

CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_∞ APLICADO EM MOTORES DE INDUÇÃO

José de Alencar Silva Júnior

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. João Carlos dos Santos Basilio, D. Phil.

Prof. Liu Hsu, D.D'Etat

Prof. Luis Guilherme Barbosa Rolim, Dr.-Ing.

Prof. Paulo Lúcio Silva de Aquino, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2003

SILVA JÚNIOR, JOSÉ DE ALENCAR

Controle Robusto \mathcal{H}_∞ Aplicado em Motores
de Indução [Rio de Janeiro] 2003

XXV, 152 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Elétrica, 2003)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Controle Robusto
2. Controle Vetorial
3. Motor de Indução

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

"São fúteis e cheias de erros as ciências que não nasceram da experimentação,
mãe de todo conhecimento."
(Leonardo da Vinci)

À Selma, Zezinho e Flávia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, pela dedicação e apoio, sem os quais teria sido mais difícil chegar até aqui. À minha esposa, Flávia pela compreensão e incentivo desde quando nos conhecemos. Agradeço também aos professores João Carlos dos Santos Basilio e Luis Guilherme Barbosa Rolim, tutores dedicados, com quem aprendi muito mais do que a teoria da sala de aula e aos professores Pedro Gomes Barbosa pelo incentivo antes do início do mestrado, José Luiz Rezende Pereira e Paulo Augusto Nepomuceno Garcia pela ajuda providencial após o segundo ano. Agradeço aos amigos Júlio C. R. Ferraz, Luis Oscar de A. P. Henriques, Luiz Gustavo Silva Rocha, Ricardo Mota Henriques e Zulmar Soares Machado Junior, pelo companheirismo e convivência saudável nesses anos de jornada. Por fim, agradeço à CAPES cujo apoio financeiro tornou possível o início deste trabalho e ao CEPTEL, principalmente aos engenheiros André Bianco, Antônio Ricardo C. D. Carvalho, Carlos Eduardo V. M. Lopes e Mário Herdade, pela compreensão durante a fase de conclusão, e aos engenheiros Leonardo Pinto de Almeida pela solicitude e Roberto Perret de Magalhães pela ajuda nos momentos finais.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_∞ APLICADO A MOTORES DE INDUÇÃO

José de Alencar Silva Júnior

Março/2003

Orientador: João Carlos dos Santos Basilio

Programa: Engenharia Elétrica

Neste trabalho o projeto de um sistema de controle para motores de indução com abordagem pelo controle vetorial ou orientado pelo campo foi executado. A variável a ser controlada é a velocidade do rotor. Dois problemas \mathcal{H}_∞ são formulados e resolvidos: *(i)* um primeiro problema com objetivo de maximizar o desempenho do sistema, ou seja, a resposta transitória para todos os sinais de quadrado integrável, com a restrição de erro de regime permanente nulo para sinais de referência do tipo degrau; *(ii)* um segundo problema, formulado para maximizar tanto o desempenho do sistema (resposta transitória) quanto a tolerância do sistema a incertezas no modelo da planta. A idéia por trás da formulação do segundo problema é modelar o conhecimento inexato da constante de tempo rotórica (razão entre a indutância e a resistência do rotor) como uma perturbação do modelo nominal, que é suposto conhecido e de primeira ordem, quando a constante de tempo rotórica é conhecida exatamente e a planta é formada por um motor de indução e um inversor ideal. Todos os controladores projetados foram implementados em um sistema real, depois de serem testados em simulações.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

ROBUST \mathcal{H}_∞ CONTROL APPLIED ON INDUCTION MOTORS

José de Alencar Silva Júnior

March/2003

Advisor: João Carlos dos Santos Basilio

Department: Electrical Engineering

In this work, the design of a control system for rotor flux oriented controlled induction motor drives using H_∞ optimal control theory is carried out. The variable to be controlled is the shaft velocity. Two H_∞ problems are formulated and solved: *(i)* a first problem with the view to maximizing the system performance, *i.e.*, the transient response for all square integrable signals with the constraint of zero steady-state error for step reference signal; *(ii)* a second problem formulated for maximizing both the system performance (transient response) and the system tolerance to uncertainty in the plant model. The idea behind the formulation of the second problem is to model the non-exact knowledge of the rotor time constant (the ratio between the rotor inductance and resistance) as a perturbation on the nominal model, which is known to be a first order one, when the rotor time constant is known exactly and the plant is formed by the induction motor and an ideal inverter. All the designed controllers have actually been implemented in a real system, after been tested in simulations.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
2	MODELO MATEMÁTICO DO MOTOR DE INDUÇÃO	6
2.1	MODELO MATEMÁTICO GENERALIZADO DE UMA MÁQUINA CA	7
2.2	CONTROLE ORIENTADO PELO FLUXO DO ROTOR DE UM MOTOR DE INDUÇÃO ALIMENTADO POR CORRENTE	24
2.2.1	Princípio da Orientação pelo Campo	24
2.3	CONCLUSÕES	32
3	CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_∞	33
3.1	PRELIMINARES MATEMÁTICOS	33
3.1.1	Produto Interno e Normas	33
3.1.2	Relação de Parseval e Definição de norma \mathcal{L}_∞ a partir da norma \mathcal{L}_2 induzida	37
3.1.3	Gramianos de controlabilidade e observabilidade, valores sin- gulares de Hankel e norma de Hankel	38
3.2	CARACTERIZAÇÃO DOS OBJETIVOS DE PROJETO EM TERMOS DA NORMA \mathcal{H}_∞ DE UMA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA	39
3.2.1	Problema de estabilidade robusta	40
3.2.2	Rastreamento de sinais e desempenho transitório	42
3.2.3	Rejeição de perturbação	43
3.2.4	Atenuação de ruído	44
3.3	OBJETIVOS DE PROJETO CONFLITANTES	44

3.4	PROBLEMA DE AJUSTE DE MODELOS	46
3.5	ESTABILIZAÇÃO	47
3.5.1	Estabilidade interna	48
3.5.2	Fatoração coprima sobre \mathcal{RH}_∞	49
3.5.3	Parametrização de Youla-Kučera	50
3.6	REDUÇÃO DE PROBLEMAS \mathcal{H}_∞ A PROBLEMAS DE AJUSTE DE MODELOS	53
3.7	CARACTERIZAÇÃO DOS PROBLEMAS DE 1-, 2- E 4-BLOCOS .	54
3.7.1	Fatoração ‘inner’ - ‘outer’ ¹	55
3.7.2	Fatoração espectral	56
3.7.3	Redução do problema de ajuste de modelos a problemas de Nehari	56
3.8	SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE 1- E 2-BLOCOS	59
3.8.1	Solução do Problema de 1-bloco	60
3.8.2	Solução do Problema de 2-blocos	61
3.9	CONCLUSÕES	62
4	IDENTIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO DO MODELO NOMINAL	63
4.1	O SISTEMA COMPLETO, SEUS SENSORES, ATUADORES E SIM- PLIFICAÇÕES	64
4.2	CONCEITOS PRELIMINARES PARA IDENTIFICAÇÃO	69
4.2.1	Perdas e diagrama de fluxo de potência	70
4.2.2	Separando as perdas no cobre do rotor e a potência convertida no circuito equivalente do motor de indução	72
4.3	ENSAIO DO MOTOR A VAZIO	73
4.4	ENSAIO PARA A RESISTÊNCIA DO ESTATOR	75
4.5	ENSAIO COM ROTOR BLOQUEADO	76
4.6	RESULTADOS DOS ENSAIOS DO MOTOR A VAZIO, PARA A RESISTÊNCIA DO ESTATOR E COM ROTOR BLOQUEADO . .	79
4.7	ENSAIO DE RESPOSTA AO DEGRAU	83
4.8	RESULTADOS DO ENSAIO DE RESPOSTA AO DEGRAU	84

¹Como não existe na literatura uma tradução consagrada para a língua portuguesa dos termos ‘inner’ / ‘outer’, neste trabalho serão mantidos os termos originais.

4.9	VALIDAÇÃO DO MODELO PARA SIMULAÇÃO	85
4.10	CONCLUSÕES	87
5	PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLADORES ROBUSTOS \mathcal{H}_∞	88
5.1	PROJETO DO CONTROLADOR A PARTIR DE UM PROBLEMA \mathcal{H}_∞ DE 1-BLOCO	88
5.2	RESULTADOS EXPERIMENTAIS OBTIDOS A PARTIR DOS CONTROLADORES \mathcal{H}_∞ DE 1-BLOCO	91
5.2.1	Resultados para $\bar{\tau} = 5\tau$	92
5.2.2	Resultados para $\bar{\tau} = \tau$	97
5.2.3	Resultados para $\bar{\tau} = \tau/5$	102
5.2.4	Análise dos resultados	107
5.3	PROJETO DO CONTROLADOR A PARTIR DE UM PROBLEMA \mathcal{H}_∞ DE 2-BLOCOS	107
5.4	RESULTADOS EXPERIMENTAIS OBTIDOS A PARTIR DOS CONTROLADORES \mathcal{H}_∞ DE 2-BLOCOS	114
5.4.1	Resultados para $W_1(s) = \frac{(s+3)}{(s+10)}$ e $W_2(s) = \frac{0.1(s+0.1)}{(s+0.01)}$	115
5.4.2	Resultados para $W_1(s) = \frac{(s+3)}{(s+10)}$ e $W_2(s) = \frac{0.1(s+1)}{(s+0.01)}$	121
5.4.3	Resultados para $W_1(s) = \frac{(s+30)}{(s+100)}$ e $W_2(s) = \frac{0.1(s+1)}{(s+0.01)}$	127
5.5	CONCLUSÕES	133
6	CONCLUSÃO	134
	Apêndice A - LISTAGEM DO PROGRAMA PRINCIPAL DE INTERFACE E CONTROLE	140
	Apêndice B - LISTAGEM DO PROGRAMA PARA CÁLCULO DOS CONTROLADORES A PARTIR DO PROBLEMA DE 2-BLOCOS	148

Lista de Figuras

2.1	Seção transversal do motor de indução	8
2.2	Vetor corrente complexo	10
2.3	Distribuição do enrolamento da fase 1.	12
2.4	Acoplamentos magnéticos e tensões	16
2.5	Distribuição de corrente do rotor e torque.	20
2.6	Relações angulares entre vetores corrente para $ \underline{i}_{mR} = i_{Sd}$	25
2.7	Diagrama de blocos do motor de indução em coordenadas de campo, supondo imposição das correntes do estator.	29
2.8	Diagrama de blocos do motor de indução, usado para simulação.	31
3.1	Diagrama polar de $f(s)$ tangenciando um círculo de raio igual a $\ f\ _\infty$	35
3.2	Gráfico de $ f(j\omega) $	36
3.3	Diagrama de blocos de um modelo de planta com incerteza.	40
3.4	Diagrama de blocos para o projeto de controladores ótimos \mathcal{H}_∞	42
3.5	Diagrama de blocos para o problema de ajuste de modelos.	47
3.6	Diagrama de blocos para análise da estabilidade interna do sistema da Figura 3.4.	48
4.1	Diagrama esquemático do sistema montado em bancada.	65
4.2	Diagrama de blocos do sistema em malha aberta, usado para simulação.	67
4.3	Diagrama de blocos do sistema em malha fechada, usado para simulação.	68
4.4	Circuito equivalente por fase de um motor de indução.	69
4.5	Diagrama de fluxo de potência de um motor de indução.	70
4.6	Circuito equivalente por fase com P_{CR} e P_{conv} separados.	72

4.7	Ensaio sem carga de um motor de indução: (a) Circuito de teste. (b) O circuito equivalente resultante. Note que sem carga a impedância do motor é essencialmente a combinação em série de R_S , jX_1 e jX_{mag} .	73
4.8	Ensaio para determinar a resistência do estator.	75
4.9	O ensaio com rotor bloqueado: (a)Circuito de teste. (b)Circuito equivalente do motor.	77
4.10	Ensaio de resposta ao degrau: (a) i_{sqref} e (b) ω	84
4.11	Respostas em malha aberta para o sistema real (linha contínua) e para o modelo (linha pontilhada) em várias faixas de operação do motor.	86
5.1	Respostas em malha fechada do sistema real (linha contínua) e do modelo (linha pontilhada) em três faixas de operação do motor, usando o controlador PI obtido a partir do problema de 1-bloco, com $\bar{\tau} = 5\tau$. Coluna da esquerda: Tempo(segundos) $\times i_{sqref}$ (A). Coluna da direita: Tempo(segundos) \times velocidade angular (rpm).	93
5.2	Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 1-bloco (PI), com $\bar{\tau} = 5\tau$. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de +50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro. . .	94
5.3	Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 1-bloco (PI), com $\bar{\tau} = 5\tau$. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de -50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro. . .	95
5.4	Gráficos de ruído percentual das curvas de i_{sqref} do sistema real, extraídos da coluna da esquerda da Figura 5.1.	96
5.5	Respostas em malha fechada do sistema real (linha contínua) e do modelo (linha pontilhada) em três faixas de operação do motor, usando o controlador PI obtido a partir do problema de 1-bloco, com $\bar{\tau} = \tau$. Coluna da esquerda: Tempo(segundos) $\times i_{sqref}$ (A). Coluna da direita: Tempo(segundos) \times velocidade angular (rpm).	98

5.6	Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 1-bloco (PI), com $\bar{\tau} = \tau$. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de +50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.	99
5.7	Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 1-bloco (PI), com $\bar{\tau} = \tau$. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de -50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.	100
5.8	Gráficos de ruído percentual das curvas de i_{Sqref} do sistema real, extraídos da coluna da esquerda da Figura 5.5.	101
5.9	Respostas em malha fechada do sistema real (linha contínua) e do modelo (linha pontilhada) em três faixas de operação do motor, usando o controlador PI obtido a partir do problema de 1-bloco, com $\bar{\tau} = \tau/5$. Coluna da esquerda: Tempo(segundos) $\times i_{Sqref}$ (A). Coluna da direita: Tempo(segundos) \times velocidade angular (rpm).	103
5.10	Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 1-bloco (PI), com $\bar{\tau} = \tau/5$. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de +50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.	104
5.11	Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 1-bloco (PI), com $\bar{\tau} = \tau/5$. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de -50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.	105
5.12	Gráficos de ruído percentual das curvas de i_{Sqref} do sistema real, extraídos da coluna da esquerda da Figura 5.9.	106
5.13	Respostas em frequência do sistema real, para diferentes valores da constante de tempo rotórica estimada T_R' . (+) +50% de erro, (o) 0% de erro e (*) -50% de erro.	109
5.14	Curvas de $\max\left(\left \frac{g_{i2}e^{j\phi_{i2}}}{g_i e^{j\phi_i}} - 1\right , \left \frac{g_{i3}e^{j\phi_{i3}}}{g_i e^{j\phi_i}} - 1\right \right)$ (+) e $ W_1(s) $ (*), para $a_1 = 0.2$, $b_1 = 131$ e $c_1 = 23$	110

5.15	Curvas de $ 1 \pm W_1(jw) G(jw) $ envolvendo as curvas de módulo obtidas experimentalmente a partir do sistema real, para diferentes valores da constante de tempo rotórica estimada T_R' . (+) +50% de erro, (o) 0% de erro e (*) -50% de erro.	111
5.16	Curvas de módulo das funções de peso para $W_1(s) = \frac{(s+3)}{(s+10)}$ e $W_2(s) = \frac{0.1(s+0.1)}{(s+0.01)}$	116
5.17	Respostas em malha fechada do sistema real (linha contínua) e do modelo (linha pontilhada) em três faixas de operação do motor, usando um controlador obtido a partir do problema de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.16. Coluna da esquerda: Tempo(segundos) $\times i_{Sqref}$ (A). Coluna da direita: Tempo(segundos) \times velocidade angular (rpm). . .	117
5.18	Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.16. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de +50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.	118
5.19	Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.16. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de -50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.	119
5.20	Gráficos de ruído percentual das curvas de i_{Sqref} do sistema real, extraídos da coluna da esquerda da Figura 5.17.	120
5.21	Curvas de módulo das funções de peso para $W_1(s) = \frac{(s+3)}{(s+10)}$ e $W_2(s) = \frac{0.1(s+1)}{(s+0.01)}$	122
5.22	Respostas em malha fechada do sistema real (linha contínua) e do modelo (linha pontilhada) em três faixas de operação do motor, usando um controlador obtido a partir do problema de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.21. Coluna da esquerda: Tempo(segundos) $\times i_{Sqref}$ (A). Coluna da direita: Tempo(segundos) \times velocidade angular (rpm). . .	123

5.23	Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.21. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de +50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.	124
5.24	Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.21. coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de -50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.	125
5.25	Gráficos de ruído percentual das curvas de i_{Sqref} do sistema real, extraídos da coluna da esquerda da Figura 5.22.	126
5.26	Curvas de módulo das funções de peso para $W_1(s) = \frac{(s+30)}{(s+100)}$ e $W_2(s) = \frac{0.1(s+1)}{(s+0.01)}$	128
5.27	Respostas em malha fechada do sistema real (linha contínua) e do modelo (linha pontilhada) em três faixas de operação do motor, usando um controlador obtido a partir do problema de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.26. Coluna da esquerda: Tempo(segundos) $\times i_{Sqref}$ (A). Coluna da direita: Tempo(segundos) \times velocidade angular (rpm). . .	129
5.28	Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.26. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de +50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.	130
5.29	Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.26. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de -50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro. Usando um controlador obtido a partir do problema de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.26.	131
5.30	Gráficos de ruído percentual das curvas de i_{Sqref} do sistema real, extraídos da coluna da esquerda da Figura 5.27.	132

Lista de Tabelas

3.1	Faixas de frequência dos objetivos de controle.	46
4.1	Tabela para divisão das reatâncias do estator e do rotor.	79
4.2	Tabela com os valores das medidas efetuadas no ensaio para a resistência do estator.	80
4.3	Tabela com os valores das medidas efetuadas no ensaio com rotor bloqueado.	80
4.4	Tabela com os valores das medidas efetuadas no ensaio do motor a vazio.	82
4.5	Tabela com os valores calculados a partir dos ensaios de resposta ao degrau.	85

Lista de Símbolos

Constantes, funções e variáveis

A, B, C, D	matrizes para representação em espaço de estados
$a_R(\beta, t)$	distribuição de corrente ao longo da circunferência do rotor
B	densidade de fluxo
$B_{RR}(\beta, t)$	parcela de $B_R(\beta, \varepsilon, t)$ produzida pelas correntes do rotor
$B_{RS}(\beta, \varepsilon, t)$	parcela de $B_R(\beta, \varepsilon, t)$ produzida pelas correntes do estator
$B_S(\alpha, \varepsilon, t), B_R(\beta, \varepsilon, t)$	densidades de fluxo no entreferro, na superfície do estator e do rotor
$e_\omega(t)$	sinal de erro de velocidade
$E_\omega(s)$	transformada de Laplace de $e_\omega(t)$
f	coeficiente de atrito viscoso
FP	fator de potência ($\cos\theta$)
$G(s)$	matriz ou função de transferência da planta
$G_p(s)$	matriz ou função de transferência da planta com perturbação
h	– espessura do entreferro – período de amostragem
h_{chaves}	período de amostragem para aquisição e comparação das correntes/acionamento das chaves do inversor

h_{cont}	período de amostragem para aquisição do valor de $\omega(t)$ /cálculo de i_{Sqref} (malha de controle propriamente dita)
H	intensidade de campo
$\underline{i}_{mR}(t)$	vetor corrente de magnetização
$i_{mR}(t)$	módulo de $\underline{i}_{mR}(t)$
$I_{mR}(s)$	transformada de Laplace de $i_{mR}(t)$
$i_{mR}'(t)$	valor estimado de $i_{mR}(t)$
$I_{mR}'(s)$	transformada de Laplace de $i_{mR}'(t)$
$i_{R1}(t), i_{R2}(t), i_{R3}(t)$	correntes das fases 1, 2 e 3 do rotor
$\underline{i}_S(t), \underline{i}_R(t)$	vetores corrente de estator e de rotor
$i_S(t), i_R(t)$	módulos de $\underline{i}_S(t)$ e $\underline{i}_R(t)$
$i_{Sa}(t), i_{Sb}(t)$	componentes direta e de quadratura de $\underline{i}_S(t)$ quando decomposto sobre um par de eixos definido pelo eixo do enrolamento da fase 1 do estator
$i_{Sd}(t), i_{Sq}(t)$	componentes direta e de quadratura de $\underline{i}_S(t)$ quando decomposto sobre um par de eixos definido por $\underline{i}_{mR}(t)$
$I_{Sd}(s), I_{Sq}(s)$	transformadas de Laplace de $i_{Sd}(t)$ e $i_{Sq}(t)$
$i_{Sdref}(t), i_{Sqref}(t)$	correntes de referência para $i_{Sd}(t)$ e $i_{Sq}(t)$
$I_{Sdref}(s), I_{Sqref}(s)$	transformadas de Laplace de $i_{Sdref}(t)$ e $i_{Sqref}(t)$
$i_{S1}(t), i_{S2}(t), i_{S3}(t)$	correntes das fases 1, 2 e 3 do estator
$I_{S1}(s), I_{S2}(s), I_{S3}(s)$	transformadas de Laplace de $i_{S1}(t)$, $i_{S2}(t)$ e $i_{S3}(t)$
$i_{S1ref}(t), i_{S2ref}(t), i_{S3ref}(t)$	correntes de referência para $i_{S1}(t)$, $i_{S2}(t)$ e $i_{S3}(t)$
$I_{CC}(t)$	corrente contínua, no ensaio para a resistência do estator do motor de indução
$I_L(t)$	média aritmética simples de $I_{L1}(t)$, $I_{L2}(t)$ e $I_{L3}(t)$
$I_{L1}(t), I_{L2}(t), I_{L3}(t)$	correntes de linha, nos ensaios do motor de indução
$I_{mag}(t)$	corrente de magnetização, por fase, nos ensaios do motor de indução
$I_S(t), I_R(t)$	correntes de fase do estator e do rotor, nos ensaios do motor de indução

j	$\sqrt{-1}$
J	momento de inércia
k	– fator de acoplamento global – índice para valor atual de variáveis na equação a diferenças
k_{abs}	ganho do modelo matemático do motor de indução
k_M	constante da equação de torque
k_p	ganho proporcional do controlador PI
$K(s)$	função de transferência do controlador
l	comprimento axial
L_{mag}	indutância de magnetização
L_{mut}	indutância mútua
L_S, L_R	indutâncias próprias, por fase, do estator e do rotor
L_1, L_2	indutâncias de dispersão, por fase, do estator e do rotor
$m_L(\varepsilon, \omega, t)$	torque de carga
$m_M(t)$	torque elétrico
$M(s), \tilde{M}(s)$	"denominadores" da fatoração duplamente coprima de $G(s)$
$n_S(\alpha)$	densidade de condutores do estator
$N(s), \tilde{N}(s)$	"numeradores" da fatoração duplamente coprima de $G(s)$
N_S, N_R	número de voltas dos enrolamentos de cada fase do estator e do rotor
$P_{ale}(t)$	potência atribuída às perdas aleatórias
$P_{A\&V}(t)$	potência que representa as perdas por atrito e ventilação
$P_{CE}(t)$	potência que representa as perdas no cobre dos enrolamentos do estator
$P_{conv}(t)$	potência convertida da forma elétrica para a forma mecânica

$P_{CR}(t)$	potência que representa as perdas no cobre dos enrolamentos do rotor
$P_{EF}(t)$	potência do entreferro
$P_{nu}(t)$	potência que representa as perdas no núcleo, por histerese e correntes parasitas no estator
$P_{sai}(t)$	potência na ponta do eixo do motor
$Q(s)$	função incógnita do problema de ajuste de modelos
r	raio do rotor
R_{conv}	resistência que "dissipa" $P_{conv}(t)$
R_{nu}	resistência que dissipa $P_{nu}(t)$
R_{RB}	resistência de rotor bloqueado
R_S, R_R	resistência por fase, do estator e do rotor
s	variável de Laplace
S	escorregamento
$S(s)$	função de transferência de sensibilidade
t	tempo
t_i	constante de tempo de integração do controlador PI
$T(s)$	função de transferência complementar de $S(s)$ (f. t. de malha fechada)
T_R, T_R'	constante de tempo rotórica e seu valor estimado
$T_{dy}(s)$	função de transferência do sinal de distúrbio para o sinal de saída
$T_{re}(s)$	função de transferência do sinal de referência para o sinal de erro
$T_{vz}(s)$	função de transferência do problema de ajuste de modelos
$T_{\eta y}(s)$	função de transferência do sinal de ruído para o sinal de saída
$u_{R1}(t), u_{R2}(t), u_{R3}(t)$	tensões fase-neutro das fases 1, 2 e 3 do rotor
$u_{S1}(t), u_{S2}(t), u_{S3}(t)$	tensões fase-neutro das fases 1, 2 e 3 do estator
$T_1(s), T_2(s), T_3(s)$	matrizes ou funções de transferência do problema de ajuste de modelos

