L = 4$ ; (c) decimação com  $M = 2$ .

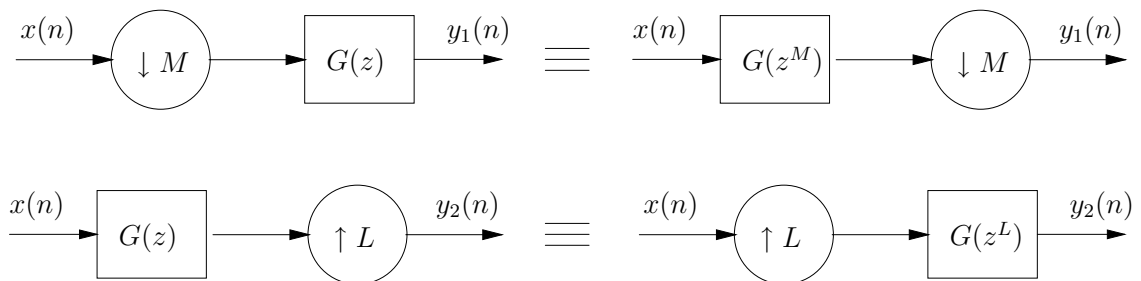


Figura 2.3: Identidades Nobres.

## 2.2 Bancos de Filtros

Um banco de filtros é um conjunto de filtros com uma entrada comum ou uma saída comum. Essas situações são mostradas na Figura 2.4. O sistema na Figura 2.4(a) é chamado de banco de filtros de análise, e os filtros  $G_k(z)$  são os filtros de análise. Esse sistema divide o sinal  $x(n)$  em  $M$  sinais  $x_k(n)$ , chamados de sinais em *sub-bandas*. No caso em que o fator de decimação/interpolação é igual ao número de sub-bandas, o sistema é chamado de minimamente interpolado ou maximamente decimado. O sistema mostrado na Figura 2.4(b) é chamado de banco de filtros de síntese, e os filtros  $F_k(z)$  são os filtros de síntese.

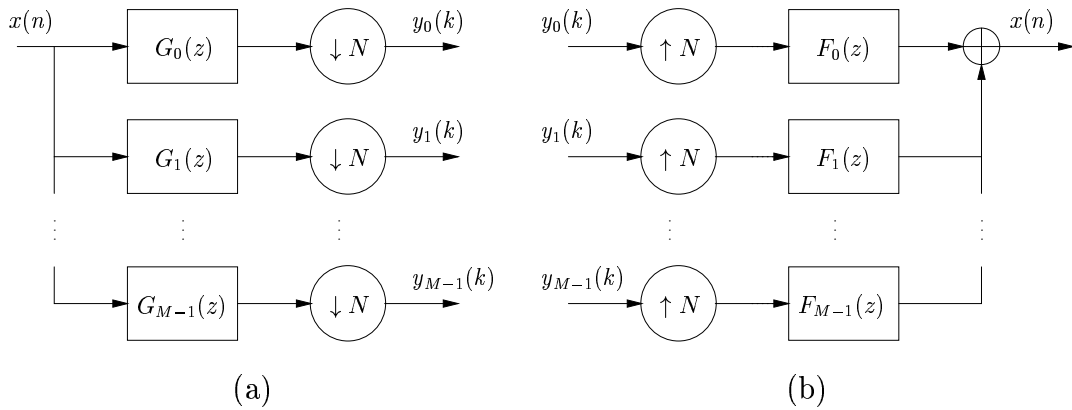


Figura 2.4: Bancos de filtros: (a) análise; (b) síntese.

Os filtros  $G_k(z)$  e  $F_k(z)$  podem ser de tal forma que se um sinal for injetado no banco de filtros de análise e os sinais em sub-bandas forem injetados no banco de filtros de síntese, o resultado é o próprio sinal original; nesse caso diz-se que o banco de filtros possui a característica de *reconstrução perfeita*. Caso o banco de filtros não possua reconstrução perfeita, existem três fontes de erros no sinal reconstruído: aliasing, distorção de amplitude e distorção de fase.

Em muitos casos a exigência de reconstrução perfeita traz limitações severas quanto à resposta em frequência dos filtros, resultando em uma fraca atenuação na banda de rejeição e uma larga faixa de transição. Para contornar esses problemas podem ser utilizados bancos de filtros com reconstrução quase perfeita, onde os filtros são projetados de modo a minimizar os efeitos mencionados acima. Nesse caso o sinal reconstruído diferirá ligeiramente do sinal original, mas isso não é necessariamente um problema, desde que o erro seja pequeno comparado com as demais fontes de

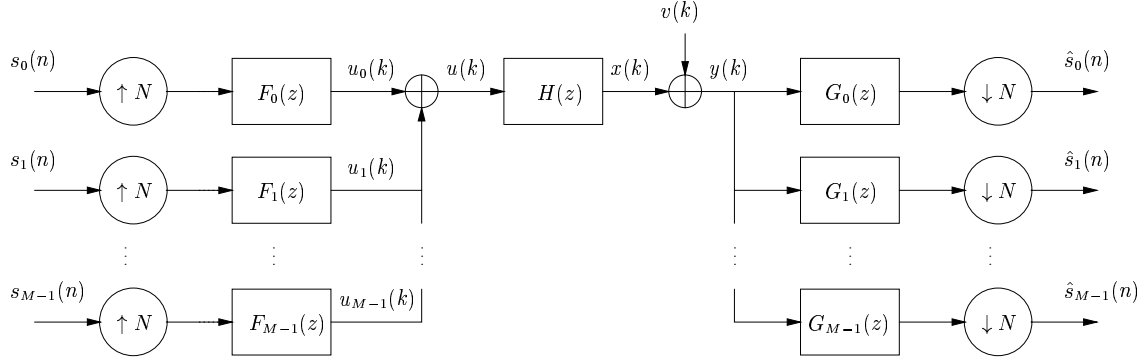


Figura 2.5: Transmultiplexador Discreto.

erros no sistema como um todo (erros de quantização, ruído etc.). Normalmente é possível obter filtros com características em frequência mais atraentes. Existem várias técnicas para projeto de bancos de filtros com reconstrução perfeita ou quase perfeita, e uma análise abrangente das mesmas pode ser encontrada em [2, 8, 5, 9].

## 2.3 O Transmultiplexador Digital

Uma estrutura de banco de filtros que é central para o desenvolvimento deste trabalho é o *transmultiplexador*. Originalmente o transmultiplexador era utilizado para converter dados multiplexados em frequência para dados multiplexados no tempo e vice-versa [7]. A estrutura do transmultiplexador é mostrada na Figura 2.5. Comparando com a Figura 2.4, vemos que o transmultiplexador nada mais é do que um banco de filtros onde o sinal de entrada é injetado no banco de filtros de síntese e a saída obtida no banco de filtros de análise.

Nessa configuração de transmultiplexador, os filtros  $F_m(z)$  são também chamados de *transmissores* ou *filtros de transmissão*, e suas saídas são dadas por

$$u_m(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_m(n) f_m(k - nN), \quad (2.5)$$

onde  $f_m(k)$  são as respostas ao impulso dos filtros de transmissão, e  $s_m(n)$  são os símbolos transmitidos no sub-canal  $m$ . A saída do banco de filtros de síntese é então dada por

$$u(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_m(n) f_m(k - nN). \quad (2.6)$$

Se os filtros  $F_k(z)$  forem “bons” filtros passa-banda, podemos dizer que os sinais



$u_m(k)$  estão em bandas de frequência diferentes, e portanto  $u(k)$  é um sinal multiplexado em frequência.

Os filtros  $G_m(z)$  também recebem uma denominação especial quando utilizados na configuração de transmultiplexador, sendo chamados de *receptores* ou *filtros de recepção*. Os sinais  $\hat{s}_m(n)$  são os símbolos estimados no receptor, e são dados por

$$\hat{s}_m(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)g_m(nN - k), \quad (2.7)$$

onde  $g_m(k)$  são as respostas ao impulso dos filtros de recepção, e  $y(k)$  é o sinal que chega no transmissor. Uma forma alternativa de calcular  $\hat{s}_m(n)$  é dada por

$$\hat{s}_m(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_m(k)y(nN - k). \quad (2.8)$$

Para simplificar o entendimento, vamos supor que o modelo de canal  $H(z)$  não distorça o sinal  $u(k)$ , ou seja,  $H(z) = 1$ . Vamos supor também que o ruído aditivo gaussiano de média zero  $v(k)$  seja nulo, ou seja,  $v(k) = 0$ . Então, para estimar os símbolos transmitidos, podemos escolher os filtros  $G_k(z)$  de forma a que o conjunto formado pelos filtros e decimadores constituam o *banco de filtros de análise* com reconstrução perfeita correspondente ao banco de filtros de síntese utilizado.

No caso geral,  $H(z) \neq 1$  e  $v(k) \neq 0$ , não basta utilizar um banco de filtros com reconstrução perfeita para recuperar o sinal transmitido, pois os efeitos do modelo de canal devem ser reduzidos (se possível eliminados). Podemos modificar o sistema de comunicações para o mostrado na Figura 2.6, onde introduzimos um equalizador para eliminar os efeitos do modelo de canal. Vários critérios podem ser utilizados para o projeto do equalizador, como reconstrução perfeita do sinal transmitido<sup>2</sup> e minimização do erro médio quadrático entre um sinal de treinamento e o sinal recebido.

Convém notar que para o equalizador mostrado na Figura 2.6, a reconstrução perfeita somente será possível se todos os zeros do modelo de canal estiverem dentro do círculo unitário, ou seja, se o canal possuir fase mínima[6]. Podemos evitar esta restrição se realizarmos a equalização após a de-multiplexação no tempo para blocos no receptor. Esse caso será estudado com mais detalhes nos Capítulos 5 e 6.

---

<sup>2</sup>Para reconstrução perfeita do sinal transmitido é necessário projetar o equalizador supondo  $v(k) = 0$  e posteriormente analisar o seu desempenho com  $v(k) \neq 0$ .

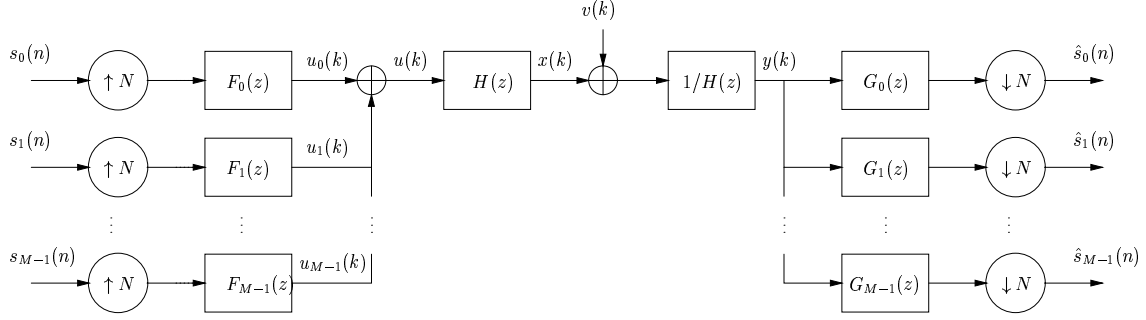


Figura 2.6: Transmultiplexador discreto com equalizador.

## 2.4 Representação Polifásica do Transmultiplexador

Para o projeto do transmultiplexador, as equações (2.6) e (2.7) em geral levam a sistemas de equações com alto grau de complexidade, o que dificulta, e eventualmente impossibilita, encontrar uma solução. Por isso, é interessante utilizar alguma outra forma de representar o sistema composto pelo transmultiplexador e o modelo de canal. Dentre as representações possíveis, a *decomposição polifásica* do transmultiplexador será bastante utilizada no decorrer deste trabalho.

Vamos supor uma função de transferência  $B(z)$  da forma

$$B(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(n)z^{-n}. \quad (2.9)$$

Podemos reescrever  $B(z)$  como

$$\begin{aligned} B(z) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(nN)z^{-nN} + z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(nN+1)z^{-nN} + \dots + \\ & + z^{-N+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(nN+N-1)z^{-nN}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Definindo

$$E_l(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(nN+l)z^{-n} \quad (2.11)$$

e utilizando (2.10), obtemos a representação polifásica do tipo 1 para  $B(z)$ , dada por

$$B(z) = \sum_{l=0}^{N-1} z^{-l} E_l(z^N) \quad (2.12)$$

Uma variante de (2.12) conhecida como representação polifásica do tipo 2 é dada por

$$B(z) = \sum_{l=0}^{N-1} z^{-(N-1-l)} R_l(z^N) \quad (2.13)$$

Os componentes da representação polifásica do tipo 2,  $R_l(z^N)$ , são obtidos através de permutações de  $E_l(z)$ , da forma  $R_l(z^N) = E_{N-1-l}(z^N)$ .

Utilizando as representações polifásicas mostradas nesta seção e utilizando as identidades nobres, podemos redesenhar o transmultiplexador da Figura 2.5 como mostrado na Figura 2.7. Para tanto basta escrever os filtros de síntese na forma polifásica do tipo 2,

$$F_m(z) = \sum_{l=0}^{N-1} z^{-(N-1-l)} R_{l,m}(z^N) \quad (2.14)$$

onde

$$R_{l,m}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_m(Nn + N - 1 - l) z^{-n} \quad (2.15)$$

e os filtros de análise na forma polifásica do tipo 1,

$$H_m(z) = \sum_{l=0}^{N-1} z^{-l} E_{m,l}(z^N) \quad (2.16)$$

onde

$$E_{m,l}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_m(Nn + l) z^{-n} \quad (2.17)$$

As matrizes  $\mathbf{R}(z)$  e  $\mathbf{E}(z)$  são então definidas como

$$\mathbf{R}(z) = \begin{bmatrix} R_{N-1,M-1}(z) & \cdots & R_{N-1,0}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{0,M-1}(z) & \cdots & R_{0,0}(z) \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{E}(z) = \begin{bmatrix} E_{0,0}(z) & \cdots & E_{0,N-1}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z) & \cdots & E_{M-1,N-1}(z) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Para simplificar a análise teórica que será realizada nos próximos capítulos, vamos considerar a representação alternativa do transmultiplexador mostrada na Figura 2.8, onde as matrizes  $\mathbf{R}(z)$  e  $\mathbf{E}(z)$  são omitidas para melhorar a visualização. Na Figura 2.8(a) apenas adicionamos um bloco representando um adiantamento de

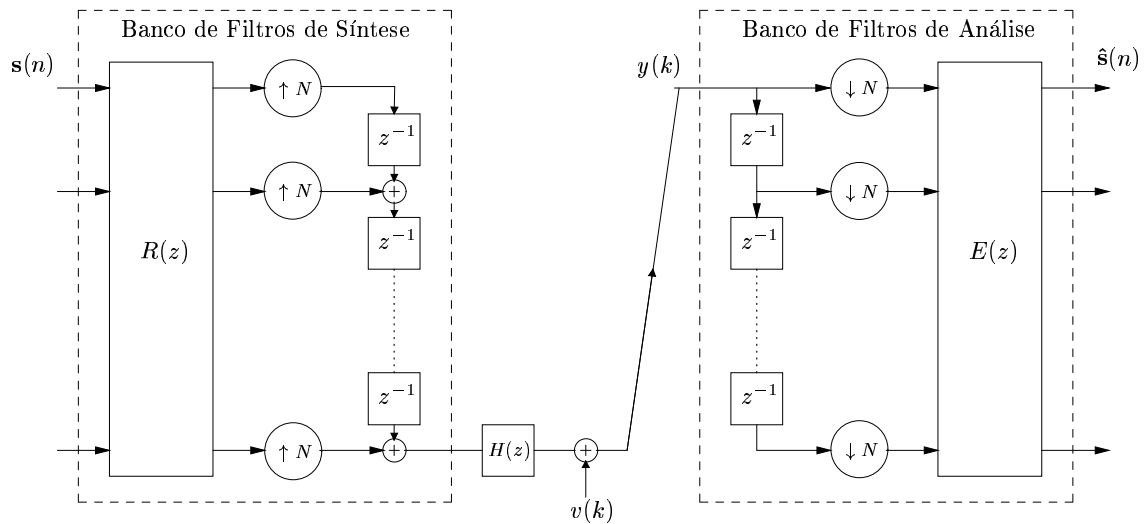
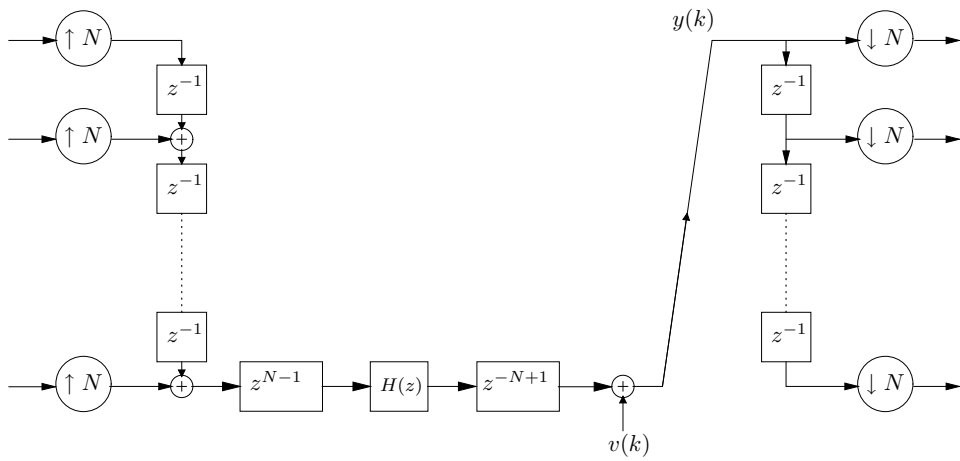
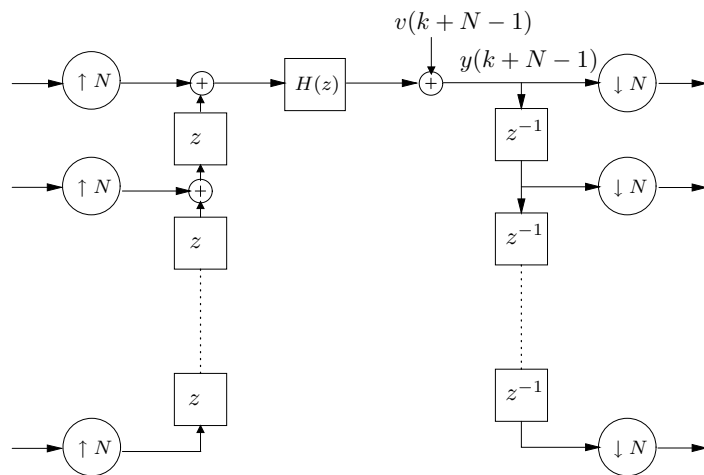


Figura 2.7: Representação polifásica do transmultiplexador.

$N - 1$  unidades de tempo e um bloco representando um atraso da mesma quantidade. Na Figura 2.8(b), o bloco  $z^{N-1}$  foi incorporado ao transmissor, enquanto o bloco  $z^{-N+1}$  foi deslocado para o lado do receptor de forma que o sinal na entrada do receptor está atrasado de  $N - 1$  amostras. Ajustando a referência de tempo no transmissor e no receptor, o sistema fica finalmente como representado na Figura 2.9. O atraso de  $N - 1$  na fonte de ruído,  $v(k)$ , foi descartado por estarmos considerando sempre ruído branco neste trabalho.



(a)



(b)

Figura 2.8: Representação polifásica modificada do transmultiplexador.

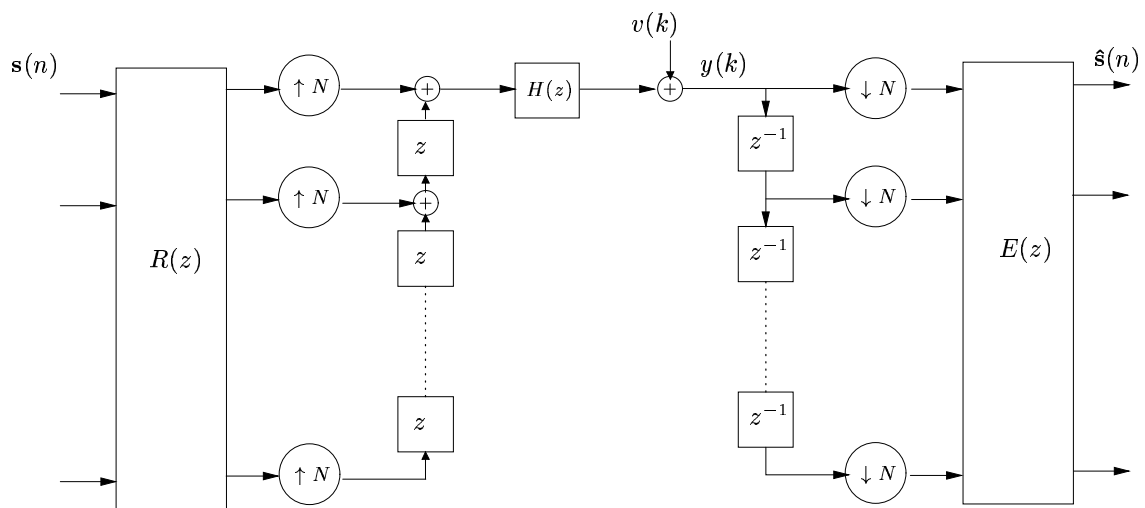


Figura 2.9: Representação alternativa do transmultiplexador supondo sincronização do sinal na entrada do receptor.

## Capítulo 3

# Equalização Independente nas Sub-bandas

Técnicas de transmissão com múltiplas portadoras baseadas em bancos de filtros, como *Discrete Wavelet MultiTone* (DWMT)[10], têm recebido atenção na área de transmissão de dados em redes de acesso com fio. A maior vantagem do DWMT em comparação com a abordagem padrão do *Discrete MultiTone* (DMT)[11] é a baixa sensibilidade do primeiro com respeito a interferência de banda estreita. Ambas as técnicas DMT e DWMT podem ser consideradas como sistemas transmultiplexadores baseados em bancos de filtros, discutidos brevemente no Capítulo 2.

Um sistema DWMT foi proposto em [12] utilizando bancos de filtros do tipo cosseno modulado (*Cosine Modulated Filter Bank*, CMFB) com reconstrução perfeita. O CMFB reduz consideravelmente a sensibilidade a interferências de banda estreita, ao mesmo tempo que possui uma metodologia simples de projeto. Porém, como o CMFB não elimina completamente a interferência entre sub-bandas adjacentes, para fazer a equalização é preciso levar em conta informação sobre essas sub-bandas.

Neste capítulo, projetamos um transmultiplexador baseado no banco de filtros descrito em [13]. Esse método permite que a equalização possa ser realizada independentemente para cada sub-banda, o que simplifica os algoritmos adaptativos e reduz a carga computacional. No decorrer da discussão, veremos também que o projeto do sistema segue uma metodologia simples e bastante flexível.

### 3.1 Transmultiplexador Baseado em Atrasos Fracionários

A Figura 3.1 mostra a estrutura geral de um sistema transmultiplexador, onde a matriz  $E(z)$  é a representação polifásica do banco de filtros de análise, e a matriz  $R(z)$  é a representação polifásica do banco de filtros de síntese, o vetor  $\mathbf{s}(n)$  é o sinal de entrada,  $H(z)$  é o modelo de canal e  $v(k)$  é ruído aleatório gaussiano de média zero.

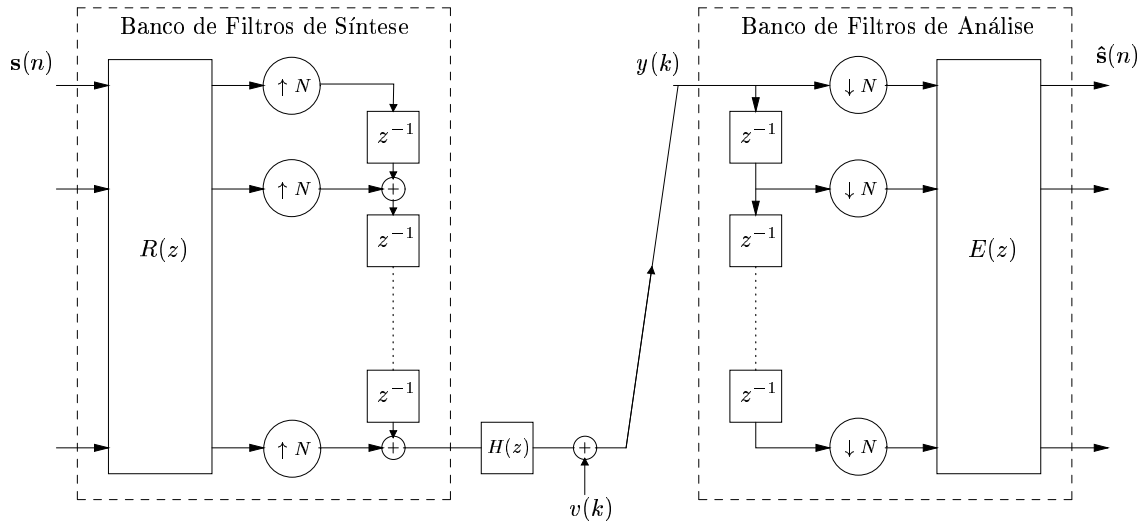


Figura 3.1: Transmultiplexador.

Uma técnica para realizar a equalização após o sinal ter passado pelo modelo de canal, é reescrever o problema como uma identificação de sistemas, onde o sistema desconhecido é  $G(z) = 1/H(z)$ . Essa configuração é mostrada na Figura 3.2, onde BFA é o banco de filtros de análise e consideramos que o banco de filtros possua a propriedade de reconstrução perfeita, ou seja,  $\mathbf{R}(z) = \mathbf{E}(z)^{-1}$ .