$\underline{u}_S(t), \underline{u}_R(t)$	vetores tensão de estator e de rotor
$V_{CC}(t)$	média aritmética simples de $V_{CC1}(t)$, $V_{CC2}(t)$ e $V_{CC3}(t)$
$V_{CC1}(t), V_{CC2}(t), V_{CC3}(t)$	tensão contínua sobre os enrolamentos das fases 1, 2 e 3 do estator, no ensaio para a resistência do estator
$V_L(t)$	tensão de linha nos ensaios do motor de indução
$V_S(t)$	tensão fase-neutro dos enrolamentos do estator nos ensaios do motor de indução
W_c, W_o	gramianos de controlabilidade e observabilidade
$W_1(s), W_2(s)$	matrizes ou funções de ponderação nos problemas \mathcal{H}_∞
X_{mag}	reatância de magnetização, por fase, do motor de indução
X_{RB}	reatância de rotor bloqueado, na frequência nominal
X'_{RB}	reatância de rotor bloqueado, na frequência de ensaio
X_1, X_2	reatâncias de dispersão, por fase, do estator e do rotor
X'_1, X'_2	reatâncias de dispersão, por fase, do estator e do rotor, na frequência de ensaio
z	variável da transformada z
Z_{eq}	impedância equivalente
Z_o	fator espectral para solução do problema de 2-blocos
Z_{RB}	impedância de rotor bloqueado
α	– coordenada angular, com referência ao eixo do enrolamento da fase 1 do estator – $\inf(\ T_1 - T_2QT_3\ _\infty : Q \in \mathcal{RH}_\infty)$
β	coordenada angular, com referência ao eixo do enrolamento da fase 1 do rotor

γ	$-2\pi/3$ – variável para o método da bissecção
γ_0	$\ R_2\ _\infty$
γ^*	valor convergido através do método da bissecção para solução do problema de 2-blocos
$\delta(j\omega)$	função real não negativa
$\delta(t)$	sinal de posição angular de $\dot{i}_S(t)$, com relação ao eixo definido por \dot{i}_{mR}
$\Delta(s)$	função de perturbação
$\Delta_a(s), \Delta_p(s)$	funções de perturbação aditiva e multiplicativa
$\varepsilon(t)$	sinal de posição angular do rotor, com relação ao eixo do enrolamento da fase 1 do estator
$\mathcal{E}(s)$	transformada de Laplace de $\varepsilon(t)$
$\zeta(t)$	sinal de posição angular de $\dot{i}_S(t)$, com relação ao eixo do enrolamento da fase 1 do estator
θ	ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente de linha nos ensaios do motor de indução
Θ	força magneto-motriz (fmm)
$\Theta(\alpha, \varepsilon, t)$	fmm resultante (superposição de $\Theta_S(\alpha, t)$ e $\Theta_R(\alpha, \varepsilon, t)$)
$\Theta_R(\alpha, \varepsilon, t), \Theta_R(\beta, t)$	fmm do rotor
$\Theta_S(\alpha, t)$	fmm do estator (superposição de $\Theta_{S1}(\alpha, t)$, $\Theta_{S2}(\alpha, t)$ e $\Theta_{S3}(\alpha, t)$)
$\Theta_{S1}(\alpha, t), \Theta_{S2}(\alpha, t), \Theta_{S3}(\alpha, t)$	fmm devida aos enrolamentos das fases 1, 2 e 3 do estator
λ	coordenada angular para integração, com relação ao eixo do enrolamento da fase 1 do estator, devido à distribuição não uniforme dos enrolamentos
μ_0	constante de permeabilidade do ar
$\xi(t)$	sinal de posição angular de $\dot{i}_R(t)$, com relação ao eixo do enrolamento da fase 1 do rotor

π	3.14159265359
$\rho(t)$	sinal de posição angular de $\underline{i}_{mR}(t)$, com relação ao eixo do enrolamento da fase 1 do estator
$\rho(s)$	transformada de Laplace de $\rho(t)$
$\rho'(t)$	valor estimado de $\rho(t)$
$\rho'(s)$	transformada de Laplace de $\rho'(t)$
σ	fator de dispersão total
σ_S, σ_R	fatores de dispersão do estator e do rotor
τ	constante de tempo no modelo matemático do motor de indução
$\bar{\tau}$	pólo introduzido na função $Q(s)$ para torná-la própria, nos cálculos de controladores \mathcal{H}_∞
$\psi_{R1}(t), \psi_{R2}(t), \psi_{R3}(t)$	fluxos enlaçados pelos enrolamentos das fases 1, 2 e 3 do rotor
$\psi_{S1}(t), \psi_{S2}(t), \psi_{S3}(t)$	fluxos enlaçados pelos enrolamentos das fases 1, 2 e 3 do estator
$\underline{\psi}_S(t), \underline{\psi}_R(t)$	vetores de fluxo enlaçado, de estator e de rotor
ω	freqüência angular
$\omega(t)$	sinal de velocidade angular do rotor, com relação ao estator
$\omega(s)$	transformada de Laplace de $\omega(t)$
$\omega_{mR}(t)$	sinal de velocidade angular de $\underline{i}_{mR}(t)$, com relação ao estator
$\omega_{mR}(s)$	transformada de Laplace de $\omega_{mR}(t)$
$\omega_{mR}'(t)$	valor estimado de $\omega_{mR}(t)$
$\omega_{mR}'(s)$	transformada de Laplace de $\omega_{mR}'(t)$
$\omega_{ref}(t)$	sinal de velocidade angular de referência para $\omega(t)$
$\omega_{ref}(s)$	transformada de Laplace de $\omega_{ref}(t)$
$\omega_1(t)$	– sinal de velocidade angular de $\underline{i}_S(t)$, com relação ao estator – freqüência angular das correntes $i_{S1}(t)$, $i_{S2}(t)$ e $i_{S3}(t)$

$\omega_1(s)$	transformada de Laplace de $\omega_1(t)$
ω_{1nom}	freqüência angular ω_1 nominal do motor
ω_{1ens}	freqüência angular ω_1 de ensaio do motor
$\omega_2(t)$	– sinal de velocidade angular de $\dot{i}_{mR}(t)$, com relação ao rotor – freqüência angular das correntes $i_{R1}(t)$, $i_{R2}(t)$ e $i_{R3}(t)$
$\omega_2(s)$	transformada de Laplace de $\omega_2(t)$
$\omega_2'(t)$	valor estimado de $\omega_2(t)$
$\omega_2'(s)$	transformada de Laplace de $\omega_2'(t)$

Conjuntos, espaços, notações e operadores

\mathbb{C}	conjunto dos números complexos
\mathbb{N}	conjunto dos números naturais
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
ℓ_2	espaço das funções em \mathbb{R} de quadrado integrável
\mathcal{RL}_2	espaço das funções racionais estritamente próprias, sem pólos no eixo imaginário
\mathcal{RL}_∞	espaço das funções racionais, próprias, sem pólos no eixo imaginário
\mathcal{RH}_∞	espaço das funções racionais, próprias e estáveis
\mathcal{RH}_∞^+	espaço das funções racionais, próprias e anti-estáveis
\mathcal{P}_m	classe de plantas com perturbação multiplicativa
$\inf [.]$	ínfimo
$\max [.]$	máximo
$\min [.]$	mínimo
$\text{Re} (.)$	parte real
$\text{Im} (.)$	parte imaginária
$K(s)$ est $G(s)$	$K(s)$ que estabiliza $G(s)$

$ \cdot $	módulo
$\ \cdot\ $	norma
$\ \cdot\ _\infty$	norma infinita
$\ \cdot\ _2$	norma 2 ou norma euclidiana
$\ \cdot\ _H$	norma de Hankel
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produto interno
$[\cdot]^*$	complexo conjugado transposto
$[\cdot]^T$	transposto
$[\cdot]_i, [\cdot]_{ci}$	matriz ou função de transferência "inner" e "co-inner"
$[\cdot]_o, [\cdot]_{co}$	matriz ou função de transferência "outer" e "co-outer"
$\mathcal{F}[\cdot]$	transformada de Fourier
$\bar{\sigma}(\cdot)$	maior valor singular

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

As idéias fundamentais a respeito do motor de indução foram desenvolvidas em meados de 1880 por Nicola Tesla. Houve um período inicial de rápido desenvolvimento sobre as idéias básicas seguido de aperfeiçoamentos que vêm sendo implementados até os dias de hoje. O formato do motor de indução utilizado atualmente apareceu entre 1888 e 1895. Nesse período o rotor gaiola de esquilo foi apresentado. Em 1896 motores de indução trifásicos já eram disponíveis comercialmente e hoje é o motor elétrico mais utilizado. Sua invenção deu um forte impulso para a transição de DC para AC no campo da geração, transmissão e distribuição de energia elétrica. Sua principal vantagem é a eliminação de todos os contatos deslizantes, resultando em uma construção extraordinariamente simples e robusta.

Embora os problemas de controlar eficientemente a velocidade dos motores de indução têm sido investigados por décadas, todas as soluções realizáveis até poucos anos atrás eram insatisfatórias com respeito à complexidade, eficiência, desempenho dinâmico ou custo. Somente devido ao progresso da tecnologia dos semicondutores nos últimos 35 anos é que conversores de frequência estáticos satisfatórios puderam ser construídos a custo aceitável, fazendo do motor de indução o mais promissor dispositivo de velocidade ajustável para muitas aplicações.

A substituição do comutador, atuando como um conversor mecânico, por um conversor de estado sólido de eletrônica de potência, reduz a máquina AC somente à tarefa de conversão eletromecânica de energia, resultando em muito mais densidade de potência por volume ou massa. Além disso, o aperfeiçoamento contínuo da qualidade dos aços, das técnicas de fundição, do isolamento e das características de

construção também contribuíram para a diminuição do volume do motor em relação a uma mesma potência e para a redução do seu custo.

Sistemas de controle são projetados para que certos sinais, tais como erros e entradas de atuadores, não excedam níveis pré-especificados. Devem ser levadas em conta também as incertezas sobre a planta a ser controlada (os modelos usados para representar sistemas físicos são meras idealizações) e os erros nas medidas de sinais (os sensores não possuem precisão infinita). A respeito da aparentemente óbvia necessidade de se considerar incertezas em plantas explicitamente nos problemas de controle, apenas no início da década de 1980 os pesquisadores de controle restabeleceram a ligação com o trabalho clássico de Bode e outros, formulando uma noção sobre incerteza matematicamente tratável em uma estrutura básica de entrada-saída e desenvolvendo técnicas matemáticas rigorosas para considerá-la [1], [2], [3].

Este trabalho propõe o projeto e implementação de um sistema de controle para motores de indução com abordagem pelo controle vetorial ou orientado pelo campo, que tenha uma resposta dinâmica razoável e seja pouco sensível a variações nos parâmetros da planta, mais especificamente variações no valor da constante de tempo rotórica estimada. Por esse motivo escolheu-se aplicar a teoria de controle robusto \mathcal{H}_∞ no projeto de compensadores para o sistema, apesar de se tratar de um problema não linear. Entretanto, pode-se obter um modelo linear para a planta através do controle orientado pelo campo. A variável a ser controlada é a velocidade do rotor. Dois problemas \mathcal{H}_∞ são formulados e resolvidos: *(i)* um problema de 1-bloco com objetivo de maximizar o desempenho do sistema, ou seja, a resposta transitória para todos os sinais de quadrado integrável, com a restrição de erro de regime permanente nulo para sinais de referência do tipo degrau; *(ii)* um problema de 2-blocos, formulado para maximizar tanto o desempenho do sistema (resposta transitória) quanto a tolerância do sistema a incertezas no modelo da planta. A idéia por trás da formulação do problema de 2-blocos é modelar o conhecimento inexato da constante de tempo rotórica (razão entre a indutância e a resistência do rotor) como uma perturbação do modelo nominal, que é suposto conhecido e de primeira ordem, quando a constante de tempo rotórica é conhecida exatamente e a planta é formada por um motor de indução e um inversor ideal. Todos os controladores projetados foram implementados em um sistema real.

A aplicação de controle robusto \mathcal{H}_∞ em motores de indução é um tema que já foi abordado por outros autores. Attaianese e Tomasso [4] fizeram uso de controle vetorial e da teoria de controle \mathcal{H}_∞ para controlar a velocidade de motores de indução e concluíram através da comparação entre resultados experimentais e simulados que o procedimento é válido para o projeto de controladores, além de confirmar que pode-se alcançar bom desempenho dinâmico e robustez quanto a variações nos parâmetros do sistema e distúrbios externos. Makouf *et al.* [5] exploraram o tema robustez e estabilidade de uma estrutura de controle \mathcal{H}_∞ de motor de indução orientado pelo campo quanto a distúrbios internos e externos, usando linearização por realimentação, concluindo, por meio de resultados simulados, que os objetivos de rastreamento e rejeição de distúrbios foram alcançados. Chiaverini *et al.* [6] projetaram um controlador de velocidade robusto usando técnica \mathcal{H}_∞ , orientação pelo campo e linearização por realimentação, obtendo dois subsistemas lineares desacoplados representando a velocidade do rotor e a dinâmica da norma do fluxo, supondo medição completa dos estados. Concluíram com base em resultados simulados, que houve um bom comportamento do motor de indução quanto a variações do tipo degrau no torque de carga. Cauët *et al.* [7] abordaram o projeto de controladores baseado em L.M.I e modelo politópico com vistas a aplicação em sistemas não lineares sujeitos a variações de parâmetros. Primeiramente usaram modelagem politópica para expressar a variação paramétrica do modelo linearizado e, em seguida, uma técnica de projeto mista $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ baseada em um modelo de referência, foi usada para garantir os objetivos de projeto. Em seguida analisaram a estabilidade robusta do sistema em malha fechada linearizado, na presença das não linearidades ignoradas no processo de síntese do controlador, usando funções de Lyapunov. O método foi aplicado com sucesso em um motor de indução sujeito a variações de resistência e indutância.

Mais autores podem ser citados, no que diz respeito à aplicação de técnicas não lineares para controle de motores de indução. Ortega *et al.* [8] propõem o projeto de um controlador não linear, globalmente estável, para regulação de torque de motores de indução, sem medição de variáveis do rotor e sem singularidades no controlador; a metodologia se aplica ao controle vetorial. Espinosa-Pérez *et al.* [9] apresentam um controlador não linear, globalmente estável, para rastreamento de

torque e regulação de fluxo de motores de indução; a metodologia requer medição das variáveis do estator e da velocidade do rotor. Ortega *et al.* [10] calculam um controlador não linear para rastreamento de velocidade, que não requer observadores de estado, utilizando um filtro linear para o erro de velocidade. Nos artigos de Ortega *et al.* [8] e [10] e Espinosa-Pérez *et al.* [9] somente resultados de simulações são apresentados. Ortega *et al.* [11] apresentam um controlador para orientação pelo fluxo, de motores de indução alimentados por corrente, em tempo discreto, que garante regulação assintótica global, assim como rastreamento da norma do fluxo. Wit *et al.* [12] investigam a questão da robustez quanto a incertezas paramétricas dentro do contexto de orientação pelo fluxo. Condições para estabilidade assintótica local e global, assim como limitantes para todos os sinais são obtidos. Kim *et al.* [13] apresentam uma comparação teórica e experimental entre dois controladores não lineares recentes para regulação de velocidade de motores de indução alimentados por corrente; trata-se do controlador baseado em passividade (PBC) e do controlador adaptativo baseado em observadores (OBAC). Marino *et al.* [14] [15] propõem o projeto de um controlador adaptativo para motores de indução alimentados por corrente, supondo medição da velocidade do rotor e correntes do estator, garantindo rastreamento exponencial global, da velocidade e do fluxo do rotor, usando um estimador de sétima ordem. Chiasson [16] apresenta uma nova abordagem para o controle do motor de indução usando linearização por realimentação. Considerando o modelo d-q do motor, ele mostra que existe uma única transformação linear por realimentação, que é válida enquanto a magnitude do fluxo do rotor for não nula. Furtunato *et al.* [17] apresentam um sistema de controle de velocidade de um motor de indução através de controle vetorial com orientação pelo fluxo do rotor indireto. A estratégia é o controle adaptativo por modelo de referência e estrutura variável, destinada ao controle de plantas com incertezas. Em Marino *et al.* [14] e Furtunato *et al.* [17] resultados experimentais são apresentados.

A construção de um sistema de controle geralmente envolve muitos passos. Um cenário típico é descrito a seguir:

- i) Estudar o sistema a ser controlado e decidir quais tipos de sensores e atuadores serão utilizados e onde eles serão inseridos.
- ii) Modelar o sistema resultante a ser controlado.

- iii) Simplificar o modelo, se necessário, para que ele seja tratável.
- iv) Analisar o modelo resultante e determinar suas propriedades.
- v) Escolher os objetivos de controle.
- vi) Escolher o tipo de controlador a ser usado.
- vii) Projetar um controlador que atenda as especificações, se for possível; se não for, modificar os objetivos ou generalizar o tipo de controlador procurado.
- viii) Simular o sistema de controle resultante, seja em computador, seja em planta piloto.
- ix) Retornar ao passo 1 se for necessário.
- x) Escolher o *hardware* e o *software* e implementar o controlador.
- xi) Ajustar o controlador no "campo", se for necessário.

Ao longo do tempo foram desenvolvidos vários modelos matemáticos para representar o funcionamento do motor de indução. Existem modelos que dão ênfase ao comportamento do motor em regime permanente [18] e modelos mais complexos, que se preocupam em representar satisfatoriamente o regime transitório da máquina [19]. Para tanto, o capítulo 2 apresenta detalhadamente a modelagem matemática do motor de indução, com vistas à aplicação do controle vetorial ou controle orientado pelo campo. A base matemática para o cálculo de controladores, utilizando técnicas de controle robusto \mathcal{H}_∞ , está desenvolvida no capítulo 3. Os ensaios para identificação dos parâmetros e validação do modelo matemático da planta são descritos no capítulo 4. Os objetivos de controle e o projeto dos controladores \mathcal{H}_∞ resultantes dos problemas de 1- e 2-blocos, assim como os resultados obtidos na implementação desses controladores em bancada estão apresentados no capítulo 5. Finalmente, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões e comentários sobre o trabalho desenvolvido, além de propostas para a continuação do mesmo.

Capítulo 2

MODELO MATEMÁTICO DO MOTOR DE INDUÇÃO

A teoria do motor de indução sob condições dinâmicas requer um tratamento matemático elaborado tendo em vista os campos magnéticos girantes e as relações espaciais dependentes da velocidade e da carga. Por essa razão, o seu tratamento, do ponto de vista industrial, requer simplificações. Os circuitos equivalentes desenvolvidos para a operação em regime permanente com tensões e correntes senoidais, são inadequados para se trabalhar com transitórios ou quando o motor é alimentado por um conversor chaveado. Como alternativa, deve-se procurar um modelo matemático a ser usado para fins de controle que incorpore a maioria das características qualitativas de um motor real. Porém, este modelo não será suficientemente preciso para a finalidade de se projetar uma máquina. Neste caso, a condição de regime permanente é tratada como um caso especial do caso dinâmico geral.

Neste capítulo apresenta-se o modelo do motor de indução desenvolvido por Leonhard [19]. Inicialmente desenvolve-se o modelo vetorial referenciado a um sistema tri-axial de coordenadas fixas (ao estator e ao rotor) e posteriormente escolhe-se um novo sistema de coordenadas complexas móveis cujo eixo real é solidário ao pico positivo do fluxo do rotor. Um modelo alternativo e equivalente pode ser obtido a partir das equações propostas por Slemon [20].

2.1 MODELO MATEMÁTICO GENERALIZADO DE UMA MÁQUINA CA

Para a obtenção do modelo matemático de uma máquina de indução, são feitas as seguintes suposições: (i) o estator S da máquina é representado por um cilindro oco de ferro com seção transversal circular, contendo um rotor R concêntrico tal que um estreito entreferro, de espessura constante e radial h , exista entre as superfícies cilíndricas sobre as quais apóiam-se enrolamentos trifásicos de profundidade desprezível; (ii) A distribuição espacial das espiras é pensada como sendo produzida por condutores de fios finos ou por folhas condutoras adequadamente colocadas; (iii) ambos os neutros das conexões em estrela das bobinas são isolados; (iv) os terminais do enrolamento do rotor estão conectados a anéis deslizantes ou curto-circuitados internamente; (v) N_S , N_R são, respectivamente, os números de voltas completas do enrolamento de cada fase no estator e no rotor. Na máquina de indução, deseja-se ainda, uma distribuição senoidal no entreferro, da densidade de fluxo B , da intensidade de campo H e da força magneto-motriz (fmm) Θ . Para tanto, supõe-se que o enrolamento de cada fase possui uma densidade de condutores distribuída senoidalmente. Por exemplo, para a fase 1 do estator, a densidade de condutores (com unidade dada em condutores por radiano) para $0 \leq \alpha \leq \pi$ é igual a

$$n_S(\alpha) = \frac{N_S}{2} \sin \alpha$$

onde α denota a coordenada angular com referência ao eixo do enrolamento da fase 1 do estator que é indicado pela sua espira central, conforme mostrado na Figura 2.1. Finalmente, supõe-se que a permeabilidade do ferro laminado do estator e do rotor seja infinita, e que a saturação, as perdas no ferro e os efeitos de borda e das ranhuras sejam ignorados.

Considere agora o diagrama esquemático da Figura 2.1, onde os eixos dos enrolamentos idênticos das fases 2 e 3 estão posicionados em $\alpha = \gamma = 120^\circ$ e $\alpha = 2\gamma = 240^\circ$ respectivamente. Deve-se ressaltar que definições correspondentes valem para os enrolamentos do rotor, onde β denota a coordenada angular com referência ao eixo do enrolamento 1 do rotor. São definidos ainda: $\varepsilon(t)$, ângulo de rotação do rotor, medido no sistema de coordenadas do estator; $\omega(t) = d\varepsilon(t)/dt$, velocidade angular

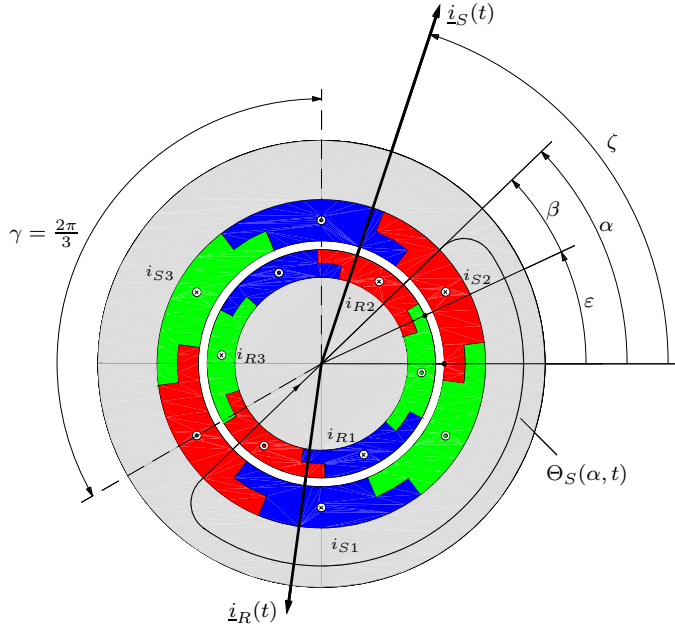


Figura 2.1: Seção transversal do motor de indução

instantânea do rotor. Deve ser ainda observado que a discussão a seguir se aplica a motores de 2 pólos; em máquinas com mais de 2 pólos a velocidade síncrona é correspondentemente reduzida.

O campo magnético no entreferro da máquina tem direção radial devido ao paralelismo entre as superfícies do estator e do rotor e à suposição de permeabilidade infinita do ferro. Como os efeitos de borda foram desprezados, considera-se o campo magnético como sendo bi-dimensional, isto é, sempre pertencente a um plano perpendicular ao eixo do motor.