A partir dos sinais de entrada e desejado,  $y(k)$  e  $d(k)$ , podemos definir suas versões em blocos,  $\mathbf{y}(n)$  e  $\mathbf{d}(n)$ , como

$$\mathbf{y}(n) = [y(nN) \ y(nN - 1) \ \cdots \ y(nN - N + 1)]^T \quad (3.1)$$

$$\mathbf{d}(n) = [d(nN) \ d(nN - 1) \ \cdots \ d(nN - N + 1)]^T \quad (3.2)$$



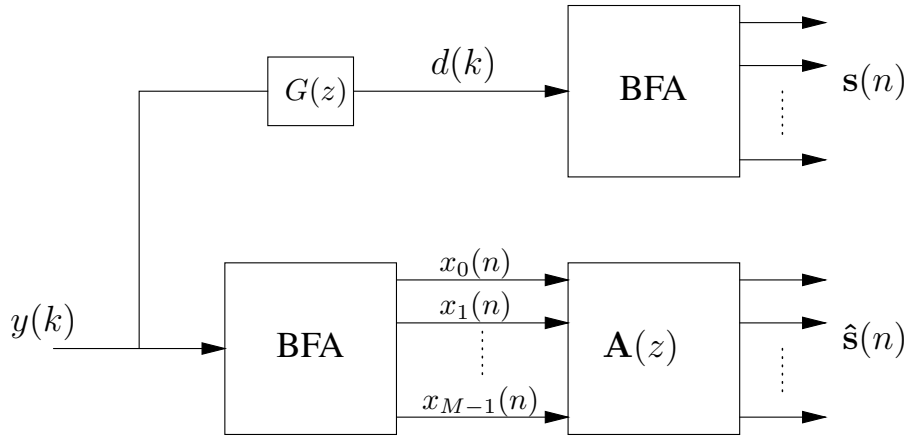


Figura 3.2: Equalização de canal.

e suas transformadas  $Z$  como

$$\mathbf{Y}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{y}(n)z^{-n} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{D}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(n)z^{-n} \quad (3.4)$$

Os sinais de entrada e desejado, divididos em sub-bandas e descritos no domínio da frequência, podem ser escritos de forma vetorial como

$$\hat{\mathbf{S}}(z) = \mathbf{A}(z)\mathbf{E}(z)\mathbf{Y}(z) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{S}(z) = \mathbf{E}(z)\mathbf{D}(z) \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{S}(z)$  é o sinal desejado filtrado nas sub-bandas e  $\hat{\mathbf{S}}(z)$  é a saída do equalizador (vide Figura 3.2). Neste ponto, é útil considerar a representação em blocos do sistema desconhecido, que pode ser obtida através de uma matriz pseudocirculante[2]  $\mathbf{G}(z)$ . Por exemplo, no caso particular de uma matriz  $3 \times 3$ ,  $\mathbf{G}(z)$  é dada por

$$\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) & G_2(z) \\ z^{-1}G_2(z) & G_0(z) & G_1(z) \\ z^{-1}G_1(z) & z^{-1}G_2(z) & G_0(z) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

onde  $G_i(z)$ ,  $i = 0, 1, 2$ , são as componentes polifásicas de  $G(z)$ .

Agora podemos expressar o sinal desejado em blocos como

$$\mathbf{D}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{Y}(z) \quad (3.8)$$

Substituindo a equação (3.8) em (3.6) obtemos

$$\mathbf{S}(z) = \mathbf{E}(z)\mathbf{G}(z)\mathbf{Y}(z) \quad (3.9)$$

Definindo o vetor de erro como  $\mathcal{E}(z) = \hat{\mathbf{S}}(z) - \mathbf{S}(z)$  e igualando a zero (para  $\mathbf{Y}(z) \neq 0$ ), podemos gerar a solução ótica para a matriz de coeficientes do equalizador,

$$\mathbf{E}(z)\mathbf{G}(z) = \mathbf{A}_o(z)\mathbf{E}(z) \quad (3.10)$$

cujas expressão para o caso criticamente decimado é dada por

$$\mathbf{A}_o(z) = \mathbf{E}(z)\mathbf{G}(z)\mathbf{E}^{-1}(z) \quad (3.11)$$

Em geral, a matriz  $\mathbf{A}_o(z)$  não é diagonal, e portanto são necessários filtros cruzados entre os sub-canais para modelar perfeitamente o sistema desconhecido. Se escolhermos a matriz  $\mathbf{E}(z)$  como uma transformação de similaridade que transforma  $\mathbf{G}(z)$  em sua forma de Jordan, podemos evitar a maior parte (normalmente todos) dos elementos fora da diagonal principal da matriz  $\mathbf{A}(z)$ . A diagonalização completa somente é impossível para matrizes com deficiência de posto, e nas discussões seguintes vamos assumir que  $\mathbf{G}(z)$  é diagonalizável, ou seja, existe uma matriz  $\mathbf{T}(z)$  tal que

$$\mathbf{T}(z)\mathbf{G}(z)\mathbf{T}^{-1}(z) = \begin{bmatrix} A_{o,0}(z) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{o,1}(z) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{o,L-1}(z) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Em [9, 13] os autores mostram que a diagonalização da matriz de equalização é obtida com

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{W}^* \mathbf{\Delta}^{-1}(z) z^{-\frac{N-1}{N}} \quad (3.13)$$

onde  $\mathbf{W}$  é a matriz de DFT  $N \times N$  cujo elemento  $(i, j)$ , para  $i, j = 0, 1, \dots, N-1$ , é dado por  $W^{ij}$ , onde  $W = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{j2\pi i}{N}}$  e

$$\mathbf{\Delta}^{-1}(z) z^{-\frac{N-1}{N}} = \begin{bmatrix} z^{-\frac{N-1}{N}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{-\frac{N-2}{N}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Note-se que a expressão obtida para o banco de filtros de análise não depende de informação sobre o sistema desconhecido, mas somente do número de sub-bandas.

Considerando

$$\mathbf{E}(z)\mathbf{R}(z) = z^{-1}\mathbf{I}, \quad (3.15)$$

a expressão para o banco de filtros de síntese segue diretamente de (3.13):

$$\mathbf{R}(z) = \begin{bmatrix} z^{-\frac{1}{N}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{-\frac{2}{N}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{W} \quad (3.16)$$

Os bancos de filtros  $\mathbf{E}(z)$  e  $\mathbf{R}(z)$  não podem ser realizados exatamente devido aos atrasos fracionários presentes em  $\Delta(z)$ . Nas próximas seções veremos como projetar  $\mathbf{E}(z)$  e  $\mathbf{R}(z)$  utilizando aproximações para os atrasos fracionários.

## 3.2 Aproximação dos Atrasos Fracionários

Nesta seção discutiremos três formas presentes na literatura para gerar os atrasos fracionários através de filtros FIR. Na seqüência, destacaremos também as vantagens de cada método para a aplicação em questão.

### 3.2.1 Filtro de Nyquist

Em [14] o autor mostra uma técnica para aproximação de atrasos fracionários que consiste em projetar um filtro de Nyquist e manter a sua  $n$ -ésima componente polifásica para representar o atraso  $\delta + n/N$ , onde o atraso  $\delta$  representa a parte inteira do atraso de grupo, já que utilizamos filtros causais. A vantagem dessa aproximação para a nossa aplicação, deve-se ao fato do projeto de todos os atrasos fracionários ser realizado pelo projeto de um único filtro de comprimento  $N_f = 2KN$ ,  $K$  inteiro.

A resposta ao impulso de um filtro de Nyquist satisfaz

$$h(kN) = \begin{cases} K_n, & k = 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.17)$$

onde  $K_n$  é uma constante. No domínio da frequência, o espectro de  $h(k)$  é

$$H(z) = K_n + z^{-1}E_1(z^N) + \dots + z^{-N+1}E_{N-1}(z^N) \quad (3.18)$$

Se  $H(z)$  satisfizer as condições acima, podemos mostrar que [2]

$$\sum_{l=0}^{N-1} H(zW^{ln}) = NK_n \quad (3.19)$$

onde  $W = e^{-j2\pi/N}$ .

Os filtros de Nyquist são normalmente projetados como filtros passa-baixas cujas bordas de banda passante e banda de rejeição são simétricas com respeito à frequência normalizada  $\pi/N$ .

A Figura 3.3 mostra o atraso de grupo resultante da aproximação acima para  $K = 5$  e  $N = 128$  e diferentes valores para os atrasos fracionários. Os filtros são uma boa aproximação para os atrasos fracionários para frequências até  $0.6\pi$ , mas para frequências acima dessa faixa o atraso de grupo desvia do seu valor original.

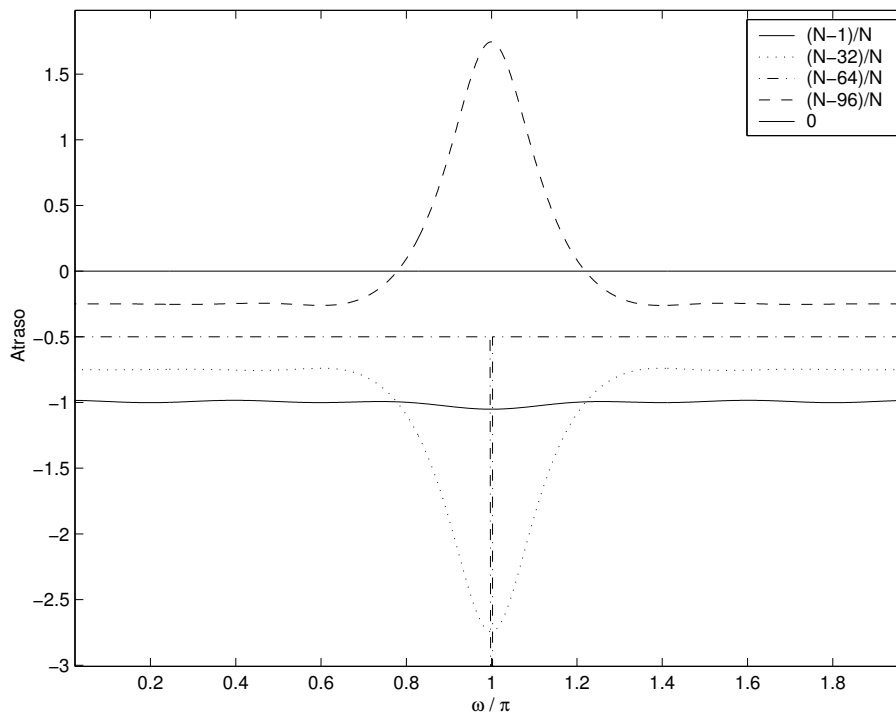


Figura 3.3: Parte fracionária do atraso de grupo para  $K = 5$  e  $N = 128$ .

### 3.2.2 Estrutura de Farrow Modificada

Outro método interessante para o projeto dos atrasos fracionários é a *estrutura de Farrow modificada* [15]. A estrutura de Farrow modificada é mostrada na Figura 3.4. Nessa estrutura, o valor do atraso fracionário é igual a  $\mu$ , e pode ser ajustado livremente durante a computação. Os filtros com função de transferência  $\Phi_q(z)$ ,  $q = 0, \dots, Q - 1$ , possuem fase linear e o valor de seus coeficientes é fixo.

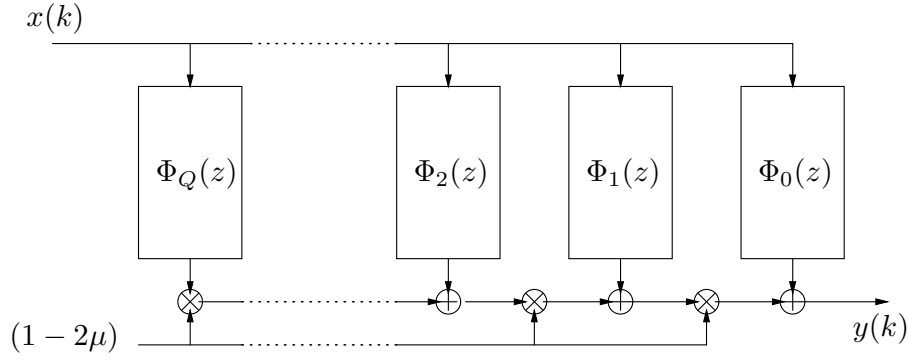


Figura 3.4: Estrutura de Farrow modificada.

A saída da estrutura de Farrow mostrada na Figura 3.4 é dada por

$$y(k) = \sum_{q=0}^Q \left( \sum_{n=0}^{N-1} \phi_q(n) x(k-n) \right) (1-2\mu)^q \quad (3.20)$$

onde  $\mu \in [0, 1)$  é o atraso fracionário desejado,  $Q + 1$  é o número de filtros, e  $\phi_q(n)$  são as respostas ao impulso dos filtros FIR de fase linear com função de transferência

$$\Phi_q(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \phi_q(n) z^{-n} \quad (3.21)$$

O projeto dos filtros  $\Phi_q(z)$  é realizado utilizando técnicas de otimização, como mostrado em [15]. Para a nossa aplicação, a vantagem desse método é que mesmo que o número de sub-bandas seja variável não é necessário reprojeter os filtros que geram os atrasos fracionários, o que evita que os transmissores e receptores realizem operações complexas de otimização, ou que possuam uma grande quantidade de filtros armazenados em dispositivos de memória.

### 3.2.3 Aproximação por Mínimos Quadrados

Nós também consideraremos o projeto dos atrasos fracionários através de uma aproximação de mínimos quadrados (*least squares*), como apresentado em [14]. A maior desvantagem desse método para o nosso caso é que todos os filtros que implementam os atrasos fracionários devem ser projetados separadamente. Porém, o projeto de  $N$  filtros de comprimento  $N_f$  pode ser menos complexo do que o projeto de um único filtro de comprimento  $N \times N_f$ .

### 3.2.4 Erro de Reconstrução do Banco de Filtros

Para avaliar o erro de reconstrução do Banco de Filtros com Atrasos Fracionários (*Fractional Delay Filter Bank*, FDFB), 500 bits foram transmitidos em  $N = 128$  sub-bandas através de um modelo de canal sem distorção e sem ruído adicional. Os atrasos fracionários foram projetados segundo três métodos: filtro de Nyquist com  $10N + 1$  coeficientes; estrutura de Farrow modificada com  $N = 3$  e filtro com 26 coeficientes; aproximação de mínimos quadrados FIR com 11 e também com 20 coeficientes.

A Figura 3.5 mostra o erro médio quadrático (EMQ) entre o sinal recebido e o sinal transmitido para os três métodos considerados. O erro médio quadrático foi 13.66 dB para o filtro de Nyquist, 15.17 dB para a estrutura de Farrow modificada, 13.69 dB e 18.30 dB para a aproximação LS FIR com 11 e 20 coeficientes, respectivamente.

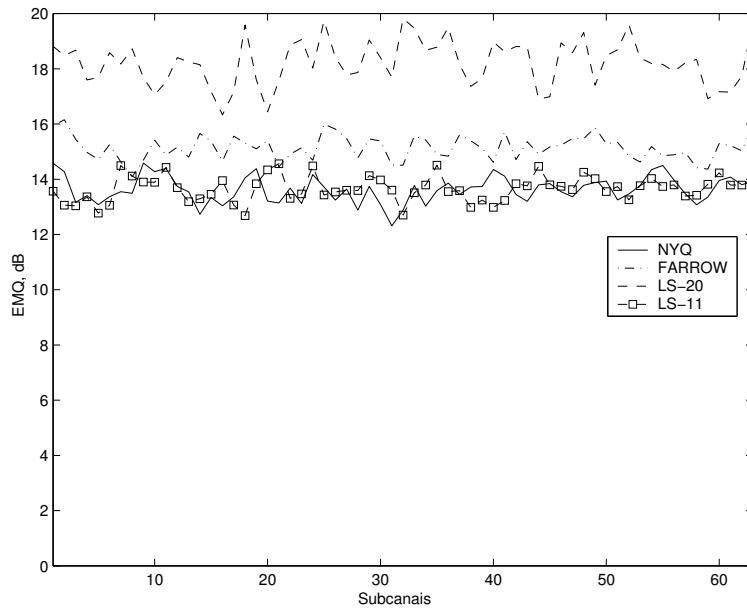


Figura 3.5: Erro médio quadrático (EMQ) para o FDFB avaliado para três métodos de projeto: NYQ – filtro de Nyquist; FARROW – estrutura de Farrow modificada; LS-11 – LS com 11 coeficientes; e LS-20 – LS com 20 coeficientes.

### 3.3 Complexidade Computacional

Nesta seção apresentamos a complexidade computacional do Banco de Fil-  
 tros com Atrasos Fracionários (*Fractional Delay Filter Bank*, FDFB), medida como  
 o número de multiplicações por amostra de entrada no banco de filtros de análise.  
 Como o número de multiplicações é o mesmo para ambos os bancos de filtros de  
 análise e síntese, apenas o banco de filtros de análise será considerado. Para o de-  
 senvolvimento, assumiremos que a multiplicação de um número real por um número  
 complexo necessita apenas de duas multiplicações reais e que uma FFT de  $N$  amos-  
 tras necessita de  $\frac{N}{2} \log_2 N$  multiplicações complexas. A complexidade computacio-  
 nal é calculada como segue:

#### 1. IFFT

$$T_{IFFT} = \frac{2}{N} \cdot \left( \frac{N}{2} \log_2 N \right) = \log_2 N \quad (3.22)$$

onde  $N$  é o número de sub-bandas.

#### 2. Atrasos Fracionários

$$T_{frac} = \frac{N_{FDFB}}{N} \quad (3.23)$$

onde  $N_{FDFB}$  é o comprimento do filtro protótipo (filtro de Nyquist).

O número total de multiplicações por amostra de entrada é

$$T_{FDFB} = T_{IFFT} + T_{frac} = \log_2 N + \frac{N_{FDFB}}{N} \quad (3.24)$$

Para efeito de comparação, o número de multiplicações por amostra de entrada  
 em um banco de filtros usando *Extended Lapped Transforms* (ELT) é [8]

$$T_{ELT} = \frac{1}{2}(2K + \log_2 N + 3) \quad (3.25)$$

onde  $K$  é o fator de sobreposição e relaciona-se com o comprimento do filtro  
 protótipo por  $N_{ELT} = 2KN$ . Para o FDFB também é possível expressar  
 o comprimento do filtro protótipo como  $N_{FDFB} = 2KN$ , e (3.24) pode ser  
 reescrita como

$$T_{FDFB} = \log_2 N + \frac{2KN}{N} = \log_2 N + 2K \quad (3.26)$$

A Figura 3.6 mostra a razão  $T_{FDFB}/T_{ELT}$  em função de  $N$  para diferentes valores de  $K$ . A Tabela 3.1 mostra os valores de  $T_{FDFB}$  e  $T_{ELT}$  para diferentes valores de  $N$  e  $K$ .

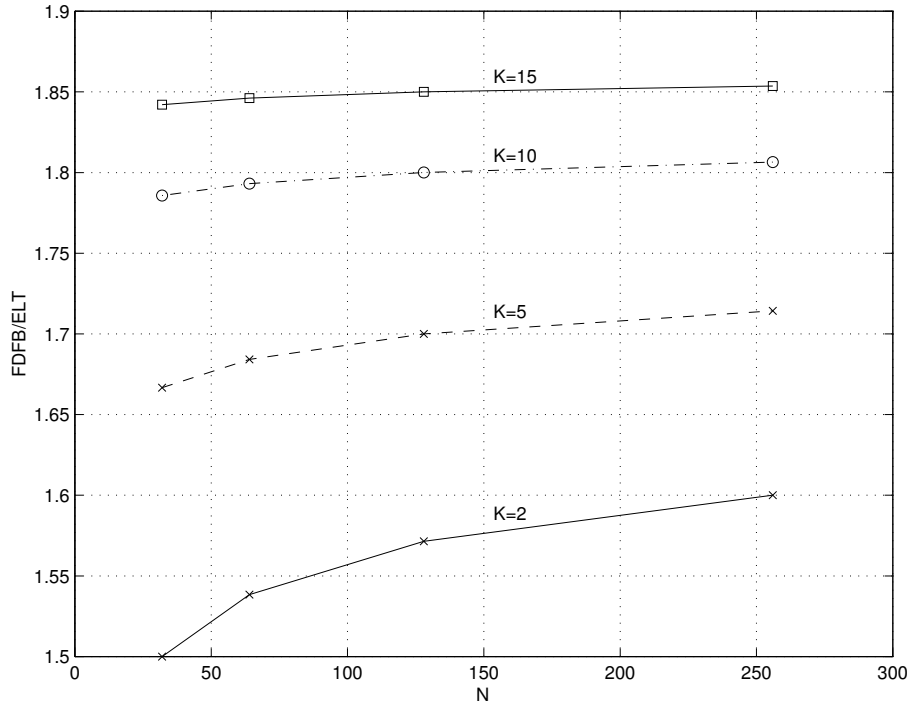


Figura 3.6: Razão entre o número de multiplicações por símbolo de entrada do FDFB e a ELT em função de  $N$  para diferentes valores de  $K$ .

### 3.4 Resultados Experimentais

Os resultados experimentais apresentados nesta seção consistem de uma média de 10 ou 20 transmissões, cada uma envolvendo 600 bits por sub-canal. Para o FDFB, o sinal em cada banda é equalizado por um filtro adaptativo do tipo *Recursive Least Squares* (RLS)[16], e para o Banco de Filtros por Modulação de Cosseno (*Cosine Modulated Filter Bank*, CMFB) o sinal em cada banda é equalizado por um equalizador de Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas (*Multiple Input Multiple Output*, MIMO) [17] que utiliza informação sobre a sub-banda de interesse e as duas sub-bandas vizinhas. Duas configurações são consideradas para o equalizador MIMO do CMFB: 3 coeficientes por canal (total de 9 coeficientes) e 9 coeficientes por canal (total de 27 coeficientes). O modelo de canal é uma aproximação FIR com



Tabela 3.1: Valores de  $T_{FDFB}$  e  $T_{ELT}$  para diferentes valores de  $N$  e  $K$

N	FDFB		ELT	
	$K = 5$	$K = 10$	$K = 5$	$K = 10$
32	15	25	9	14
64	16	26	9.5	14.5
128	17	27	10	15
256	18	28	10.5	15.5

62 coeficientes da resposta em frequência<sup>1</sup>

$$H(w) = e^{-(2.5+j3.6)\omega^{1/2}} \quad (3.27)$$

A Figura 3.7 mostra a taxa de erros de bit (*Bit Error Rate*, BER) alcançada para o FDFB implementado com filtro de Nyquist com  $10M + 1$  coeficientes projetados usando a técnica WLS (*Weighted Least Squares*) descrita em [18], estrutura de Farrow modificada com  $L = 3$  e filtro com 26 coeficientes, e aproximação LS FIR com 20 coeficientes. As simulações compreendem transmissões através de um canal com ruído aditivo gaussiano e com interferência de banda estreita na frequência de  $0,265\pi\omega_s/2$ , onde  $\omega_s/2$  é a metade da frequência de amostragem. A interferência de banda estreita possui largura de banda de  $0,01\omega_s/2$  e com potência 35 dB acima da potência do ruído aditivo gaussiano.

O desempenho do FDFB é aproximadamente o mesmo para todos os três métodos de projeto, especialmente para a estrutura de Farrow modificada e o método de aproximações LS FIR. Para as próximas simulações consideraremos o projeto baseado no filtro de Nyquist para comparação com o CMFB.

A Figura 3.8 mostra a BER comparativa entre o FDFB e o CMFB para transmissões através de um canal com ruído aleatório gaussiano e com interferência de banda estreita adicional. Para um canal sem interferência de banda estreita, o FDFB tem desempenho ligeiramente superior ao CM-MIMO-9. Porém, se houver

---

<sup>1</sup>O modelo de canal destina-se a modelar cabos do tipo par trançado utilizados em sistemas xDSL, e foi gentilmente cedido pelo Prof. Markku Renfors, Laboratório de Telecomunicações, Universidade de Tecnologia de Tampere, Tampere, Finlândia.

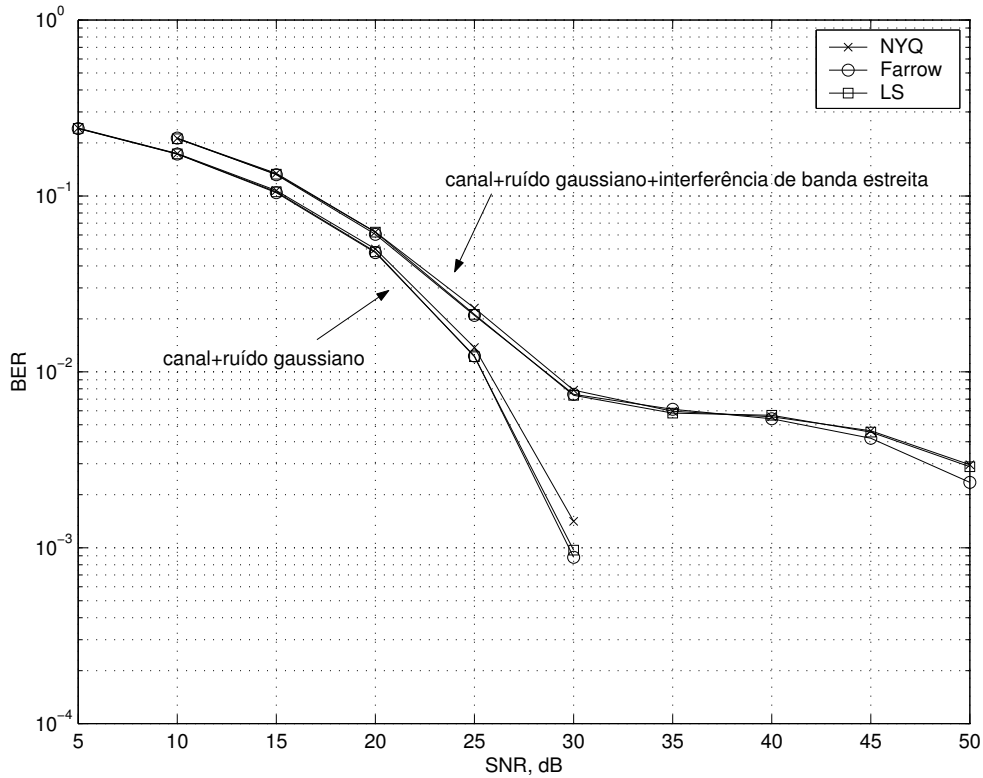


Figura 3.7: BER para transmissões através de um canal com ruído aditivo gaussiano e com interferência de banda estreita adicional.

interferência de banda estreita, o desempenho do FDFB piora para SNR maior do que 30 dB, mantendo-se, contudo, superior ao CM-MIMO-3.