As três correntes do estator $i_{S1}(t)$, $i_{S2}(t)$, $i_{S3}(t)$ podem apresentar qualquer forma de onda; por razões de simetria todas as correntes são mantidas ao longo dos cálculos embora uma das correntes seja redundante porque, devido ao neutro isolado, tem-se que a relação

$$i_{S1}(t) + i_{S2}(t) + i_{S3}(t) = 0 \quad (2.1)$$

é válida em qualquer instante, ou seja, as correntes são balanceadas.

Com estas simplificações e definições, a força magnetomotriz (fmm) radial estacionária devida ao enrolamento da fase 1 do estator e que é gerada pela circulação

de uma corrente no mesmo, tem distribuição espacial senoidal, sendo dada por:

$$\Theta_{S1}(\alpha, t) = N_S i_{S1}(t) \cos \alpha,$$

onde o fator $\cos \alpha$ se deve ao fato de que a distribuição de condutores é senoidal, ou seja, ele caracteriza a distribuição da fmm do enrolamento da fase 1 do estator. Analogamente, as fmm devidas aos enrolamentos das fases 2 e 3, considerando o deslocamento espacial desses enrolamentos, são dadas respectivamente por:

$$\begin{aligned}\Theta_{S2}(\alpha, t) &= N_S i_{S1}(t) \cos(\alpha - \gamma) \\ \Theta_{S3}(\alpha, t) &= N_S i_{S1}(t) \cos(\alpha - 2\gamma), \quad \gamma = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

A superposição das fmm fornece a seguinte equação:

$$\begin{aligned}\Theta_S(\alpha, t) &= \Theta_{S1}(\alpha, t) + \Theta_{S2}(\alpha, t) + \Theta_{S3}(\alpha, t) \\ \Theta_S(\alpha, t) &= N_S [i_{S1}(t) \cos(\alpha) + i_{S2}(t) \cos(\alpha - \gamma) + i_{S3}(t) \cos(\alpha - 2\gamma)] \quad (2.2)\end{aligned}$$

De acordo com a Figura 2.1, $\Theta_S(\alpha, t)$ corresponde aos amperes-espiras ou fmm do estator, enlaçados por uma linha de campo magnético radial que cruza o motor em um ângulo α . Quando os enrolamentos são alimentados com correntes alternadas, cada termo da Equação (2.2) oscila como uma onda estacionária, fixa no espaço. A superposição delas resulta em uma onda girante $\Theta_S(\alpha, t)$.

Introduzindo a notação complexa

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})$$

e substituindo-a na Equação (2.2), tem-se que:

$$\begin{aligned}\Theta_S(\alpha, t) &= N_S \left[\frac{i_{S1}(t)}{2} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) + \frac{i_{S2}(t)}{2} (e^{j\alpha} e^{-j\gamma} + e^{-j\alpha} e^{j\gamma}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i_{S3}(t)}{2} (e^{j\alpha} e^{-j2\gamma} + e^{-j\alpha} e^{j2\gamma}) \right] \\ \Theta_S(\alpha, t) &= \frac{N_S}{2} \left[(i_{S1}(t) + i_{S2}(t)e^{j\gamma} + i_{S3}(t)e^{j2\gamma}) e^{-j\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + (i_{S1}(t) + i_{S2}(t)e^{-j\gamma} + i_{S3}(t)e^{-j2\gamma}) e^{j\alpha} \right] \\ \Theta_S(\alpha, t) &= \frac{N_S}{2} [\underline{i}_S(t)e^{-j\alpha} + \underline{i}_S^*(t)e^{j\alpha}], \quad (2.3)\end{aligned}$$

onde

$$\underline{i}_S(t) = i_{S1}(t) + i_{S2}(t)e^{j\gamma} + i_{S3}(t)e^{j2\gamma} \quad (2.4a)$$

$$\underline{i}_S^*(t) = i_{S1}(t) + i_{S2}(t)e^{-j\gamma} + i_{S3}(t)e^{-j2\gamma} \quad (2.4b)$$

sendo $\underline{i}_S(t)$ um vetor corrente dependente do tempo no plano complexo e $\underline{i}_S^*(t)$ seu vetor conjugado complexo respectivamente. Note que $\Theta_S(\alpha, t)$ é real, representando uma quantidade física mensurável dependente de α e t .

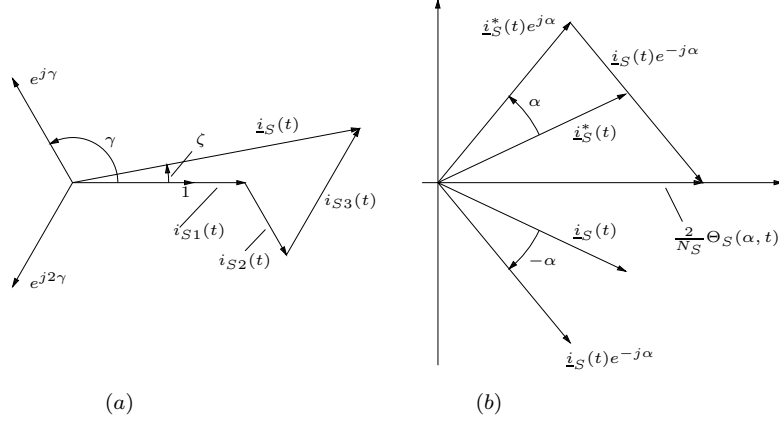


Figura 2.2: Vetor corrente complexo

Como $\underline{i}_S(t)$ é uma grandeza complexa, pode ser escrita como

$$\underline{i}_S(t) = i_S(t)e^{j\zeta(t)}. \quad (2.5)$$

onde $i_S(t) = |\underline{i}_S(t)|$ e $\zeta(t) = \angle \underline{i}_S(t)$, em radianos, variam com o tempo. Uma construção do vetor corrente de estator $\underline{i}_S(t)$ é mostrada na Figura 2.2 para supostos valores de $i_{S1}(t) > 0$, $i_{S2}(t)$, $i_{S3}(t) < 0$. O vetor corrente $\underline{i}_S(t)$ determina o módulo e a posição angular instantânea do pico da forma de onda correspondente à fmm que é distribuída senoidalmente, sendo produzida pelas correntes dos três enrolamentos do estator espacialmente deslocados. Combinando as Equações (2.3) e (2.5) tem-se que a fmm pode ser expressa como uma onda viajante, cujo pico segue o ângulo $\zeta(t)$ do vetor corrente. Assim:

$$\begin{aligned} \Theta_S(\alpha, t) &= \frac{N_S}{2} [i_S(t)e^{j\zeta(t)}e^{-j\alpha} + i_S(t)e^{-j\zeta(t)}e^{j\alpha}] \\ \Theta_S(\alpha, t) &= N_S i_S(t) \left[\frac{1}{2} (e^{j(\zeta(t)-\alpha)} + e^{-j(\zeta(t)-\alpha)}) \right] \\ \Theta_S(\alpha, t) &= N_S i_S(t) \cos[\zeta(t) - \alpha]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Se as correntes do estator são senoidais e formam um sistema trifásico simétrico, a onda de fmm se move com módulo constante e velocidade $\omega_1 = d\zeta/dt$ no entreferro do motor.

Uma vez que os vetores complexos definidos nas Equações (2.4) a (2.6) descrevem a distribuição espacial de um campo magnético em um plano perpendicular ao eixo do motor, eles também são chamados de vetores espaciais ou fasores espaciais. Porém, eles não devem ser confundidos com os fasores constantes complexos que descrevem grandezas alternadas senoidais em regime permanente.

O mesmo raciocínio anterior vale para a fmm produzida pelos enrolamentos trifásicos do rotor, ou seja:

$$\Theta_R(\beta, t) = N_R [i_{R1}(t) \cos \beta + i_{R2}(t) \cos(\beta - \gamma) + i_{R3}(t) \cos(\beta - 2\gamma)]. \quad (2.7)$$

Logo, definindo-se um vetor corrente de rotor e, respectivamente, seu complexo conjugado, tem-se:

$$\underline{i}_R(t) = i_{R1}(t) + i_{R2}(t)e^{j\gamma} + i_{R3}(t)e^{j2\gamma} = i_R(t)e^{j\xi(t)}, \quad (2.8a)$$

$$\underline{i}_R^*(t) = i_{R1}(t) + i_{R2}(t)e^{-j\gamma} + i_{R3}(t)e^{-j2\gamma} = i_R(t)e^{-j\xi(t)}, \quad (2.8b)$$

onde $i_R(t) = |\underline{i}_R(t)|$ e $\xi(t) = \angle \underline{i}_R(t)$, em radianos. Desta forma a fmm, gerada pelas correntes do rotor e expressa em termos das coordenadas do rotor, é dada por:

$$\Theta_R(\beta, t) = \frac{N_R}{2} [\underline{i}_R(t)e^{-j\beta} + \underline{i}_R^*(t)e^{j\beta}]. \quad (2.9)$$

Para escrevê-la em termos das coordenadas do estator, note que, de acordo com a Figura 2.1,

$$\beta = \alpha - \varepsilon \quad (2.10)$$

e, portanto:

$$\Theta_R(\alpha, \varepsilon, t) = \frac{N_R}{2} [\underline{i}_R(t)e^{-j(\alpha-\varepsilon)} + \underline{i}_R^*(t)e^{j(\alpha-\varepsilon)}]. \quad (2.11)$$

A fmm resultante é uma superposição das fmm do estator e do rotor, sendo dada por:

$$\Theta(\alpha, \varepsilon, t) = \Theta_S(\alpha, t) + \Theta_R(\alpha, \varepsilon, t). \quad (2.12)$$

Com a permeabilidade do ferro suposta infinita e a força magnetomotriz nos dois cruzamentos do entreferro, a densidade de fluxo local no entreferro do lado do estator é dada por:

$$B_S(\alpha, \varepsilon, t) = \frac{\mu_0}{2h} [\Theta_S(\alpha, t) + k\Theta_R(\alpha, \varepsilon, t)], \quad (2.13)$$

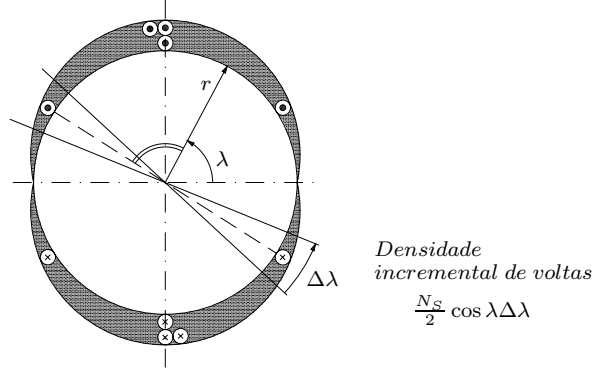


Figura 2.3: Distribuição do enrolamento da fase 1.

onde $k < 1$ é um fator de acoplamento global, que leva em conta a dispersão magnética (a ser quantificada mais adiante) e μ_0 é a constante de permeabilidade do ar.

No cálculo dos enlaces de fluxo, a distribuição espacial dos condutores deve ser considerada conforme mostrado na Figura 2.3 para o exemplo de um enrolamento do estator. Supondo uma distribuição quase contínua de voltas com uma “densidade incremental” $\frac{1}{2}N_S \cos \lambda$, tem-se a distribuição senoidal desejada. Deve ser observado que, neste caso, o número total de voltas se torna N_S , como pode ser demonstrado pela integração no intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$. Assim o fluxo enlaçado pelo enrolamento 1 do estator é obtido por uma dupla integração, qual seja:

$$\psi_{S1}(t) = \frac{N_S}{2} \int_{\lambda=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda \left[\int_{\alpha=\lambda-\frac{\pi}{2}}^{\lambda+\frac{\pi}{2}} l r B_S(\alpha, \varepsilon, t) d\alpha \right] d\lambda, \quad (2.14)$$

onde l é o comprimento axial efetivo e r denota o raio do rotor. A integração sobre α é uma consequência do campo não uniforme no entreferro, enquanto que a integração sobre λ é necessária por causa da distribuição não uniforme do enrolamento.

Inserindo a Equação (2.13) em (2.14) obtém-se:

$$\psi_{S1}(t) = \frac{N_S}{2} \int_{\lambda=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda \left[\int_{\alpha=\lambda-\frac{\pi}{2}}^{\lambda+\frac{\pi}{2}} \frac{l r \mu_0}{2h} [\Theta_S(\alpha, t) + k \Theta_R(\alpha, \varepsilon, t)] d\alpha \right] d\lambda$$

e substituindo (2.3) e (2.11) na equação acima, resulta:

$$\begin{aligned}\psi_{S1}(t) &= \frac{N_S}{2} \int_{\lambda=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda \int_{\alpha=\lambda-\frac{\pi}{2}}^{\lambda+\frac{\pi}{2}} \frac{lr\mu_0 N_S}{2h} \frac{N_S}{2} [\underline{i}_S(t)e^{-j\alpha} + \underline{i}_S^*(t)e^{j\alpha}] d\alpha d\lambda + \\ &+ \frac{N_S}{2} \int_{\lambda=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda \int_{\alpha=\lambda-\frac{\pi}{2}}^{\lambda+\frac{\pi}{2}} \frac{lr\mu_0 k N_R}{2h} \frac{N_R}{2} [\underline{i}_R(t)e^{-j(\alpha-\varepsilon)} + \underline{i}_R^*(t)e^{j(\alpha-\varepsilon)}] d\alpha d\lambda.\end{aligned}$$

Como $\cos \lambda = \frac{1}{2}(e^{j\lambda} + e^{-j\lambda})$, tem-se que:

$$\begin{aligned}\psi_{S1}(t) &= \frac{lr\mu_0 N_S^2}{16h} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [e^{j\lambda} + e^{-j\lambda}] \int_{\lambda-\frac{\pi}{2}}^{\lambda+\frac{\pi}{2}} [\underline{i}_S(t)e^{-j\alpha} + \underline{i}_S^*(t)e^{j\alpha}] d\alpha d\lambda + \\ &+ \frac{lr\mu_0 k N_S N_R}{16h} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [e^{j\lambda} + e^{-j\lambda}] \int_{\lambda-\frac{\pi}{2}}^{\lambda+\frac{\pi}{2}} [\underline{i}_R(t)e^{-j(\alpha-\varepsilon)} + \underline{i}_R^*(t)e^{j(\alpha-\varepsilon)}] d\alpha d\lambda.\end{aligned}$$

Após resolver a integral em α pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\psi_{S1}(t) &= \frac{lr\mu_0 N_S^2}{j16h} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\underline{i}_S(t) \left(e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j(2\lambda-\frac{\pi}{2})} - e^{-j(2\lambda+\frac{\pi}{2})} \right) + \right. \\ &+ \underline{i}_S^*(t) \left(e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{j(2\lambda+\frac{\pi}{2})} - e^{j(2\lambda-\frac{\pi}{2})} \right) \left. \right] d\lambda + \\ &+ \frac{lr\mu_0 k N_S N_R}{j16h} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\underline{i}_R(t)e^{j\varepsilon} \left(e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j(2\lambda-\frac{\pi}{2})} - e^{-j(2\lambda+\frac{\pi}{2})} \right) + \right. \\ &+ \underline{i}_R^*(t)e^{-j\varepsilon} \left(e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{j(2\lambda+\frac{\pi}{2})} - e^{j(2\lambda-\frac{\pi}{2})} \right) \left. \right] d\lambda.\end{aligned}$$

Finalmente, resolvendo-se a integral em λ , e após alguma manipulação algébrica, obtém-se:

$$\begin{aligned}\psi_{S1}(t) &= \frac{lr\mu_0 N_S^2}{8h} \left[\underline{i}_S(t) \left(\pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi}{2} \right) + \right. \\ &+ \underline{i}_S^*(t) \left(\pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi}{2} \right) \left. \right] + \\ &+ \frac{lr\mu_0 k N_S N_R}{j16h} \left[\underline{i}_R(t)e^{j\varepsilon} \left(\pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi}{2} \right) + \right. \\ &+ \underline{i}_R^*(t)e^{-j\varepsilon} \left(\pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{3\pi}{2} \right) \left. \right],\end{aligned}$$

que pode ser reescrita como:

$$\psi_{S1}(t) = \frac{lr\mu_0 \pi N_S^2}{8h} [\underline{i}_S(t) + \underline{i}_S^*(t)] + \frac{lr\mu_0 \pi k N_S N_R}{8h} [\underline{i}_R(t)e^{j\varepsilon} + \underline{i}_R^*(t)e^{-j\varepsilon}].$$

Utilizando-se as definições de indutância própria (L_S) e indutância mútua (L_{mut}) [21], isto é:

$$\frac{lr\mu_0\pi N_S^2}{8h} = \frac{L_S}{3}, \quad (2.15a)$$

$$\frac{lr\mu_0\pi k N_S N_R}{8h} = \frac{L_{mut}}{3}, \quad (2.15b)$$

um resultado simples é obtido:

$$\psi_{S1}(t) = \frac{L_S}{3} [\underline{i}_S(t) + \underline{i}_S^*(t)] + \frac{L_{mut}}{3} [\underline{i}_R(t)e^{j\varepsilon} + \underline{i}_R^*(t)e^{-j\varepsilon}]. \quad (2.16a)$$

O fluxo enlaçado pelo enrolamento 1 do estator é uma quantidade essencialmente física e deve, portanto, ser real embora a Equação (2.16a) tenha componentes complexas.

Os fluxos nos outros enrolamentos do estator são calculados de forma análoga, com a exceção de que a integração sobre λ , refletindo a posição dos enrolamentos, é deslocada para $\gamma \pm \frac{\pi}{2}$ e $2\gamma \pm \frac{\pi}{2}$ respectivamente. Portanto:

$$\psi_{S2}(t) = \frac{L_S}{3} [\underline{i}_S(t)e^{-j\gamma} + \underline{i}_S^*(t)e^{j\gamma}] + \frac{L_{mut}}{3} [\underline{i}_R(t)e^{j(\varepsilon-\gamma)} + \underline{i}_R^*(t)e^{-j(\varepsilon-\gamma)}], \quad (2.16b)$$

$$\psi_{S3}(t) = \frac{L_S}{3} [\underline{i}_S(t)e^{-j2\gamma} + \underline{i}_S^*(t)e^{j2\gamma}] + \frac{L_{mut}}{3} [\underline{i}_R(t)e^{j(\varepsilon-2\gamma)} + \underline{i}_R^*(t)e^{-j(\varepsilon-2\gamma)}]. \quad (2.16c)$$

A simetria das Equações (2.16) sugere a definição de um vetor complexo de fluxo enlaçado:

$$\underline{\psi}_S(t) = \psi_{S1}(t) + \psi_{S2}(t)e^{j\gamma} + \psi_{S3}(t)e^{j2\gamma}, \quad (2.17)$$

que pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_S(t) = & \left[\frac{L_S}{3} [\underline{i}_S(t) + \underline{i}_S^*(t)] + \frac{L_{mut}}{3} [\underline{i}_R(t)e^{j\varepsilon} + \underline{i}_R^*(t)e^{-j\varepsilon}] \right] + \\ & + \left[\frac{L_S}{3} [\underline{i}_S(t)e^{-j\gamma} + \underline{i}_S^*(t)e^{j\gamma}] + \frac{L_{mut}}{3} [\underline{i}_R(t)e^{j(\varepsilon-\gamma)} + \underline{i}_R^*(t)e^{-j(\varepsilon-\gamma)}] \right] e^{j\gamma} + \\ & + \left[\frac{L_S}{3} [\underline{i}_S(t)e^{-j2\gamma} + \underline{i}_S^*(t)e^{j2\gamma}] + \frac{L_{mut}}{3} [\underline{i}_R(t)e^{j(\varepsilon-2\gamma)} + \underline{i}_R^*(t)e^{-j(\varepsilon-2\gamma)}] \right] e^{j2\gamma}. \end{aligned}$$

Usando o fato de que $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ e após alguma manipulação algébrica, resulta:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_S(t) = & \frac{L_S}{3} \left[3\underline{i}_S(t) + \left(1 + \cos \frac{4\pi}{3} + j \sen \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{8\pi}{3} + j \sen \frac{8\pi}{3} \right) \underline{i}_S^*(t) \right] + \\ & + \frac{L_{mut}}{3} \left[3\underline{i}_R(t)e^{j\varepsilon} + \left(1 + \cos \frac{4\pi}{3} + j \sen \frac{4\pi}{3} + \cos \frac{8\pi}{3} + j \sen \frac{8\pi}{3} \right) \underline{i}_R^*(t)e^{-j\varepsilon} \right] \end{aligned}$$

ou, equivalentemente:

$$\underline{\psi}_S(t) = L_S \underline{i}_S(t) + L_{mut} \underline{i}_R(t) e^{j\varepsilon(t)}. \quad (2.18)$$

Este vetor de fluxo $\underline{\psi}_S(t)$ descreve o módulo e a posição angular do pico da distribuição senoidal do fluxo no entreferro da máquina. O termo exponencial anexado a $\underline{i}_R(t)$ indica que o vetor corrente de rotor deve ser girado pelo ângulo de rotação mecânica antes que seu efeito possa ser sobreposto àquele do vetor corrente de estator $\underline{i}_S(t)$.

O fluxo enlaçado pelos enrolamentos móveis do rotor é calculado exatamente da mesma maneira. Para tanto, considere a Equação (2.3) e note que a conversão do vetor corrente de estator para as coordenadas do rotor por meio da Equação (2.10) produz:

$$\Theta_S(\beta, \varepsilon, t) = \frac{N_S}{2} [\underline{i}_S(t) e^{-j(\beta+\varepsilon)} + \underline{i}_S^*(t) e^{j(\beta+\varepsilon)}], \quad (2.19)$$

o qual, juntamente com a corrente do rotor, gera uma densidade de fluxo na superfície do rotor, análoga à Equação (2.13), ou seja:

$$B_R(\beta, \varepsilon, t) = \frac{\mu_0}{2h} [\Theta_R(\beta, t) + k\Theta_S(\beta, \varepsilon, t)]. \quad (2.20)$$

Deve ser ressaltado que o mesmo fator de acoplamento global k foi empregado, para levar em conta os inevitáveis efeitos de dispersão.

A integração em torno da circunferência do rotor, novamente pressupondo um enrolamento do rotor distribuído senoidalmente, conduz à seguinte expressão para o fluxo enlaçado pelo enrolamento 1 do rotor:

$$\psi_{R1}(t) = \frac{N_R}{2} \int_{\lambda=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda \left[\int_{\beta=\lambda-\frac{\pi}{2}}^{\lambda+\frac{\pi}{2}} l r B_R(\beta, \varepsilon, t) d\beta \right] d\lambda.$$

Inserindo-se as Equações (2.9), (2.19) e (2.20) na expressão acima, resulta:

$$\psi_{R1}(t) = \frac{N_R}{2} \int_{\lambda=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda \left[\int_{\beta=\lambda-\frac{\pi}{2}}^{\lambda+\frac{\pi}{2}} \frac{l r \mu_0}{2h} [\Theta_R(\beta, t) + k\Theta_S(\beta, \varepsilon, t)] d\beta \right] d\lambda,$$

e procedendo de forma idêntica ao desenvolvimento realizado para a obtenção de $\psi_{S1}(t)$, obtém-se:

$$\psi_{R1}(t) = \frac{l r \mu_0 \pi N_S^2}{8h} [\underline{i}_R(t) + \underline{i}_R^*(t)] + \frac{l r \mu_0 \pi k N_S N_R}{8h} [\underline{i}_S(t) e^{-j\varepsilon} + \underline{i}_S^*(t) e^{j\varepsilon}]$$

Definindo a indutância própria do enrolamento do rotor, L_R , como descrito em Mohan [21]:

$$\frac{lr\mu_0\pi N_R^2}{8h} = \frac{L_R}{3}, \quad (2.21)$$

tem-se que $\psi_{R1}(t)$ pode ser reescrito como:

$$\psi_{R1}(t) = \frac{L_R}{3} [\underline{i}_R(t) + \underline{i}_R^*(t)] + \frac{L_{mut}}{3} [\underline{i}_S(t)e^{-j\varepsilon} + \underline{i}_S^*(t)e^{j\varepsilon}]. \quad (2.22a)$$

Note que a Equação (2.22a) tem uma forma similar à da Equação (2.16a). Deve ser salientado também que como este fluxo é definido nas coordenadas do rotor, o vetor corrente de estator é referenciado à posição do rotor.

Analogamente, os fluxos enlaçados pelos outros enrolamentos do rotor serão dados pelas equações:

$$\psi_{R2}(t) = \frac{L_R}{3} [\underline{i}_R(t)e^{-j\gamma} + \underline{i}_R^*(t)e^{j\gamma}] + \frac{L_{mut}}{3} [\underline{i}_S(t)e^{-j(\varepsilon+\gamma)} + \underline{i}_S^*(t)e^{j(\varepsilon+\gamma)}], \quad (2.22b)$$

$$\psi_{R3}(t) = \frac{L_R}{3} [\underline{i}_R(t)e^{-j2\gamma} + \underline{i}_R^*(t)e^{j2\gamma}] + \frac{L_{mut}}{3} [\underline{i}_S(t)e^{-j(\varepsilon+2\gamma)} + \underline{i}_S^*(t)e^{j(\varepsilon+2\gamma)}]. \quad (2.22c)$$

Estas expressões são novamente agrupadas formando um vetor complexo para o fluxo do rotor

$$\underline{\psi}_R(t) = \psi_{R1}(t) + \psi_{R2}(t)e^{j\gamma} + \psi_{R3}(t)e^{j2\gamma} = L_R\underline{i}_R(t) + L_{mut}\underline{i}_S(t)e^{-j\varepsilon(t)}. \quad (2.23)$$

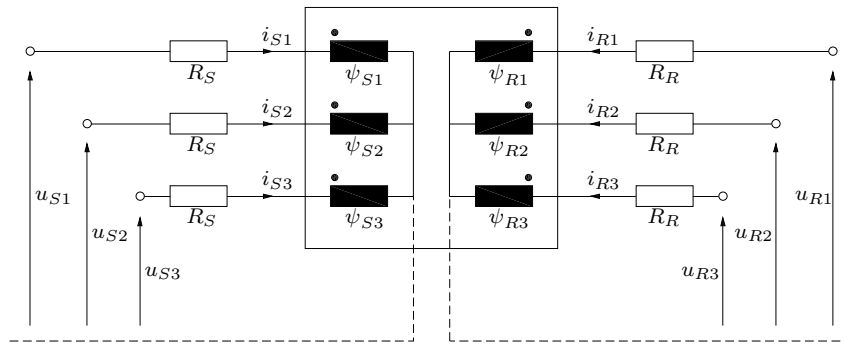


Figura 2.4: Acoplamentos magnéticos e tensões

Os enlaces magnéticos descritos pelas Equações (2.16) e (2.22) serão usados agora para produzir as equações de tensão para os circuitos do estator e do rotor,

representados na Figura 2.4. A partir da Figura 2.4 tem-se que as tensões fase-neutro no circuito do estator são:

$$R_S i_{S1}(t) + \frac{d}{dt} \psi_{S1}(t) = u_{S1}(t) \quad (2.24a)$$

$$R_S i_{S2}(t) + \frac{d}{dt} \psi_{S2}(t) = u_{S2}(t) \quad (2.24b)$$

$$R_S i_{S3}(t) + \frac{d}{dt} \psi_{S3}(t) = u_{S3}(t) \quad (2.24c)$$

onde R_S é a resistência por fase do estator e $u_{S1}(t)$, $u_{S2}(t)$, $u_{S3}(t)$ são tensões de forma de onda arbitrárias. Note que $\psi_{S_i}(t)$ e $\psi_{R_i}(t)$, $i = 1, 2, 3$, levam em conta as indutâncias próprias e mútuas.

Inserindo-se as Equações (2.16) nas Equações (2.24) acima, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} u_{S1}(t) + u_{S2}(t) + u_{S3}(t) &= R_S i_{S1}(t) + \frac{d}{dt} \psi_{S1}(t) + R_S i_{S2}(t) + \frac{d}{dt} \psi_{S2}(t) + R_S i_{S3}(t) + \frac{d}{dt} \psi_{S3}(t) = \\ &= R_S i_{S1} + \frac{d}{dt} \left[\frac{L_S}{3} [\underline{i}_S(t) + \underline{i}_S^*(t)] + \frac{L_{mut}}{3} [\underline{i}_R(t)e^{j\varepsilon} + \underline{i}_R^*(t)e^{-j\varepsilon}] \right] + \\ &+ R_S i_{S2} + \frac{d}{dt} \left[\frac{L_S}{3} [\underline{i}_S(t)e^{-j\gamma} + \underline{i}_S^*(t)e^{j\gamma}] + \frac{1}{3} L_{mut} [\underline{i}_R(t)e^{j(\varepsilon-\gamma)} + \underline{i}_R^*(t)e^{-j(\varepsilon-\gamma)}] \right] + \\ &+ R_S i_{S3} + \frac{d}{dt} \left[\frac{L_S}{3} [\underline{i}_S(t)e^{-j2\gamma} + \underline{i}_S^*(t)e^{j2\gamma}] + \frac{L_{mut}}{3} [\underline{i}_R(t)e^{j(\varepsilon-2\gamma)} + \underline{i}_R^*(t)e^{-j(\varepsilon-2\gamma)}] \right] = \\ &= R_S (i_{S1} + i_{S2} + i_{S3}) + \frac{d}{dt} \left[\frac{L_S}{3} [\underline{i}_S(t) + \underline{i}_S^*(t) + \underline{i}_S(t)e^{-j\gamma} + \underline{i}_S^*(t)e^{j\gamma} + \underline{i}_S(t)e^{-j2\gamma} + \underline{i}_S^*(t)e^{j2\gamma}] + \right. \\ &\left. + \frac{L_{mut}}{3} [\underline{i}_R(t)e^{j\varepsilon} + \underline{i}_R^*(t)e^{-j\varepsilon} + \underline{i}_R(t)e^{j(\varepsilon-\gamma)} + \underline{i}_R^*(t)e^{-j(\varepsilon-\gamma)} + \underline{i}_R(t)e^{j(\varepsilon-2\gamma)} + \underline{i}_R^*(t)e^{-j(\varepsilon-2\gamma)}] \right]. \end{aligned}$$

Note, de acordo com a Equação (2.1), que $i_{S1}(t) + i_{S2}(t) + i_{S3}(t) = 0$ e, portanto, a equação acima é equivalente a:

$$\begin{aligned} u_{S1}(t) + u_{S2}(t) + u_{S3}(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{L_S}{3} \left[\underline{i}_S(t) \underbrace{(1 + e^{-j\gamma} + e^{-j2\gamma})}_0 + \underline{i}_S^*(t) \underbrace{(1 + e^{j\gamma} + e^{j2\gamma})}_0 \right] + \right. \\ &\left. + \frac{L_{mut}}{3} \left[\underline{i}_R(t) \underbrace{e^{j\varepsilon} (1 + e^{-j\gamma} + e^{-j2\gamma})}_0 + \underline{i}_R^*(t) \underbrace{e^{-j\varepsilon} (1 + e^{j\gamma} + e^{j2\gamma})}_0 \right] \right]. \end{aligned}$$

Consequentemente:

$$u_{S1}(t) + u_{S2}(t) + u_{S3}(t) \equiv 0, \quad (2.25)$$

que mostra que as tensões fase-neutro da máquina de indução, também são balanceadas em qualquer instante.

O próximo passo é obter uma relação entre as tensões aplicadas no motor e as resultantes correntes de estator e de rotor. Para tanto, define-se um vetor tensão como:

$$\underline{u}_S(t) = u_{S1}(t) + u_{S2}(t)e^{j\gamma} + u_{S3}(t)e^{j2\gamma}. \quad (2.26)$$

Substituindo-se as Equações (2.24) na Equação (2.26) acima, obtém-se:

$$\begin{aligned}\underline{u}_S(t) &= \left[R_S i_{S1}(t) + \frac{d}{dt} \psi_{S1}(t) \right] + \left[R_S i_{S2}(t) + \frac{d}{dt} \psi_{S2}(t) \right] e^{j\gamma} + \left[R_S i_{S3}(t) + \frac{d}{dt} \psi_{S3}(t) \right] e^{j2\gamma} \\ &= R_S [i_{S1}(t) + i_{S2}(t)e^{j\gamma} + i_{S3}(t)e^{j2\gamma}] + \frac{d}{dt} [\psi_{S1}(t) + \psi_{S2}(t)e^{j\gamma} + \psi_{S3}(t)e^{j2\gamma}].\end{aligned}$$

Note, a partir da Equação (2.4a), que $\underline{i}_S = i_{S1} + i_{S2}e^{j\gamma} + i_{S3}e^{j2\gamma}$. Note ainda, a partir da Equação (2.17), que $\underline{\psi}_S = \psi_{S1} + \psi_{S2}e^{j\gamma} + \psi_{S3}e^{j2\gamma}$. Portanto, a equação acima pode ser re-escrita como:

$$\underline{u}_S(t) = R_S \underline{i}_S(t) + \frac{d}{dt} \underline{\psi}_S(t) \quad (2.27)$$

Substituindo $\underline{\psi}_S$ dado pela Equação (2.18) na expressão acima, resulta:

$$\underline{u}_S(t) = R_S \underline{i}_S(t) + L_S \frac{d}{dt} \underline{i}_S(t) + L_{mut} \frac{d}{dt} (\underline{i}_R(t) e^{j\varepsilon(t)}), \quad (2.28)$$

ou equivalentemente, empregando as regras de diferenciação, esta equação assume a forma:

$$\underline{u}_S(t) = R_S \underline{i}_S(t) + L_S \frac{d}{dt} \underline{i}_S(t) + L_{mut} \frac{d}{dt} (\underline{i}_R(t)) e^{j\varepsilon(t)} + j\omega L_{mut} \underline{i}_R(t) e^{j\varepsilon(t)}, \quad (2.29)$$

onde $\omega = d\varepsilon(t)/dt$ é a velocidade angular do rotor. Os dois termos contendo a corrente do rotor podem ser interpretados como tensões induzidas, devidas à indutância mútua e à rotação, respectivamente.

Na maioria dos motores o ponto de neutro do enrolamento do estator não é acessível, de forma que somente as tensões terminais $u_{S12}(t) = u_{S1}(t) - u_{S2}(t)$ etc. estão disponíveis para uso externo, enquanto que as tensões fase-neutro são grandezas dependentes. Os mesmos argumentos são válidos para o enrolamento do rotor, onde as correntes são também balanceadas, devido ao suposto ponto de neutro fictício. Observe, a partir da Figura 2.4 que:

$$i_{R1}(t) + i_{R2}(t) + i_{R3}(t) \equiv 0, \quad (2.30)$$

o que mostra que as conexões pontilhadas aos neutros, na realidade são redundantes. Também, a partir da Figura 2.4, tem-se que as equações de tensão para o rotor são:

$$R_R i_{R1}(t) + \frac{d}{dt} \psi_{R1}(t) = u_{R1}(t) \quad (2.31a)$$

$$R_R i_{R2}(t) + \frac{d}{dt} \psi_{R2}(t) = u_{R2}(t) \quad (2.31b)$$

$$R_R i_{R3}(t) + \frac{d}{dt} \psi_{R3}(t) = u_{R3}(t) \quad (2.31c)$$

Multiplicando-se as Equações (2.31) por 1, $e^{j\gamma}$ e $e^{j2\gamma}$, respectivamente, e, em seguida, somando membro a membro, tem-se, de acordo com as Equações (2.8) e (2.23), que:

$$\underline{u}_R(t) = R_R \dot{i}_R(t) + \frac{d}{dt} \psi_{-R}(t) = R_R \dot{i}_R(t) + L_R \frac{d}{dt} \dot{i}_R(t) + L_{mut} \frac{d}{dt} (\dot{i}_S(t) e^{-j\varepsilon(t)}), \quad (2.32)$$

onde, conforme a Equação (2.8), $\dot{i}_R = i_{R1} + i_{R2} e^{j\gamma} + i_{R3} e^{j2\gamma}$. Note que todas as variáveis são definidas nas coordenadas do rotor. O vetor tensão do rotor,

$$\underline{u}_R(t) = u_{R1}(t) + u_{R2}(t) e^{j\gamma} + u_{R3}(t) e^{j2\gamma}, \quad (2.33)$$

pode ser gerado por uma fonte de tensão externa. No caso de um rotor gaiola, as tensões são zero e o circuito do rotor é curto-circuitado internamente.

As Equações (2.28) e (2.32) descrevem as interações eletromagnéticas do motor CA simétrico em regimes transitório e permanente. Para se completar o modelo matemático do motor de indução, devem ser obtidas agora, equações para o torque elétrico e transitório mecânico. No motor real as forças tangenciais atuam nos lados das ranhuras, onde o campo magnético penetra no ferro. Como não existem ranhuras no nosso modelo simplificado, o torque é computado com a ajuda da força de Lorentz tangencial exercida sobre os condutores axiais atravessados ortogonalmente pelo campo magnético radial. Para tanto, note que a Equação (2.20) pode ser re-escrita como:

$$B_R(\beta, \varepsilon, t) = B_{RR}(\beta, t) + B_{RS}(\beta, \varepsilon, t),$$

onde

$$B_{RR}(\beta, t) = \frac{\mu_0}{2h} \Theta_R(\beta, t) = \frac{N_R \mu_0}{4h} [\dot{i}_R(t) e^{-j\beta} + \dot{i}_R^*(t) e^{j\beta}] \quad (2.34)$$

e

$$B_{RS}(\beta, \varepsilon, t) = \frac{\mu_0 k}{2h} \Theta_S(\beta, \varepsilon, t) = \frac{\mu_0 k N_S}{4h} [\dot{i}_S(t) e^{-j(\beta+\varepsilon)} + \dot{i}_S^*(t) e^{j(\beta+\varepsilon)}]. \quad (2.35)$$

Conforme será mostrado a seguir, o campo magnético produzido pelas correntes do rotor, $B_{RR}(\beta, t)$, não gera força tangencial líquida com as correntes do rotor uma vez que, com entreferro uniforme, não há torque de relutância. É sabido que a distribuição de corrente $a_R(\beta, t)$ ao longo da circunferência do rotor é também, com as suposições feitas, senoidal. Além disso, de acordo com a Figura 2.5, tem-se que a fmm do rotor, para um elemento infinitesimal é dada por:

$$\partial \Theta_R(\beta, t) = 2a_R(\beta, t) \partial l,$$

onde $l = r\beta$. Portanto:

$$a_R(\beta, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta_R(\beta, t)}{\partial(r\beta)},$$

e, de acordo com a Equação (2.9), será:

$$a_R(\beta, t) = -j \frac{N_R}{4r} [\dot{i}_R e^{-j\beta} - \dot{i}_R^* e^{j\beta}]. \quad (2.36)$$

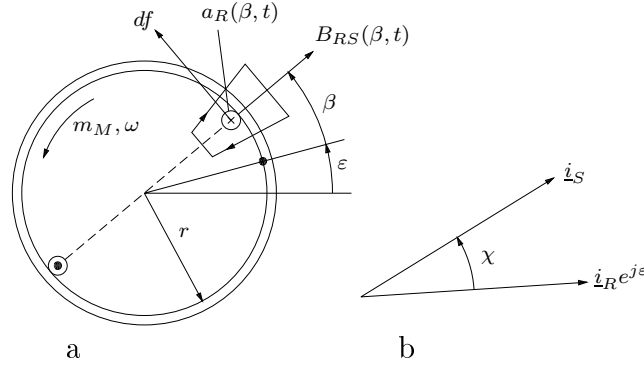


Figura 2.5: Distribuição de corrente do rotor e torque.

A força tangencial df agindo sobre uma cinta axial de largura $rd\beta$ da superfície do rotor é o produto entre a densidade de fluxo e a distribuição de corrente no rotor. Portanto:

$$df = -B_R(\beta, \varepsilon, t) a_R(\beta, t) l r d\beta,$$

a qual por integração produz o torque elétrico na direção de rotação,

$$m_M(t) = r \int_F df = -r^2 l \int_0^{2\pi} B_R(\beta, \varepsilon, t) a_R(\beta, t) d\beta. \quad (2.37)$$

Substituindo $B_R(\beta, \varepsilon, t)$ dado pela Equação (2.20) na equação acima, obtém-se:

$$m_M(t) = -r^2 l \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2h} \Theta_R(\beta, t) a_R(\beta, t) d\beta - r^2 l \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 k}{2h} \Theta_S(\beta, \varepsilon, t) a_R(\beta, t) d\beta.$$

Note que a primeira parcela do segundo membro da equação acima corresponde ao torque devido à interação entre a corrente do rotor e o campo magnético produzido pela corrente do rotor, enquanto a segunda parcela representa o torque devido à interação entre a corrente do rotor e o campo magnético produzido pela corrente do estator. Substituindo agora $\Theta_R(\beta, t)$, $\Theta_S(\beta, \varepsilon, t)$ e $a_R(\beta, t)$ dados respectivamente

pelas Equações (2.9), (2.19) e (2.36) e, lembrando que, da Equação (2.10), $\beta = \alpha - \varepsilon$, pode-se escrever:

$$m_M(t) = r^2 l \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 N_R}{2h} \frac{N_R}{2} [\underline{i}_R(t) e^{-j(\alpha-\varepsilon)} + \underline{i}_R^*(t) e^{j(\alpha-\varepsilon)}] j \frac{N_R}{4r} [\underline{i}_R e^{-j\beta} - \underline{i}_R^* e^{j\beta}] d\beta + \\ + r^2 l \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 k N_S}{2h} \frac{k N_S}{2} [\underline{i}_S(t) e^{-j(\beta+\varepsilon)} + \underline{i}_S^*(t) e^{j(\beta+\varepsilon)}] j \frac{N_R}{4r} [\underline{i}_R e^{-j\beta} - \underline{i}_R^* e^{j\beta}] d\beta. \quad (2.38)$$

Considere inicialmente:

$$m_{MR}(t) = r^2 l \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 N_R}{2h} \frac{N_R}{2} [\underline{i}_R(t) e^{-j(\alpha-\varepsilon)} + \underline{i}_R^*(t) e^{j(\alpha-\varepsilon)}] j \frac{N_R}{4r} [\underline{i}_R e^{-j\beta} - \underline{i}_R^* e^{j\beta}] d\beta.$$

Resolvendo-se a integral e após algumas manipulações algébricas tem-se que:

$$m_{MR}(t) = -\frac{L_R}{6\pi j} [\underline{i}_R^2(t) (e^{-j(4\pi)} - 1) + (\underline{i}_R^*)^2(t) (e^{j(4\pi)} - 1)] = 0.$$

Portanto, a Equação (2.38) pode ser escrita como:

$$m_M(t) = r^2 l \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 k N_S}{2h} \frac{k N_S}{2} [\underline{i}_S(t) e^{-j(\beta+\varepsilon)} + \underline{i}_S^*(t) e^{j(\beta+\varepsilon)}] j \frac{N_R}{4r} [\underline{i}_R e^{-j\beta} - \underline{i}_R^* e^{j\beta}] d\beta,$$

que, após algumas manipulações algébricas, é reduzida a:

$$m_M(t) = -\frac{L_{mut}}{6\pi j} \int_0^{2\pi} [\underline{i}_S^* \underline{i}_R e^{j\varepsilon} - \underline{i}_S \underline{i}_R^* e^{-j\varepsilon}] d\beta,$$

onde L_{mut} é o coeficiente de indutância mútua definido na Equação (2.15b) e L_R a indutância própria do rotor conforme a Equação (2.21). Ao integrar sobre toda a circunferência do rotor, os termos exponenciais contendo β se anulam, levando à seguinte expressão:

$$m_M(t) = -\frac{L_{mut}}{6\pi j} [\underline{i}_S^* \underline{i}_R e^{j\varepsilon} - \underline{i}_S \underline{i}_R^* e^{-j\varepsilon}] 2\pi = \frac{L_{mut}}{3j} [\underline{i}_S \underline{i}_R^* e^{-j\varepsilon} - \underline{i}_S^* \underline{i}_R e^{j\varepsilon}]$$

Seja, agora, Z um número complexo. Usando a identidade:

$$\text{Im}(Z) = \frac{Z - Z^*}{j2},$$

tem-se que:

$$m_M(t) = \frac{2}{3} L_{mut} \left[\frac{\underline{i}_S \underline{i}_R^* e^{-j\varepsilon} - \underline{i}_S^* \underline{i}_R e^{j\varepsilon}}{j2} \right] = \frac{2}{3} L_{mut} \text{Im} [\underline{i}_S(t) (\underline{i}_R e^{j\varepsilon})^*],$$

e portanto,

$$m_M(t) = \frac{L_{mut}}{3\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\dot{i}_S \dot{i}_R^* e^{-j\varepsilon} - \dot{i}_S^* \dot{i}_R e^{j\varepsilon}}{2j} d\beta = \frac{2}{3} L_{mut} \text{Im} [\dot{i}_S(t) (\dot{i}_R e^{j\varepsilon})^*]. \quad (2.39)$$

A parte imaginária da equação acima é equivalente a um produto vetorial, sendo portanto proporcional ao produto dos dois vetores corrente e ao seno do deslocamento angular χ , como visto na Figura 2.5b.

Finalmente, supondo que os enrolamentos do rotor e do estator têm um número igual de espiras, i.e, $N_R = N_S$, tem-se que

$$L_{mag} = L_{mut}, \quad (2.40)$$

onde L_{mag} denota a indutância de magnetização, e introduzindo-se os fatores usuais de dispersão, resulta,

$$L_S = (1 + \sigma_S) L_{mag}, \quad L_R = (1 + \sigma_R) L_{mag}. \quad (2.41)$$

Desta forma, o modelo matemático completo da máquina CA, duplamente alimentada, simétrica, com momento de inércia J , pode ser descrito por:

$$R_S \dot{i}_S(t) + L_S \frac{d}{dt} \dot{i}_S(t) + L_{mag} \frac{d}{dt} (\dot{i}_R(t) e^{j\varepsilon(t)}) = \underline{u}_S(t), \quad (2.42)$$

$$R_R \dot{i}_R(t) + L_R \frac{d}{dt} \dot{i}_R(t) + L_{mag} \frac{d}{dt} (\dot{i}_S(t) e^{-j\varepsilon(t)}) = \underline{u}_R(t), \quad (2.43)$$

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) = m_M(t) - m_L(t) = \frac{2}{3} L_{mag} \text{Im} [\dot{i}_S(t) (\dot{i}_R(t) e^{j\varepsilon(t)})^*] - m_L(\varepsilon, \omega, t), \quad (2.44)$$

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \omega(t). \quad (2.45)$$

onde m_L é o torque de carga líquido na ponta do eixo do motor. Deve ser observado que como as duas primeiras equações podem ser separadas em parte real e imaginária, tem-se um conjunto de 6 equações diferenciais não lineares escalares. Elas são válidas para quaisquer formas de onda de tensão e corrente além de velocidade e torque de carga variáveis. Finalmente, observe que, de acordo com a Equação (2.40) a indutância de magnetização L_{mag} se iguala à indutância mútua L_{mut} devido à relação de espiras unitária. Por exemplo, as correntes do estator são facilmente obtidas a partir da representação vetorial, lembrando-se que o vetor corrente de

estator é dado por

$$\begin{aligned}\underline{i}_S(t) &= i_{S1}(t) + i_{S2}(t)e^{j\gamma} + i_{S3}(t)e^{j2\gamma} = \\ &= i_{S1}(t) + i_{S2}(t)(\cos \gamma + j \operatorname{sen} \gamma) + i_{S3}(t)(\cos 2\gamma + j \operatorname{sen} 2\gamma)\end{aligned}$$

e como $\gamma = 2\pi/3$, então:

$$\begin{aligned}\underline{i}_S(t) &= i_{S1}(t) + i_{S2}(t) \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + i_{S3}(t) \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \\ &= i_{S1}(t) - \frac{1}{2} [i_{S2}(t) + i_{S3}(t)] + j\frac{\sqrt{3}}{2} [i_{S2}(t) - i_{S3}(t)].\end{aligned}$$

Finalmente, note que $i_{S1}(t) + i_{S2}(t) + i_{S3}(t) = 0$ e, portanto:

$$\begin{aligned}\underline{i}_S(t) &= i_{S1}(t) - \frac{1}{2} [-i_{S1}(t)] + j\frac{\sqrt{3}}{2} [i_{S2}(t) - i_{S3}(t)] \\ &= \frac{3}{2}i_{S1}(t) + j\frac{\sqrt{3}}{2} [i_{S2}(t) - i_{S3}(t)],\end{aligned}$$

o que permite concluir que:

$$i_{S1}(t) = \frac{2}{3} \operatorname{Re} [\underline{i}_S(t)]. \quad (2.46a)$$

É fácil verificar ainda que $i_{S2}(t)$ e $i_{S3}(t)$ são dadas por:

$$i_{S2}(t) = \frac{2}{3} \operatorname{Re} [\underline{i}_S e^{-j\gamma}] \quad (2.46b)$$

$$i_{S3}(t) = \frac{2}{3} \operatorname{Re} [\underline{i}_S e^{-j2\gamma}]. \quad (2.46c)$$

As correntes nos enrolamentos do rotor são obtidas analogamente; é importante observar que no rotor gaiola de esquilo, a noção de correntes de fase perde seu sentido físico, embora a teoria simplificada continue aplicável.