As Figuras 3.9, 3.10 e 3.11 mostram a Razão Sinal Interferência (*Signal to Interference Ratio*, SIR) para um canal sem ruído aditivo, com ruído aditivo gaussiano e com ruído aditivo gaussiano e ruído de banda estreita. Apesar do FDFB apresentar uma SIR baixa, possui um desempenho em termos de BER comparável ao obtido com o CMFB com equalizador MIMO.

Para verificar se as sub-bandas estão aproximadamente ortogonais ou não, o equalizador MIMO foi utilizado com o FDFB com 3 canais e 9 coeficientes por canal (total de 27 coeficientes). A Figura 3.12 mostra a BER para diferentes valores de SNR e para transmissões através de um canal com ruído gaussiano e com interferência de banda estreita adicional. Para o canal com ruído gaussiano apenas, o desempenho do equalizador MIMO e do equalizador que utiliza apenas informações da sub-banda desejada é praticamente a mesma. Porém, se interferência de banda

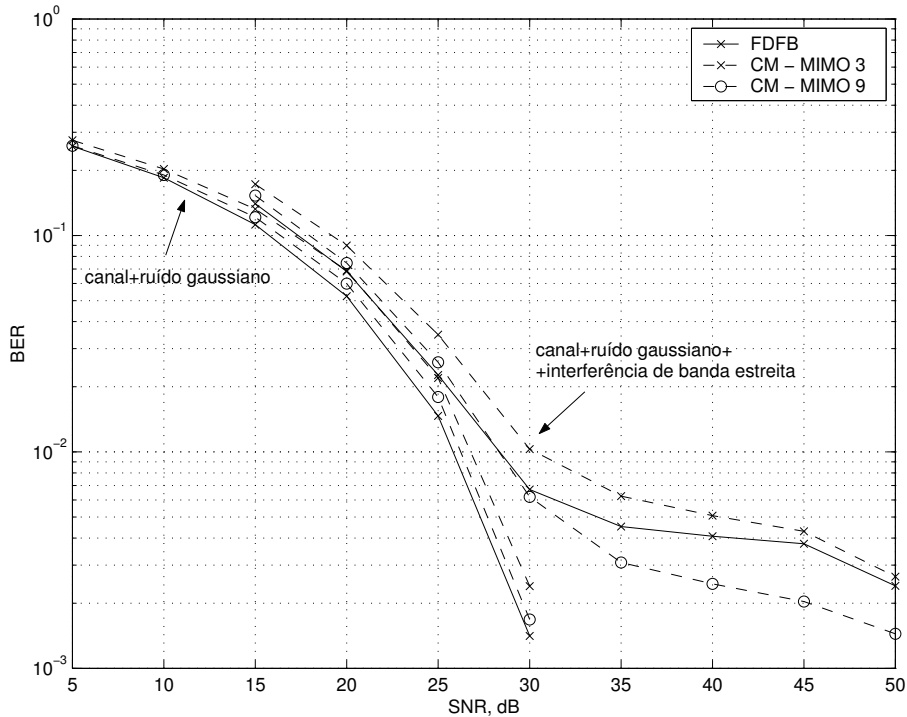


Figura 3.8: BER para transmissões através de um canal com ruído gaussiano e com interferência de banda estreita adicional.

estreita estiver presente, o comportamento é bastante diferente, com o equalizador MIMO apresentando um desempenho pior para SNR acima de 25 dB.

### 3.5 Conclusão

Neste capítulo mostramos uma abordagem alternativa para a implementação de sistemas DWMT baseados em bancos de filtros com atrasos fracionários (*Fractional Delay Filter Banks*, FDFB). Aplicamos o banco de filtros proposto por [13] na configuração de transmultiplexador e realizamos simulações em computador para verificar o seu desempenho. As simulações foram realizadas considerando um modelo de canal utilizado em transmissões através de cabos de par trançado em sistemas xDSL.

Quando comparada com a implementação baseada em bancos de filtros modulados por cosseno, a técnica proposta apresenta melhor desempenho em termos de taxa de erro de bit, particularmente para relações sinal ruído baixas e canais altamente seletivos. Essa melhora é obtida ao custo de um ligeiro aumento na com-

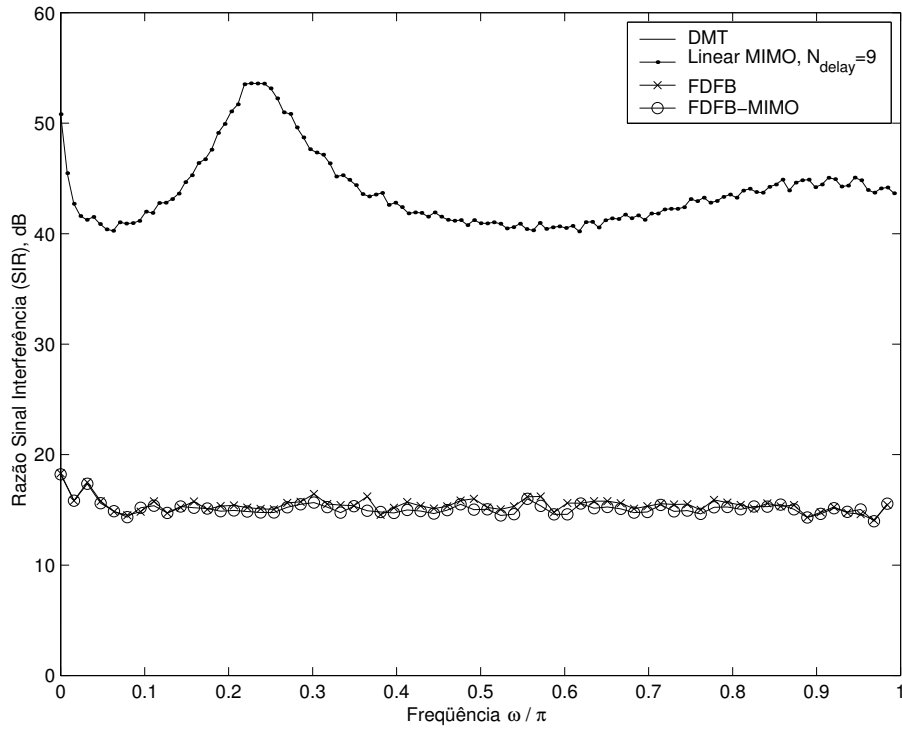


Figura 3.9: SIR para um canal sem ruído aditivo.

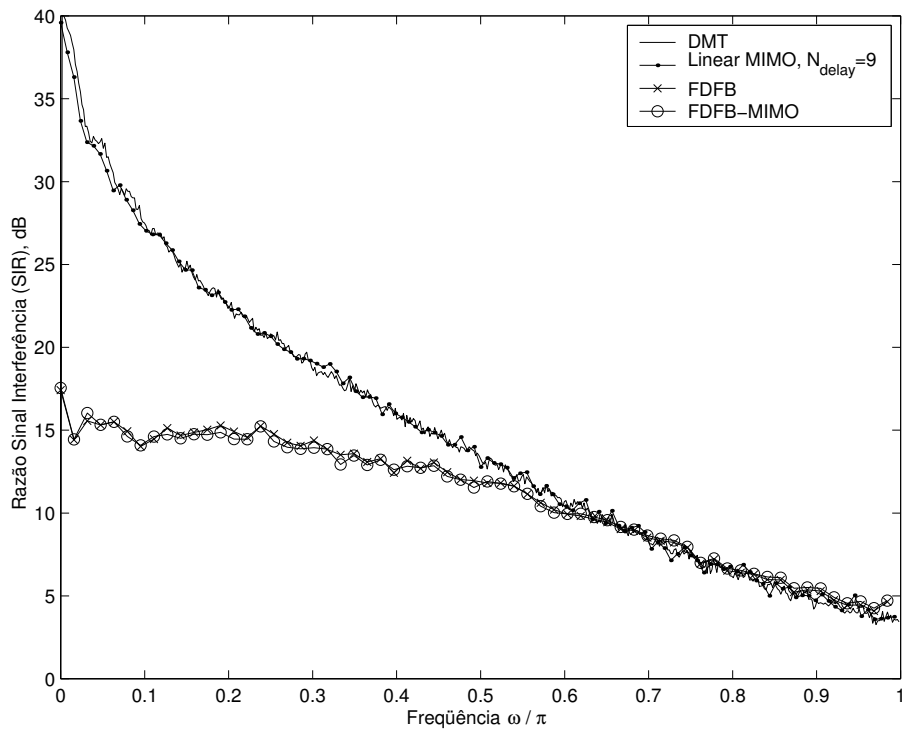


Figura 3.10: SIR para um canal com ruído aditivo gaussiano.

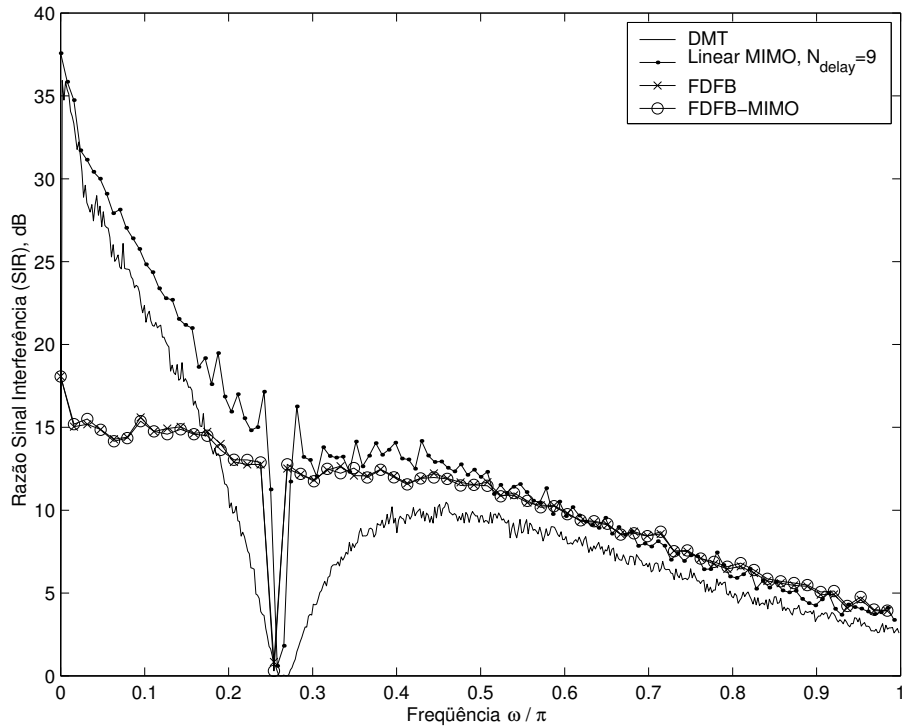


Figura 3.11: SIR para um canal com ruído aditivo gaussiano e ruído de banda estreita.

plexidade computacional do banco de filtros, compensado pelo cálculo mais simples dos equalizadores.

O desempenho do sistema baseado em FDFB depende de uma boa separação das sub-bandas, o que somente pode ser obtido se houver uma boa aproximação para os atrasos fracionários. Utilizando filtros FIR não é possível obter uma realização acurada dos atrasos fracionários para toda a banda de frequências. Logo, o banco de filtros obtido não possui mais a característica de reconstrução perfeita, e sim uma reconstrução quase perfeita. Ainda assim podemos realizar a separação das sub-bandas com acurácia suficiente para permitir a equalização.

Todas as técnicas empregadas para a obtenção de atrasos fracionários levam a resultados similares em termos de taxa de erro de bit para uma dada relação sinal ruído. A estrutura de Farrow modificada leva a uma implementação interessante já que o mesmo conjunto de filtros pode ser usado para bancos de filtros com diferentes números de sub-bandas. Isso confere grande flexibilidade permitindo mudar dinamicamente o número de sub-bandas, mas aumenta a complexidade computacional. O método de projeto LS FIR é interessante pois a ordem de cada filtro é muito

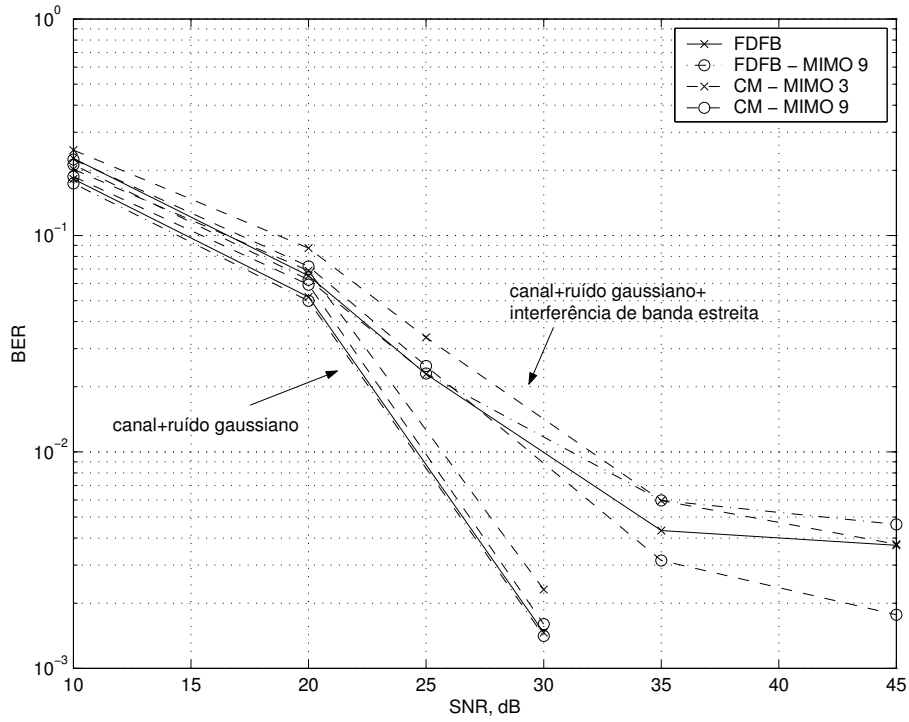


Figura 3.12: BER para transmissões através de um canal com ruído gaussiano e com interferência de banda estreita adicional.

menor do que a ordem do filtro de Nyquist equivalente, o que simplifica o processo de otimização.

# Capítulo 4

## Estrutura Eficiente Utilizando Filtragem de Wiener

Neste capítulo mostramos uma alternativa a sistemas de comunicações do tipo OFDM/DMT, onde os símbolos são transmitidos em sub-bandas distintas. No sistema proposto neste capítulo não há separação em sub-bandas, mas todos os sinais são transmitidos diretamente no canal. Podemos mostrar que o receptor necessita apenas realizar a estimação de um elemento do bloco transmitido. Para receber os demais basta aplicar uma transformação linear trivial no bloco de entrada e utilizar o mesmo filtro já calculado anteriormente.

A complexidade de implementação deste sistema é bastante baixa, pois o transmissor possui complexidade praticamente nula, e o receptor apenas precisa calcular um filtro para receber todo o bloco. As transformações lineares na realidade representam apenas circulações no bloco recebido, podendo ser implementadas em processadores digitais de sinais sem a utilização de multiplicações ou adições.

Mostramos também formas de aplicar o filtro de Wiener em múltiplos estágios introduzido por Goldstein et. al. [20] para realizar a equalização dentro da estrutura proposta. Como o filtro de Wiener em múltiplos estágios divide-se em duas partes distintas, é possível realizar também equalização balanceada, onde a equalização é realizada em parte pelo transmissor e em parte pelo receptor.

## 4.1 Descrição do sistema de comunicações

Vamos considerar transmissões em banda base através de um canal modelado como um filtro FIR de  $L$ -ésima ordem. O sinal recebido é dado por

$$y(n) = \sum_{l=0}^L h^*(l)u(n-l) + v(n) \quad (4.1)$$

onde  $u(n)$  é o sinal na entrada do canal,  $h(l)$  é a resposta ao impulso do canal e  $v(n)$  é ruído aditivo gaussiano de média zero.

Vamos considerar a transmissão de um vetor  $\bar{\mathbf{u}}(k)$ ,  $N \times 1$ , onde  $N \gg L$ . De (4.1), deduzimos que o sinal recebido é o vetor  $\bar{\mathbf{y}}(k)$ ,  $N \times 1$ , dado por

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{H}_0 \bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{H}_1 \bar{\mathbf{u}}(k-1) + \bar{\mathbf{v}}(k) \quad (4.2)$$

onde  $\bar{\mathbf{v}}(k)$  é um vetor complexo gaussiano de média zero, e as matrizes  $\mathbf{H}_0$  e  $\mathbf{H}_1$ ,  $N \times N$ , são definidas como  $[\mathbf{H}_0]_{i,j} = h^*(i-j)$  e  $[\mathbf{H}_1]_{i,j} = h^*(i-j+N)$ , ou seja,

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & h(0) & 0 & \dots & 0 \\ h(L) & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & h(L) & \dots & h(0) \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & h(L) & \dots & h(1) \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \dots & h(L) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

A natureza dispersiva do canal faz com que haja interferência entre blocos (*Inter Block Interference*, IBI) adjacentes, e por isso  $\bar{\mathbf{y}}(k)$  em (4.2) depende tanto de  $\bar{\mathbf{u}}(k)$  como de  $\bar{\mathbf{u}}(k-1)$ .

A tarefa de projetar um receptor para estimar o bloco transmitido é facilitada se os blocos  $\bar{\mathbf{y}}(k)$  forem livres de IBI. Para tanto, precisamos introduzir alguns



“símbolos de guarda” nos blocos transmitidos,  $\bar{\mathbf{u}}(k)$ . Isso significa dizer que dos  $N$  símbolos no vetor  $\bar{\mathbf{u}}(k)$  apenas  $M$  símbolos realmente contém informação; os  $N - M$  símbolos restantes são “símbolos de guarda”. A operação de inserção dos “símbolos de guarda” é realizada da seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{T}\mathbf{u}(k) \quad (4.5)$$

onde  $\mathbf{T}$  é uma matriz de dimensão  $N \times M$ ,  $N = M + L$ , e  $\mathbf{u}(k)$  é o vetor de dimensão  $M \times 1$  com os símbolos a serem transmitidos. Podemos então reescrever (4.2) como

$$\bar{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{H}_0\mathbf{T}\mathbf{u}(k) + \mathbf{H}_1\mathbf{T}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{v}(k) \quad (4.6)$$

Vamos considerar um esquema de transmissão similar ao de Multiplexação por Divisão Ortogonal de Frequência (*Orthogonal Frequency Division Multiplex*, OFDM)[19, 11], onde os primeiros  $L$  símbolos do bloco transmitido consistem de uma repetição dos últimos  $L$  símbolos (prefixo cíclico). Portanto, apenas os últimos  $M = N - L$  símbolos do bloco transmitido contém informação. Descartando os primeiros  $L$  símbolos no bloco recebido, a interferência entre blocos (IBI) é eliminada no receptor.

Para descrever como os  $L$  primeiros símbolos devem ser descartados, vamos definir a matriz de recepção  $\mathbf{R}_x$ , de dimensão  $M \times N$ , como

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times L} & \mathbf{I}_M \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Multiplicando o vetor recebido,  $\bar{\mathbf{y}}(k)$ , por  $\mathbf{R}_x$  obtemos o vetor

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{R}_x\bar{\mathbf{y}}(k) \\ &= \mathbf{R}_x\mathbf{H}_0\mathbf{T}\mathbf{u}(k) + \mathbf{R}_x\mathbf{H}_1\mathbf{T}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{R}_x\mathbf{v}(k) \\ &= \mathbf{R}_x\mathbf{H}_0\mathbf{T}\mathbf{u}(k) + \mathbf{R}_x\mathbf{v}(k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

É fácil verificar que  $\mathbf{R}_x\mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$ , e, portanto, o vetor  $\mathbf{y}(k)$  não possui IBI.

A operação de inserção do prefixo cíclico pode ser descrita pela matriz

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{cp} \\ \mathbf{I}_M \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde  $\mathbf{I}_M$  é a matriz identidade  $M \times M$ , e  $\mathbf{I}_{cp}$  é uma matriz  $L \times M$  formada pelas últimas  $L$  linhas de  $\mathbf{I}_M$ .

Podemos relacionar o vetor recebido  $\mathbf{y}(k)$  com  $\mathbf{u}(k)$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(k) &= \mathbf{R}_x \mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{u}(k) + \mathbf{R}_x \mathbf{v}(k) \\ &= \mathbf{H} \mathbf{u}(k) + \mathbf{R}_x \mathbf{v}(k)\end{aligned}\quad (4.10)$$

onde  $\mathbf{H}$ ,  $M \times M$ , é uma matriz circulante cujos elementos são definidos como  $[\mathbf{H}]_{i,j} = h^*((i - j) \bmod (L + 1))$ , onde  $\bmod$  denota o resto da divisão inteira, e o vetor  $\mathbf{u}(k)$ ,  $M \times 1$ , contem os símbolos dos usuários. Um exemplo de  $\mathbf{H}$  para  $N = 5$  e  $L = 2$  é dado a seguir:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h(0) & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) \end{bmatrix}$$

O sistema de comunicações é mostrado na Figura 4.1, onde Tx introduz o prefixo cíclico no transmissor e Rx remove o prefixo cíclico no receptor.

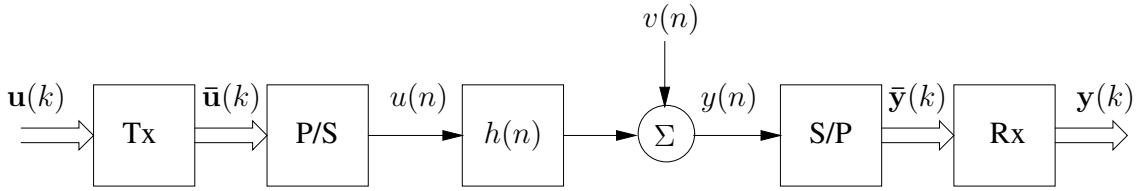


Figura 4.1: Diagrama em blocos do sistema de comunicações.

Toda matriz circulante  $M \times M$  é diagonalizável pela matriz que implementa a DFT[19], isto é,

$$\begin{aligned}\mathbf{W} \mathbf{H} \mathbf{W}^H &= \mathbf{D}_H \\ &= \text{diag} [H(e^{j0}), H(e^{j2\pi/M}), \dots, H(e^{j2\pi(N-1)/M})]\end{aligned}\quad (4.11)$$

onde  $[\mathbf{W}]_{k,n} = 1/\sqrt{M} \exp(-j2\pi kn/M)$  é a matriz que realiza a DFT de  $M$  pontos,  $(\cdot)^H$  denota transposição e operação de complexo conjugado, e

$$H(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=0}^L h(n) e^{-j2\pi f n}\quad (4.12)$$

Como  $\mathbf{W}$  é inversível,  $\mathbf{H}^{-1}$  existe se e somente se a função de transferência do canal não possuir zeros na grade da DFT[19], ou seja,

$$H(e^{j2\pi k/M}) \neq 0, \quad \forall k \in [0, M - 1]\quad (4.13)$$

Nessas condições, é possível inverter o canal, e portanto é possível recuperar exatamente os símbolos transmitidos a partir do sinal recebido. Esse tipo de equalização é chamada de *Zero Forcing* (ZF). Se houver ruído aditivo presente no sinal esse esquema de equalização pode levar a uma amplificação deste ruído, especialmente para frequências onde o canal possua grande atenuação. Por esse motivo vamos dimensionar o nosso sistema de modo a garantir a existência de equalizadores ZF, porém vamos projetar nossos equalizadores utilizando o critério de minimização do erro médio quadrático entre a saída do equalizador e os símbolos transmitidos.

## 4.2 Equalizador

Uma primeira aproximação para o equalizador serial de um canal LTI  $h(n)$  com função de transferência  $H(z)$  é o sistema inverso com função de transferência  $1/H(z)$ . É desejável que o sistema inverso (se houver) seja estável e causal, o que implica que  $H(z)$  deve ter fase mínima. Como  $h(n)$  é FIR, sua inversa deve ter resposta ao impulso infinita (IIR). Dessa forma, ao equalizarmos  $h(n)$  utilizando um filtro FIR obtemos apenas uma aproximação da resposta ao impulso do equalizador.

No caso da transmissão em blocos em (4.10), o vetor recebido  $\mathbf{y}(k)$  é a convolução circular da resposta ao impulso do canal com o vetor transmitido,  $\mathbf{u}(k)$ . A matriz circulante  $\mathbf{H}$  possuirá inversa desde que  $H(z)$  não possua nenhum zero na grade da DFT.