As Equações (2.42) a (2.45) são o ponto de partida para todas as discussões subseqüentes de fenômenos transitórios e de estado permanente. Elas descrevem as interações eletromecânicas de uma máquina CA simétrica e podem ser adaptadas a várias restrições, impostas pelo tipo de máquina usada, contanto que as suposições básicas sobre as quais o modelo foi baseado, sejam mantidas. Isso se refere principalmente à simetria radial e ao entreferro constante, excluindo saliências do estator ou do rotor.

2.2 CONTROLE ORIENTADO PELO FLUXO DO ROTOR DE UM MOTOR DE INDUÇÃO ALIMENTADO POR CORRENTE

2.2.1 Princípio da Orientação pelo Campo

Considere as Equações (2.42) a (2.45) do modelo dinâmico do motor de indução, baseadas em correntes e tensões instantâneas, como desenvolvido na seção 2.1. Supondo-se inicialmente controle por corrente, isto é, que as correntes do estator sejam aplicadas por malhas de controle rápido de corrente, têm-se simplificações consideráveis, já que a equação de tensão do estator (2.42) se torna uma preocupação dos controladores de corrente e pode ser omitida das equações do modelo do motor.

Nesse ponto é importante ressaltar que a expressão para o torque elétrico (2.39),

$$m_M(t) = \frac{2}{3} L_{mag} \text{Im} [\underline{i}_S(t) (\underline{i}_R e^{j\varepsilon})^*], \quad (2.47)$$

foi obtida descrevendo-se a interação entre as correntes do rotor e o fluxo resultante das correntes do estator. Como as correntes do rotor não podem ser medidas em motores com rotor gaiola de esquilo, é apropriado substituir $\underline{i}_R e^{j\varepsilon}$ por uma grandeza equivalente que possa ser medida com sensores apoiados no estator. Uma maneira de contornar esse problema, como será mostrado mais tarde, é utilizar o fluxo do rotor ou o vetor corrente de magnetização equivalente, definido nas coordenadas do estator. Deve-se ressaltar que essas variáveis também não podem ser medidas diretamente, ou seja, a partir do conhecimento das variáveis do estator, mas podem ser estimadas, como será visto no capítulo 4. Retornando-se à Equação (2.23) e lembrando que, pela Equação (2.40), $L_{mut} = L_{mag}$ e, com a ajuda da Figura 2.6 tem-se que:

$$\underline{\psi}_R(t) = L_R \underline{i}_R(t) + L_{mag} \underline{i}_S(t) e^{-j\varepsilon(t)},$$

e, equivalentemente:

$$\underline{\psi}_R(t) e^{j\varepsilon} = L_R \underline{i}_R(t) e^{j\varepsilon} + L_{mag} \underline{i}_S(t).$$

Substituindo-se $L_R = L_{mag}(1 + \sigma_R)$ dado pela Equação (2.40), na equação anterior,

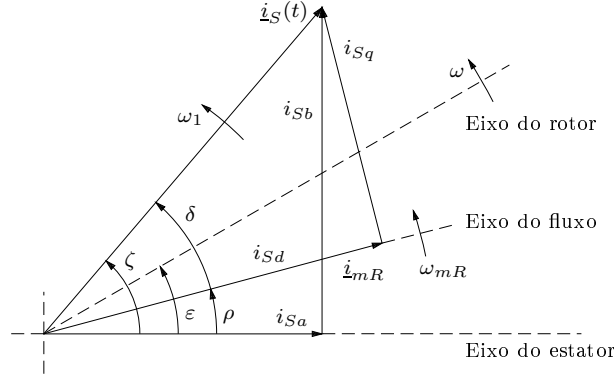


Figura 2.6: Relações angulares entre vetores corrente para $|\underline{i}_{mR}| = i_{Sd}$.

obtém-se:

$$\underline{\psi}_R(t)e^{j\varepsilon} = L_{mag}(1 + \sigma_R)\underline{i}_R(t)e^{j\varepsilon} + L_{mag}\underline{i}_S(t).$$

Colocando-se L_{mag} em evidência, pode-se escrever:

$$\underline{\psi}_R(t)e^{j\varepsilon} = L_{mag}\underline{i}_{mR}(t), \quad (2.48)$$

onde,

$$\underline{i}_{mR}(t) = [\underline{i}_S(t) + (1 + \sigma_R)\underline{i}_R e^{j\varepsilon}]. \quad (2.49)$$

Note, a partir da equação acima, que:

$$\underline{i}_R e^{j\varepsilon} = \frac{\underline{i}_{mR}(t) - \underline{i}_S(t)}{1 + \sigma_R} \quad (2.50)$$

e substituindo-se $\underline{i}_R e^{j\varepsilon}$ na Equação (2.47) resulta:

$$m_M(t) = \frac{2}{3}L_{mag} \operatorname{Im} \left[\underline{i}_S(t) \left(\frac{\underline{i}_{mR}(t) - \underline{i}_S(t)}{1 + \sigma_R} \right)^* \right]$$

$$m_M(t) = \frac{2}{3} \frac{L_{mag}}{1 + \sigma_R} \operatorname{Im} [\underline{i}_S (\underline{i}_{mR} - \underline{i}_S)^*].$$

De acordo com a Equação (2.41),

$$L_{mag} = \frac{L_S}{(1 + \sigma_S)},$$

o que permite reescrever a penúltima equação como:

$$m_M(t) = \frac{2}{3} \frac{L_S}{(1 + \sigma_R)(1 + \sigma_S)} \operatorname{Im} [\underline{i}_S \underline{i}_{mR}^* - \underline{i}_S \underline{i}_S^*].$$

A Figura 2.6 mostra que, tomando-se como referência o eixo do fluxo do rotor, $\underline{i}_S = i_S e^{j\delta}$ e, portanto $m_M(t)$ será dado por:

$$m_M(t) = \frac{2}{3} (1 - \sigma) L_S \operatorname{Im} [\underline{i}_S \underline{i}_{mR}^*], \quad (2.51)$$

onde

$$\sigma = 1 - \frac{1}{(1 + \sigma_R)(1 + \sigma_S)}$$

é o fator de dispersão total do motor, o qual tem uma influência importante nas características da máquina, sendo escolhido através de um projeto adequado e é função de parâmetros tais como a forma das ranhuras e a espessura do entreferro. Valores normais de σ estão entre 0.05, para máquinas de baixa dispersão até cerca de 0.20.

Note ainda que, de acordo com a Figura (2.6), $\underline{i}_{mR} = i_{mR}e^{j\rho}$, fazendo com que $m_M(t)$ possa ser escrito como:

$$m_M(t) = \frac{2}{3}(1 - \sigma) L_S i_{mR} \text{Im} [\underline{i}_S e^{-j\rho}]. \quad (2.52)$$

Observe que:

$$\underline{i}_S e^{-j\rho} = i_S e^{j(\delta+\rho)} e^{-j\rho} = i_S e^{j\delta} = i_S \cos \delta + j i_S \sin \delta = i_{Sd} + j i_{Sq}, \quad (2.53)$$

que leva à seguinte interpretação: o vetor corrente de estator pode ser visto a partir de um sistema de coordenadas móvel que é definido pelo fluxo do rotor ou pelo vetor corrente de magnetização \underline{i}_{mR} , consistindo de duas componentes ortogonais, uma na direção do vetor corrente de magnetização, i_{Sd} e outra perpendicular a ele, i_{Sq} .

Desta forma, a Equação (2.52) pode ser reduzida à seguinte expressão simples:

$$m_M(t) = k_M i_{mR} i_{Sq}, \quad k_M = \frac{2}{3}(1 - \sigma) L_S, \quad (2.54)$$

que dá uma pista de porquê a transformação do vetor corrente de estator para coordenadas de campo, também chamado orientação pelo campo, é a chave para um controle rápido de máquinas CA.

Claramente a Equação (2.54) nos lembra a expressão para o torque elétrico da máquina CC, onde i_{mR} é equivalente à corrente de campo e i_{Sq} é equivalente à corrente de armadura.

Os eixos d e q estabelecidos por \underline{i}_{mR} diferem daqueles comumente usados com máquinas síncronas onde a transformação é baseada na posição ε do rotor; aqui a referência é o vetor fluxo do rotor que se move com relação ao estator na frequência angular das correntes do estator e com relação ao rotor na frequência angular das correntes do rotor ou frequência angular de escorregamento. O escorregamento é

definido como

$$S = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1}$$

onde ω_1 é a freqüência angular das correntes do estator e ω_2 a freqüência angular das correntes do rotor.

A forma simplificada da expressão do torque do motor, dada pela Equação (2.54), sugere que o modelo completo do motor CA nas coordenadas do campo seja também simples. Para tanto, substituindo-se $L_R = L_{mag}(1 + \sigma_R)$ na equação de tensão do rotor (2.43), obtém-se:

$$R_R \dot{i}_R + L_{mag} \frac{d}{dt} [(1 + \sigma_R) \dot{i}_R + \dot{i}_S e^{-j\varepsilon}] = 0.$$

Multiplicando-se as expressões dadas pelas Equações (2.50) e (2.49) por $e^{-j\varepsilon}$ e inserindo os resultados nas parcelas da equação anterior, tem-se que:

$$R_R \frac{\dot{i}_{mR} - \dot{i}_S}{1 + \sigma_R} e^{-j\varepsilon} + L_{mag} \frac{d}{dt} (\dot{i}_{mR} e^{-j\varepsilon}) = 0$$

Novamente observando-se que $L_R = L_{mag}(1 + \sigma_R)$ e definindo-se a constante de tempo rotórica

$$T_R = \frac{L_R}{R_R},$$

pode-se escrever:

$$[\dot{i}_{mR} - \dot{i}_S] e^{-j\varepsilon} + T_R \frac{d}{dt} (\dot{i}_{mR} e^{-j\varepsilon}) = 0.$$

Calculando-se a derivada e após algumas manipulações algébricas, tem-se que:

$$T_R \frac{d}{dt} \dot{i}_{mR} + (1 - j\omega T_R) \dot{i}_{mR} = \dot{i}_S, \quad (2.55)$$

onde $\omega = d\varepsilon/dt$.

Multiplicando-se a Equação (2.55) por $e^{-j\rho}$ e expandindo-se o lado esquerdo resulta em:

$$T_R \frac{d}{dt} (i_{mR} e^{j\rho}) e^{-j\rho} + (1 - j\omega T_R) i_{mR} e^{j\rho} e^{-j\rho} = \dot{i}_S e^{-j\rho},$$

que pode ser reescrita como:

$$T_R e^{j\rho} e^{-j\rho} \frac{d}{dt} i_{mR} + T_R i_{mR} \left[\frac{d}{d\rho} e^{j\rho} \frac{d}{dt} \rho \right] e^{-j\rho} + (1 - j\omega T_R) i_{mR} = \dot{i}_S e^{-j\rho}.$$

Note ainda, com o auxílio da Figura 2.6, que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \zeta(t) &= \omega_1(t) = \omega_{mR}(t) + \frac{d}{dt} \delta(t), \\ \frac{d}{dt} \rho(t) &= \omega_{mR}(t), \end{aligned} \quad (2.56)$$

o que permite escrever:

$$T_R \frac{d}{dt} i_{mR} + j\omega_{mR} T_R i_{mR} + (1 - j\omega T_R) i_{mR} = \underline{i}_S e^{-j\rho}.$$

A equação anterior pode ser separada em parte real e imaginária, levando às seguintes equações:

$$T_R \frac{d}{dt} i_{mR}(t) + i_{mR}(t) = i_{Sd}(t), \quad (2.57)$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \omega(t) + \frac{i_{Sq}(t)}{T_R i_{mR}(t)} = \omega(t) + \omega_2(t). \quad (2.58)$$

Note que, de acordo com a Equação (2.57) a corrente de magnetização i_{mR} é controlada pela componente direta i_{Sd} do vetor corrente de estator, que pode ser comparada com a tensão de campo da máquina CC. Portanto, i_{Sd} , i_{Sq} são as duas grandezas de entrada independentes que controlam o torque do motor.

As Equações (2.54), (2.57) e (2.58), juntamente com as equações mecânicas (2.44) e (2.45) constituem um modelo do motor de indução nas coordenadas do campo. As duas correntes de entrada no esquema de orientação pelo campo são produzidas pela transformação das correntes do estator em um sistema de coordenadas definido pelo ângulo ρ do fluxo. Isto é executado em dois passos, primeiro convertendo as três correntes do estator para um sistema CA difásico ortogonal,

$$\underline{i}_S(t) = i_{S1}(t) + i_{S2}(t)e^{j\gamma} + i_{S3}(t)e^{j2\gamma} = i_{Sa}(t) + j i_{Sb}(t). \quad (2.59)$$

Com a condição de correntes trifásicas balanceadas, $i_{S1} + i_{S2} + i_{S3} = 0$, temos

$$i_{Sa}(t) = \frac{3}{2} i_{S1}(t), \quad (2.60a)$$

$$i_{Sb}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} [i_{S2}(t) - i_{S3}(t)]. \quad (2.60b)$$

Estas correntes CA são então convertidas para grandezas CC em regime permanente, pela transformação em coordenadas do campo

$$\underline{i}_S(t) e^{-j\rho(t)} = (i_{Sa}(t) + j i_{Sb}(t)) (\cos \rho(t) - j \sen \rho(t)) = i_{Sd}(t) + j i_{Sq}(t), \quad (2.61)$$

levando a

$$i_{Sd}(t) = i_{Sa}(t) \cos \rho(t) + i_{Sb}(t) \sen \rho(t), \quad (2.62a)$$

$$i_{Sq}(t) = i_{Sb}(t) \cos \rho(t) - i_{Sa}(t) \sen \rho(t). \quad (2.62b)$$

O ângulo ρ do fluxo é obtido pela integração da Equação (2.58), i.e. ele é uma variável interna ao motor. Substituindo agora as Equações (2.60) nas Equações (2.62) e realizando algumas manipulações, tem-se diretamente a transformação de i_{S1} , i_{S2} e i_{S3} para i_{Sd} e i_{Sq} , apresentada a seguir, em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} i_{Sd} \\ i_{Sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cos \rho & \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \rho & -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \rho \\ -\frac{3}{2} \sin \rho & \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \rho & -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \\ i_{S3} \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

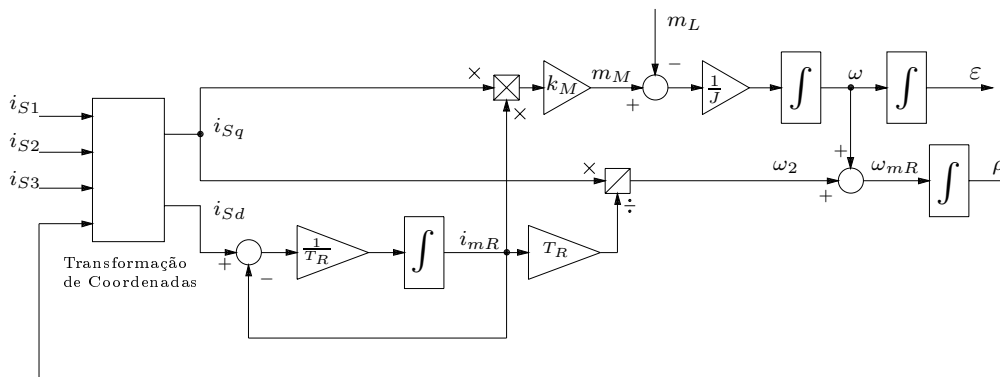


Figura 2.7: Diagrama de blocos do motor de indução em coordenadas de campo, supondo imposição das correntes do estator.

A Figura 2.7 descreve o diagrama de blocos do motor nas coordenadas de campo, de acordo com as Equações (2.44), (2.45), (2.54), (2.57), (2.58). Uma vez que a transformação tenha sido completada, a estrutura dinâmica do motor CA fica semelhante à de uma máquina CC. Em particular existe uma grande constante de tempo de atraso T_R comparável ao atraso do campo de uma máquina CC. Portanto a magnitude do fluxo do rotor ou o vetor corrente de magnetização equivalente, \dot{i}_{mR} , não são adequados para uma ação rápida de controle sobre o torque; este trabalho deve ser atribuído à corrente de quadratura i_{Sq} . A constante de tempo de dispersão no eixo de quadratura, que poderia ser o equivalente da constante de tempo de armadura no motor CC, é desprezível devido à suposição das correntes impostas no estator.

Para alcançar um alto desempenho dinâmico no controle do motor CA, a mesma estratégia da máquina CC é apropriada: a corrente de magnetização i_{mR} deve ser

mantida no nível máximo, limitada abaixo da velocidade base, pela saturação do núcleo de ferro, e acima da velocidade base, pela tensão máxima do inversor, enquanto que o torque deve ser controlado através da corrente de quadratura. Quando uma eficiência superior da máquina é de extrema importância, como em veículos alimentados por bateria, o nível do fluxo poderia ser reduzido quando o motor for operado em períodos longos com carga parcial. É claro que existe um incremento no atraso quando o nível do fluxo precisa ser aumentado no caso de uma demanda repentina de torque.

Neste trabalho o motor não será submetido a torques externos ¹. Com isso, uma conveniente modificação será realizada na Equação (2.44) de torque. No lugar do torque de carga será considerado o atrito viscoso, ou seja, fazendo

$$m_L(\varepsilon, \omega, t) = f\omega(t),$$

onde f representa o coeficiente de atrito e substituindo essa expressão juntamente com a Equação (2.54) na Equação (2.44), a equação de torque passa a ser:

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) = k_M i_{mR}(t) i_{Sq}(t) - f\omega(t). \quad (2.64)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace na Equação (2.38) e manipulando algebricamente chega-se ao seguinte resultado:

$$\frac{\omega(s)}{I_{Sq}(s)} = \frac{k_M I_{mR}}{Js + f} = \frac{k_{abs} I_{mR}}{\tau s + 1},$$

onde $\tau = J/f$, $k_{abs} = k_M/f$ e $\omega(s)$ e $I_{Sq}(s)$ denotam as transformadas de Laplace de $\omega(t)$ e $i_{Sq}(t)$ respectivamente. A Figura 2.8 mostra o modelo do motor de indução sob essa nova perspectiva.

Uma prática usualmente adotada para reduzir as complexidades da planta de controle CA, é o cancelamento da transformação de coordenadas por uma transformação inversa no lado do controle do inversor. As condições para o sucesso dessa operação são que o atraso efetivo do inversor possa ser desprezado e as malhas de controle de corrente tenham ganho constante, i.e. o inversor controlado atua como

¹No contexto do projeto de controladores não lineares, ainda permanece em aberto o problema de rejeição de perturbação externa, ou seja, quando o motor é submetido a um torque de carga desconhecido. No contexto do projeto de controladores robustos \mathcal{H}_∞ , esse problema será abordado em trabalhos futuros.

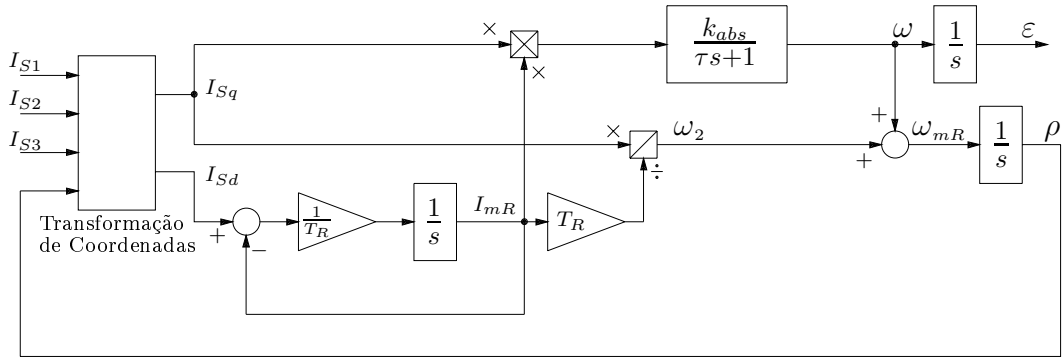


Figura 2.8: Diagrama de blocos do motor de indução, usado para simulação.

uma perfeita fonte de corrente. A transformação inversa, ou seja, o inverso da Equação (2.63) é:

$$\begin{bmatrix} i_{S1} \\ i_{S2} \\ i_{S3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cos \rho & -\frac{2}{3} \sin \rho \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \rho & \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \rho \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \rho & -\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{Sd} \\ i_{Sq} \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Se a aquisição do sinal da posição angular real ρ do pico positivo do fluxo do rotor não puder ser feita, é possível estimar um valor ρ' para a posição através de um modelo matemático construído para tal finalidade. Para conseguir o cancelamento da demodulação interna da máquina, o valor do ângulo estimado para o fluxo ρ' deve ser exatamente igual ao valor real do ângulo ρ da onda de fluxo fundamental. Evidentemente, o princípio do controle em coordenadas de campo parece uma maneira muito efetiva de desacoplar a complexa estrutura de controle multivariável da máquina de indução. Algumas vantagens são listadas:

- Acesso direto ao fluxo e torque permitindo um enfraquecimento controlado do campo e limite de torque.
- Em estado permanente os controladores processam quantidades CC, o que faz o controle menos sensível a indesejáveis deslocamentos de fase.

Porém, ao realizar um esquema de controle orientado pelo campo na prática, alguns sérios obstáculos devem ser superados:

- A aquisição de sinais de fluxo deve ser independente da frequência de rotação, e representar bem a amplitude e a posição da onda de fluxo fundamental.

- Efeitos do atraso residual do conversor controlado de corrente.
- Efeitos do modelo de fluxo desregulado.

2.3 CONCLUSÕES

Neste capítulo desenvolveu-se um modelo para o motor de indução, cujo diagrama de blocos pode ser visto na Figura 2.8 e o conjunto de equações que descrevem seu funcionamento é:

$$T_R \frac{d}{dt} i_{mR}(t) + i_{mR}(t) = i_{sd}(t) \quad (2.66)$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \omega(t) + \frac{i_{sq}(t)}{T_R i_{mR}(t)} \quad (2.67)$$

$$J \frac{d}{dt} \omega(t) = k_M i_{mR}(t) i_{sq}(t) - f \omega(t) \quad (2.68)$$

$$\frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \omega(t). \quad (2.69)$$

Se o valor do ângulo do fluxo do rotor ρ não puder ser medido, pode-se construir um observador com a finalidade de estimar seu valor, aqui chamado de ρ' , de acordo com a equação diferencial (2.67). Entretanto, o valor estimado T_R' deve ser igual ao valor de T_R em todos os instantes para que a transformação de coordenadas dada pela Equação (2.63) seja cancelada pela sua inversa dada pela Equação (2.65). Porém, não há um método totalmente confiável para se encontrar um valor exato de T_R' ; além disso o valor da constante de tempo rotórica T_R varia, por exemplo com a temperatura, velocidade angular e corrente no rotor. Com isso, geralmente, ρ' é diferente de ρ e este é um problema ainda aberto.

Essa incerteza paramétrica é justamente o que motiva o uso de controle robusto para garantir a estabilidade e o desempenho dinâmico do motor de indução. A idéia central é definir uma faixa de operação do motor em torno de um modelo nominal, considerando as incertezas e projetar controladores que atendam certos objetivos de projeto dentro dessa faixa. Daí vem a escolha da teoria \mathcal{H}_∞ no cálculo de controladores para o sistema realimentado, tema que será abordado no próximo capítulo.