A equalização do canal através de um equalizador linear pode ser realizada basicamente de três formas: *pós-equalização*, *pré-equalização* e *equalização balanceada*. Na *pós-equalização*, a equalização é realizada pelo receptor, bastando para tanto multiplicar o vetor recebido por  $\mathbf{H}^{-1}$ . Nesse caso o transmissor não necessita de informação sobre o canal. Entretanto, se a matriz de canal for mal condicionada, a amplificação do ruído pode ser demasiadamente elevada.

Se o transmissor tiver acesso a informação sobre o canal, a matriz de equalização,  $\mathbf{H}^{-1}$ , pode ser colocada no transmissor, realizando uma *pré-equalização*. Dessa forma o problema de amplificação do ruído é resolvido, ao custo de possivelmente necessitar transmitir com potência mais elevada. Apesar da potência do ruído na recepção ser o mesmo se usarmos *pós-equalização* ou *pré-equalização*, a

distribuição da potência total no vetor de recepção é diferente nos dois casos, sendo que na *pré-equalização* essa distribuição é mais uniforme[19].

A *equalização balanceada* é uma combinação dos dois métodos anteriores. Como  $\mathbf{H} = \mathbf{W}^H \mathbf{D}_H \mathbf{W}$ , podemos, por exemplo, escolher o transmissor como  $\mathbf{W}^H \mathbf{D}_T$  e o receptor como  $\mathbf{D}_R \mathbf{W}$ , onde  $\mathbf{D}_T$  e  $\mathbf{D}_R$  são matrizes diagonais  $N \times N$ , obedecendo a

$$\mathbf{D}_R \mathbf{D}_H \mathbf{D}_T = \mathbf{I}_M \quad (4.14)$$

É possível mostrar que a potência do ruído neste caso é menor do que na *pós-equalização* e na *pré-equalização*[19]. Um caso particular é obtido escolhendo  $\mathbf{D}_T = \mathbf{I}_M$  e  $\mathbf{D}_R = \mathbf{D}_H^{-1}$ . Esse sistema é equivalente a um sistema OFDM com equalizador dado por  $\mathbf{D}_R$ .

### 4.2.1 Estrutura Eficiente

No sistema de comunicações descrito na seção 4.1, o sinal que desejamos estimar é um vetor de comprimento  $M$ . Logo, para estimar os elementos deste vetor serão necessários  $M$  filtros de Wiener<sup>1</sup>, cada um responsável por estimar um elemento do vetor transmitido  $\mathbf{u}(k) = [u_0(k) \ u_1(k) \ \cdots \ u_{M-1}(k)]^T$ . Essa configuração é mostrada na Figura 4.2, onde  $\mathbf{w}_i$  denota o filtro de Wiener responsável por estimar  $u_i(k)$ , e o processo desejado para cada filtro é  $d_i(k) = u_i(k)$ . O vetor  $\hat{\mathbf{u}}(k) = [\hat{u}_0(k) \ \hat{u}_1(k) \ \cdots \ \hat{u}_{M-1}(k)]^T$  representa a estimativa do vetor  $\mathbf{u}(k)$  calculada pelos filtros de Wiener.

Em muitas aplicações, a estimativa de  $M$  filtros de Wiener pode limitar a vazão do sistema ou então pode aumentar desnecessariamente o custo do receptor. Podemos evitar o cálculo dos  $M$  filtros explorando o fato da matriz de canal ser pseudocirculante. Na seqüência, vamos assumir que os elementos  $u_i(k)$  são amostras independentes e identicamente distribuídas de um processo aleatório, com

1.  $E[u_i(k)] = 0$ ;
2.  $E[|u_i(k)|^2] = \sigma_u^2$ ;

---

<sup>1</sup>Nesse caso, como o vetor de entrada não consiste das amostras anteriores de um processo escalar,  $\mathbf{w}_{y_0}$  não atua como um filtro, e sim como um “combinador linear”[18]; porém, o termo “filtro de Wiener” será mantido.

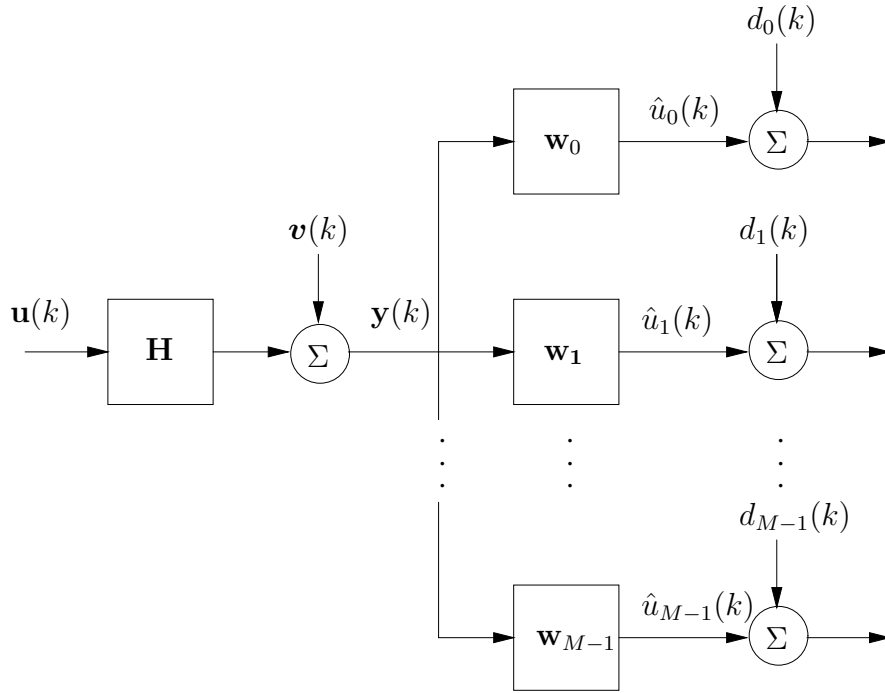


Figura 4.2: Equalizador de canal para transmissão em blocos baseado em filtros de Wiener.

$$3. E[u_i(k)u_j(k)] = 0, \quad i \neq j.$$

A última condição é consequência direta do fato de  $u_i(k)$  e  $u_j(k)$  serem independentes com média zero.

Uma condição necessária para construir o prefixo cíclico é que  $M \geq L$ . Sem perda de generalidade vamos considerar a transmissão de um bloco de  $M = L + 1$  símbolos. O vetor de correlação cruzada entre o vetor recebido em (4.2) e o processo desejado  $u_0(k)$  é dado por

$$\mathbf{p}_{yu_0} = E[\mathbf{y}(k)u_0^*(k)] = \sigma_u^2 [h(0) \cdots h(M-1)]^T \quad (4.15)$$

Para o filtro de Wiener que estima o processo  $u_i(k)$ ,  $i = 1, \dots, M-1$ , o vetor de correlação cruzada correspondente é dado por

$$\mathbf{p}_{yu_i} = \sigma_u^2 [h(M-i) \cdots h(M-1) h(0) \cdots h(M-i-1)]^T \quad (4.16)$$

De (4.15) e (4.16),

$$\mathbf{p}_{yu_0} = \mathbf{T}_c \mathbf{p}_{yu_1}, \quad (4.17)$$

onde  $\mathbf{T}_c$  circula os elementos de  $\mathbf{p}_{yu_1}$ , sendo definido como

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_c \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

onde a matriz  $\mathbf{I}_c$ ,  $(M-1) \times M$ , é construída com as primeiras  $(M-1)$  linhas da matriz identidade  $M \times M$ , e o vetor linha  $e_1$ ,  $1 \times M$  é construído com a primeira linha da matriz identidade  $M \times M$ .

Baseado na relação acima, podemos derivar a relação entre o filtro de Wiener  $\mathbf{w}_0$ , para estimar  $u_0(k)$  a partir de  $\mathbf{y}(k)$ , e o filtro de Wiener  $\mathbf{w}_1$ , para estimar  $u_1(k)$  a partir de  $\mathbf{y}(k)$ . O filtro de Wiener  $\mathbf{w}_1$  é construído como

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{p}_{yu_1}, \quad (4.19)$$

onde  $\mathbf{R}_y^{-1}$  é o inverso da matriz de autocorrelação de  $\mathbf{y}(k)$ , dada por  $E[\mathbf{y}(k)\mathbf{y}^H(k)]$ . De (4.17) e usando o fato de  $\mathbf{R}_y^{-1}$  ser Toeplitz e  $\mathbf{T}_c$  unitária,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{R}_y^{-1} (\mathbf{T}_c^{-1} \mathbf{p}_{yu_0}) \\ &= (\mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{T}_c^H) \mathbf{p}_{yu_0} \\ &= \mathbf{T}_c (\mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{p}_{yu_0}) \\ &= \mathbf{T}_c \mathbf{w}_0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

A relação em (4.20) pode ser estendida para todo  $u_i(k)$ ,  $i = 0, \dots, M-1$ . De (4.15) e (4.16),

$$(\mathbf{T}_c)^i \mathbf{p}_{yu_i} = \mathbf{p}_{yu_0} \quad (4.21)$$

Seguindo o mesmo raciocínio de (4.20) nós concluímos que

$$\mathbf{w}_i = (\mathbf{T}_c)^i \mathbf{w}_0 \quad (4.22)$$

A Figura 4.3 mostra um diagrama de blocos da estrutura de equalização proposta. Convém notar que a multiplicação por  $(\mathbf{T}_c)^i$  na realidade não envolve multiplicações ou adições e pode ser realizada de forma bastante eficiente em processadores digitais de sinais modernos.

Finalmente, de (4.2) e (4.22), a estimativa de  $\mathbf{u}(k)$  é dada por

$$\hat{\mathbf{d}}(k) = \hat{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{u}(k) + \hat{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{v}(k) \quad (4.23)$$

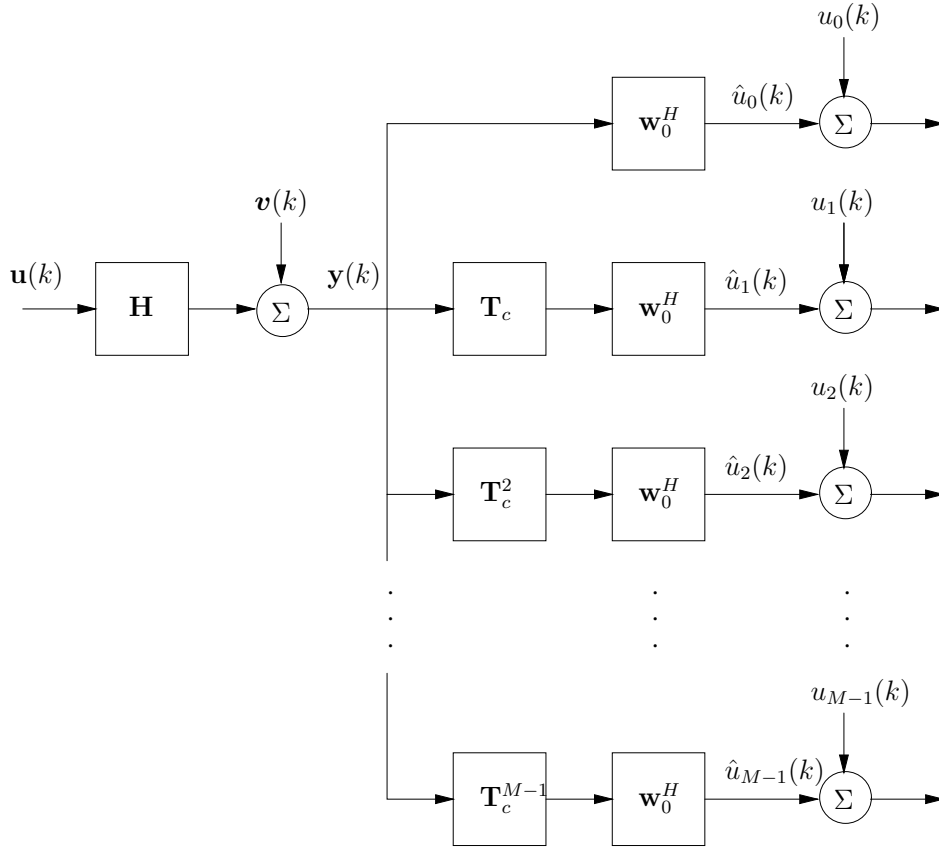


Figura 4.3: Diagrama de blocos da estrutura de equalização proposta.

onde  $\hat{\mathbf{H}}^{-1}$  é a estimativa da inversa de  $\hat{\mathbf{H}}$ , calculada como

$$\hat{\mathbf{H}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0^H \\ \mathbf{w}_0^H \mathbf{T}_c \\ \vdots \\ \mathbf{w}_0^H \mathbf{T}_c^{M-1} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

### 4.3 O Filtro de Wiener em Múltiplos Estágios

O filtro de Wiener em múltiplos estágios (*Multistage Wiener Filter*, MSWF) foi introduzido em [20] por Goldstein et. al. Ele é uma representação do filtro de Wiener de  $M$ -ésima ordem alcançada pela decomposição em múltiplos estágios e pode ser naturalmente dividida em um banco de filtros de análise e um banco de filtros de síntese de erro. Em [21, 22] essa decomposição é utilizada para supressão de interferência em sistemas de acesso múltiplo por divisão de código (*Direct Sequence - Code Division Multiple Access*, DS-CDMA), e algoritmos adaptativos são propostos em [21].

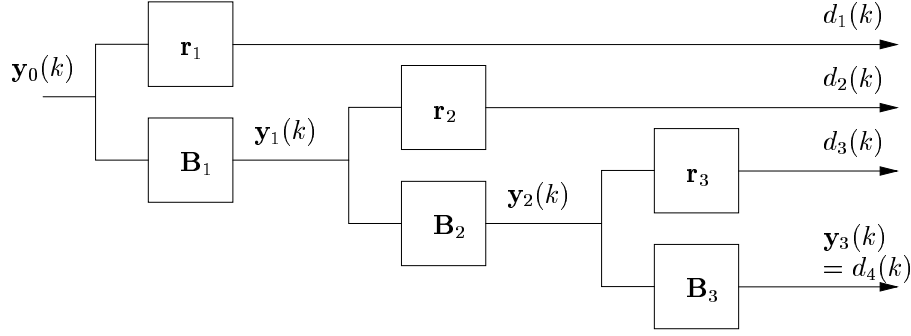


Figura 4.4: Banco de filtros de análise para um MSWF de quatro estágios.

O banco de filtros de análise faz uma mudança no sistema de coordenadas antes da filtragem. Um exemplo para quatro estágios ( $M = 4$ ) do banco de filtros de análise é mostrado na Figura 4.4, onde o vetor  $\mathbf{r}_i$ ,  $(M - i + 1) \times 1$ , é um vetor normalizado na direção do vetor de correlação cruzada entre o processo observado e o processo desejado no estágio anterior, ou seja,

$$\mathbf{r}_i = \frac{E[\mathbf{y}_{i-1}(k)d_{i-1}^*(k)]}{\sqrt{E[\mathbf{y}_{i-1}(k)d_{i-1}^*(k)]^H E[\mathbf{y}_{i-1}(k)d_{i-1}^*(k)]}} \quad (4.25)$$

e  $\mathbf{r}_i$  está no espaço nulo da matriz  $\mathbf{B}_i$ ,  $(M - i) \times (M - i + 1)$ , isto é,  $\mathbf{B}_i \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ . O banco de filtros de análise pode ser representado por [20]

$$\mathbf{L}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^H \\ \mathbf{r}_2^H \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{M-1}^H \prod_{i=M-2}^1 \mathbf{B}_i \\ \prod_{i=M-2}^1 \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

O banco de filtros de síntese de erro opera sobre a saída do banco de filtros de análise, sendo construído como uma cadeia de filtros de Wiener escalares [20], como mostrado na Figura 4.5 para  $N = 4$ . Considere que o vetor  $\mathbf{d}(k) = [d_1(k) \ d_2(k) \ \dots \ d_M(k)]^T$ ,  $M \times 1$ , represente a saída do banco de filtros de análise, e defina o vetor  $M \times 1$  como

$$\mathbf{w}_z^H = \left[ w_1^* \quad -w_1^* w_2^* \quad \dots \quad (-1)^{M+1} \prod_{i=1}^M w_i^* \right] \quad (4.27)$$



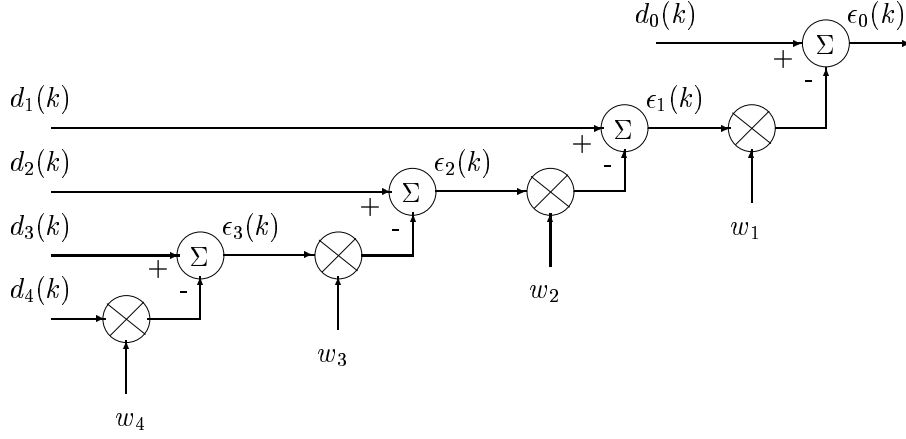


Figura 4.5: Banco de filtros de síntese de erro para um MSWF de quatro estágios.

para representar o banco de filtros de síntese de erro, onde  $w_i$  é o filtro de Wiener escalar para estimar  $d_{i-1}(k)$  a partir de  $\epsilon_i(k)$ , ou seja,

$$w_i = E[|\epsilon_i|^2] \sqrt{E[\mathbf{y}_{i-1}(k) d_{i-1}^*(k)]^H E[\mathbf{y}_{i-1}(k) d_{i-1}^*(k)]} \quad (4.28)$$

De (4.26) e (4.27), o mapeamento do MSWF para o filtro de Wiener equivalente,  $\mathbf{w}_0$ , é dado por

$$\mathbf{w}_0^H = \mathbf{w}_z^H \mathbf{L}_M \quad (4.29)$$

O MSWF fornece um meio natural de implementar redução de posto da matriz de autocorrelação do sinal de entrada [20], já que não é necessário realizar cálculo de autovalores e autovetores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada. De modo a projetar um MSWF com posto  $D \leq M$ , basta proceder com a decomposição em múltiplos estágios até  $D$  estágios serem obtidos. Nesse caso, o banco de filtros de análise é calculado como

$$\mathbf{L}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^H \\ \mathbf{r}_2^H \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_D^H (\prod_{i=D-1}^1 \mathbf{B}_i) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

e o banco de filtros de síntese de erro é dado por

$$\mathbf{w}_z^H = \begin{bmatrix} w_1^* & -w_1^* w_2^* & \dots & (-1)^{D+1} \prod_{i=1}^D w_i^* \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

### 4.3.1 Estrutura Eficiente Utilizando MSWF

A estrutura eficiente de equalização derivada na seção 4.2.1 torna-se evidente se utilizarmos o MSWF. Isso porque a decomposição do filtro de Wiener em múltiplos estágios é baseada na correlação cruzada entre os dados de entrada e o processo desejado. O comportamento dessa grandeza à medida que variamos o sinal desejado pode ser “controlado” multiplicando adequadamente o sinal de entrada por uma transformação linear que faça uma circulação dos dados de entrada. Assim, é possível projetar as transformações lineares de modo a obter sempre o mesmo vetor de correlação cruzada e conseqüentemente o mesmo filtro de Wiener em múltiplos estágios. A estrutura de equalização utilizando o MSWF é mostrada na Figura 4.6.

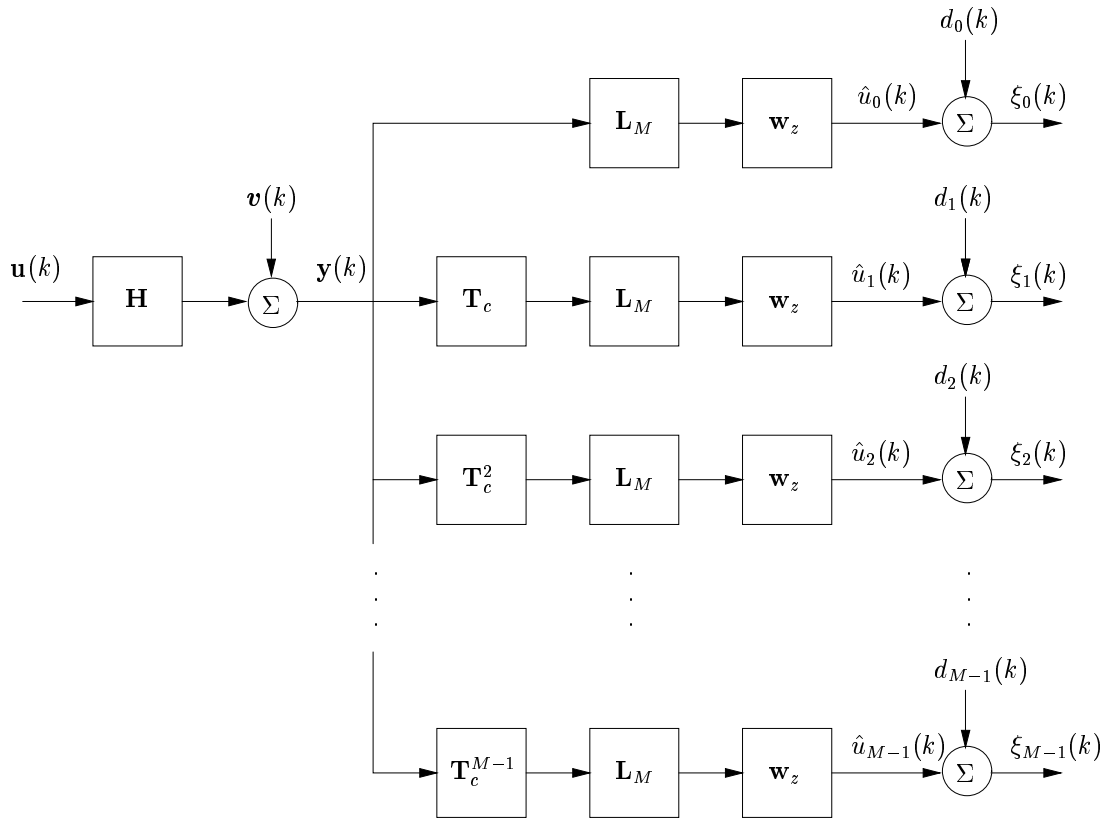


Figura 4.6: Equalizador de canal para transmissão em blocos baseado em filtros de Wiener em múltiplos estágios.

A estrutura mostrada na Figura 4.6 pode ser descrita como

$$\hat{\mathbf{u}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_z \mathbf{L}_M \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{w}_z \mathbf{L}_M \mathbf{T}_c \mathbf{y}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_z \mathbf{L}_M \mathbf{T}_c^{M-1} \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_z \mathbf{L}_M \\ \mathbf{w}_z \mathbf{L}_M \mathbf{T}_c \\ \vdots \\ \mathbf{w}_z \mathbf{L}_M \mathbf{T}_c^{M-1} \end{bmatrix} \mathbf{y}(k) \quad (4.32)$$

Para realizar equalização do tipo ZF, consideramos  $\mathbf{v}(k) = 0$  e nesse caso  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$ . Como  $\mathbf{y}(k) = \mathbf{H}\mathbf{u}(k)$ , concluímos a partir de (4.32) que

$$\mathbf{H}_{ZF}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_z \mathbf{L}_M \\ \mathbf{w}_z \mathbf{L}_M \mathbf{T}_c \\ \vdots \\ \mathbf{w}_z \mathbf{L}_M \mathbf{T}_c^{M-1} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Como em geral  $\mathbf{v}(k) \neq 0$  e o filtro  $\mathbf{w}_z \mathbf{L}_M$  é calculado de modo a minimizar o erro médio quadrático entre o sinal transmitido e a saída do equalizador, obtemos  $\hat{\mathbf{u}}(k) \approx \mathbf{u}(k)$  e nesse caso

$$\mathbf{H}^{-1} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{w}_z \mathbf{L}_M \\ \mathbf{w}_z \mathbf{L}_M \mathbf{T}_c \\ \vdots \\ \mathbf{w}_z \mathbf{L}_M \mathbf{T}_c^{M-1} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

### 4.3.2 Equalização Balanceada

Como o filtro de Wiener em múltiplos estágios divide-se naturalmente em um banco de filtros de análise e um banco de filtros de síntese, é natural esperar que essa divisão possa ser explorada de modo a que parte do equalizador esteja localizada no transmissor e a outra parte no receptor. Nesta seção veremos que basta uma ligeira modificação no equalizador descrito em (4.32) para que o mesmo possa ser dividido entre o transmissor e o receptor.

Vamos definir uma matriz  $\tilde{\mathbf{T}}_c$ , de dimensão  $M \times M$ , tal que

$$\mathbf{L}_M \mathbf{T}_c = \tilde{\mathbf{T}}_c \mathbf{L}_M \quad (4.35)$$

ou seja,

$$\tilde{\mathbf{T}}_c = \mathbf{L}_M \mathbf{T}_c \mathbf{L}_M^{-1} \quad (4.36)$$

Podemos reescrever (4.34) em função de  $\tilde{\mathbf{T}}_c$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{-1} &\approx \begin{bmatrix} \mathbf{w}_z \mathbf{L}_M \\ \mathbf{w}_z \tilde{\mathbf{T}}_c \mathbf{L}_M \\ \vdots \\ \mathbf{w}_z \tilde{\mathbf{T}}_c^{M-1} \mathbf{L}_M \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_z \\ \mathbf{w}_z \tilde{\mathbf{T}}_c \\ \vdots \\ \mathbf{w}_z \tilde{\mathbf{T}}_c^{M-1} \end{bmatrix} \mathbf{L}_M \end{aligned} \quad (4.37)$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_z \\ \mathbf{w}_z \tilde{\mathbf{T}}_c \\ \vdots \\ \mathbf{w}_z \tilde{\mathbf{T}}_c^{M-1} \end{bmatrix} \approx \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L}_M^{-1} \quad (4.38)$$

Chamamos de  $\mathbf{E}_T$  e  $\mathbf{E}_R$  as matrizes  $M \times M$  que implementam o equalizador no transmissor e no receptor, respectivamente, da forma

$$\mathbf{E}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_z \\ \mathbf{w}_z \tilde{\mathbf{T}}_c \\ \vdots \\ \mathbf{w}_z \tilde{\mathbf{T}}_c^{M-1} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\mathbf{E}_R = \mathbf{L}_M \quad (4.40)$$

É fácil verificar que  $\mathbf{E}_T$  e  $\mathbf{E}_R$  implementam o equalizador. Por (4.38),

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}(k) &= \mathbf{E}_R \mathbf{H} \mathbf{E}_T \mathbf{u}(k) \\ &= \mathbf{L}_M \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_z \\ \mathbf{w}_z \tilde{\mathbf{T}}_c \\ \vdots \\ \mathbf{w}_z \tilde{\mathbf{T}}_c^{M-1} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ &\approx \mathbf{L}_M \mathbf{H} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L}_M^{-1} \mathbf{u}(k) = \\ &= \mathbf{u}(k)\end{aligned}\tag{4.41}$$

O sistema descrito por (4.39) e (4.40) encontra-se representado na Figura 4.7. Comparando-se os sistemas representados nas Figuras 4.6 e 4.7, é evidente que no caso da equalização balanceada a complexidade computacional no receptor é bastante reduzida, já que nessa estrutura é necessária apenas uma multiplicação pela matriz  $\mathbf{L}_M$ , ao contrário da estrutura utilizada na pós-equalização, onde são necessárias  $M$  multiplicações pela matriz  $\mathbf{L}_M$ .

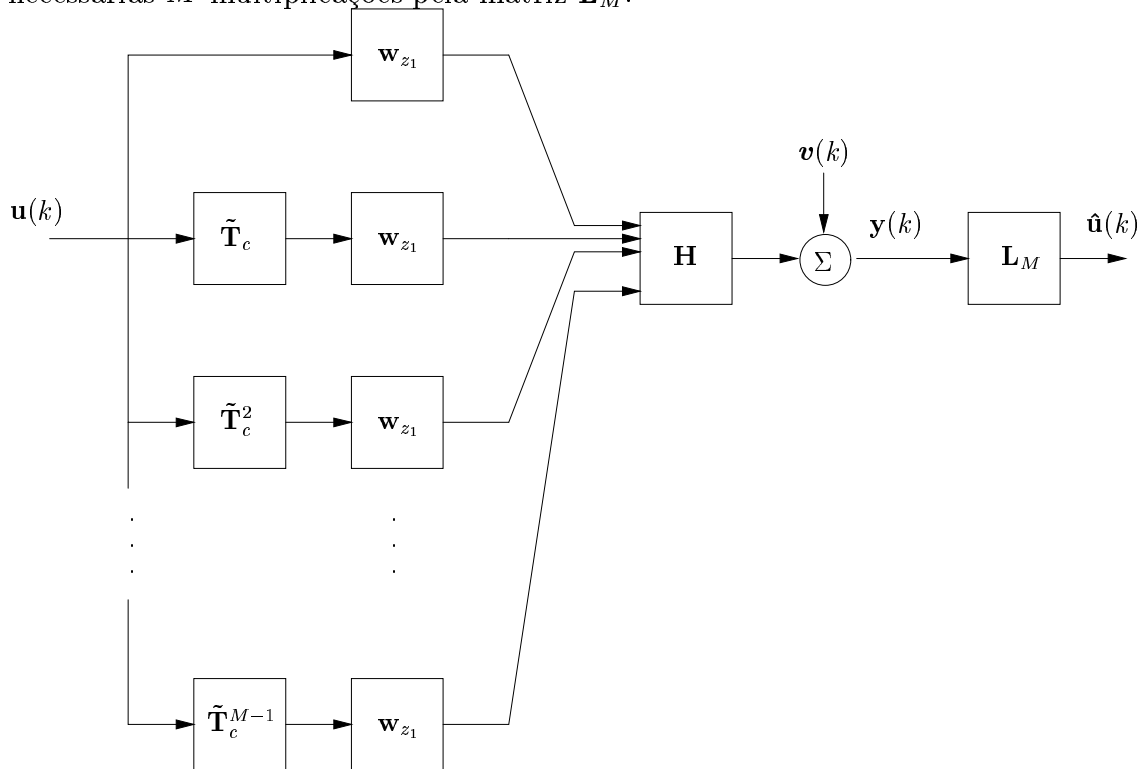


Figura 4.7: Equalizador balanceado usando filtros de Wiener em múltiplos estágios.

A equalização balanceada somente poderá ser realizada se  $\mathbf{L}_M^{-1}$  em (4.36) existir. A matriz  $\mathbf{L}_M$  não será inversível se  $\mathbf{r}_i$  for um vetor nulo, o que pode acontecer se o sistema estiver modelado com ordem acima do necessário. Como os canais existentes na Natureza não possuem resposta ao impulso finita, podemos conjecturar que em geral  $\mathbf{L}_M^{-1}$  existirá, porém,  $\mathbf{L}_M$  pode ser mal condicionada.

## 4.4 Resultados Experimentais

Nesta seção mostraremos resultados experimentais obtidos através de simulações em computadores. O desempenho do sistema proposto é medido como a BER média para 100 transmissões de 128000 símbolos modulados em QPSK (*Quadrature Phase Shift Keying*) para SNR variando de 0 a 30 dB. Consideraremos dois modelos de canal, ambos filtros FIR com 64 coeficientes. O comprimento do prefixo cíclico é 64 e  $N = 128$ .

O filtro de Wiener  $\mathbf{w}_0$  foi estimado usando o algoritmo RLS com fator de esquecimento  $\lambda = 0.999$ . Uma seqüência de treinamento foi utilizada para treinar o filtro adaptativo, e os coeficientes do filtro foram congelados após a convergência.

A Figura 4.8 mostra a magnitude da resposta em frequência do modelo de canal considerado para o primeiro conjunto de simulações. A Figura 4.9 mostra a BER média resultante. Para SNR alta, o sistema proposto tem desempenho superior ao DMT, enquanto para baixa SNR o sistema proposto tem desempenho comparável ao DMT.

Para explicar esse comportamento, é preciso atentar para a principal diferença entre os dois sistemas: no sistema proposto, todos os símbolos são transmitidos no mesmo canal, enquanto no DMT o canal é dividido em sub-canais que carregam um símbolo cada [19]. À medida que a SNR aumenta, para o sistema proposto a acurácia na estimativa aumenta para todos os símbolos, enquanto no DMT a acurácia na estimativa dos símbolos transmitidos nos sub-canais que têm baixa SNR permanece ruim. Após a SNR ultrapassar um determinado limite, ambos os sistemas são capazes de uma estimativa acurada de todos os símbolos, o que leva a BER nula, mas é importante salientar que esse limite é particular de cada sistema.

Como consequência da discussão acima, para canais com característica *notch*

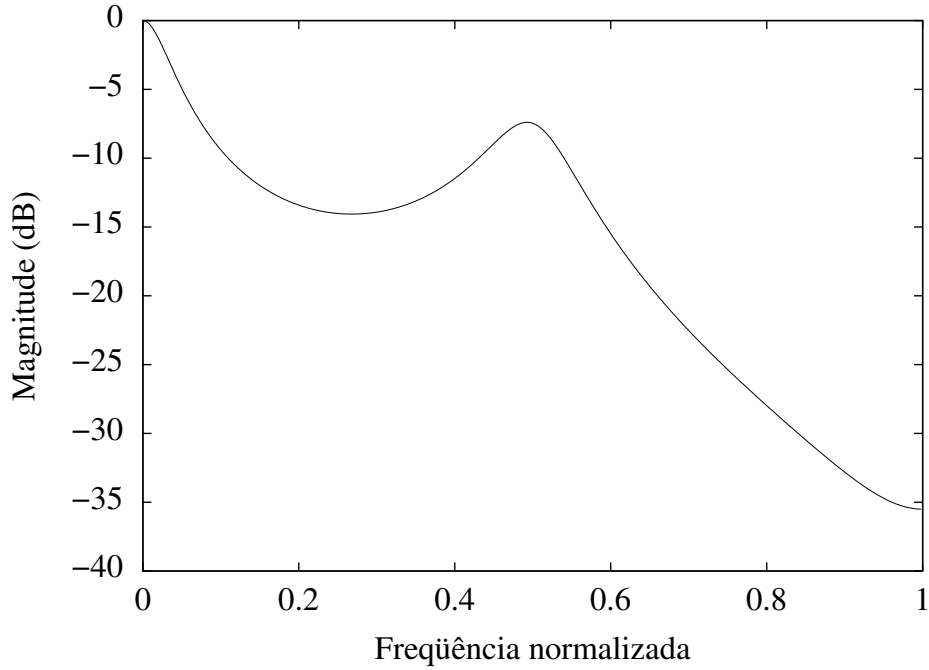


Figura 4.8: Magnitude da resposta em freqüência do modelo de canal considerado para o primeiro conjunto de simulações.

em algumas freqüências, o sistema proposto deve ter desempenho ainda melhor do que o observado no primeiro conjunto de simulações, quando comparado ao DMT. Esse pode ser o caso de um canal que possui um zero próximo ao círculo unitário, como mostrado na Figura 4.10. Esse modelo de canal foi utilizado no segundo conjunto de simulações, e a BER média resultante é mostrada na Figura 4.11. Como esperado, podemos observar que para este modelo de canal, o desempenho do sistema proposto aumenta mais rapidamente com a SNR do que no primeiro conjunto de simulações.

Para o terceiro conjunto de simulações, o desempenho do equalizador de posto reduzido é avaliado para um valor fixo de SNR. A Figura 4.12 mostra a BER média resultante para o posto variando de 4 até 128 usando o modelo de canal mostrado na Figura 4.8 e SNR=15 dB. O desempenho do sistema permanece próximo ao ótimo para filtro de posto  $> 20$ .

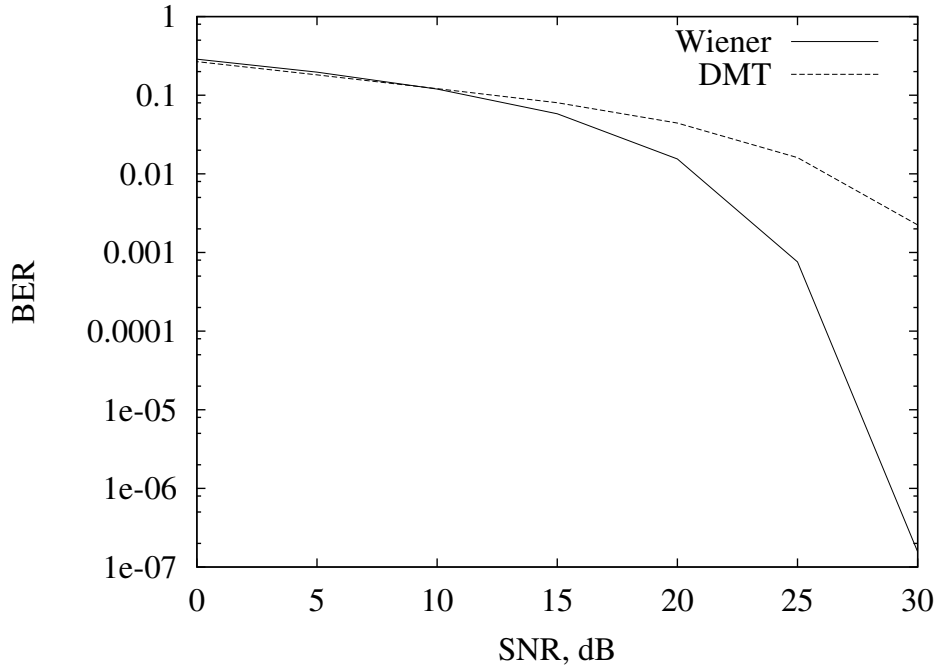


Figura 4.9: BER média para o primeiro conjunto de simulações.

## 4.5 Conclusão

Neste capítulo, mostramos uma estrutura eficiente de equalização em blocos. A estrutura utiliza uma seqüência de transformações lineares seguidas por um único filtro de Wiener para realizar a equalização em sistemas de comunicação com transmissões em blocos. As transformações lineares são meras circulações no bloco de entrada no receptor, e podem ser implementadas por meio de *buffers* circulares disponíveis nos processadores digitais de sinais, e portanto não necessitam de adições ou multiplicações.

O desempenho do sistema proposto, medido como a taxa média de erro de bit, foi comparada com o DMT. Vimos que o sistema proposto possui desempenho superior ao DMT para os modelos de canal avaliados em uma larga faixa de relação sinal ruído. Esse comportamento foi analisado qualitativamente, e concluímos que está diretamente relacionado com a presença de zeros do canal próximos ao círculo unitário.

O filtro de Wiener em múltiplos estágios (*MultiStage Wiener Filter*, MSWF) foi considerado para a implementação do equalizador, permitindo a implementação direta de redução de posto da matriz de autocorrelação do sinal de entrada. No



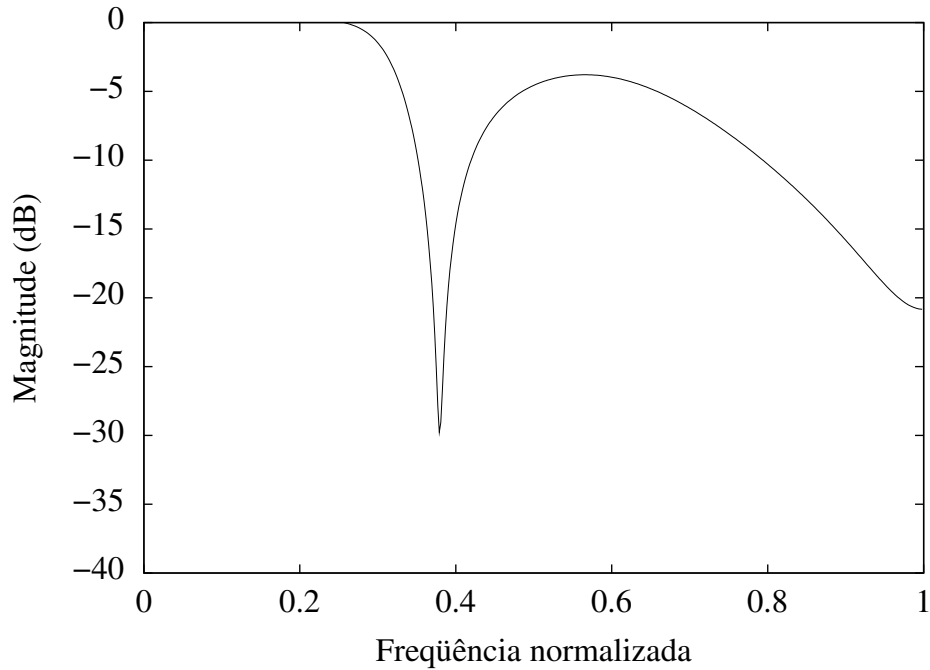


Figura 4.10: Magnitude da Resposta em Freqüência.

MSWF a redução de posto pode ser implementada apenas interrompendo a decomposição em determinado número de estágios, não sendo necessário realizar cálculo de autovalores e autovetores. Verificamos que o posto do filtro pode ser diminuído para valores muito menores do que o posto da matriz de autocorrelação do sinal, mantendo ainda desempenho comparável ao do filtro ótimo.

Tanto para o filtro de Wiener convencional ou sua implementação em múltiplos estágios várias alternativas de implementação podem ser consideradas, utilizando o fato de ser necessário estimar apenas o filtro para estimar um dos símbolos recebidos. Dessa forma, podemos utilizar algoritmos de adaptação mais complexos e robustos, o que leva também a convergência mais rápida dos filtros adaptativos.

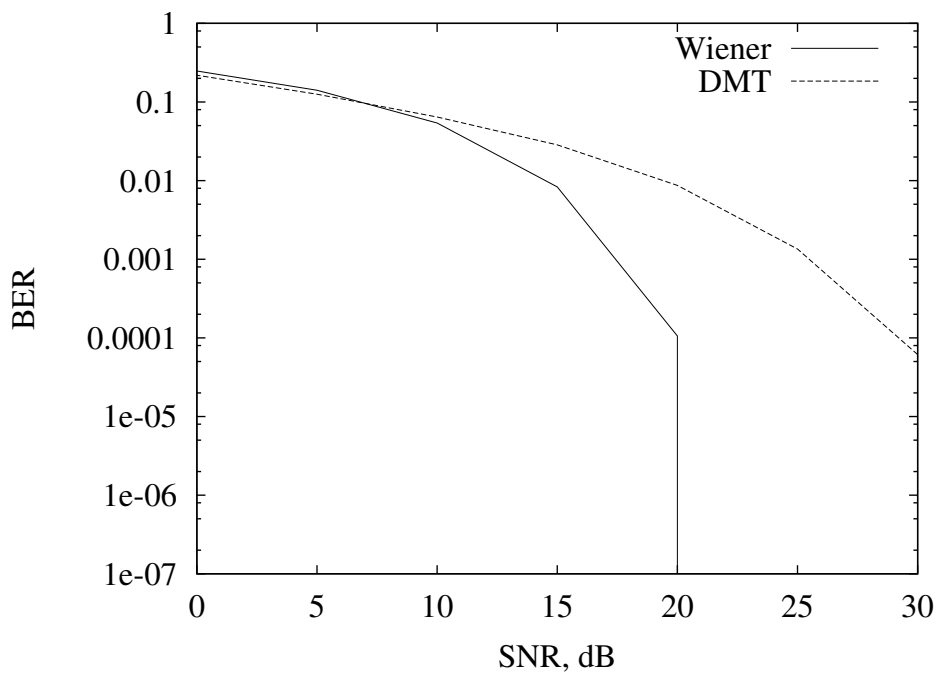


Figura 4.11: BER média para o segundo conjunto de simulações.

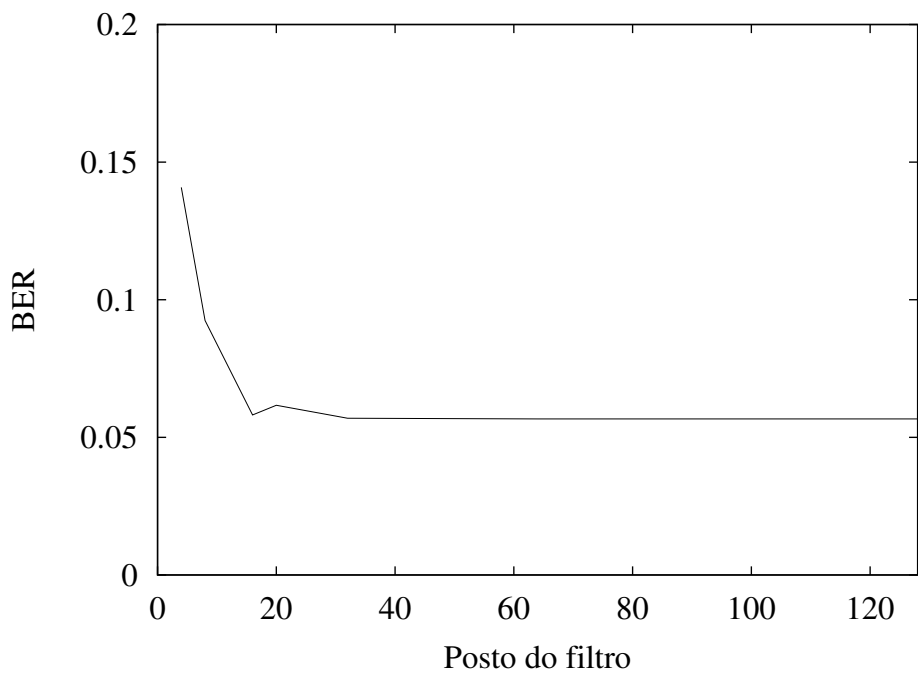


Figura 4.12: BER média para posto variando de 4 a 128 com SNR=15 dB.

# Capítulo 5

## Análise Teórica do Transmultiplexador no Domínio $Z$

Neste capítulo iremos apresentar uma análise teórica sobre sistemas de comunicação em blocos, em especial aqueles que utilizam bancos de filtros com resposta ao impulso finita (*Finite Impulse Response*, FIR) e com reconstrução perfeita. A ferramenta fundamental para a nossa análise será a decomposição de Smith [2]. A análise é simples, e apesar de não levar a implementações práticas eficientes, permite a determinação da quantidade mínima de redundância a ser inserida de modo a garantir a reconstrução perfeita do sinal transmitido. Os resultados mostrados neste capítulo foram em sua maior parte publicados por Xia [3] e Lin, et al. [1], porém foram modificados e adequados ao modelo do transmultiplexador adotado neste trabalho <sup>1</sup>.

### 5.1 Descrição do Sistema de Comunicações

Vamos utilizar o mesmo modelo utilizado no Capítulo 3 para o sistema de comunicações, mostrado novamente na Figura 5.1 por conveniência. Agora não estaremos mais limitados a que o número de sub-bandas,  $M$ , seja igual ao fator de interpolação/decimação,  $N$ . O caso  $N < M$  não é interessante analisar, pois nesse caso há perda de informação e como consequência os dados não podem ser recebidos corretamente. O caso que iremos analisar no seguimento deste trabalho pressupõe

---

<sup>1</sup>Em [3, 1] os autores utilizam decomposições polifásicas diferentes das mostradas no Capítulo 2.

$N \geq M$ , pois veremos que nesse caso é possível encontrar bancos de filtros FIR com reconstrução perfeita independentemente da realização do canal.

Um sistema  $N \times N$  do tipo mostrado na Figura 5.1 pode ser interpretado como um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas (*Multiple Input Multiple Output*, MIMO) com uma matriz de transferência para o canal  $\mathbf{C}(z)$ ,  $N \times N$ , da forma

$$\mathbf{C}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) & \cdots & H_{N-1}(z) \\ z^{-1}H_{N-1}(z) & H_0(z) & \cdots & H_{N-2}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{-1}H_1(z) & z^{-1}H_2(z) & \cdots & H_0(z) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

onde  $H_k(z)$  são as componentes polifásicas de  $H(z)$ .

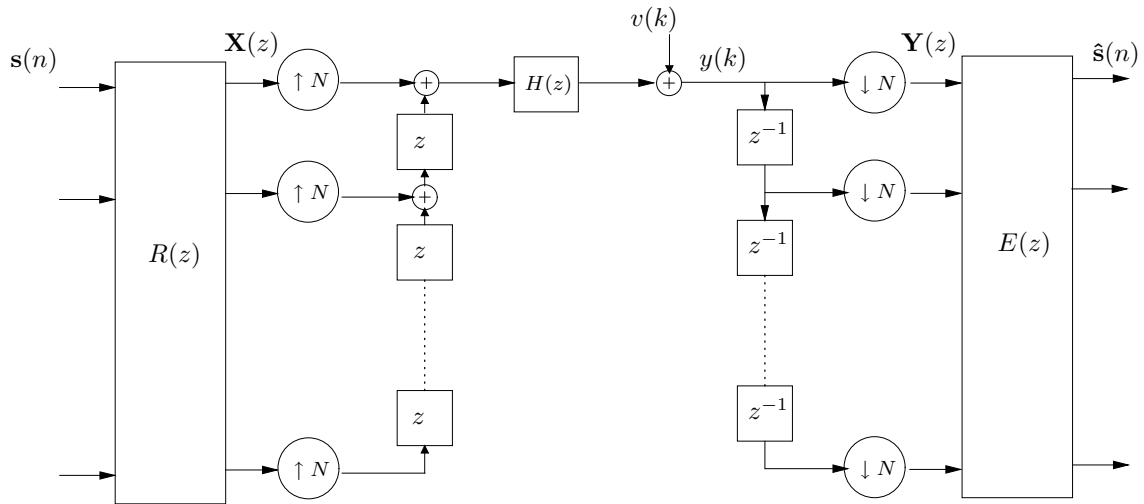


Figura 5.1: Transmultiplexador.

A prova dessa relação,  $\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z)\mathbf{X}(z)$ , pode ser encontrada no Apêndice A. Matrizes dessa forma são chamadas de *pseudo-circulantes*[9]. Em [2] o autor discute várias propriedades das matrizes pseudo-circulantes. Algumas dessas propriedades serão utilizadas neste trabalho para derivar importantes relações sobre transmultiplexadores. Utilizando a matriz de canal  $\mathbf{C}(z)$ , o sistema da Figura 5.1 pode ser redesenhado como na Figura 5.2, onde  $\mathbf{v}(z)$  é a transformada  $Z$  da versão em blocos do ruído  $v(k)$ .