Capítulo 3

CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_∞

Este capítulo tem o propósito de realizar uma revisão dos conceitos mais importantes da teoria de controle robusto \mathcal{H}_∞ e terá a seguinte estrutura: na seção 3.1 apresentam-se alguns preliminares matemáticos que auxiliarão no entendimento das seções seguintes; a seção 3.2 trata da caracterização dos objetivos de projeto de controladores robustos em termos da norma \mathcal{H}_∞ de uma função de transferência e da formulação dos problemas de otimização \mathcal{H}_∞ que consideram esses objetivos; a seção 3.3 mostra como os objetivos de projeto são conflitantes e faz considerações sobre esse problema; na seção 3.4 é apresentado o problema de ajuste de modelos e na seção 3.5 considera-se a primeira parte da solução do problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ , qual seja, a parametrização dos controladores que estabilizam o sistema realimentado; na seção 3.6 trata-se da redução de problemas \mathcal{H}_∞ a problemas de ajuste de modelo e na seção 3.7 mostra-se como o problema de ajuste de modelo é transformado em problemas de 1-, 2- e 4-blocos e apresentam-se as soluções para os casos de 1- e 2-blocos.

3.1 PRELIMINARES MATEMÁTICOS

3.1.1 Produto Interno e Normas

Com a finalidade de prover uma base teórica necessária para o projeto de um controlador, serão aqui apresentadas definições e conceitos relacionados a uma classe peculiar de espaços vetoriais: os espaços de funções. Seja X um espaço de funções que satisfaz as propriedades de espaço vetorial sobre o corpo dos complexos \mathbb{C} .

Definição 1 Uma norma no espaço X , denotada $\| \cdot \|$ é uma função que associa um número $\|x\| \in \mathbb{R}$ a cada $x \in X$, devendo satisfazer as seguintes propriedades:

- i) $\|x\| \geq 0, \forall x$;
- ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$;
- iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{C}$;
- iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

Definição 2 Uma sequência $\{x_k\}$ converge para $x_0 \in X$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_0\| < \varepsilon, \forall k > N$. □

Note que a definição de sequência convergente requer que seja possível definir uma norma em X .

Definição 3 Uma sequência $\{x_k\}$ é de Cauchy se $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k - x_j\| < \varepsilon, \forall k, j > N$. □

É possível provar que toda sequência convergente é de Cauchy, contudo a recíproca nem sempre é verdadeira. Deve-se salientar ainda que um espaço no qual todas as seqüências de Cauchy convergem é denominado completo.

Definição 4 Um espaço normado X é dito ser de Banach se toda sequência de Cauchy $\{x_k\}, x_k \in X$, converge para algum $x_0 \in X$. □

Como exemplos de espaço de Banach, podemos citar:

- i) $\mathbb{C}^{n \times m}$: espaço das matrizes complexas $n \times m$ com a norma $\|A\| = \bar{\sigma}(A)$ (maior valor singular de A).
- ii) \mathcal{RL}_∞ : espaço das funções racionais, próprias, sem pólos no eixo imaginário, com norma definida por $\|f\|_\infty = \max_{\omega} |f(j\omega)|$
- iii) \mathcal{RH}_∞ : espaço das funções racionais, próprias e estáveis, com norma definida por $\|f\|_\infty = \max_{\text{Re}(s)>0} |f(s)| = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |f(j\omega)|$

iv) \mathcal{RH}_∞^+ : espaço das funções racionais, próprias e anti-estáveis¹, com norma definida por $\|f\|_\infty = \max_{\text{Re}(s)>0} |f(-s)| = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |f(-j\omega)|$

Para ilustrar o conceito de norma infinita considere a seguinte função de transferência:

$$f(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+5}.$$

Isso implica em

$$f(j\omega) = \frac{j\omega+1}{(j\omega)^2+3j\omega+5} = \frac{(5+2\omega^2)+j(2\omega-\omega^3)}{\omega^4-\omega^2+25} \Rightarrow |f(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^6+24\omega^2+25}}{\omega^4-\omega^2+25}. \quad (3.1)$$

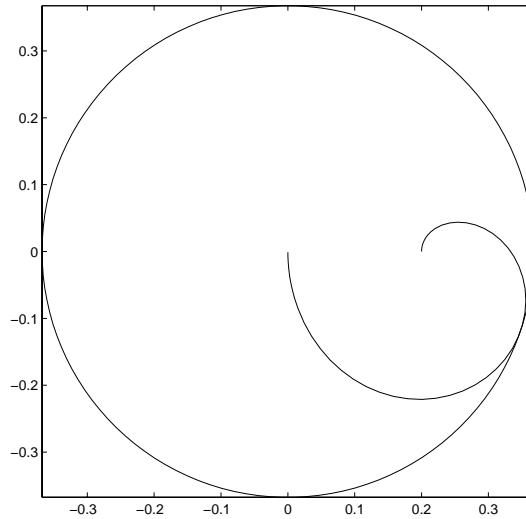


Figura 3.1: Diagrama polar de $f(s)$ tangenciando um círculo de raio igual a $\|f\|_\infty$.

Note que a $\|f\|_\infty$ pode ser calculada analítica ou numericamente. Analiticamente, deve-se fazer $\frac{d|f(j\omega)|^2}{d\omega} = 0$, ou seja

$$-2 \frac{\omega(\omega^4+2\omega^2-26)}{(\omega^4-\omega^2+25)^2} = 0 \Rightarrow \omega(\omega^4+2\omega^2-26) = 0,$$

cujas raízes reais não negativas são 0 e 2,048. Substituindo esses valores na Equação (3.1), tem-se que o valor máximo de $|f(j\omega)|$ ocorre para $\omega = 2,048$. Assim, $\|f\|_\infty = \max_{\omega \in \mathbb{R}} |f(j\omega)| = |f(j2,048)| = 0,3678$. Numericamente, deve-se definir um vetor de frequências $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_n]$ e calcular $|f(j\omega_k)|$, $k = 1, 2, \dots, n$, e tomar o valor máximo.

¹Uma função de transferência é anti-estável quando todos os seus pólos têm parte real positiva.

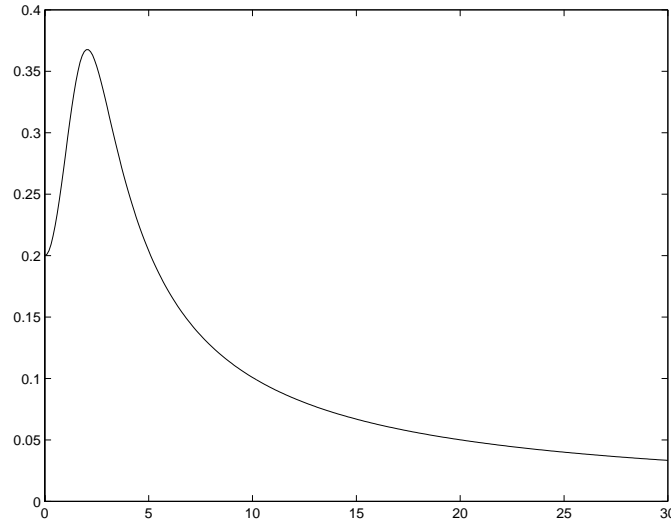


Figura 3.2: Gráfico de $|f(j\omega)|$.

Na Figura 3.1 pode-se observar o diagrama polar de $f(s)$ tangenciando um círculo de raio igual a $\|f\|_\infty$ enquanto que na Figura 3.2 está plotado o gráfico de $|f(j\omega)|$. Note o ponto de máximo, que corresponde à $\|f\|_\infty$.

A definição de norma conduz aos chamados espaços de Banach. A seguir serão considerados espaços onde é possível definir um produto interno.

Definição 5 *Um produto interno em X , denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, é uma função que a cada par de vetores $(x, y) \in X$, associa um número complexo, satisfazendo as seguintes propriedades:*

- i) $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ e $\langle x, x \rangle \geq 0$;
- ii) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$;
- iii) $\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \alpha \langle x, y_1 \rangle + \beta \langle x, y_2 \rangle$;
- iv) $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$. □

A definição de produto interno possibilita a seguinte definição de norma: $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Assim, ao se definir um espaço com produto interno, este traz consigo a idéia de norma.

Definição 6 *Um espaço vetorial X é um espaço de Hilbert se ele for completo e for dotado de um produto interno.* □

São exemplos de espaço de Hilbert:

- i) \mathbb{C}^n com o produto interno $\langle x, y \rangle = x^*y$, onde “ * ” representa o complexo-conjugado tranposto. A correspondente norma é dada por

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = (x^*x)^{1/2};$$

- ii) ℓ_2 , espaço das funções em \mathbb{R} de quadrado integrável

$$\ell_2 = \left\{ f(t) \in \mathbb{R}, -\infty < t < +\infty, \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt < \infty \right\}, \text{ com}$$

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t) dt \quad \Rightarrow \quad \|x\|_{\ell_2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt;$$

- iii) \mathcal{RL}_2 , espaço das funções racionais estritamente próprias, sem pólos no eixo imaginário com produto interno

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) Y(j\omega) d\omega \quad \Rightarrow \quad \|X\|_{\mathcal{L}_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

3.1.2 Relação de Parseval e Definição de norma \mathcal{L}_∞ a partir da norma \mathcal{L}_2 induzida

Neste momento, é interessante ressaltar a relação entre as normas dos diferentes espaços considerados na subseção anterior. Se enxergarmos o espaço ℓ_2 contendo as funções no domínio do tempo e o \mathcal{L}_2 contendo suas correspondentes transformadas bilaterais de Laplace, então a substituição da variável s por $j\omega$ levará à transformada de Fourier. Desta forma, pode-se fazer uso da relação de Parseval, apresentada a seguir: seja $x(t) \in \ell_2$ e $X(j\omega) \in \mathcal{L}_2$, onde $X(j\omega) = \mathcal{F}[x(t)]$, $\mathcal{F}[\cdot]$ denota transformada de Fourier, então $\|x\|_{\ell_2} = \|X\|_{\mathcal{L}_2}$. Este resultado nos permite o uso indistinto, para um dado sinal $x(t) \in \ell_2$ e de sua transformada de Fourier $X(j\omega) \in \mathcal{L}_2$, de uma única representação da norma-2: $\|x\|_2 = \|X\|_2$, dispensando as notações ℓ_2 ou \mathcal{L}_2 .

Para ilustrar a relação de Parseval e conseqüentemente o cálculo da norma-2 de um sinal, considere o seguinte exemplo: seja $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, $a < 0$.

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{+\infty} f^2(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{2at} dt = \left[\frac{e^{2at}}{2a} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{2a}.$$

Note que,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega},$$

uma vez que a integral representa a transformada de Laplace de e^{at} para $s = j\omega$. Assim,

$$\begin{aligned}\|F\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(j\omega) F(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a - j\omega} \frac{1}{a + j\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{\omega}{a} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{a} \pi \right] = -\frac{1}{2a}.\end{aligned}$$

Uma outra importante relação é entre a norma-2 e a norma- ∞ . A norma- ∞ de uma função de transferência $G(s) \in \mathcal{RL}_\infty$ é definida como $\sup_{\omega} |G(j\omega)|$. Porém, $\|G\|_\infty$ pode ser também definida como uma norma induzida. Para tanto, faz-se uso do seguinte teorema:

Teorema 1 *Seja $G(s) \in \mathcal{RL}_\infty$ e seja $u(s) \in \mathcal{RL}_2$. Então, $y(s) = G(s)u(s) \in \mathcal{RL}_2$*

e

$$\|G\|_\infty = \max_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|Gu\|_2}{\|u\|_2} = \begin{cases} \max_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)|, & \text{se } G(j\omega) \text{ for escalar} \\ \max_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[G(j\omega)], & \text{se } G(j\omega) \text{ for matriz} \end{cases}$$

□

3.1.3 Gramianos de controlabilidade e observabilidade, valores singulares de Hankel e norma de Hankel

Seja $R(s)$ uma matriz de transferência $p \times m$ estável ou anti-estável e suponha que $R(s)$ tenha a seguinte representação em espaço de estados:

$$R(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right], \quad (3.2)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ e $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

Definição 7 *Às matrizes W_c e W_o , soluções das seguintes equações de Lyapunov*

$$AW_c + W_c A^T = -BB^T \quad e \quad (3.3)$$

$$A^T W_o + W_o A = -C^T C, \quad (3.4)$$

dá-se o nome de gramianos de controlabilidade e observabilidade respectivamente.

Um fato importante sobre os gramianos é estabelecido pelo seguinte teorema:

Teorema 2 Seja $R(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ estável (anti-estável). Então:

- i) W_c e W_o são matrizes positivas semidefinidas (negativas semidefinidas).
- ii) Os autovalores não-nulos do produto $W_c W_o$ são os mesmos para qualquer realização em espaço de estados de $R(s)$.

Demonstração: Vide Zhou *et al.* [22], pag. 71-75. □

Com base na invariância dos autovalores do produto $W_c W_o$, tem-se a seguinte definição:

Definição 8 (Valores singulares de Hankel [22]). São as raízes quadradas dos autovalores do produto $W_c W_o$ de uma realização em espaço de estados qualquer de $R(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$. □

Definição 9 O maior valor singular de Hankel define a chamada norma de Hankel (norma do operador de Hankel), que é denotada por $\|R\|_H$.

Prova: Vide Glover [23], pag. 1122. □

3.2 CARACTERIZAÇÃO DOS OBJETIVOS DE PROJETO EM TERMOS DA NORMA \mathcal{H}_∞ DE UMA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Daqui em diante, $G(s)$ deve ser entendida como sendo escalar, isto é, $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$, onde $n(s)$ e $d(s)$ são polinômios, a não ser que seja indicado explicitamente o contrário.

Os objetivos de projeto, quando considerados no domínio da frequência, constituem os requisitos que uma determinada função de transferência deve atender. O objetivo principal de um sistema de controle é a estabilidade. Porém, a estabilidade do sistema realimentado, isoladamente, não define a qualidade do sistema de controle. Outros objetivos, tais como baixa sensibilidade a variações nos parâmetros

da planta, rastreamento/rejeição de sinais de ruído, devem também ser incorporados ao projeto de sistemas de controle. A seguir, será mostrado como os objetivos de controle são tratados no âmbito da teoria de controle ótimo \mathcal{H}_∞ . Isto é feito definindo-se problemas de otimização e computando-se a função de transferência do controlador que leva à minimização dos funcionais de custo escolhidos e também à estabilidade interna do sistema realimentado, no sentido da definição a seguir:

Definição 10 *Um sistema realimentado é internamente estável quando a sua matriz de estados possuir todos os autovalores com parte real negativa. Um controlador $K(s)$ é estabilizante, quando torna o sistema realimentado internamente estável. \square*

3.2.1 Problema de estabilidade robusta

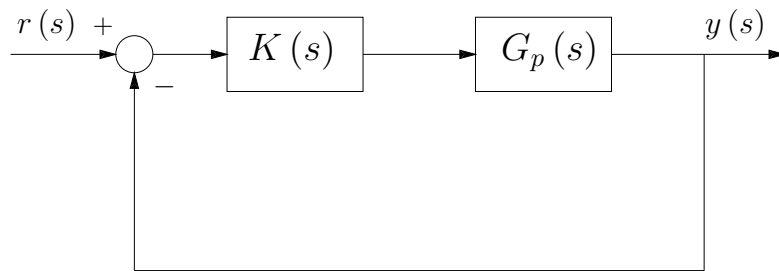


Figura 3.3: Diagrama de blocos de um modelo de planta com incerteza.

Considere agora a Figura 3.3, onde $G_p(s)$ representa o modelo da planta com incerteza e $K(s)$ a função de transferência do controlador, a ser calculada. As seguintes restrições devem ser feitas a $G_p(s)$:

- i) $G(s) \in \mathcal{RL}_\infty$ (isto é, $G(s)$ não pode ter pólos no eixo $j\omega$) é uma função de transferência dada de forma explícita. Quando $G_p(s) = G(s) + \Delta_a(s)$, tem-se o chamado modelo com perturbação aditiva. Quando $G_p(s) = [1 + \Delta_m(s)]G(s)$, tem-se o chamado modelo com perturbação multiplicativa.
- ii) $G(s)$ e $G_p(s)$ possuem o mesmo número de pólos instáveis.
- iii) $|\Delta(j\omega)| \leq \delta(j\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}$, onde $\delta(j\omega)$ é uma função real não-negativa.

Com base nas considerações feitas, será abordado o primeiro problema de controle, que é o de estabilização de todas as plantas pertencentes à classe

$$\mathcal{P}_m = \{G_p(s) = [1 + \Delta(s)]G(s) : |\Delta(j\omega)| \leq \delta(j\omega), \omega \in \mathbb{R}\} \quad (3.5)$$

que pode ser enunciado da seguinte forma: encontre $K(s)$ tal que o sistema realimentado da Figura 3.3 seja internamente estável para toda planta $G_p(s) \in \mathcal{P}_m$. Este problema é também conhecido como problema de estabilidade robusta e é resolvido com a ajuda do seguinte teorema:

Teorema 3 (*Teorema do pequeno ganho*). *Um controlador $K(s)$ estabiliza todas as plantas $G_p(s) \in \mathcal{P}_m$ se, e somente se, $K(s)$ estabiliza $G(s)$ e*

$$\|\Delta GK(1 + GK)^{-1}\|_\infty < 1 \quad (3.6)$$

Demonstração: Vide Vidyasagar [24]. □

Com base no teorema do pequeno ganho, pode-se formular o primeiro problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ , que é o da maximização da tolerância à perturbação nos parâmetros da função de transferência da planta, qual seja: projetar um controlador $K(s)$ de modo a estabilizar o sistema realimentado para toda planta pertencente à classe \mathcal{P}_m e tal que $\delta_M = \max \delta(j\omega)$ seja máximo.

A partir do teorema do pequeno ganho é possível escrever:

$$\begin{aligned} \|\Delta GK(1 + GK)^{-1}\|_\infty &= \max_{\omega \in \mathbb{R}} |\Delta(j\omega) G(j\omega) K(j\omega) (1 + G(j\omega) K(j\omega))^{-1}| \leq \\ &\leq \max_{\omega \in \mathbb{R}} |\Delta(j\omega)| \max_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega) K(j\omega) (1 + G(j\omega) K(j\omega))^{-1}| \leq \\ &\leq \delta_M \max_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega) K(j\omega) (1 + G(j\omega) K(j\omega))^{-1}| < 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dessa forma, uma condição suficiente para $\|\Delta GK(1 + GK)^{-1}\|_\infty < 1$ é dada por:

$$\delta_M < \frac{1}{\|GK(1 + GK)^{-1}\|_\infty}. \quad (3.8)$$

Observe, a partir da Figura 3.3 que a função de transferência de malha fechada, $T(s) = \frac{y(s)}{r(s)}$ é dada por:

$$T(s) = [1 + G(s) K(s)]^{-1} G(s) K(s). \quad (3.9)$$

e, com base na Equação (3.8), para se maximizar a perturbação admissível δ_M , devemos minimizar $\|GK(1 + GK)^{-1}\|_\infty$ para todo controlador $K(s)$ que estabiliza

$G(s)$ ($K(s)$ est $G(s)$). Portanto, o problema 1 pode ser formulado da seguinte maneira:

Problema 1:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|GK(1 + GK)^{-1}\|_{\infty} = \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|T\|_{\infty} \quad (3.10)$$

3.2.2 Rastreamento de sinais e desempenho transitório

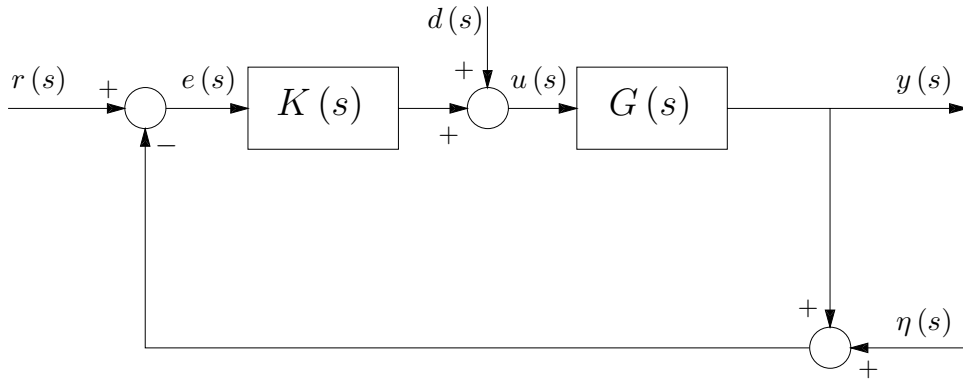


Figura 3.4: Diagrama de blocos para o projeto de controladores ótimos \mathcal{H}_{∞} .

Considere o sistema realimentado representado na Figura 3.4, onde $r(t)$, $d(t)$, $\eta(t)$ e $y(t)$ denotam, respectivamente, os sinais de referência, perturbação externa, ruído e saída. Supondo que $d(t) \equiv 0$ e $\eta(t) \equiv 0$, tem-se que o objetivo de rastreamento de uma classe de sinais $r(t) \in \ell_2$ pode ser considerado a partir do seguinte problema de otimização:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \max_{\|r\|_2 \neq 0} \frac{\|e\|_2}{\|r\|_2}. \quad (3.11)$$

Com base na Figura 3.4, tem-se que a função de transferência de $r(s)$ para $e(s)$, $T_{re}(s)$, será:

$$\begin{aligned} e(s) &= r(s) - G(s)K(s)e(s) = \\ &= [1 + G(s)K(s)]^{-1}r(s) = \\ &= T_{re}(s)r(s) \end{aligned}$$

onde

$$T_{re}(s) = [1 + G(s)K(s)]^{-1} \quad (3.12)$$

Pela propriedade da norma induzida:

$$\max_{\|r\|_2 \neq 0} \frac{\|T_{re}r\|_2}{\|r\|_2} = \|T_{re}\|_\infty \quad (3.13)$$

e, portanto:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \max_{\|r\|_2 \neq 0} \frac{\|e\|_2}{\|r\|_2} = \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|T_{re}\|_\infty. \quad (3.14)$$

Tem-se então o seguinte problema de otimização:

Problema 2:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|(1 + GK)^{-1}\|_\infty \quad (3.15)$$

3.2.3 Rejeição de perturbação

Seja, agora, $r(t) \equiv 0$ e $\eta(t) \equiv 0$ no sistema da Figura 3.4. Então o objetivo de rejeição de perturbação para a classe dos sinais ℓ_2 será considerado a partir do seguinte problema de otimização:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \max_{\|d\|_2 \neq 0} \frac{\|y_d\|_2}{\|d\|_2}. \quad (3.16)$$

A partir da Figura 3.4, tem-se que a função de transferência de $d(s)$ para $y_d(s)$, $T_{dy}(s)$, é dada por:

$$\begin{aligned} y_d(s) &= G(s)d(s) - G(s)K(s)y_d(s) = \\ &= [1 + G(s)K(s)]^{-1}G(s)d(s) = \\ &= T_{dy}(s)d(s) \end{aligned}$$

onde

$$T_{dy}(s) = [1 + G(s)K(s)]^{-1}G(s) \quad (3.17)$$

Pela propriedade da norma induzida:

$$\max_{\|d\|_2 \neq 0} \frac{\|T_{dy}d\|_2}{\|d\|_2} = \|T_{dy}\|_\infty \quad (3.18)$$

e, portanto:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \max_{\|r\|_2 \neq 0} \frac{\|y_d\|_2}{\|d\|_2} = \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|T_{dy}\|_\infty, \quad (3.19)$$

que leva ao seguinte problema de otimização:

Problema 3:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|(1 + GK)^{-1}G\|_{\infty} \quad (3.20)$$

3.2.4 Atenuação de ruído

Suponha que $r(t) \equiv 0$ e $d(t) \equiv 0$. Então, o objetivo de atenuação de ruído para a classe dos sinais ℓ_2 será considerado a partir do seguinte problema de otimização:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \max_{\|\eta\|_2 \neq 0} \frac{\|y_{\eta}\|_2}{\|\eta\|_2}. \quad (3.21)$$

De acordo com Figura 3.4, tem-se que a função de transferência de $\eta(s)$ para $y_{\eta}(s)$, $T_{\eta y}(s)$, pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y_{\eta}(s) &= -G(s)K(s)[\eta(s) + y_{\eta}(s)] = \\ &= -[1 + G(s)K(s)]^{-1}G(s)K(s)d(s) = \\ &= T_{\eta y}(s)\eta(s) \end{aligned}$$

onde

$$T_{\eta y}(s) = -[1 + G(s)K(s)]^{-1}G(s)K(s) \quad (3.22)$$

Pela propriedade da norma induzida:

$$\max_{\|\eta\|_2 \neq 0} \frac{\|T_{\eta y}\eta\|_2}{\|\eta\|_2} = \|T_{\eta y}\|_{\infty} \quad (3.23)$$

e, desta forma:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \max_{\|\eta\|_2 \neq 0} \frac{\|y_{\eta}\|_2}{\|\eta\|_2} = \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|T_{\eta y}\|_{\infty}. \quad (3.24)$$

Tem-se, assim, o seguinte problema de otimização:

Problema 4:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|(1 + GK)^{-1}GK\|_{\infty} = \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|T\|_{\infty} \quad (3.25)$$

3.3 OBJETIVOS DE PROJETO CONFLITANTES

Neste ponto é interessante introduzir o conceito de função de sensibilidade $S(s)$, que é definida da seguinte forma:

$$S(s) = \frac{1}{G(s)} \frac{dT(s)}{d[G(s)]} = [1 + G(s)K(s)]^{-1}.$$

Observe que,

$$T(s) + S(s) = 1$$

o que permite escrever os problemas 1 a 4 como:

Problema 1: (Estabilidade robusta)

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|T\|_\infty \quad (3.26)$$

Problema 2: (Rastreamento de sinais e desempenho transitório)

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|S\|_\infty \quad (3.27)$$

Problema 3: (Rejeição de perturbação)

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|SG\|_\infty \quad (3.28)$$

Problema 4: (Atenuação de ruído)

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|T\|_\infty \quad (3.29)$$

Note que os problemas 1 e 2 requerem que $\|T\|_\infty$ e $\|S\|_\infty$ sejam minimizadas. É importante notar que a minimização simultânea de $\|S\|_\infty$ e $\|T\|_\infty$ é conflitante, pois:

$$\begin{aligned} S(s) + T(s) = 1 &\Rightarrow T(s) = 1 - S(s) \Rightarrow \|T\|_\infty = \|1 - S\|_\infty \\ \Rightarrow 1 - \|S\|_\infty \leq \|T\|_\infty \leq 1 + \|S\|_\infty \end{aligned} \quad (3.30)$$

de modo análogo:

$$\|S\|_\infty = \|1 - T\|_\infty \Rightarrow 1 - \|T\|_\infty \leq \|S\|_\infty \leq 1 + \|T\|_\infty. \quad (3.31)$$

Assim, ao tornar $\|T\|_\infty \ll 1$, temos que $\|S\|_\infty \rightarrow 1$ e vice-versa. Então, formalmente, a solução simultânea dos problemas de otimização seria conflitante. Entretanto, cabe observar que em geral os objetivos de controle ocorrem em faixas de frequência distintas, conforme mostra a Tabela 3.1. Dessa forma, são introduzidas funções de ponderação $W_1(s)$ e $W_2(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ nos problemas de otimização de modo a penalizar as faixas de frequência de interesse, em função dos objetivos considerados. Os problemas de otimização passam a ser:

Tabela 3.1: Faixas de frequência dos objetivos de controle.