Como nosso objetivo neste capítulo é analisar sistemas de comunicações que possuam reconstrução perfeita, vamos considerar  $\mathbf{v}(z) = \mathbf{0}$ . A partir da representação na Figura 5.2 vemos que podemos representar o sistema de comunicações

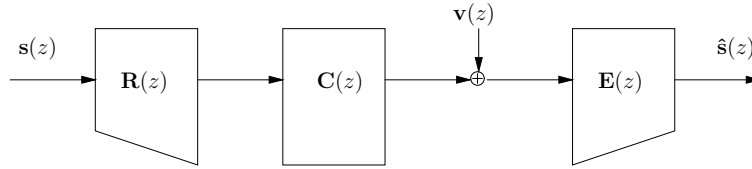


Figura 5.2: Transmultiplexador como sistema MIMO.

como

$$\hat{\mathbf{s}}(z) = \mathbf{E}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{R}(z)\mathbf{s}(z) \quad (5.2)$$

Um sistema que possua reconstrução perfeita é também chamado de sistema livre de interferência. Para que o sistema seja livre de interferência entre bandas, a matriz  $\mathbf{E}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{R}(z)$  deve ser diagonal. Porém se os elementos da diagonal de  $\mathbf{E}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{R}(z)$  forem filtros com mais de um coeficiente não-nulo ocorre o que no domínio do tempo chamamos de interferência entre símbolos (*Inter Symbol Interference*, ISI). No domínio da transformada  $Z$  chamaremos esse fenômeno de *interferência dentro da banda*. Assim, para que o sistema seja livre de interferência dentro da banda, os elementos de  $\mathbf{E}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{R}(z)$  devem ser apenas atrasos. Logo, a condição para que não haja interferência é

$$\mathbf{E}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{R}(z) = z^{-d}K\mathbf{I}_M \quad (5.3)$$

onde  $d$  e  $K$  são inteiros e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade  $M \times M$ . Sem muita perda de generalidade vamos considerar  $K = 1$ . Para simplificar as expressões, vamos também considerar  $d = 0$ , já que o atraso pode ser inserido posteriormente se necessário. Assim,

$$\mathbf{E}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{R}(z) = \mathbf{I}_M \quad (5.4)$$

## 5.2 Propriedades da Matriz de Canal

Nesta seção iremos mostrar algumas propriedades da matriz de canal  $\mathbf{C}(z)$  que serão utilizadas durante o desenvolvimento. Essas propriedades podem ser encontradas em [1, 2]. Aqui foram modificadas para adequarem-se à representação polifásica utilizada neste trabalho.

1. Uma matriz pseudo-circulante da forma (5.1) pode ser decomposta na forma [2]

$$\mathbf{C}(z^N) = \mathbf{D}(z)\mathbf{W}\mathbf{\Sigma}(z)\mathbf{W}^*\mathbf{D}(z^{-1}) \quad (5.5)$$

onde

$$\mathbf{D}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z^{-N+1} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{\Sigma}(z) = \begin{bmatrix} H(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H(zW) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & H(zW^{N-1}) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

e a matriz  $\mathbf{W}$  é a matriz que implementa a DFT  $N \times N$ , dada por  $\{\mathbf{W}\}_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{N}}W^{kn}$ , onde  $W = e^{-j2\pi/N}$ .

2. Supondo que o canal  $H(z)$  seja um filtro FIR causal com zeros localizados em  $\alpha_l$ ,  $l = 1, \dots, L$ , e

$$H(z) = h_0 \prod_{l=1}^L (1 - \alpha_l z^{-1}),$$

então  $\det \mathbf{C}(z)$  é também um filtro FIR causal com zeros localizados em  $\alpha_l^N$ ,  $l = 1, \dots, L$ :

$$\det \mathbf{C}(z) = h_0^N \prod_{l=1}^L (1 - \alpha_l^N z^{-1}). \quad (5.8)$$

Para provar a relação (5.8), utilizamos (5.5), obtendo

$$\det \mathbf{C}(z) = \det \mathbf{\Sigma}(z^{1/N}) = \prod_{k=0}^{N-1} H(z^{1/N}W^k) \quad (5.9)$$

Observamos que

$$\prod_{k=0}^{N-1} (1 - \alpha_l (z^{1/N}W^k)^{-1}) = \prod_{k=0}^{N-1} (1 - (\alpha_l z^{-1/N})W^{-k}) = (1 - \alpha_l^N z^{-1}) \quad (5.10)$$

Logo, substituindo (5.10) em (5.9), obtemos (5.8).

3. *Forma de Smith.* Um matriz polinomial  $N \times N$  genérica,  $\mathbf{A}(z)$ , pode ser representada utilizando a decomposição na forma de Smith [2]

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{U}(z)\mathbf{\Gamma}(z)\mathbf{V}(z), \quad (5.11)$$

onde todas as três matrizes na decomposição são polinomiais na variável  $z^{-1}$ . As matrizes  $\mathbf{U}(z)$  e  $\mathbf{V}(z)$  são *unimodulares*, ou seja, os valores de seus determinantes são constantes e diferentes de zero. A matriz  $\mathbf{\Gamma}(z)$  é diagonal,

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \begin{bmatrix} \gamma_0(z) & 0 & & 0 \\ 0 & \gamma_1(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{N-1}(z) \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Além disso,  $\gamma_k(z)$  é um fator de  $\gamma_{k+1}(z)$ , e as matrizes  $\mathbf{U}(z)$  e  $\mathbf{V}(z)$  podem ser escolhidas de forma que os polinômios  $\gamma_k(z)$  sejam mônicos. A matriz  $\mathbf{\Gamma}(z)$  é única, porém as matrizes  $\mathbf{U}(z)$  e  $\mathbf{V}(z)$  não o são. Como  $\det \mathbf{U}(z)$  e  $\det \mathbf{V}(z)$  são constantes, temos

$$\det \mathbf{A}(z) = c \det \mathbf{\Gamma}(z) = c \prod_{k=0}^{N-1} \gamma_k(z) \quad (5.13)$$

### Forma de Smith de $\mathbf{C}(z)$

Seja a forma de Smith de  $\mathbf{C}(z)$ :

$$\mathbf{C}(z) = \mathbf{U}(z)\mathbf{\Gamma}(z)\mathbf{V}(z) \quad (5.14)$$

A partir das equações (5.8) e (5.13), obtemos

$$\det \mathbf{C}(z) = c \prod_{k=0}^{N-1} \gamma_k(z) = h_0^N \prod_{l=1}^L (1 - \alpha_l^N z^{-1}) \quad (5.15)$$

Isso implica que a diagonal principal de  $\mathbf{\Gamma}(z)$  possui no máximo  $L$  termos não unitários. Sendo  $\beta(N)$  o número de termos unitários na diagonal principal de  $\mathbf{\Gamma}(z)$ , vamos definir

$$\rho(N) = N - \beta(N) \quad (5.16)$$

ou seja,  $\rho(N)$  é o número de termos *não unitários* na diagonal principal de  $\mathbf{\Gamma}(z)$ . Podemos expressar então  $\mathbf{\Gamma}(z)$  como

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & 0 \\ & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \gamma_{N-\rho(N)}(z) & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 & \gamma_{N-1}(z) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

## 5.3 Transmultiplexadores com Redundância Mínima

O transmultiplexador mostrado na Figura 5.1 é dito minimamente interpolado (ou maximamente decimado) se  $N = M$ . Caso  $N > M$ , dizemos que o sistema é redundante, sendo  $K = N - M$  a quantidade de redundância inserida. Nesta seção vamos mostrar algumas propriedades relacionando os transmultiplexadores com a quantidade de redundância, o que determina a possibilidade da existência de transmissores e receptores que permitam equalização com reconstrução perfeita.

Por (5.3) e (5.4), vimos que um transmultiplexador livre de interferência é aquele que satisfaz

$$\mathbf{E}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{R}(z) = \mathbf{I}_M$$

onde  $\mathbf{E}(z)$  é  $M \times N$  e  $\mathbf{R}(z)$  é  $N \times M$ ,  $N \geq M$ . Pela forma de Smith de  $\mathbf{C}(z)$  mostrada na equação (5.14), somos induzidos a buscar a solução

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_0(z)\mathbf{U}^{-1}(z) \quad (5.18)$$

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{V}^{-1}(z) \quad (5.19)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{R}(z) &= \mathbf{E}_0(z)\mathbf{U}^{-1}(z)\mathbf{U}(z)\mathbf{\Gamma}(z)\mathbf{V}(z)\mathbf{V}^{-1}(z) \\ &= \mathbf{E}_0(z)\mathbf{\Gamma}(z) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Logo, para eliminar a ISI bastaria fazer  $\mathbf{E}_0(z) = \mathbf{\Gamma}^{-1}(z)$ . Porém,  $\mathbf{\Gamma}(z)$  possui polinômios em  $z^{-1}$  na sua diagonal, de forma que a sua inversa não é FIR. A inversa poderia ser aproximada por filtros FIR, mas o comprimento dos filtros pode ser demasiadamente longo para determinadas realizações do canal.

Porém, existem sistemas baseados em transmultiplexadores onde na ausência de ruído é possível recuperar *exatamente* o sinal transmitido, como é o caso dos sistemas baseados em OFDM. A grande diferença é que para o OFDM  $K = L$  símbolos redundantes são inseridos na forma de um *prefixo cíclico* em cada bloco transmitido [11]. É justamente a inserção dos símbolos redundantes que possibilita a eliminação total de interferência, de modo que a equação (5.4) seja obedecida.

Um problema no caso do OFDM é que o comprimento do prefixo cíclico é fixo, sendo igual à ordem do modelo de canal. Se o comprimento do bloco for



muito maior do que a ordem do canal, a introdução do prefixo cíclico não reduz sensivelmente a eficiência do sistema. Porém, se não for este o caso, essa forma de introduzir redundância não leva a uma utilização eficiente da banda disponível para transmissão do sinal.

Já que é necessário inserir símbolos redundantes para garantir a eliminação de interferência, é importante determinar qual a quantidade mínima de redundância que deve ser inserida. Para tanto vamos modificar o transmissor e o receptor em (5.18) e (5.19) para

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{V}^{-1}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-K} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$\mathbf{E}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^{-1}(z), \quad (5.22)$$

onde  $K \leq N$ . Pelas equações (5.21), (5.22) e (5.14),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{R}(z) &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^{-1}(z)\mathbf{U}(z)\mathbf{\Gamma}(z)\mathbf{V}(z)\mathbf{V}^{-1}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-K} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-K} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-K} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Pela equação (5.17), observamos que o transmultiplexador construído como em (5.21) e (5.22) é livre de ISI se

$$K \geq \rho(N). \quad (5.24)$$

Para mostrar que essa quantidade de redundância é também *necessária*, vamos supor que  $K < \rho(N)$  e que existam  $\mathbf{E}(z)$  e  $\mathbf{R}(z)$  tal que  $\mathbf{E}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{R}(z) = \mathbf{I}_M$ . Usando (5.14),

$$\mathbf{E}(z)\mathbf{U}(z)\mathbf{\Gamma}(z)\mathbf{V}(z)\mathbf{R}(z) = \mathbf{I}_M. \quad (5.25)$$

Como  $\gamma_k(z)$  divide  $\gamma_{k+1}(z)$ , os zeros de  $\gamma_k(z)$  são também zeros de  $\gamma_{k+1}(z)$ . Logo, se  $\gamma_{N-\rho(N)}(z_0) = 0$ , então

$$\gamma_{N-\rho(N)}(z_0) = \gamma_{N-\rho(N)+1}(z_0) = \cdots = \gamma_{N-1}(z_0) = 0. \quad (5.26)$$

Dessa forma,  $\text{posto}\{\mathbf{\Gamma}(z_0)\} = N - \rho(N)$ , e o posto de  $\mathbf{E}(z)\mathbf{U}(z)\mathbf{\Gamma}(z)\mathbf{V}(z)\mathbf{R}(z)$  para  $z = z_0$  é no máximo  $N - \rho(N)$ . Porém, o posto de  $\mathbf{I}_M$  é  $M = N - K$ , que é maior

do que  $N - \rho(N)$ , já que  $K < \rho(N)$  por suposição. Assim há uma contradição, e portanto concluímos que não existem  $\mathbf{E}(z)$  e  $\mathbf{R}(z)$  tal que  $\mathbf{E}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{R}(z) = \mathbf{I}_M$  se  $K < \rho(N)$ .

Essa escolha para o transmultiplexador pode ser generalizada para

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{V}^{-1}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}(z) \\ \mathbf{D}(z) \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}(z) \quad (5.27)$$

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{B}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{A}(z) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^{-1}(z) \quad (5.28)$$

onde  $\mathbf{A}(z)$  e  $\mathbf{B}(z)$  são  $M \times M$ ,  $\mathbf{D}(z)$  é  $N - M \times M$  e  $M$  é tal que  $N - M \geq \rho(N)$ . Para comprovar esse resultado basta substituir (5.28) e (5.27) em (5.4), obtendo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z)\mathbf{C}(z)\mathbf{R}(z) &= \mathbf{B}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{A}(z) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^{-1}(z)\mathbf{U}(z)\mathbf{\Gamma}(z)\mathbf{V}(z) \cdot \\ &\quad \cdot \mathbf{V}^{-1}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}(z) \\ \mathbf{D}(z) \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}(z) \\ &= \mathbf{B}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{A}(z) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}(z) \\ \mathbf{D}(z) \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}(z) \\ &= \mathbf{B}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{A}(z) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}(z) \\ \mathbf{D}(z) \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}(z) \\ &= \mathbf{B}(z)\mathbf{B}^{-1}(z) \\ &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Essa generalização visa permitir maior flexibilidade no projeto do transmultiplexador. Uma aplicação interessante dessa generalização é projetar o transmultiplexador de forma que o transmissor seja fixo e apenas o receptor necessite de informações sobre o canal de transmissão. Isso pode ser realizado escolhendo

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{-1}(z) = \mathbf{V}(z)_{0:M-1,0:M-1} \\ \mathbf{D}(z) = \mathbf{V}(z)_{M:N-1,0:M-1} \end{cases} \quad (5.30)$$

Nesse caso, o transmissor e o receptor são dados por

$$\mathbf{R}(z) = \mathbf{V}^{-1}(z) \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}(z) \\ \mathbf{D}(z) \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}(z) \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z) &= \mathbf{B}(z) \begin{bmatrix} (\mathbf{V}(z)_{0:M-1,0:M-1})^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^{-1}(z) \\ &= \mathbf{B}(z) \mathbf{E}_E(z) \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde  $\mathbf{E}_E(z) = \begin{bmatrix} (\mathbf{V}(z)_{0:M-1,0:M-1})^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U}^{-1}(z)$ .

Esse resultado mostra que é possível projetar um transmultiplexador onde o transmissor seja fixo e apenas o receptor possua informação sobre o canal de transmissão. Um problema evidente nessa abordagem é que a matriz  $\mathbf{E}_E(z)$  que faz o papel do equalizador é cheia, e portanto sua estimativa é computacionalmente complexa.

### 5.3.1 Determinação da Redundância Mínima

Uma vez que conseguimos determinar a redundância mínima em função do número de elementos não-unitários na diagonal de  $\mathbf{\Gamma}(z)$ ,  $\rho(N)$ , é importante agora conhecer o valor de  $\rho(N)$ , que deve ser dependente do modelo de canal e do tamanho do bloco. Nesta seção veremos que  $\rho(N)$  está relacionado com os *zeros congruentes* de  $H(z)$ , que serão definidos a seguir.

#### Zeros Congruentes

Dado um conjunto de zeros  $\{\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_q}\}$  de  $H(z)$ , os mesmos são chamados de *zeros congruentes* com respeito a  $N$  se

- (a)  $\{\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \dots, \alpha_{k_q}\}$  forem distintos;
- (b)  $\alpha_{k_1}^N = \alpha_{k_2}^N = \dots = \alpha_{k_q}^N$ .

Essa definição implica que os zeros congruentes possuem a mesma magnitude, e o ângulo entre eles varia em inteiros múltiplos de  $2\pi/N$ , ou seja,

$$|\alpha_{k_1}| = |\alpha_{k_2}| = \dots = |\alpha_{k_q}| = r_k, \quad (5.33)$$

onde  $r_k$  é constante para o conjunto, e

$$\alpha_{k_m} = r e^{j(2\pi l_m/N + C_k)}, \quad (5.34)$$

onde  $1 \leq l_m \leq N - 1$  e  $C_k$  é constante para o conjunto.

### Posto de Matriz Polinomial

Antes de prosseguirmos com o desenvolvimento é necessário fazer algumas considerações a respeito do posto de matrizes cujos elementos são polinômios. Maiores detalhes podem ser encontrados em [2]. Sendo a matriz polinomial em  $z$ , o seu posto dependerá do valor atribuído a  $z$ , e portanto será chamado de  $p(z)$ . Como exemplo, para o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 + z & 1 + 2z \\ 2 + 2z & 2 + 4z \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

vemos que  $p(z) < 2$  para todo  $z$ , uma vez que a segunda linha é linearmente dependente da primeira. Vamos considerar agora o sistema

$$\begin{bmatrix} 2 + z & 1 + z \\ 1 + z & 2 + z \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Seu determinante é igual a  $3 + 2z$ , que é diferente de zero para todos os valores de  $z$  exceto  $z = -3/2$ , o que implica em

$$p(z) = \begin{cases} 1, & z = -3/2 \\ 2, & z \neq -3/2 \end{cases} \quad (5.37)$$

### Redundância Mínima em Função dos Zeros de $H(z)$

Vamos considerar a decomposição em (5.5). Como  $\mathbf{D}(z)$  e  $\mathbf{W}$  são matrizes unitárias, o posto de  $\mathbf{C}(z)$  é igual ao posto de  $\mathbf{\Sigma}(z)$ . Lembrando que

$$\mathbf{\Sigma}(z) = \begin{bmatrix} H(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H(zW^{-1}) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & H(zW^{-N+1}) \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

os elementos na diagonal de  $\mathbf{\Sigma}(z)$  que possuem zeros em comum determinam o posto de  $\mathbf{\Sigma}(z)$ .

Podemos observar que:

- (a) se  $\alpha$  for um zero de  $H(z)$ , então  $\alpha W^k$  é zero de  $H(zW^{-k})$ ;

- (b) se  $H(z)$  e  $H(zW^{-k})$  possuem um zero em comum,  $\alpha$ , então tanto  $\alpha$  como  $\alpha W^{-k}$  são zeros de  $H(z)$ ;
- (c)  $\alpha$  e  $\alpha W^{-k}$  são zeros congruentes.

Logo, o número de elementos na diagonal de  $\Sigma(z)$  com zeros em comum será igual ao número de zeros congruentes. Definindo  $\mu(N)$  como o número de elementos do maior conjunto de zeros congruentes, o menor posto de  $\Sigma(z)$  é dado por

$$\text{posto}\{\Sigma(z)\} = N - \mu(N).$$

Como  $\text{posto}\{\mathbf{C}(z)\} = \text{posto}\{\Gamma(z)\} \geq N - \rho(N)$ , então

$$\rho(N) = \mu(N) \tag{5.39}$$

Assim, podemos afirmar que para garantir a existência de um transmultiplexador FIR com reconstrução perfeita, a redundância mínima deve ser maior ou igual ao número de elementos do maior conjunto de zeros congruentes.

## 5.4 Exemplos

Nesta seção vamos mostrar alguns exemplos ilustrando as relações encontradas neste capítulo.

### Exemplo 1:

Primeiramente vamos considerar como modelo de canal

$$H(z) = 1 + 0,64z^{-2} \tag{5.40}$$

Esse canal possui zeros em  $z_1 = 0,8e^{j2\pi/4}$  e  $z_2 = 0,8e^{-j2\pi/4}$ . Para que esses zeros sejam congruentes, é necessário que  $z_1^N = z_2^N$ , ou seja,

$$(0,8e^{j2\pi/4})^N = (0,8e^{-j2\pi/4})^N \tag{5.41}$$

A igualdade acima será satisfeita se e somente se  $N = 4r$ ,  $r$  inteiro. Isso significa que para  $N$  múltiplo de 4 teremos um conjunto com dois zeros congruentes; caso contrário teremos dois conjuntos com um zero cada.

Para  $N = 3$ , a matriz de canal  $\mathbf{C}(z)$  é dada por

$$\mathbf{C}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,64 \\ 0,64z^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0,64z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

A decomposição de Smith de  $\mathbf{C}(z)$  é

$$\mathbf{U}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,64z^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 0,64z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + 0,2621z^{-2} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

$$\mathbf{V}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,64 \\ 0 & 1 & -0,4096z^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Portanto, se escolhermos  $\mathbf{E}(z)$  e  $\mathbf{R}(z)$  utilizando as equações (5.21) e (5.22), respectivamente, ou ainda (5.28) e (5.27), respectivamente, podemos utilizar  $M \leq 2$  e ainda obter um equalizador ZF. Isso significa  $K = N - M = 1 < L$ , ou seja, a redundância é reduzida se comparada com sistemas OFDM/DMT, onde  $K = L = 2$ .

Cabe observar que o número de elementos não-unitários na diagonal de  $\mathbf{\Gamma}(z)$  está de acordo com a equação (5.39), pois para  $N = 3$  temos dois conjuntos de zeros congruentes com 1 elemento cada, gerando 1 elemento não-unitário na diagonal de  $\mathbf{\Gamma}(z)$ .

### Exemplo 2:

Vamos utilizar o mesmo modelo de canal do exemplo anterior, porém com  $N = 4$ . A matriz de canal é dada por

$$\mathbf{C}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,64 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,64 \\ 0,64z^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,64z^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

e pela decomposição de Smith, nós temos

$$\mathbf{\Gamma}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 0,4096z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 0,4096z^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Como havíamos observado no exemplo anterior, para  $N = 4$  os dois zeros de  $H(z)$  formam um conjunto de zeros congruentes com dois elementos. Logo, pela equação (5.39) temos 2 elementos não-unitários na diagonal de  $\mathbf{\Gamma}(z)$ . Assim, temos ainda  $M \leq 2$  como condição a ser obedecida para obtermos um equalizador ZF.

Neste caso, aumentar o tamanho do bloco não representou um aumento da vazão do sistema, já que o número de símbolos de redundantes também teve que ser aumentado na mesma proporção. Em particular, a vazão neste caso é a mesma de sistemas OFDM/DMT, já que  $K = 2$ .

Porém, se escolhermos  $N = 5$ , os zeros do canal não serão mais congruentes e então podemos fazer  $K = 1$ . Neste caso a vazão do sistema aumentou em relação ao exemplo 1.

## 5.5 Conclusão

Neste capítulo descrevemos a análise teórica realizada em [1], com algumas modificações na estrutura do transmultiplexador de modo a compatibilizar com a utilizada neste trabalho. A análise foi realizada no domínio da transformada  $Z$ , e vimos que para que seja possível a reconstrução perfeita do sinal transmitido é necessário inserir símbolos redundantes.

Visando uma maior eficiência na comunicação, buscamos condições que garantam a existência de equalizadores com reconstrução perfeita do sinal transmitido. Vimos que a equalização apenas não será possível se o número de zeros congruentes for maior do que o número de símbolos redundantes para um determinado comprimento de bloco. Alterando o comprimento dos blocos, o número de zeros congruentes também se altera, e conseqüentemente também se altera o número de símbolos redundantes necessários. Assim, ao contrário do que seria intuitivo supor, em alguns casos é possível que aumentar o tamanho do bloco resulte em uma redução na

eficiência da comunicação.

Outros sistemas de comunicações presentes na literatura podem ser interpretados à luz desse resultado, como, por exemplo, o OFDM. O OFDM pode ser interpretado como um sistema que considera o pior caso, onde todos os zeros do canal são congruentes e, portanto, o número de símbolos redundantes a serem inseridos é igual à ordem do canal.

Para canais práticos dificilmente encontraremos zeros congruentes, o que significa que a equalização normalmente é possível desde que haja pelo menos um símbolo redundante. Porém, se os mesmos forem apenas aproximadamente congruentes podemos enfrentar problemas numéricos no projeto do equalizador. Assim, pode ser interessante considerar zeros aproximadamente congruentes como exatamente congruentes e utilizar o número de símbolos redundantes necessários, utilizando então as expressões desenvolvidas ao longo do capítulo.

Descrevemos também a parametrização dada em [1] para um equalizador que satisfaça as condições de reconstrução perfeita, onde é necessário que ambos o transmissor e o receptor possuam informação sobre o canal. Como contribuição nossa, generalizamos essa parametrização para permitir equalizadores onde o transmissor seja fixo e com complexidade praticamente nula e apenas o receptor possua informação sobre o canal.



# Capítulo 6

## Análise Teórica do Transmultiplexador no Domínio do Tempo

Neste capítulo vamos realizar uma análise teórica do transmultiplexador, utilizando porém o domínio do tempo, no lugar do domínio  $Z$  utilizado no capítulo anterior. O objetivo dessa nova análise é estabelecer relações entre a redundância mínima e a ordem mínima do equalizador, além de contemplar o uso de transmultiplexadores variantes no tempo.

O modelo do transmultiplexador no domínio do tempo é mostrado na Figura 6.1, onde  $s_0(n), \dots, s_{M-1}(n)$  são os símbolos transmitidos,  $h(k)$  é o modelo de canal,  $v(k)$  é o ruído aditivo gaussiano e  $\hat{s}_0(n), \dots, \hat{s}_{M-1}(n)$  são os símbolos estimados no receptor.

Como já vimos no capítulo anterior, se  $N = M$ , o sistema é denominado criticamente decimado. Neste caso a equalização ZF utilizando bancos de filtros FIR não é possível, a não ser para o caso particular do canal possuir todos os zeros no infinito (canal *só-pólos*). Se  $N > M$ , então o sistema encontra-se sobreamostrado, e existem equalizadores FIR que levam à reconstrução perfeita na saída. Se  $N < M$  a equalização não é possível, e portanto esse caso não será considerado[7].