Objetivo	Faixa de frequência a ser penalizada
Rastreamento	Baixa
Rejeição de perturbação	Baixa
Atenuação de ruído	Alta
Estabilidade robusta	Alta

Problemas 1 e 4:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|W_1 T\|_\infty \quad (3.32)$$

Problema 2:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|W_2 S\|_\infty \quad (3.33)$$

Problema 3:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|W_2 S G\|_\infty \quad (3.34)$$

Também podem ser considerados problemas mistos (rastreamento, estabilidade robusta e atenuação de ruído, por exemplo), que pode ser formulado da seguinte forma:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \left\| \begin{bmatrix} W_1 T \\ W_2 S \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (3.35)$$

3.4 PROBLEMA DE AJUSTE DE MODELOS

Considere o diagrama de blocos da Figura 3.5 onde $T_i(s) \in \mathcal{RH}_\infty$. O problema de ajuste de modelos pode ser enunciado da seguinte forma: encontre $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$

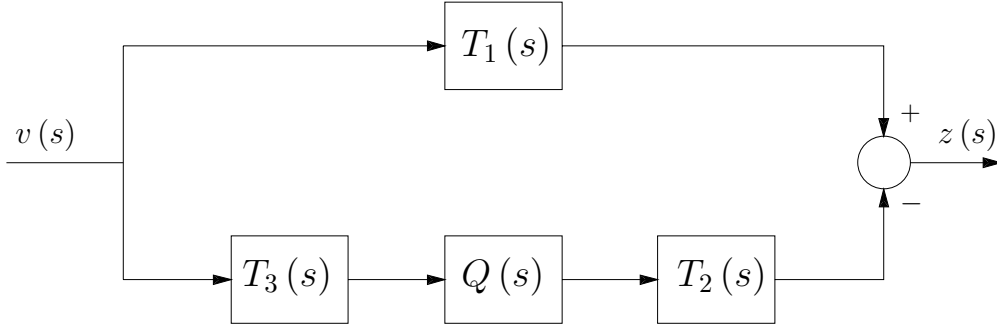


Figura 3.5: Diagrama de blocos para o problema de ajuste de modelos.

tal que $\forall v(s) \in \mathcal{RH}_2$, $\|v\|_2 = 1$ tem-se que o $\sup_{\|v\|_2=1} \|z\|_2$ seja mínimo.

A partir da Figura 3.5 pode-se escrever:

$$z(s) = [T_1(s) - T_2(s)Q(s)T_3(s)]v(s) = T_{vz}(s)v(s)$$

e portanto:

$$\min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \sup_{\|v\|_2=1} \|z\|_2 = \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|T_{vz}\|_\infty = \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|T_1 - T_2QT_3\|_\infty$$

A importância do problema de ajuste de modelos ficará clara mais adiante, quando será mostrado que todos os problemas de controle ótimo \mathcal{H}_∞ , formulados na seção anterior, podem ser transformados em um problema de ajuste de modelos. É importante ressaltar que, mesmo quando a função de transferência da planta, $G(s)$, da Figura 3.4, é escalar, $T_{vz}(s)$ resultante pode ser matricial. Isto irá acontecer quando vários objetivos de projeto forem considerados.

3.5 ESTABILIZAÇÃO

Aqui será abordada a primeira parte da solução do problema de controle ótimo \mathcal{H}_∞ , que é a parametrização dos controladores que estabilizam o sistema realimentado da Figura 3.4.

Para se obter a classe dos controladores $K(s)$ que estabilizam o sistema realimentado da Figura 3.4, será considerada, inicialmente, uma outra configuração, representada na Figura 3.6. Em seguida será mostrado que, ao se obter um controlador estabilizante para esse sistema, assegura-se também que o sistema da Figura 3.4 será internamente estável.

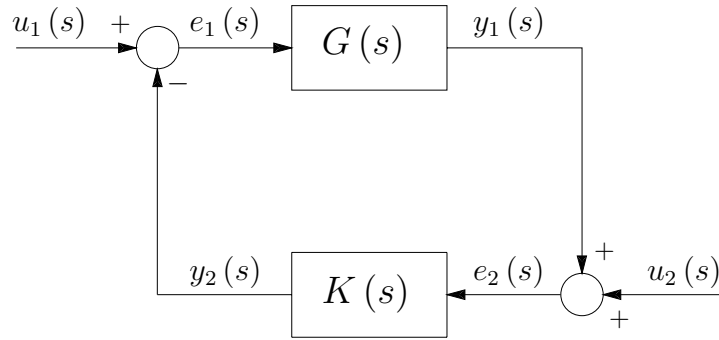


Figura 3.6: Diagrama de blocos para análise da estabilidade interna do sistema da Figura 3.4.

3.5.1 Estabilidade interna

Sejam $G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ e $K(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right]$ realizações de ordem mínima para $G(s)$ e $K(s)$. O seguinte resultado pode ser enunciado:

Lema 1 *Sob a hipótese de que $|1 + G(\infty)K(\infty)| \neq 0$, o sistema da Figura 3.6 será internamente estável se e somente se todos os autovalores da matriz*

$$A_c = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & \hat{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \hat{D} \\ -D & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\hat{C} \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

tiverem parte real negativa.

Demonstração: Vide Doyle. □

Teorema 4 *Suponha que $|1 + G(\infty)K(\infty)| \neq 0$. Então o sistema realimentado da Figura 3.6 será internamente estável se e somente se a matriz de transferência*

$$\begin{bmatrix} 1 & K \\ -G & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - K(1 + GK)^{-1}G & -K(1 + GK)^{-1} \\ (1 + GK)^{-1}G & (1 + GK)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

que relaciona $\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$ a $\begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \end{bmatrix}$ pertencer a \mathcal{RH}_∞ .

Demonstração: Vide Doyle. □

Corolário 1 *O sistema realimentado da Figura 3.4 será internamente estável se e somente se o sistema da Figura 3.6 for internamente estável.* \square

Tendo sido mostrado que a estabilização do sistema realimentado da Figura 3.6 é equivalente a estabilizar o sistema da Figura 3.4, o passo seguinte é definir uma classe de controladores que estabilize $G(s)$. Para tanto, o primeiro passo é obter uma fatoração duplamente coprima em \mathcal{RH}_∞ para $G(s)$. Esse é o assunto da próxima seção.

3.5.2 Fatoração coprima sobre \mathcal{RH}_∞

Seja $G(s) \in \mathbb{R}^{p \times m}(s)$ e considere o problema de encontrar matrizes $N(s)$, $\tilde{N}(s)$, $M(s)$ e $\tilde{M}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, de dimensões apropriadas tais que:

$$G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \quad (3.38)$$

constituindo uma fatoração duplamente coprima de $G(s)$. Pelo teorema de Bezout, sabe-se que $N(s)$, $\tilde{N}(s)$, $M(s)$ e $\tilde{M}(s)$ devem satisfazer à seguinte equação matricial

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Teorema 5 *Seja $G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ uma descrição no espaço de estados de $G(s)$ onde (A, B) é controlável e (C, A) é observável e sejam F e H matrizes tais que os autovalores de $A + BF$ e $A + HC$ tenham parte real negativa. Defina:*

$$\begin{aligned} N(s) &= \begin{bmatrix} A + BF & B \\ C + DF & D \end{bmatrix}, \quad M(s) = \begin{bmatrix} A + BF & B \\ F & I \end{bmatrix}, \\ \tilde{N}(s) &= \begin{bmatrix} A + HC & B + HD \\ C & D \end{bmatrix}, \quad \tilde{M}(s) = \begin{bmatrix} A + HC & H \\ C & I \end{bmatrix}, \\ X(s) &= \begin{bmatrix} A + BF & -H \\ C + DF & I \end{bmatrix}, \quad Y(s) = \begin{bmatrix} A + BF & -H \\ F & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{X}(s) &= \begin{bmatrix} A + HC & -(B + HD) \\ F & I \end{bmatrix} \quad e \quad \tilde{Y}(s) = \begin{bmatrix} A + HC & -H \\ F & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Então, $N(s)$, $\tilde{N}(s)$, $M(s)$, $\tilde{M}(s)$, $X(s)$, $\tilde{X}(s)$, $Y(s)$ e $\tilde{Y}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, $M(s)$ e $\tilde{M}(s)$ são inversíveis e satisfazem as Equações (3.38) e (3.39), sendo, portanto, uma fatoração duplamente coprima de $G(s)$ em \mathcal{RH}_∞ .

Demonstração: Vide Nett *et al.* [25]. □

3.5.3 Parametrização de Youla-Kučera

Para a solução dos problemas de otimização da seção 3.2, há a necessidade de convertê-los em um problema de ajuste de modelos, que consiste em determinar $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ que minimize $\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty$, onde $T_1(s)$, $T_2(s)$ e $T_3(s) \in \mathcal{RH}_\infty$. Para isso, faz-se uso da parametrização de Youla-Kučera.

O teorema a seguir fornece a condição necessária e suficiente para se definir a classe de todos os controladores estabilizantes.

Teorema 6 (*Parametrização de Youla-Kučera*). *Sejam $G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$, respectivamente, fatorações coprimas em \mathcal{RH}_∞ , à direita e à esquerda de $G(s)$, satisfazendo à identidade de Bezout, dada pela Equação (3.39). Então, o conjunto de todos os controladores*

$$K(s) = U(s)V^{-1}(s) = \tilde{V}^{-1}(s)\tilde{U}(s),$$

que estabilizam o sistema realimentado da Figura 3.6 é dado por:

$$K = -(Y - MQ)(X - NQ)^{-1} = -(\tilde{X} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} - Q\tilde{M}) \quad (3.41)$$

onde $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$. □

Demonstração:

(\Rightarrow) A partir da matriz dada pela Equação (3.37) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & K \\ -G & 1 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & UV^{-1} \\ -NM^{-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \left(\begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Então:

$$\begin{bmatrix} 1 & K \\ -G & 1 \end{bmatrix}^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty \Leftrightarrow \begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix}^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty \quad (3.43)$$

Note que a Equação (3.39) (identidade de Bezout), pode também ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & \tilde{Y}(s) \\ \tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & -Y(s) \\ -N(s) & X(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

e portanto,

$$\begin{bmatrix} M & -Y \\ -N & X \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty, \quad (3.45)$$

o que sugere que, fazendo $U = -Y$ e $V = X$ na Equação (3.43), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty. \quad (3.46)$$

Seja agora $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$. Então, pré-multiplicando-se a Equação (3.39) por

$$\begin{bmatrix} 1 & -Q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e pós-multiplicando-se por

$$\begin{bmatrix} 1 & -Q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & Q \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -Q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & -Y \\ -N & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} - Q\tilde{N} & \tilde{Y} - Q\tilde{M} \\ \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & MQ - Y \\ -N & -NQ + X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Assim, para todo $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, tem-se que:

$$U = -(Y - MQ), V = (X - NQ) \quad (3.49)$$

e portanto,

$$K = UV^{-1} = -(Y - MQ)(X - NQ)^{-1} \quad (3.50)$$

estabiliza o sistema da Figura 3.4.

Note, ainda que, a partir da Equação (3.47) tem-se que:

$$(\tilde{X} - Q\tilde{N})(MQ - Y) + (\tilde{Y} - Q\tilde{M})(X - NQ) = 0$$

e, dessa forma:

$$(Y - MQ)(X - NQ)^{-1} = (\tilde{X} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} - Q\tilde{M}) \quad (3.51)$$

$$K = \tilde{V}^{-1}\tilde{U} = -(\tilde{X} - Q\tilde{N})^{-1}(\tilde{Y} - Q\tilde{M}) \quad (3.52)$$

(\Leftarrow) Seja $K(s) = U(s)V^{-1}(s)$ um controlador que estabiliza $G(s)$ e considere o seguinte produto:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{X}U + \tilde{Y}V \\ 0 & \tilde{N}U + \tilde{M}V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{X}U + \tilde{Y}V \\ 0 & D \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

onde $D(s) = \tilde{N}(s)U(s) + \tilde{M}(s)V(s)$. Note que, a partir das Equações (3.39) e (3.45)

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix}^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty,$$

e, portanto,

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{X}U + \tilde{Y}V \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty,$$

o que implica que $D^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$. Definindo:

$$Q(s) = [\tilde{X}(s)U(s) + \tilde{Y}(s)V(s)]D^{-1}(s) \quad (3.54)$$

temos:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & QD \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Pré-multiplicando ambos os membros da equação acima por

$$\begin{bmatrix} M & -Y \\ -N & X \end{bmatrix},$$

resulta:

$$\begin{bmatrix} M & -Y \\ -N & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -Y \\ -N & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & QD \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

e usando a Equação (3.39), resulta:

$$\begin{bmatrix} M & U \\ -N & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -Y \\ -N & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & QD \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -(Y - MQ)D \\ -N & (X - NQ)D \end{bmatrix}$$

Assim, $U(s) = -[Y(s) - M(s)Q(s)]D(s)$ e $V(s) = [X(s) - N(s)Q(s)]D(s)$ \square

3.6 REDUÇÃO DE PROBLEMAS \mathcal{H}_∞ A PROBLEMAS DE AJUSTE DE MODELOS

Obtida uma parametrização para os controladores estabilizantes, o passo seguinte é transformar os problemas \mathcal{H}_∞ definidos anteriormente em problemas de ajuste de modelos. Para tanto, escrevendo $S(s)$ e $T(s)$ em função do parâmetro $Q(s)$, obtém-se

$$\begin{aligned} S &= (1 + GK)^{-1} = [1 - NM^{-1}(Y - MQ)(X - NQ)^{-1}]^{-1} = \\ &= (X - NQ) [X - NQ - NM^{-1}(Y - MQ)]^{-1} = \\ &= (X - NQ)(X - NQ - NM^{-1}Y + NQ)^{-1} = (X - NQ)(X - \tilde{M}^{-1}\tilde{N}Y)^{-1} = \\ &= (X - NQ) \left[\tilde{M}^{-1}(\tilde{M}X - \tilde{N}Y) \right]^{-1} = (X - NQ) \overbrace{(\tilde{M}X - \tilde{N}Y)}^1 \tilde{M} \\ S &= (X - NQ)\tilde{M} \end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned} T &= 1 - S = 1 - (X - NQ)\tilde{M} = 1 - \overbrace{X\tilde{M}}^{-Y\tilde{N}} + NQ\tilde{M} \\ T &= -Y\tilde{N} + NQ\tilde{M} \end{aligned} \tag{3.56}$$

Dessa forma, os problemas de otimização transformam-se em:

Problemas 1 e 4:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|W_1 T\|_\infty = \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|W_1(Y\tilde{N} - NQ\tilde{M})\|_\infty = \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|T_1 - T_2 Q T_3\|_\infty \tag{3.57}$$

onde $T_1 = W_1Y\tilde{N}$, $T_2 = W_1N$ e $T_3 = \tilde{M}$, $T_i(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, $i = 1, 2, 3$.

Problema 2:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|W_2S\|_\infty = \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|W_2(X - NQ)\tilde{M}\|_\infty = \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|T_1 - T_2QT_3\|_\infty \quad (3.58)$$

onde $T_1 = W_2X\tilde{M}$, $T_2 = W_2N$ e $T_3 = \tilde{M}$, $T_i(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, $i = 1, 2, 3$

Problema 3:

$$\begin{aligned} \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|W_2SG\|_\infty &= \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|W_2S\tilde{M}^{-1}\tilde{N}\|_\infty \\ &= \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|W_2(X - NQ)\tilde{N}\|_\infty = \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|T_1 - T_2QT_3\|_\infty \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde $T_1 = W_2X\tilde{N}$, $T_2 = W_2N$ e $T_3 = \tilde{N}$, $T_i(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, $i = 1, 2, 3$

Problema misto:

$$\begin{aligned} \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \left\| \begin{bmatrix} W_1T \\ W_2S \end{bmatrix} \right\|_\infty &= \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \left\| \begin{bmatrix} -W_1Y\tilde{N} \\ W_2X\tilde{M} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -W_1N \\ W_2N \end{bmatrix} Q\tilde{M} \right\|_\infty = \\ &= \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|T_1 - T_2QT_3\|_\infty \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde $T_1 = \begin{bmatrix} -W_1Y\tilde{N} \\ W_2X\tilde{M} \end{bmatrix}$, $T_2 = \begin{bmatrix} -W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} N$ e $T_3 = \tilde{M}$.

A solução do problema de ajuste de modelos é obtida a partir de sua conversão em problemas de 1-, 2- ou 4-blocos. Isto será objeto da próxima seção.

3.7 CARACTERIZAÇÃO DOS PROBLEMAS DE 1-, 2- E 4-BLOCOS

A fim de se fazer a conversão de problemas ajuste de modelos em problemas de 1-, 2- e 4-blocos, apresentam-se, inicialmente, alguns conceitos, de modo que o resultado final seja uma decorrência natural de todos os tópicos abordados.

É importante notar que, dada uma função de transferência $R(s)$ estável, então

existe [26] uma realização mínima

$$R(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_b & B_b \\ \hline C_b & D_b \end{array} \right], \quad (3.61)$$

onde os gramianos de controlabilidade e observabilidade são iguais e estão na forma diagonal, isto é, $W_c = W_o = \Sigma = \text{diag} \{ \sigma_1 I_{m_1}, \sigma_2 I_{m_2}, \dots, \sigma_{\bar{k}} I_{m_{\bar{k}}} \}$, com $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, \bar{k}$ e $\sigma_i > \sigma_j$, $i < j$, onde I_{m_i} é uma matriz identidade de ordem igual à multiplicidade m_i . Esta realização é conhecida como realização balanceada. Uma forma simples e robusta de se obter uma realização balanceada a partir de uma realização qualquer de $R(s)$ é proposta por Garcia e Basilio [27].

3.7.1 Fatoração ‘inner’ - ‘outer’²

A seguir, faz-se a caracterização de funções inner, outer, co-inner e co-outer.

Definição 11 *Seja $T_i(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, $T_i(s) : p \times m$, $p \geq m$. Então $T_i(s)$ é denominada inner se $T_i^*(s)T_i(s) = I_m$. Analogamente uma matriz $T_{ci}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, $T_{ci}(s) : p \times m$, $p \leq m$ é denominada co-inner se $T_{ci}(s)T_{ci}^*(s) = I_p$. \square*

Listam-se aqui, algumas propriedades [28] das funções de transferência inner/co-inner:

- i) Se $T(s)$ é inner/co-inner então $\bar{\sigma}[T(j\omega)] = 1$, $\forall \omega$. Por essa razão, uma matriz de transferência inner/co-inner é denominada passa tudo (‘all-pass’);
- ii) A norma- ∞ de uma função de transferência qualquer pertencente a \mathcal{RL}_∞ não se altera quando pré-multiplicada (pós-multiplicada) por funções de transferência inner (co-inner), isto é, se $F(s) \in \mathcal{RL}_\infty$ e $T_i(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ for uma função de transferência inner, então:

$$\|T_i F\|_\infty = \|F\|_\infty \quad (3.62)$$

e quando $T_{ci}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ for co-inner, temos que:

$$\|F T_{ci}\|_\infty = \|F\|_\infty \quad (3.63)$$

²Como não existe na literatura uma tradução consagrada para a língua portuguesa dos termos ‘inner’ / ‘outer’, neste trabalho serão mantidos os termos originais.

iii) Seja $T_i(s) : p \times m$ inner. Então

$$E_i(s) = \begin{bmatrix} T_i^*(s) \\ I_p - T_i(s)T_i^*(s) \end{bmatrix}$$

é inner. Analogamente, se $T_{ci}(s) : p \times m$ é co-inner, então

$$E_{ci}(s) = \begin{bmatrix} T_{ci}^*(s) & I_m - T_{ci}^*(s)T_{ci}(s) \end{bmatrix}$$

é co-inner.

Definição 12 Uma matriz de transferência $T_o(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, $T_o(s) : p \times m$, $p \leq m$ é denominada outer [24] se $T_o(s)$ não perde posto para todo $\text{Re}(s) > 0$. Analogamente uma matriz de transferência $T_{co}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, $T_{co}(s) : p \times m$, $p \geq m$ é denominada co-outer se não perde posto para todo $\text{Re}(s) > 0$. \square

3.7.2 Fatoração espectral

Uma fatoração importante para uma matriz quadrada $Z(s) \in \mathcal{RL}_\infty$, com a propriedade $Z^*(s) = Z(s)$, é a chamada fatoração espectral, que consiste em escrever $Z(s) = Z_o^*(s)Z_o(s)$, onde $Z_o(s)$ é uma matriz outer denominada fator espectral.

Teorema 7 Sejam $G(s)$, $G^{-1}(s) \in \mathcal{RL}_\infty$, $G^*(s) = G(s)$. Se $G(\infty) > 0$, então existe uma fatoração espectral $G(s) = G_o^*(s)G_o(s)$.