Assumindo  $N \geq M$ , a saída do banco de filtros de síntese (ou precodificador)

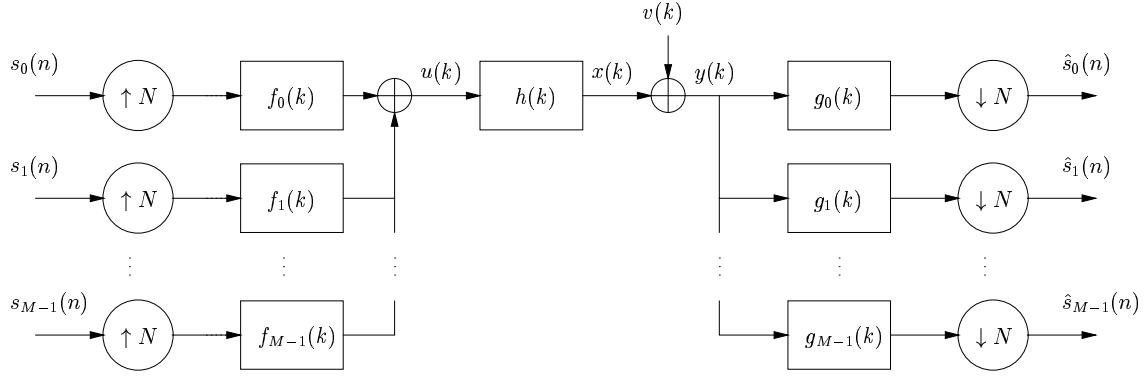


Figura 6.1: Transmultiplexador no domínio do tempo.

é dada por

$$u(k) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_m(i) f_m(k - iN), \quad (6.1)$$

onde  $s_m(i)$  é o símbolo transmitido pelo  $m$ -ésimo usuário no instante de tempo  $i$ , e  $f_m(k)$  é o filtro no ramo  $m$  do precodificador. Após passar pelo modelo de canal linear invariante no tempo (LIT)  $h(k)$ , o sinal é recebido junto com ruído aditivo gaussiano de média zero  $v(k)$ ,

$$y(k) = x(k) + v(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(l)u(k - l) + v(k). \quad (6.2)$$

No receptor, a estimativa dos símbolos transmitidos para o  $m$ -ésimo usuário é calculada filtrando o sinal  $y(k)$  por  $g_m(k)$  e decimando a saída por  $N$ , como mostrado na Figura 6.1. Esse processo é descrito por

$$\hat{s}_m(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} y(nN - j)g_m(j). \quad (6.3)$$

As relações nas equações (6.1), (6.2) e (6.3) podem ser escritas de forma mais compacta usando notação matricial. Vamos definir os vetores  $M \times 1$

$$\mathbf{s}(n) = \begin{bmatrix} s_0(n) & s_1(n) & \cdots & s_{M-1}(n) \end{bmatrix}^T \quad (6.4)$$

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \begin{bmatrix} \hat{s}_0(n) & \hat{s}_1(n) & \cdots & \hat{s}_{M-1}(n) \end{bmatrix}^T, \quad (6.5)$$

e os vetores  $N \times 1$

$$\mathbf{u}(n) = \begin{bmatrix} u(nN) & \cdots & u(nN + N - 1) \end{bmatrix}^T \quad (6.6)$$

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x(nN) & \cdots & x(nN + N - 1) \end{bmatrix}^T \quad (6.7)$$

$$\mathbf{v}(n) = \begin{bmatrix} v(nN) & \cdots & v(nN + N - 1) \end{bmatrix}^T \quad (6.8)$$

$$\mathbf{y}(n) = \begin{bmatrix} y(nN) & \cdots & y(nN + N - 1) \end{bmatrix}^T. \quad (6.9)$$

As equações (6.1) e (6.3) podem agora ser reescritas como

$$\mathbf{u}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_i \mathbf{s}(n - i) \quad (6.10)$$

e

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_j \mathbf{y}(n - j), \quad (6.11)$$

onde os elementos das matrizes  $\mathbf{F}_i$ ,  $N \times M$ , e  $\mathbf{G}_j$ ,  $M \times N$ , são

$$\{\mathbf{F}_i\}_{l,m} = f_m(iN + l) \quad (6.12)$$

$$\{\mathbf{G}_j\}_{m,l} = g_m(jN - l).$$

com  $m = 0, \dots, M - 1$ , e  $l = 0, \dots, N - 1$ , ou seja,

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} f_0(iN) & f_1(iN) & \cdots & f_{M-1}(iN) \\ f_0(iN + 1) & f_1(iN + 1) & \cdots & f_{M-1}(iN + 1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_0(iN + N - 1) & f_1(iN + N - 1) & \cdots & f_{M-1}(iN + N - 1) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$\mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} g_0(jN) & g_0(jN - 1) & \cdots & g_0(jN - N + 1) \\ g_1(jN) & g_1(jN - 1) & \cdots & g_1(jN - N + 1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{M-1}(jN) & g_{M-1}(jN - 1) & \cdots & g_{M-1}(jN - N + 1) \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

A equação (6.2) pode ser descrita de forma matricial como

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}_l \mathbf{u}(k - l) + \mathbf{v}(k), \quad (6.15)$$

onde as matrizes  $\mathbf{H}_l$ ,  $N \times N$ , são definidas como

$$\mathbf{H}_l = \begin{bmatrix} h(lN) & h(lN - 1) & \cdots & h(lN - N + 1) \\ h(lN + 1) & h(lN) & \cdots & h(lN - N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(lN + N - 1) & h(lN + N - 2) & \cdots & h(lN) \end{bmatrix}$$

## 6.1 Equalização

Nesta seção, estabelecemos condições que o sistema descrito na seção anterior deve obedecer para garantir a existência de equalizadores *zero forcing* (ZF). Vamos derivar condições para as matrizes  $\mathbf{F}_i$  e também relacionar a quantidade de redundância,  $N - M$ , com a ordem do canal e a ordem do equalizador. As derivações são similares às encontradas em [4], porém nós mostramos que algumas restrições indicadas como sendo necessárias e suficientes em [4] não são necessárias para equalização ZF, e portanto podem ser relaxadas. Como consequência, as relações que nós derivamos permitem o uso de equalizadores menos complexos e sistemas com menor quantidade de redundância, além de sustentarmos a transmissão através de canais com resposta impulsional mais longa do que o comprimento do bloco.

Ao longo do capítulo vamos fazer os seguintes pressupostos:

- (a) o canal é um filtro FIR de  $L$ -ésima ordem, com  $h(0), h(L) \neq 0$ ;
- (b) o comprimento do bloco é maior ou igual ao número de símbolos, ou seja,  $N \geq M$ ;
- (c)  $f_m(k)$  são filtros FIR causais de comprimento  $N$ , e  $g_m(k)$  são filtros FIR causais de comprimento  $QN^1$ , onde  $Q$  é um valor inteiro.

Como consequência do pressuposto (c), as matrizes  $\mathbf{F}_i$  são nulas, exceto para  $i = 0$ ; as matrizes  $\mathbf{G}_j$  são nulas, exceto para  $j = 0, \dots, Q - 1$ . Do pressuposto (a), temos que as matrizes  $\mathbf{H}_l$  são nulas, exceto para  $l = 0, \dots, B$ , com  $B = \lceil \frac{L}{N} \rceil$ , onde  $\lceil \cdot \rceil$  denota o menor inteiro maior ou igual a  $(\cdot)^2$ .

### 6.1.1 Equalizador ZF

Baseado nos pressupostos estabelecidos anteriormente, iremos estabelecer condições que permitam equalização ZF, também chamada de reconstrução perfeita (*Perfect Reconstruction*, PR). Para as derivações a seguir vamos assumir que o

---

<sup>1</sup>Apesar de os filtros  $g_m(k)$  serem causais,  $g_m(-N + 1), \dots, g_m(-1)$  não são necessariamente nulos. Para tornar estes filtros realizáveis basta introduzirmos um atraso de  $N - 1$  amostras no sinal.

<sup>2</sup>Em [4] esses pressupostos são mais restritivos, pois os autores consideram ainda  $N < L$ . Como consequência, as matrizes  $\mathbf{H}_l$  são nulas, exceto para  $l = 0, 1$ .

ruído não está presente. Da equação (6.11), considerando  $v(k) = 0$  e o pressuposto (c), temos

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \sum_{q=0}^{Q-1} \mathbf{G}_q \mathbf{y}(n-q) = \sum_{q=0}^{Q-1} \mathbf{G}_q \mathbf{x}(n-q) = \mathcal{G} \bar{\mathbf{x}}(n), \quad (6.16)$$

onde a matriz  $\mathcal{G}$ ,  $M \times QN$ , é definida como <sup>3</sup>

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{Q-1} & \cdots & \mathbf{G}_0 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

e  $\bar{\mathbf{x}}(n)$  é um vetor estendido,  $NQ \times 1$ , definido como

$$\bar{\mathbf{x}}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(n-Q+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(n) \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Das equações (6.10) e (6.15), e pressupostos (a)–(c), temos

$$\bar{\mathbf{x}}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_0 \mathbf{s}(n-Q+1) + \cdots + \mathbf{H}_B \mathbf{F}_0 \mathbf{s}(n-Q-B+1) \\ \vdots \\ \mathbf{H}_0 \mathbf{F}_0 \mathbf{s}(n) + \cdots + \mathbf{H}_B \mathbf{F}_0 \mathbf{s}(n-B) \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Vamos reescrever (6.19) como

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(n) = & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_0 & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \mathbf{s}(n-Q+1) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_0 \mathbf{s}(n) \end{bmatrix} + \\ & + \cdots + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_B & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_B & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{H}_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 \mathbf{s}(n-Q-B+1) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_0 \mathbf{s}(n-B) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{F}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}(n-Q-B+1) \\ \vdots \\ \mathbf{s}(n) \end{bmatrix}$$

---

<sup>3</sup>Em [4] os autores assumem que as primeiras  $L$  colunas de  $\mathbf{G}_{Q-1}$  sejam nulas para evitar IBI. Como essa solução não é ótima, não fizemos nenhuma suposição sobre  $\mathbf{G}_{Q-1}$ .

Definindo,

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{F}_0 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

$$\bar{\mathbf{s}}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{s}(n - Q - B + 1) \\ \vdots \\ \mathbf{s}(n) \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

onde a matriz de canal  $\mathcal{H}$  é  $QN \times (Q + B)N$ , a matriz do precodificador  $\mathcal{F}$  é  $(Q + B)N \times (Q + B)M$  e o vetor estendido com os símbolos transmitidos  $\bar{\mathbf{s}}(n)$  é  $M(Q + B) \times 1$ .

Das equações (6.16) e (6.20) podemos escrever a relação entre os símbolos transmitidos e recebidos como

$$\hat{\mathbf{s}}(n) = \mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{F}\bar{\mathbf{s}}(n). \quad (6.24)$$

De (6.24), a equalização ZF é obtida se

$$\mathcal{G}\mathcal{H}\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times (Q+B-1)M} & \mathbf{I}_M \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

A condição acima é satisfeita se e somente se o lado direito de (6.25) pertencer ao espaço gerado pelas linhas de  $\mathcal{H}\mathcal{F}$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times (Q+B-1)M} & \mathbf{I}_M \end{bmatrix}^T \in \mathcal{R}\{\mathcal{F}^T\mathcal{H}^T\}, \quad (6.26)$$

onde  $\mathcal{R}\{\cdot\}$  denota o espaço gerado pelas colunas de  $\{\cdot\}$ <sup>4</sup>.

Resultados importantes podem ser obtidos se expressarmos a relação acima em termos do espaço nulo de  $\mathcal{H}$ , denotado como  $\mathcal{N}\{\mathcal{H}\}$ . Vamos definir o vetor  $\mathbf{e}_r(i)$ ,

---

<sup>4</sup>Em [4] os autores afirmam que  $\mathcal{H}\mathcal{F}$  deve ser inversível, o que é uma condição mais restritiva do que o necessário.

$r \times 1$ , como a  $i$ -ésima coluna da matriz identidade  $r \times r$ . Podemos dizer, então, que se existir o vetor  $\boldsymbol{\alpha}_i$ ,  $(Q+B)N \times 1$ , tal que

$$\mathcal{F}^T \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{e}_{(Q+B)M}(i + (Q+B-1)M), \quad (6.27)$$

a condição (6.26) é satisfeita se e somente se  $\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathcal{R}(\mathcal{H}^T)$ .

É possível verificar que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{H}) = & \text{span}\{\mathbf{e}_{(Q+B)N}(i), i = 1, \dots, BN - L - 1\} \\ & \oplus \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times BN-L-1} & 1 & v_l & \cdots & v_l^{Q+N+L} \end{bmatrix}^T, \right. \\ & \left. l = 0, \dots, L-1 \right\}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

onde  $v_l$  são as raízes do polinômio  $h(n)$ , e  $\mathcal{N}(\mathcal{H})$  é o espaço nulo de  $\mathcal{H}$ . Então, a condição (6.26) é satisfeita se e somente se o vetor  $\boldsymbol{\alpha}_i$  que satisfaz (6.27) também satisfizer

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\nu} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}^T(\mathcal{H}). \quad (6.29)$$

Supondo que  $\mathbf{F}_0$  possua posto completo por colunas, podemos assumir sem perda de generalidade

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \mathbf{F}, \quad (6.30)$$

onde  $\boldsymbol{\Phi}$  é  $N - M \times M$ , e a matriz  $\mathbf{F}$ ,  $M \times M$ , possui posto completo. Então,

$$\mathcal{F}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{I}_M \ \boldsymbol{\Phi}^T] & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & [\mathbf{I}_M \ \boldsymbol{\Phi}^T] \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

Podemos então reescrever (6.27) como

$$\text{diag}\{[\mathbf{I}_M \ \boldsymbol{\Phi}^T], \dots, [\mathbf{I}_M \ \boldsymbol{\Phi}^T]\} \boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(Q+B-1)M \times 1} \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

onde  $\mathbf{f}_i$  é a  $i$ -ésima coluna de  $(\mathbf{F}^T)^{-1}$ . Para simplificar a notação, vamos considerar  $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_i$  e  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_i$ .

O próximo passo é caracterizar  $\boldsymbol{\alpha}$  que satisfaça a equação (6.32). Vamos dividir o vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  em  $Q + B$  seções de comprimento  $N$  da forma

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_{Q+B-1} \\ \hat{\alpha}_{Q+B-1} \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

onde  $\tilde{\alpha}_q$  e  $\hat{\alpha}_q$  têm dimensão  $M \times 1$  e  $(N - M) \times 1$ , respectivamente, para  $q = 0, \dots, Q + B - 1$ . Das equações (6.32) e (6.33), temos

$$\tilde{\alpha}_q + \boldsymbol{\Phi}^T \hat{\alpha}_q = \begin{cases} 0 & , q = 1, \dots, Q + B - 1 \\ \mathbf{f} & , q = 0 \end{cases} \quad (6.34)$$

Agora, temos que estabelecer restrições sobre os valores de  $Q$ ,  $N - M$  e  $L$  que garantam ortogonalidade entre  $\boldsymbol{\alpha}$  e os vetores no conjunto  $\mathcal{N}(\mathcal{H})$ . Vamos definir

$$\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times BN-L-1} & v_0^0 & \cdots & v_0^{QN+L} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}_{1 \times BN-L-1} & v_{L-1}^0 & \cdots & v_{L-1}^{QN+L} \\ \mathbf{I}_{BN-L-1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

Utilizando (6.34), podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T \boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{V}^T \left( \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Phi}^T \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} \hat{\alpha}_{Q+B-1} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Phi}^T \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(Q+B-1)N \times 1} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{0}_{N-M \times 1} \end{bmatrix} \right) \\ &= \mathbf{V}^T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Phi}^T \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\Phi}^T \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{Q+B-1} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} + \mathbf{V}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(Q+B-1)N \times 1} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{0}_{N-M \times 1} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{V}^T \boldsymbol{\Theta} \hat{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\gamma} \end{aligned} \quad (6.36)$$



onde

$$\Theta = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Phi^T \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \begin{bmatrix} -\Phi^T \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{Q+B-1} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_0 \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

$$\gamma = \mathbf{V}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(Q+B-1)N \times 1} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{0}_{N-M \times 1} \end{bmatrix}$$

Da equação (6.36), podemos reescrever (6.29) como

$$\mathbf{V}^T \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{V}^T \Theta \hat{\alpha} + \gamma = \mathbf{0}_{BN-1 \times 1}, \quad (6.38)$$

Portanto, equalização ZF será possível se e somente se existir um vetor  $\boldsymbol{\alpha}$  tal que

$$\mathbf{V}^T \Theta \hat{\alpha} = -\gamma. \quad (6.39)$$

Como nós desejamos garantir a existência da solução para (6.39) independentemente de  $\gamma$  (e de  $\mathbf{F}$ , conseqüentemente), a condição necessária e suficiente é posto( $\mathbf{V}^T \Theta$ ) =  $BN - 1$ .

Para simplificar a notação, vamos definir a matriz  $\Psi$ ,  $N \times N - M$ , dada por

$$\Psi = \begin{bmatrix} -\Phi^T \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

e os vetores  $\mathbf{v}_l$  e  $\tilde{\mathbf{v}}_l$ ,  $N \times 1$ , dados por

$$\mathbf{v}_l^T = \begin{bmatrix} v_l^{L-(B-1)N+1} & \cdots & v_l^{L-(B-2)N} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_l^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times BN-L-1} & v_l^0 & \cdots & v_l^{L-(B-1)N} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

para  $l = 0, \dots, L - 1$ . Com essas novas matrizes podemos escrever

$$\mathbf{V}^T \Theta = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_0^T \Psi & v_0^{0N} \mathbf{v}_0^T \Psi & \dots & v_0^{(Q+B-2)N} \mathbf{v}_0^T \Psi \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{\mathbf{v}}_{L-1}^T \Psi & v_{L-1}^{0N} \mathbf{v}_{L-1}^T \Psi & \dots & v_{L-1}^{(Q+B-2)N} \mathbf{v}_{L-1}^T \Psi \\ \tilde{\Psi} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6.43)$$

onde  $\tilde{\Psi} = \Psi_{1:BN-L-1,1:N-M}$ .

Da equação (6.43) podemos observar que as primeiras  $BN - L - 1$  linhas de  $\Psi$  devem ser linearmente independentes se desejarmos que a matriz  $\mathbf{V}^T \Theta$  possua posto completo por linhas. Isto implica que  $\tilde{\Psi}$  tenha posto completo por linhas. Para evitarmos lidar com essas condições vamos restringir a solução de (6.39) para

$$\hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N-M \times 1} \\ \beta \end{bmatrix}. \quad (6.44)$$

Vamos definir a matriz  $\bar{\mathbf{V}}^T$ ,  $L \times (Q + B - 1)N$ ,

$$\bar{\mathbf{V}}^T = \begin{bmatrix} v_0^{L-(B-1)N+1} & \dots & v_0^{QN+L} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{L-1}^{L-(B-1)N+1} & \dots & v_{L-1}^{QN+L} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

e a matriz  $\bar{\Theta}$ ,  $(Q + B - 1)N \times (Q + B - 1)(N - M)$ ,

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Phi^T \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \begin{bmatrix} -\Phi^T \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (6.46)$$

Assumindo (6.44), podemos então reescrever (6.39) como

$$\bar{\mathbf{V}}^T \bar{\Theta} \beta = -\bar{\gamma}, \quad (6.47)$$

onde  $\bar{\gamma}$  é um vetor formado com os primeiros  $L$  elementos de  $\gamma$ .

Esta solução não apenas evita impor restrições a  $\Psi$ , mas também simplifica a análise do sistema de equações. A equação (6.47) admite solução se e somente se  $\text{posto}(\bar{\mathbf{V}}^T \bar{\Theta}) = L$ . Então, uma condição necessária para a existência de uma solução é

$$(Q + B - 1)(N - M) \geq L \Rightarrow Q \geq \left\lceil \frac{L}{N - M} \right\rceil - B + 1. \quad (6.48)$$

Vamos analisar em que condições  $\overline{\mathbf{V}^T \overline{\Theta}}$  apresentaria deficiência de posto. Suponha que existam  $\mu$  zeros de  $h(n)$  tais que  $v_l^N = \rho$ ,  $l = 0, \dots, \mu - 1$ . Esses são chamados de zeros congruentes [3, 1]. Então,  $\overline{\mathbf{V}^T \overline{\Theta}}$  será dado por

$$\overline{\mathbf{V}^T \overline{\Theta}} = \begin{bmatrix} \rho^0 \mathbf{v}_0^T \Psi & \cdots & \rho^{Q+B-2} \mathbf{v}_0^T \Psi \\ \vdots & & \vdots \\ \rho^0 \mathbf{v}_{\mu-1}^T \Psi & \cdots & \rho^{Q+B-2} \mathbf{v}_{\mu-1}^T \Psi \\ v_{\mu}^{0N} \mathbf{v}_{\mu}^T \Psi & \cdots & v_{\mu}^{(Q+B-2)P} \mathbf{v}_{\mu}^T \Psi \\ \vdots & & \vdots \\ v_{L-1}^{0N} \mathbf{v}_{L-1}^T \Psi & \cdots & v_{L-1}^{(Q+B-2)P} \mathbf{v}_{L-1}^T \Psi \end{bmatrix}. \quad (6.49)$$

Podemos escrever as primeiras  $\mu$  linhas de  $\overline{\mathbf{V}^T \overline{\Theta}}$  como

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{V}^T \overline{\Theta}})_{1:\mu, 1:(Q+B-1)(N-M)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^T \Psi & \cdots & \mathbf{v}_0^T \Psi \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_{\mu-1}^T \Psi & \cdots & \mathbf{v}_{\mu-1}^T \Psi \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-M} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho \mathbf{I}_{N-M} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \rho^{Q+B-2} \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.50)$$

Na equação (6.50), a matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^T \Psi & \cdots & \mathbf{v}_0^T \Psi \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_{\mu-1}^T \Psi & \cdots & \mathbf{v}_{\mu-1}^T \Psi \end{bmatrix}$$

possui no máximo  $\min(\mu, N - M)$  colunas independentes. Logo, se  $N - M < \mu$ , a matriz  $\overline{\mathbf{V}^T \overline{\Theta}}$  não possuirá posto completo por linhas, e a equalização ZF não será possível. Esse resultado está de acordo com o encontrado no capítulo anterior para a análise do domínio  $Z$ .

## 6.1.2 Equalizador ZF Variante no Tempo

É possível reduzir ainda mais a redundância mínima se considerarmos que o transmultiplexador pode ser variante no tempo. Os resultados desta seção estendem aqueles encontrados em [4] pois em nossa análise pudemos encontrar relações mais otimizadas para a ordem do equalizador e a redundância mínima.

Para tanto, precisamos generalizar a definição de algumas grandezas que utilizamos até agora. Primeiramente, precisamos redefinir a resposta impulsional dos filtros de transmissão como  $f_m(k, n)$ , onde o índice  $n$  foi introduzido para indicar o instante em que o impulso é aplicado. Como consequência, a equação (6.10) torna-se

$$\mathbf{u}(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_i(n) \mathbf{s}(n - i) \quad (6.51)$$

onde os elementos de  $\mathbf{F}_i(n)$  são definidos como

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} f_0(iN, n) & f_1(iN, n) & \cdots & f_{M-1}(iN, n) \\ f_0(iN + 1, n) & f_1(iN + 1, n) & \cdots & f_{M-1}(iN + 1, n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_0(iN + N - 1, n) & f_1(iN + N - 1, n) & \cdots & f_{M-1}(iN + N - 1, n) \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$

Os pressupostos descritos na página 72 continuam valendo, sendo que no pressuposto (c), agora  $f_m(k, n)$  são filtros FIR causais de comprimento  $N$ . Como verificaremos mais adiante, não é necessário que os filtros  $f_m(k, n_1) \neq f_m(k, n_2) \forall n_1 \neq n_2$ , mas apenas que dentro de um conjunto finito de filtros haja uma determinada quantidade de filtros distintos. Assim, podemos simplificar a análise supondo que a variação no tempo de  $f_m(k, n)$  se dá de forma periódica, com período  $Q + B$ , ou seja,

$$f_m(k, n) = f_m(k, n + Q + B) \quad (6.53)$$

e conseqüentemente

$$\mathbf{F}_0(n) = \mathbf{F}_0(n - Q - B). \quad (6.54)$$

Vamos utilizar essa propriedade para simplificar um pouco a notação do precodificador assumindo um instante de referência e indicando apenas a diferença em

relação a essa referência. Dessa forma, vamos escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_0(n) &\rightarrow \mathbf{F}_0(0) \\ \mathbf{F}_0(n-1) &\rightarrow \mathbf{F}_0(1) \\ \mathbf{F}_0(n-Q-B+1) &\rightarrow \mathbf{F}_0(Q+B-1)\end{aligned}$$

A equação (6.20) pode ser então reescrita como

$$\bar{\mathbf{x}}(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{H}_B & \cdots & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0(Q+B-1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_0(Q+B-2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{F}_0(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}(n-Q-B+1) \\ \vdots \\ \mathbf{s}(n) \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

onde foi assumido como instante de referência o instante de transmissão do bloco atual. É conveniente redefinirmos a matriz do precodificador como

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_0(Q+B-1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_0(Q+B-2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{F}_0(0) \end{bmatrix}. \quad (6.56)$$

As condições para equalização ZF não se alteram, e portanto as equações (6.24) a (6.29) continuam válidas. Supondo que  $\mathbf{F}_0(n)$  possua posto completo por colunas, podemos assumir sem perda de generalidade

$$\mathbf{F}_0(n) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M \\ \Phi(n) \end{bmatrix} \mathbf{F}, \quad (6.57)$$

onde  $\Phi(n)$  é  $N - M \times M$ , e a matriz  $\mathbf{F}$ ,  $M \times M$ , possui posto completo. Então,

$$\mathcal{F}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^T & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^T & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{F}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left[ \mathbf{I}_M & \Phi^T(Q+B-1) \right] & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \left[ \mathbf{I}_M & \Phi^T(Q+B-2) \right] & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \left[ \mathbf{I}_M & \Phi^T(0) \right] \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Seguindo um raciocínio semelhante ao utilizado na seção anterior, e redefinindo

$$\bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} -\Phi^T(Q+B-1) \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{array} \right] & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \left[ \begin{array}{c} -\Phi^T(0) \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{array} \right] \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

chegamos novamente à conclusão de que a equalização ZF será possível se e somente se a equação

$$\bar{\mathbf{V}}^T \bar{\Theta} \beta = -\bar{\gamma}.$$

admitir solução. Novamente podemos dizer que uma condição necessária para a existência de uma solução é

$$(Q+B-1)(N-M) \geq L \Rightarrow Q \geq \left\lceil \frac{L}{N-M} \right\rceil - B + 1. \quad (6.60)$$

Vamos analisar novamente o que acontece se  $h(n)$  possuir  $\mu$  zeros congruentes tais que  $v_l^N = \rho$ ,  $l = 0, \dots, \mu - 1$ . Então,  $\bar{\mathbf{V}}^T \bar{\Theta}$  será dado por

$$\bar{\mathbf{V}}^T \bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \rho^0 \mathbf{v}_0^T \Psi(Q+B-2) & \cdots & \rho^{Q+B-2} \mathbf{v}_0^T \Psi(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho^0 \mathbf{v}_{\mu-1}^T \Psi(Q+B-2) & \cdots & \rho^{Q+B-2} \mathbf{v}_{\mu-1}^T \Psi(0) \\ v_\mu^{0N} \mathbf{v}_\mu^T \Psi(Q+B-2) & \cdots & v_\mu^{(Q+B-2)P} \mathbf{v}_\mu^T \Psi(0) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{L-1}^{0N} \mathbf{v}_{L-1}^T \Psi(Q+B-2) & \cdots & v_{L-1}^{(Q+B-2)P} \mathbf{v}_{L-1}^T \Psi(0) \end{bmatrix} \cdot \quad (6.61)$$

onde a matriz  $\Psi(n)$  é definida como

$$\Psi(n) = \begin{bmatrix} -\Phi^T(n) \\ \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix}, \quad (6.62)$$

Podemos escrever as primeiras  $\mu$  linhas de (6.61) como

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{V}}^T \overline{\Theta})_{1;\mu,1:(Q+B-1)(N-M)} = & \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^T \Psi(Q+B-2) & \cdots & \mathbf{v}_0^T \Psi(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{v}_{\mu-1}^T \Psi(Q+B-2) & \cdots & \mathbf{v}_{\mu-1}^T \Psi(0) \end{bmatrix} \\ & \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N-M} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho \mathbf{I}_{N-M} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \rho^{Q+B-2} \mathbf{I}_{N-M} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Caso  $\Psi(Q-1) = \cdots = \Psi(0) = \Psi$ , então o precodificador é invariante no tempo e a conclusão a que chegamos é a mesma da seção anterior, que a equalização ZF não é possível se  $N-M < \mu$ . Porém, se tivermos

$$\Psi(\delta-1) \neq \Psi(\delta-2) \neq \cdots \neq \Psi(0), \quad \delta \leq Q+B-1, \quad (6.64)$$

então o lado esquerdo de (6.63) possui no máximo  $\min(\mu, (N-M)\delta)$  colunas linearmente independentes. Assim, se fizermos  $(N-M)\delta \geq \mu$  é possível que (6.49) tenha posto completo por linhas, e conseqüentemente, é possível receber o sinal com reconstrução perfeita. Para ser possível realizar a equalização independentemente do canal, basta contemplar o pior caso, que seria  $\mu = L$ , e nesse caso  $\delta$  deve ser tal que

$$(N-M)\delta \geq L \Rightarrow \delta \geq \frac{L}{N-M} \quad (6.65)$$

Como  $\delta \leq Q+B-1$ , então as condições necessárias e suficientes para equalizar o sinal *independentemente* do canal são

$$(Q+B-1) \geq \delta \geq \frac{L}{N-M} \Rightarrow Q \geq \frac{L}{N-M} - B + 1 \quad (6.66)$$

e  $\Psi(\delta-1) \neq \Psi(\delta-2) \neq \cdots \neq \Psi(0)$ ,  $\delta \leq Q+B-1$ , onde

- $Q$  = comprimento (em blocos) do equalizador
- $B$  = ordem (em blocos) do canal
- $L$  = ordem do canal
- $N$  = tamanho do bloco
- $M$  = número de símbolos transmitidos

A equação (6.66) mostra que para uma determinada ordem do canal, é possível obter uma solução de compromisso entre a ordem do equalizador e a redundância inserida no sinal. Essa relação não é contemplada em [1], já que os autores não consideraram que o precodificador poderia ser variante no tempo. A equação (6.66) também difere dos resultados encontrados em [4], onde o projeto de  $\Psi(i)$  é muito mais restritivo e a relação entre  $Q$  e  $N - M$  não depende diretamente da ordem do canal, e sim do tamanho do bloco, o que leva a ordens muito elevadas do equalizador.

## 6.2 Conclusão

Neste capítulo estendemos a análise teórica encontrada em [4], porém retirando várias restrições presentes em [4], de modo que a análise presente neste trabalho segue de forma independente. Os resultados obtidos oferecem uma base teórica para a utilização de equalizadores menos complexos do que os encontrados em [4], além de englobar situações onde a resposta ao impulso do canal é longa, ou seja, maior do que o comprimento dos blocos.

Os resultados encontrados estão de acordo com o obtido no Capítulo 5 e com outros sistemas considerados na literatura, como o OFDM. Do ponto de vista do número de símbolos redundantes, as conclusões são as mesmas do capítulo anterior. Como a análise no tempo permite estabelecer a ordem mínima do equalizador, é interessante verificar que caso o comprimento do bloco e o número de símbolos redundantes sejam escolhidos da mesma forma que em um sistema OFDM, as nossas relações levam a um comprimento do equalizador idêntico ao obtido no OFDM, o que não acontece em [4].



Assim como em [4], consideramos também transmissores e receptores variantes no tempo, e mostramos que dessa forma é possível garantir a existência dos equalizadores independentemente do número de zeros congruentes do canal. Como a nossa análise é menos restritiva, novamente encontramos equalizadores menos complexos também no caso de transmissores e receptores variantes no tempo, não apenas na ordem dos equalizadores, mas também nas restrições sobre a estrutura dos mesmos.

# Capítulo 7

## Conclusão

Neste trabalho propusemos estruturas para realizar de forma eficiente a equalização de canal em sistemas que utilizam transmissão de blocos de informação, além de estendermos a base teórica existente para o projeto de equalizadores que possuam a propriedade de reconstrução perfeita do sinal transmitido.

No Capítulo 3 mostramos uma abordagem alternativa para a implementação de sistemas DWMT baseados em bancos de filtros com atrasos fracionários (*Fractional Delay Filter Banks*, FDFB). Quando comparada com a implementação baseada em bancos de filtros modulados por cosseno, a técnica proposta apresenta melhor desempenho em termos de taxa de erro de bit, particularmente para relações sinal ruído baixas e canais altamente seletivos. Essa melhora é obtida ao custo de um ligeiro aumento na complexidade computacional do banco de filtros, compensado pelo cálculo mais simples dos equalizadores.

O desempenho do sistema baseado em FDFB depende de uma boa separação das sub-bandas, o que somente pode ser obtido se houver uma boa aproximação para os atrasos fracionários. Apesar da aproximação dos atrasos fracionários dada pelas técnicas empregadas não se mostrarem acuradas em toda a banda de frequências, os resultados mostram que pelo menos para alguns níveis de relação sinal ruído as sub-bandas são bastante independentes.

Todas as técnicas empregadas para a obtenção de atrasos fracionários levam a resultados similares em termos de taxa de erro de bit para uma dada relação sinal ruído. A estrutura de Farrow modificada leva a uma implementação interessante já que o mesmo conjunto de filtros pode ser usado para bancos de filtros com diferentes

números de sub-bandas. Isso confere grande flexibilidade permitindo mudar dinamicamente o número de sub-bandas, mas aumenta a complexidade computacional. O método de projeto LS FIR é interessante pois a ordem de cada filtro é muito menor do que a ordem do filtro de Nyquist equivalente, o que simplifica o processo de otimização.

No Capítulo 4, mostramos uma estrutura de equalização que utiliza uma seqüência de transformações lineares seguidas por um único filtro de Wiener para realizar a equalização em sistemas de comunicação com transmissões em blocos. Na realidade, as transformações lineares são meras circulações no bloco de entrada no receptor, e podem ser implementadas por meio de *buffers* circulares disponíveis nos processadores digitais de sinais, e portanto não necessitam de adições ou multiplicações. Caso o transmissor tenha acesso a informação sobre o canal pode ser utilizada também pré-equalização, movendo o equalizador do receptor para o transmissor.

O desempenho do sistema proposto, medido como a taxa de erro de bit média, é comparada com o DMT. Vimos que o sistema proposto possui desempenho superior ao DMT para os modelos de canal avaliados em uma larga faixa de relação sinal ruído. Esse comportamento foi analisado qualitativamente, e concluimos que está diretamente relacionado com a presença de zeros do canal próximos ao círculo unitário.

O filtro de Wiener em múltiplos estágios (*MultiStage Wiener Filter*, MSWF) foi considerado para a implementação do equalizador, permitindo a implementação direta de redução de posto. Verificamos que o posto do filtro pode ser diminuído para valores muito menores do que o posto da matriz de autocorrelação do sinal, mantendo ainda desempenho comparável ao do filtro ótimo.

Tanto para o filtro de Wiener convencional ou sua implementação em múltiplos estágios várias alternativas de implementação podem ser consideradas, utilizando o fato de ser necessário estimar apenas o filtro para estimar um dos símbolos recebidos. Dessa forma, podemos utilizar algoritmos de adaptação mais complexos e robustos, o que leva também a convergência mais rápida dos filtros adaptativos.

No Capítulo 5 descrevemos a análise teórica realizada em [1], com algumas

modificações na estrutura do transmultiplexador de modo a compatibilizar com a utilizada neste trabalho. Nesse capítulo a análise é realizada no domínio da transformada  $Z$ , sendo possível obter condições sobre a quantidade de redundância inserida nos blocos, e para as posições dos zeros do canal que garantam a existência de equalizadores com reconstrução perfeita do sinal transmitido. Vimos que a equalização apenas não será possível se o número de zeros congruentes for maior do que o número de símbolos redundantes para um determinado comprimento de bloco. Alterando o comprimento dos blocos, o número de zeros congruentes também se altera, e conseqüentemente também se altera o número de símbolos redundantes necessários. Para canais práticos dificilmente encontraremos zeros congruentes, mas se os mesmos forem apenas aproximadamente congruentes podemos enfrentar problemas numéricos no projeto do equalizador.

Descrevemos também a parametrização dada em [1] para um equalizador que satisfaça as condições de reconstrução perfeita, onde é necessário que ambos o transmissor e o receptor possuam informação sobre o canal. Generalizamos essa parametrização para permitir equalizadores onde o transmissor seja fixo e apenas o receptor possua informação sobre o canal.

No Capítulo 6 estendemos a análise teórica encontrada em [4], porém retirando várias restrições presentes em [4], de modo que a análise presente neste trabalho segue de forma independente. Os resultados obtidos oferecem uma base teórica para a utilização de equalizadores menos complexos do que os encontrados em [4], além de englobar situações onde a resposta ao impulso do canal é longa, ou seja, maior do que o comprimento dos blocos.

Assim como em [4], consideramos também transmissores e receptores variantes no tempo, e mostramos que dessa forma é possível garantir a existência dos equalizadores independentemente do número de zeros congruentes do canal. Como a nossa análise é menos restritiva, novamente encontramos equalizadores menos complexos também no caso de transmissores e receptores variantes no tempo, não apenas na ordem dos equalizadores, mas também nas restrições sobre a estrutura dos mesmos.

O problema de equalização de canal para sistemas utilizando transmissão em blocos foi abordado de três formas distintas e complementares. Os resultados

obtidos mostram avanços em relação às técnicas existentes, sem contudo esgotar as possibilidades de pesquisa no assunto. A direção adotada para as pesquisas tem como objetivo explorar ao máximo a capacidade do canal, levando a sistemas que aproveitem melhor os recursos disponíveis, como banda de frequência e potência, e também permitam a utilização de equipamentos de baixa complexidade, reduzindo custos e conferindo maior autonomia a dispositivos portáteis.

# Referências Bibliográficas

- [1] LIN, Y.-P., PHOONG, S.-M., “Minimum Redundancy for ISI Free FIR DMT Transceivers”. to be published.
- [2] VAIDYANATHAN, P. P., *Multirate Systems and Filter Banks*. Englewood Cliffs, New Jersey 07632, Prentice-Hall, 1993.
- [3] XIA, X.-G., “New Precoding for Intersymbol Interference Cancellation Using Nonmaximally Decimated Multirate Filterbanks with Ideal FIR Equalizers”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 45, n. 10, pp. 2431–2441, October 1997.
- [4] SCAGLIONE, A., GIANNAKIS, G. B., BARBAROSSA, S., “Redundant Filterbank Precoders and Equalizers Part I: Unification and Optimal Designs”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 47, n. 7, pp. 1988–2006, July 1999.
- [5] STRANG, G., NGUYEN, T., *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge, 2000.
- [6] MITRA, S. K., *Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach*. New York, McGraw-Hill, 1998.
- [7] VAIDYANATHAN, P. P., “Filter Banks in Digital Communications”, *IEEE Circuits and Systems Magazine*, v. 1, n. 2, pp. 4–25, 2001.
- [8] MALVAR, H. S., *Signal Processing with Lapped Transforms*. Artech House, 1992.
- [9] VAIDYANATHAN, P. P., MITRA, S. K., “Polyphase Networks, Block Digital Filterbank, LPTV Systems, and Alias-Free QMF Banks: A Unified Approach

- Based on Pseudocirculants”, *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, v. 36, n. 3, pp. 381–391, March 1988.
- [10] TZANNES, M. A., TZANNES, M. C., PROAKIS, J., *et al.*, “DMT systems, DWMT systems and digital filter banks”. In: *Int. Conf. on Communications*, pp. 311–315, New Orleans, Louisiana, USA, May 1994.
- [11] NEE, R. V., PRASAD, R., *OFDM Wireless Multimedia Communications*. Boston, Artech House, 2000.
- [12] VIHOLAINEN, A., SARAMÄKI, T., RENFORS, M., “Cosine-modulated filter bank design for multicarrier VDSL modems”. In: *IEEE Int. Workshop on Intelligent Signal Processing and Communications Systems*, pp. 143–147, Melbourne, Australia, Nov. 1998.
- [13] MERCHED, R., DINIZ, P. S. R., PETRAGLIA, M., “A delayless alias-free subband adaptive filter structure”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 47, pp. 1580–1591, June 1999.
- [14] LAAKSO, T. I., VÄLIMÄKI, V., KARJALAINEN, M., *et al.*, “Splitting the unit delay”, *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 13, pp. 30–60, Jan 1996.
- [15] VESMA, J., SÄRAMÄKI, T., “Design and properties of polynomial-based fractional delay filters”. In: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, v. 1, pp. 104–107, 2000.
- [16] DINIZ, P. S. R., *Adaptive Filtering, Algorithms and Practical Implementation*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [17] VANDENDORPE, L., CUVELIER, L., DERYCK, F., *et al.*, “Fractionally spaced linear and decision-feedback detectors for transmultiplexers”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 46, n. 4, pp. 996–1011, April 1998.
- [18] NETTO, S. L., DINIZ, P. S. R., “On WLS-Chebyshev IIR digital filters”. In: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, v. 3, pp. 303–306, 1999.

- [19] WANG, Z., GIANNAKIS, G. B., “Wireless multicarrier communications”, *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 29–47, May 2000.
- [20] GOLDSTEIN, J. S., REED, I. S., SCHARF, L. L., “A multistage representation of the Wiener filter based on orthogonal projections”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 44, n. 7, pp. 2943–2959, November 1998.
- [21] HONIG, M. L., GOLDSTEIN, J. S., “Adaptive reduced-rank residual correlation algorithms for DS-CDMA interference suppression”. In: *Proc. 32nd Asilomar Conference on Signals, Systems and Computing*, pp. 29–47, Pacific Grove, CA, November 1998.
- [22] HONIG, M., TSATSANIS, M. K., “Multiuser CDMA receivers”, *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 49–61, May 2000.



# Apêndice A

## Matriz Pseudocirculante

Neste apêndice vamos mostrar que, quando utilizamos transmissão em blocos, o canal pode ser modelado por uma matriz pseudocirculante. A estrutura pseudocirculante surge por incorporarmos as linhas de atrasos e os decimadores/interpoladores ao modelo de canal, como mostrado na Figura A.1.

Inicialmente vamos reescrever o canal  $P(z)$  de forma polifásica[2],

$$P(z) = \sum_{l=0}^{N-1} z^{-l} P_l(z^N). \quad (\text{A.1})$$

Dessa forma, cada elemento do vetor  $\bar{\mathbf{Y}}(z)$  é dado por

$$\begin{aligned} \bar{Y}_m(z) &= z^{-m} U(z) P(z) \\ &= U(z) z^{-m} \sum_{l=0}^{N-1} z^{-l} P_l(z^N) \\ &= U(z) \sum_{l=0}^{N-1} z^{-m-l} P_l(z^N). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

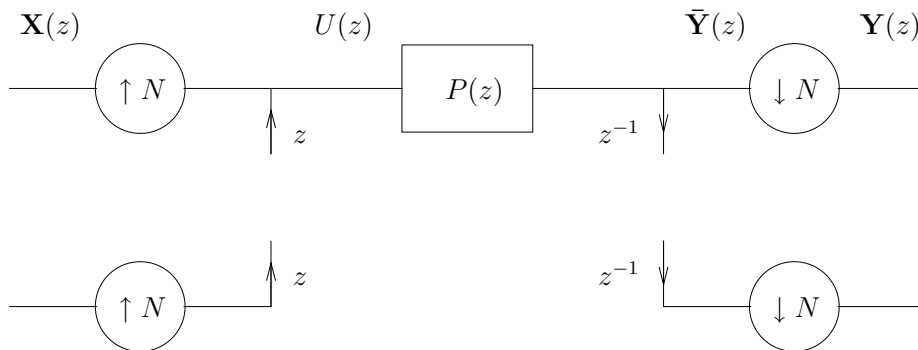


Figura A.1: Transmultiplexador.

Assim, podemos escrever o vetor  $\bar{\mathbf{Y}}(z)$  como

$$\bar{\mathbf{Y}}(z) = U(z) \begin{bmatrix} P_0(z^N) & P_1(z^N) & \cdots & P_{N-1}(z^N) \\ z^{-N} P_{N-1}(z^N) & P_0(z^N) & \cdots & P_{N-2}(z^N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{-N} P_1(z^N) & z^{-N} P_2(z^N) & \cdots & P_0(z^N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-N+1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Vamos definir

$$\hat{\mathbf{U}}(z) := U(z) \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-N+1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Os elementos do vetor  $\hat{\mathbf{U}}(z)$  são dados por

$$\begin{aligned} \hat{U}_m(z) &= z^{-m} \sum_{k=0}^{N-1} z^k X_k(z^N) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} z^{-m+k} X_k(z^N). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Decimando  $\hat{\mathbf{U}}(z)$  por um fator  $N$  obtemos

$$\begin{aligned} (\downarrow N)\{\hat{U}_m(z)\} &= \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (z^{1/N} W_N^r)^{-m+k} X_k((z^{1/N} W_N^r)^N) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{N-1} X_k(z) z^{(-m+k)/N} \sum_{r=0}^{N-1} W_N^{r(-m+k)}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde  $(\downarrow N)\{\cdot\}$  denota a decimação de  $\{\cdot\}$  por um fator  $N$ . Como

$$\sum_{r=0}^{N-1} W_N^{r(m-k)} = \begin{cases} 0 & , -m+k \neq 0 \\ M & , -m+k = 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

então,

$$(\downarrow N)\{\hat{U}_m(z)\} = X_m(z). \quad (\text{A.8})$$

Logo,

$$\mathbf{Y}(z) = (\downarrow N)\{\bar{\mathbf{Y}}(z)\} = \begin{bmatrix} P_0(z) & P_1(z) & \cdots & P_{N-1}(z) \\ z^{-1} P_{N-1}(z) & P_0(z) & \cdots & P_{N-2}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{-1} P_1(z) & z^{-1} P_2(z) & \cdots & P_0(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0(z) \\ X_1(z) \\ \vdots \\ X_{N-1}(z) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Assim concluimos que

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z) &= \begin{bmatrix} P_0(z) & P_1(z) & \cdots & P_{N-1}(z) \\ z^{-1}P_{N-1}(z) & P_0(z) & \cdots & P_{N-2}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{-1}P_1(z) & z^{-1}P_2(z) & \cdots & P_0(z) \end{bmatrix} \mathbf{X}(z) \\ &= \mathbf{C}(z)\mathbf{X}(z), \end{aligned} \tag{A.10}$$

ou seja, a matriz de canal  $\mathbf{C}(z)$ , que relaciona  $\mathbf{X}(z)$  e  $\mathbf{Y}(z)$  é pseudocirculante.

# Apêndice B

## Decomposição Espectral de Matriz Pseudocirculante

Neste apêndice mostraremos como calcular a decomposição espectral de uma matriz pseudocirculante. Para tanto, vamos considerar a seguinte matriz pseudocirculante,  $N \times N$ ,

$$\mathbf{C}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) & \cdots & H_{N-1}(z) \\ z^{-1}H_{N-1}(z) & H_0(z) & \cdots & H_{N-2}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{-1}H_1(z) & z^{-1}H_2(z) & \cdots & H_0(z) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

onde  $H_k(z)$  são polinômios em  $z^{-1}$ .

Por conveniência, vamos definir

$$S(z) := \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} H_k(z^N) \quad (\text{B.2})$$

e também

$$\mathbf{e}(z) := \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-N+1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Logo, podemos reescrever (B.2) como

$$S(z) = \begin{bmatrix} H_0(z^N) & \cdots & H_{N-1}(z^N) \end{bmatrix} \mathbf{e}(z) \quad (\text{B.4})$$

e

$$z^{-1}S(z) = \begin{bmatrix} z^{-N}H_{N-1}(z^N) & H_0(z^N) & \cdots & H_{N-2}(z^N) \end{bmatrix} \mathbf{e}(z) \quad (\text{B.5})$$

O vetor linha em (B.5) é uma versão circulada do vetor linha em (B.4), com um  $z^{-N}$  adicional multiplicando o primeiro elemento. Procedendo dessa forma e escrevendo  $z^{-2}S(z)$ ,  $z^{-3}S(z)$ ,  $\dots$ , obtemos o conjunto de  $N$  equações

$$S(z)\mathbf{e}(z) = \mathbf{C}(z^N)\mathbf{e}(z) \quad (\text{B.6})$$

Podemos estender esse resultado definindo

$$\mathbf{e}_p(z) := \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1}W^{-p} \\ \vdots \\ z^{-N+1}W^{-(N-1)p} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

onde  $W^p = e^{-j2\pi p/N}$ , e observando que

$$S(zW^p) = \begin{bmatrix} H_0(z^N) & \cdots & H_{N-1}(z^N) \end{bmatrix} \mathbf{e}_p(z) \quad (\text{B.8})$$

$$z^{-1}W^{-p}S(zW^p) = \begin{bmatrix} z^{-N}H_{N-1}(z^N) & H_0(z^N) & \cdots & H_{N-2}(z^N) \end{bmatrix} \mathbf{e}_p(z) \quad (\text{B.9})$$

O vetor linha em (B.8) é uma versão circulada do vetor linha em (B.9) com um  $z^{-N}$  adicional multiplicando o primeiro elemento. Procedendo dessa forma, e escrevendo  $z^{-2}W^{-2p}S(z)$ ,  $z^{-3}W^{-3p}S(z)$ ,  $\dots$ , obtemos o conjunto de  $N$  equações

$$S(zW^p)\mathbf{e}_p(z) = \mathbf{C}(z^N)\mathbf{e}_p(z) \quad (\text{B.10})$$

Por sua vez, esse conjunto de  $N$  equações pode ser rearranjado como

$$\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & z^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & z^{-N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(zW^p) \\ W^{-p}S(zW^p) \\ \vdots \\ W^{-(N-1)p}S(zW^p) \end{bmatrix} = \mathbf{C}(z^N) \begin{bmatrix} 1 \\ W^{-p} \\ \vdots \\ W^{-(N-1)p} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Como a equação (B.11) é satisfeita para  $0 \leq p \leq N-1$ , obtemos então  $N$  conjuntos de  $N$  equações em (B.11), que podem ser expressadas de forma compacta como

$$\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{W}^H\mathbf{Q}(z) = \mathbf{C}(z^N)\mathbf{\Lambda}(z)\mathbf{W}^H \quad (\text{B.12})$$

completando a decomposição espectral de  $\mathbf{C}(z^N)$ , onde  $\mathbf{W}$  é a matriz que implementa a DFT de  $N$  pontos,

$$\mathbf{Q}(z) = \begin{bmatrix} S(z) & & & 0 \\ & S(zW) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & S(zW^{N-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

e

$$\mathbf{\Lambda}(z) = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & z^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & z^{-N+1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$