Demonstração: Vide Francis [29], pag. 90. \square

3.7.3 Redução do problema de ajuste de modelos a problemas de Nehari

A partir deste ponto será suposto que os problemas \mathcal{H}_∞ tenham sido convertidos em problemas de ajuste de modelo, como aqueles descritos pelas Equações (3.57) a (3.60). Suponha ainda que se esteja trabalhando com sistemas escalares. Portanto $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, $T_1(s) : p \times m \in \mathcal{RH}_\infty$, $T_2(s) : p \times 1 \in \mathcal{RH}_\infty$ e $T_3(s) : 1 \times m \in \mathcal{RH}_\infty$. Tem-se então os seguintes casos:

(a) Problema de 1-bloco:

$T_2(s)$ e $T_3(s)$ são matrizes quadradas, isto é, $p = m$. Então:

$$\begin{aligned}
\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty &= \|T_1 - T_{2i}T_{2o}QT_{3co}T_{3ci}\|_\infty = \\
&= \|T_{2i}^*(T_1 - T_{2i}T_{2o}QT_{3co}T_{3ci})T_{3ci}^*\|_\infty = \\
&= \|T_{2i}^*T_1T_{3ci}^* - T_{2o}QT_{3co}\|_\infty = \\
&= \|\bar{R} - \bar{X}\|_\infty
\end{aligned} \tag{3.64}$$

onde $\bar{R}(s) = T_{2i}^*(s)T_1(s)T_{3ci}^*(s) \in \mathcal{RL}_\infty$ e $\bar{X}(s) = T_{2o}(s)Q(s)T_{3co}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$.
Escrevendo $\bar{R} = \bar{R}_+ + \bar{R}_-$, onde $\bar{R}_+ \in \mathcal{RH}_\infty^+$ é estritamente própria e $\bar{R}_- \in \mathcal{RH}_\infty$ é própria e definindo $R = \bar{R}_+$ e $X = \bar{X} - \bar{R}_-$, pode-se escrever:

$$\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty = \|R - X\|_\infty$$

onde $R \in \mathcal{RH}_\infty^+$ e $X \in \mathcal{RH}_\infty$. Assim, pode-se caracterizar o chamado problema de 1-bloco como:

$$\inf_{X(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|R - X\|_\infty. \tag{3.65}$$

A determinação de $\alpha = \inf_{X(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|R - X\|_\infty$ baseia-se no seguinte teorema:

Teorema 8 (*Teorema de Nehari*). *Seja $R(s) \in \mathcal{RH}_\infty^+$ e $\alpha = \inf_{X(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|R - X\|_\infty$. Então $\alpha = \|R\|_H = \lambda_{\max}^{1/2}(W_c W_o)$.*

Demonstração: Vide Francis [29], pag. 58. □

(b) Problema de 2-blocos:

Seja agora, $T_2(s) : p \times 1$ e $T_3(s) : 1 \times 1$. Desta forma:

$$\begin{aligned}
\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty &= \left\| \begin{bmatrix} T_{2i}^* \\ I - T_{2i}T_{2i}^* \end{bmatrix} (T_1 - T_{2i}T_{2o}QT_{3co}T_{3ci})T_{3ci}^* \right\|_\infty = \\
&= \left\| \begin{bmatrix} T_{2i}^* \\ I - T_{2i}T_{2i}^* \end{bmatrix} (T_1T_{3ci}^* - T_{2i}T_{2o}QT_{3co}) \right\|_\infty = \\
&= \left\| \begin{bmatrix} T_{2i}^*T_1T_{3ci}^* - T_{2o}QT_{3co} \\ (I - T_{2i}T_{2i}^*)T_1T_{3ci}^* \end{bmatrix} \right\|_\infty = \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \bar{R}_1 - \bar{X} \\ R_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty \tag{3.66}
\end{aligned}$$

onde $\bar{R}_1(s) = T_{2i}^*(s)T_1(s)T_{3ci}^*(s) \in \mathcal{RL}_\infty$, $\bar{X}(s) = T_{2o}(s)Q(s)T_{3co}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ e $R_2(s) = (I - T_{2i}(s)T_{2i}^*(s))T_1(s)T_{3ci}^*(s) \in \mathcal{RL}_\infty$. Escrevendo $\bar{R}_1 = \bar{R}_{1+} + \bar{R}_{1-}$, onde $\bar{R}_{1+} \in \mathcal{RH}_\infty^+$ é estritamente própria e $\bar{R}_{1-} \in \mathcal{RH}_\infty$ é própria e definindo $R_1 = \bar{R}_{1+}$ e $X = \bar{X} - \bar{R}_{1-}$, pode-se escrever:

$$\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} R_1 - X \\ R_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

onde $R_1 \in \mathcal{RH}_\infty^+$ e $X \in \mathcal{RH}_\infty$, caracterizando, então, o seguinte problema:

$$\inf_{X(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \left\| \begin{bmatrix} R_1 - X \\ R_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty. \tag{3.67}$$

(c) Problema de 4-blocos:

Neste ítem será tratado o caso mais geral, que é o problema de 4-blocos. Seja, portanto, $T_2(s) : p \times 1$ e $T_3(s) : 1 \times m$. Assim:

$$\begin{aligned}
\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty &= \left\| \begin{bmatrix} T_{2i}^* \\ I - T_{2i}T_{2i}^* \end{bmatrix} (T_1 - T_{2i}T_{2o}QT_{3co}T_{3ci}) \begin{bmatrix} T_{3ci}^* & I - T_{3ci}^*T_{3ci} \end{bmatrix} \right\|_\infty = \\
&= \left\| \begin{bmatrix} T_{2i}^*T_1T_{3ci}^* - T_{2o}QT_{3co} & T_{2i}^*T_1(I - T_{3ci}^*T_{3ci}) \\ (I - T_{2i}T_{2i}^*)T_1T_{3ci}^* & (I - T_{2i}T_{2i}^*)T_1(I - T_{3ci}^*T_{3ci}) \end{bmatrix} \right\|_\infty = \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \bar{R}_{11} - \bar{X} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \right\|_\infty \tag{3.68}
\end{aligned}$$

onde $\bar{R}_{11}(s) = T_{2i}^*(s)T_1(s)T_{3ci}^*(s) \in \mathcal{RL}_\infty$ e $\bar{X}(s) = T_{2o}(s)Q(s)T_{3co}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$. Escrevendo $\bar{R}_{11} = \bar{R}_{11+} + \bar{R}_{11-}$, onde $\bar{R}_{11+} \in \mathcal{RH}_\infty^+$ é estritamente própria e $\bar{R}_{11-} \in \mathcal{RH}_\infty$ é própria e definindo $R_{11} = \bar{R}_{11+}$ e $X = \bar{X} - \bar{R}_{11-}$, pode-se escrever:

$$\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} R_{11} - X & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

onde $R_{11} \in \mathcal{RH}_\infty^+$ e $X \in \mathcal{RH}_\infty$. Caracteriza-se assim, o seguinte problema:

$$\inf_{X(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \left\| \begin{bmatrix} R_{11} - X & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \right\|_\infty \tag{3.69}$$

3.8 SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE 1- E 2-BLOCOS

Como os problemas a serem formulados neste trabalho levam a problemas \mathcal{H}_∞ de 1- e 2-blocos, então somente serão apresentadas as soluções para estes problemas. O leitor mais interessado poderá encontrar a solução do problema \mathcal{H}_∞ de 4-blocos em Francis [29].

Para cada $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ existe um erro de ajuste de modelos $\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty$. Seja α o erro de ajuste de modelos ínfimo, isto é:

$$\alpha := \inf(\|T_1 - T_2QT_3\|_\infty : Q \in \mathcal{RH}_\infty).$$

Uma matriz $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ que satisfaça

$$\alpha = \|T_1 - T_2QT_3\|_\infty$$

é denominada ótima.

3.8.1 Solução do Problema de 1-bloco

Uma forma explícita para $X(s)$ no problema de 1-bloco é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 9 (*Solução central de Glover para o problema de 1-bloco*). Seja $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ uma realização balanceada de $R(s)$ com gramianos de controlabilidade e observabilidade iguais a

$$\Sigma = \text{diag} \{ \sigma_1 I_{m_1}, \sigma_2 I_{m_2}, \dots, \sigma_{\bar{k}} I_{m_{\bar{k}}} \} \quad (3.70)$$

com $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, \bar{k}$ e $\sigma_i > \sigma_j$, $i < j$. Particionando A , B e C compativelmente com Σ da seguinte forma:

$$\Sigma = \left[\begin{array}{cc|cc} \sigma_1 I_{m_1} & 0 & & \\ & 0 & \Sigma_2 & \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right] \quad (3.71)$$

Então, $X(s)$ tem a seguinte realização em espaço de estados:

$$X(s) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] \quad (3.72)$$

com cada termo dado por:

$$\tilde{A} = \Gamma^{-1} (\sigma_1^2 A_{22}^T + \Sigma_2 A_{22} \Sigma_2 - \sigma_1 C_2^T U B_2^T) \quad (3.73)$$

$$\tilde{B} = \Gamma^{-1} (\Sigma_2 B_2 + \sigma_1 C_2^T U) \quad (3.74)$$

$$\tilde{C} = C_2 \Sigma_2 + \sigma_1 U B_2^T \quad (3.75)$$

$$\tilde{D} = D - \sigma_1 U \quad (3.76)$$

$$\Gamma = \Sigma_2^2 - \sigma_1^2 I \quad (3.77)$$

onde U é uma matriz que satisfaz $B_1 = -C_1^T U$ e $(I - U^T U) \geq 0$.

Demonstração: Vide Doyle [30]. □

3.8.2 Solução do Problema de 2-blocos

A solução do problema de 2-blocos baseia-se nos seguintes resultados:

Lema 2 *Seja $\|R_2\|_\infty = \gamma_0$. Então*
$$\left\| \begin{bmatrix} R_1 - X \\ R_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty \geq \gamma_0.$$

Demonstração: Vide Doyle [30]. □

Teorema 10 *Seja $\gamma_0 = \|R_2\|_\infty$ e suponha que $(\gamma^2 I - R_2^* R_2) = Z_o^* Z_o$. Então, para um dado $\gamma > \gamma_0$,*

$$\left\| \begin{bmatrix} R_1 - X \\ R_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma \Leftrightarrow \|(R_1 - X)Z_o^{-1}\|_\infty \leq 1 \quad (3.78)$$

Demonstração: Vide Francis [29], pag. 103. □

Com base no Teorema 10, pode-se reduzir o problema de 2-blocos a um problema de 1-bloco e obter, a partir daí, a solução central de Glover através dos seguintes passos [29]:

Algoritmo 1

- i) Para um dado $\gamma > \gamma_0$, calcular a fatoração espectral de $\gamma^2 I - R_2^*(s) R_2(s)$, isto é: $\gamma^2 I - R_2^*(s) R_2(s) = Z_o^*(s) Z_o(s)$;
- ii) Calcule $(\bar{R}_1 - \bar{X})Z_o^{-1} = \bar{R}_1 Z_o^{-1} - \bar{X} Z_o^{-1}$ e defina $\bar{\bar{R}}_1 = \bar{R}_1 Z_o^{-1}$ e $\bar{\bar{X}} = \bar{X} Z_o^{-1}$;
- iii) Se $\|\bar{\bar{R}}_1\|_H \leq 1$, utilize o método da bissecção para escolher um novo $\tilde{\gamma} < \gamma$. Caso contrário, utilizando também o método da bissecção, escolha $\tilde{\gamma} > \gamma$. Repita os passos (i) e (ii) até que o algoritmo convirja para um valor γ^* de acordo com o Teorema 10;
- iv) Faça $\bar{\bar{R}}_1 = \bar{\bar{R}}_{1+} + \bar{\bar{R}}_{1-}$ e defina $\hat{R} = \bar{\bar{R}}_{1+}$ e $\hat{X} = \bar{\bar{X}} - \bar{\bar{R}}_{1-}$ e resolva o problema de Nehari $\inf_{\hat{X}(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|\hat{R} - \hat{X}\|_\infty$ utilizando o Teorema 9.

□

Observação: Pode-se notar que a solução obtida para o problema de 2-blocos é sub-ótima, no sentido de que tende para o valor ótimo, podendo fazer com que γ^*

se aproxime arbitrariamente de $\alpha = \inf \left\| \begin{bmatrix} \bar{R}_1 - \bar{X} \\ R_2 \end{bmatrix} \right\|_{\infty}$.

3.9 CONCLUSÕES

Neste capítulo foram apresentados importantes elementos da teoria de controle robusto \mathcal{H}_{∞} . As técnicas apresentadas permitem o projeto de controladores que atendam a diversos objetivos, que são levados em conta a partir da formulação de certos problemas de otimização. Quando são impostos, a priori, limitantes superiores aos problemas de otimização, é evidente que esses poderão ou não ser satisfeitos, dependendo das funções de ponderação escolhidas.

No Capítulo 5 serão projetados controladores \mathcal{H}_{∞} de 1- e 2-blocos, tendo como base o modelo matemático para o motor de indução desenvolvido no Capítulo 2.

Capítulo 4

IDENTIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO DO MODELO NOMINAL

Os experimentos necessários para se identificar os parâmetros do motor serão descritos neste capítulo. Serão também apresentados os resultados obtidos aplicando-se os métodos de identificação ao motor de indução real utilizado no trabalho. Após a identificação dos parâmetros será feita a validação do modelo através da comparação entre a resposta real e a obtida a partir de simulações com o modelo matemático adotado.

Este capítulo está estruturado da seguinte forma: na seção 4.1, descreve-se o sistema real montado em bancada e seus modelos equivalentes em malha aberta e fechada, usados para simulação. Na seção 4.2 apresentam-se alguns conceitos importantes para o entendimento das seções subseqüentes. A seção 4.3 aborda a teoria do ensaio do motor em vazio enquanto as seções 4.4 e 4.5 tratam do ensaio para medição da resistência do estator e do ensaio com o rotor bloqueado, respectivamente. Os resultados dos ensaios das seções anteriores estão retratados na seção 4.6. Nas seções 4.7 e 4.8 descreve-se a teoria do ensaio de resposta ao degrau e os resultados desse ensaio, respectivamente. Finalmente, a seção 4.9 apresenta a validação do modelo proposto, utilizando os resultados dos ensaios.

4.1 O SISTEMA COMPLETO, SEUS SENSORES, ATUADORES E SIMPLIFICAÇÕES

Além do motor de indução, os seguintes equipamentos foram usados em bancada, na montagem do sistema de controle:

- Uma fonte CC.
- Um inversor de frequência chaveado.
- Um microcomputador pessoal com processador Pentium 133 MHz e 64 Kb de memória RAM.
- Uma placa de aquisição de dados ADA da marca Taurus Eletrônica [31].
- Um sistema de medição de velocidade angular formado por um "encoder" digital e um circuito auxiliar.
- Três sensores de efeito hall (para medir as correntes de linha na entrada do motor).

A Figura 4.1 mostra a interligação entre os componentes citados acima, onde i_{Sqref} , i_{Sdref} , i_{S1ref} , i_{S2ref} e i_{S3ref} são correntes de referência e T_R' , i_{mR}' , ω_2' , ω_{mR}' e ρ' são equivalentes estimados das grandezas internas do modelo do motor.

Equipamentos para se fazer a aquisição do sinal da posição angular ρ do fluxo do rotor encarecem demasiadamente o aparato de controle. Porém, é possível fazer a estimativa de um valor ρ' para essa posição angular, a partir de um valor também estimado da constante de tempo rotórica T_R' e da velocidade angular ω do rotor (que pode ser medida a baixo custo). Para tanto, constrói-se um observador ou estimador de estados baseado na parte do modelo interno do motor relativa ao ângulo ρ , como pode ser visto comparando-se as Figuras 2.7 e 4.1. Quanto mais próximo de T_R estiver o valor de T_R' menor será a diferença entre ρ e ρ' e, portanto, as transformações de coordenadas dadas pelas Equações (2.63) e (2.65) se cancelarão efetivamente. Ainda, de acordo com a Figura 4.1, deve-se salientar que os ramos que cruzam a linha tracejada indicam intercâmbios de informações que precisam ocorrer entre as funções implementadas em "software" e o restante do sistema de controle.

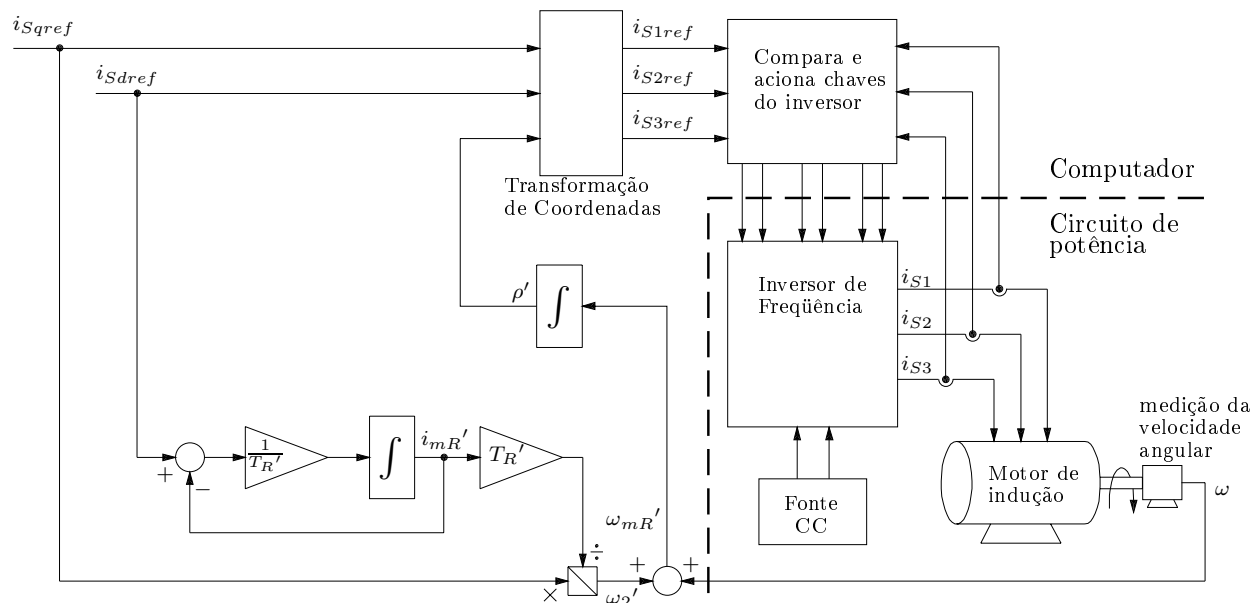


Figura 4.1: Diagrama esquemático do sistema montado em bancada.

Estes intercâmbios são realizados através de operações de entrada e saída de dados do computador pessoal no qual consiste o módulo de controle. Portanto, existe um algoritmo que realiza as funções de aquisição da velocidade angular e correntes de linha, transformação de coordenadas, comparação entre as correntes, acionamento das chaves do inversor e estimação do ângulo do fluxo do rotor. O algoritmo utilizado neste trabalho está listado no apêndice A. Uma importante função da parte lógica do sistema de controle é o fornecimento de sinais de comando para o acionamento das chaves da matriz de chaveamento. Cada um destes sinais, de natureza binária, possui uma forma de onda semelhante à da função-chaveamento programada para uma das seis chaves da matriz. Para a transmissão destes sinais, é preciso um canal digital para cada chave da matriz, totalizando seis canais. Estes canais são providos através de portas de saídas digitais da placa de aquisição de dados. Cada canal de transmissão de sinal de acionamento para uma chave corresponde a um bit de uma porta de saída. O uso de um microcomputador pessoal como único equipamento de controle é bastante benéfico, porque pode-se conseguir um alto grau de interação com qualquer parte do sistema de controle. O módulo de controle consiste basicamente de um programa aplicativo para DOS, escrito em Pascal e com interface de texto para com o usuário, conforme concebido por Rolim *et al.* [32]. As tarefas de controle são realizadas por uma rotina de interrupção que foi implementada no mesmo arquivo

fonte do programa principal, que contém basicamente as rotinas de interface com o usuário. O compilador Pascal e o sistema operacional DOS permitem que a rotina de serviço de interrupção e as funções de interface com o usuário dividam o mesmo espaço de memória.

Conforme já foi explicado anteriormente, para que haja o efeito esperado de cancelamento nas transformações de coordenadas, os blocos de comparação e chaveamento e do inversor devem ser transparentes para a malha de controle principal, ou seja, devem ser considerados ideais e, portanto, desprezados. Isto é conseguido através do uso de uma malha de controle rápido de corrente. Assim, o algoritmo trabalha com dois períodos de amostragem distintos, gerados por interrupção: um para aquisição e comparação das correntes e acionamento das chaves do inversor e outro para a malha de controle propriamente dita, ou seja, a aquisição do valor de ω e cálculo de $i_{S_{qref}}^1$, sendo que o primeiro é menor do que o segundo. Exaustivos testes foram realizados, com várias combinações dos períodos de amostragem e foram adotados os valores $h_{chaves} = 70 \times 10^{-6}s$ para comparação das correntes e acionamento das chaves do inversor e $h_{cont} = 10 \times 70 \times 10^{-6}s$ para aquisição do valor de ω e cálculo de $i_{S_{qref}}$. O sinal digital de controle das chaves será fornecido pelo computador. Para facilitar a compatibilização das entradas de controle dos módulos de chaves com as saídas digitais do computador, são utilizados níveis lógicos padrão TTL nos sinais de controle. As entradas de controle irão, portanto, operar com tensões próximas de 0V quando em nível lógico baixo e próximas de 5V quando em nível lógico alto. Estas tensões de controle têm como referência o "terra" lógico do computador.

A medição de velocidade é realizada com o auxílio de um dos circuitos contadores disponíveis em um módulo de interface [32]. Um circuito auxiliar, implementado em um dispositivo lógico programável (um PLD do tipo GAL) isola um único pulso do trem de pulsos gerado pelo "encoder"; este pulso é então aplicado à entrada do contador. A frequência de "clock" é fixa e a contagem ocorre durante o tempo de duração do pulso. A diferença entre o conteúdo do registrador do contador, depois e antes do surgimento do pulso é, então, inversamente proporcional à velocidade

¹O cálculo de $i_{S_{qref}}$ só é realizado em malha fechada, na presença do controlador, em malha aberta seu valor é atribuído arbitrariamente.

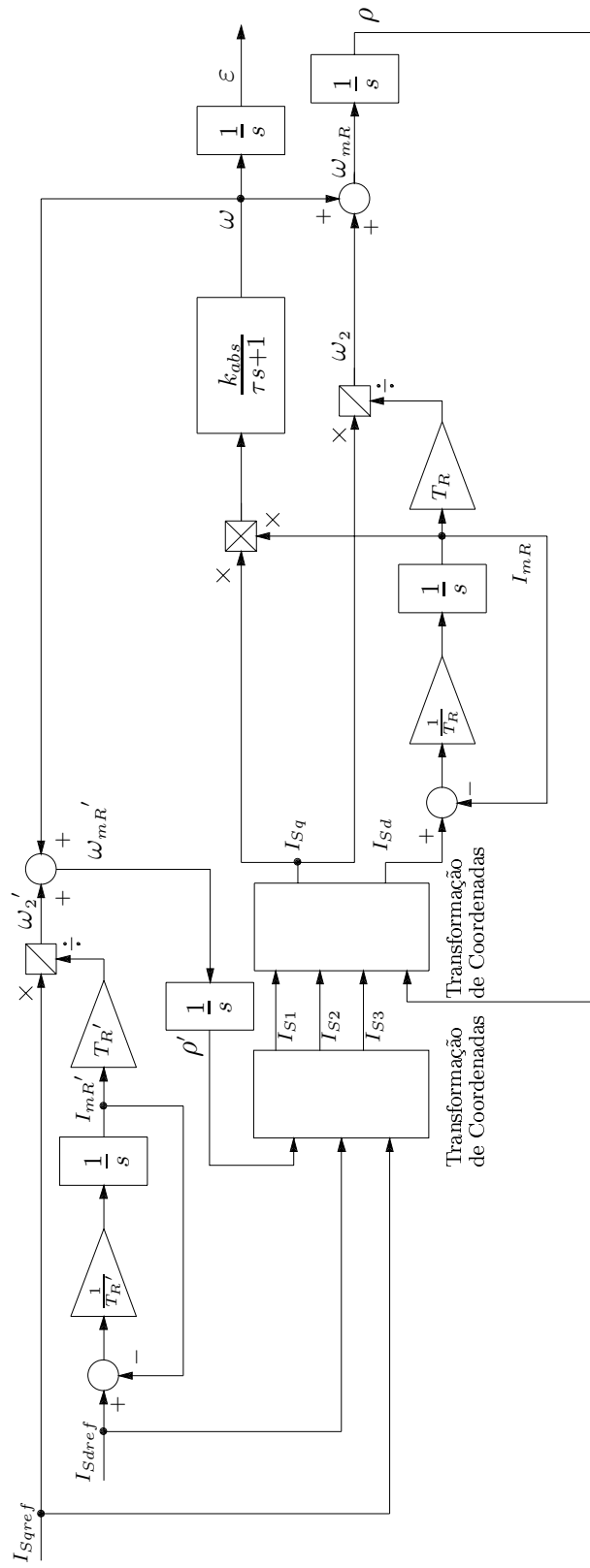


Figura 4.2: Diagrama de blocos do sistema em malha aberta, usado para simulação.

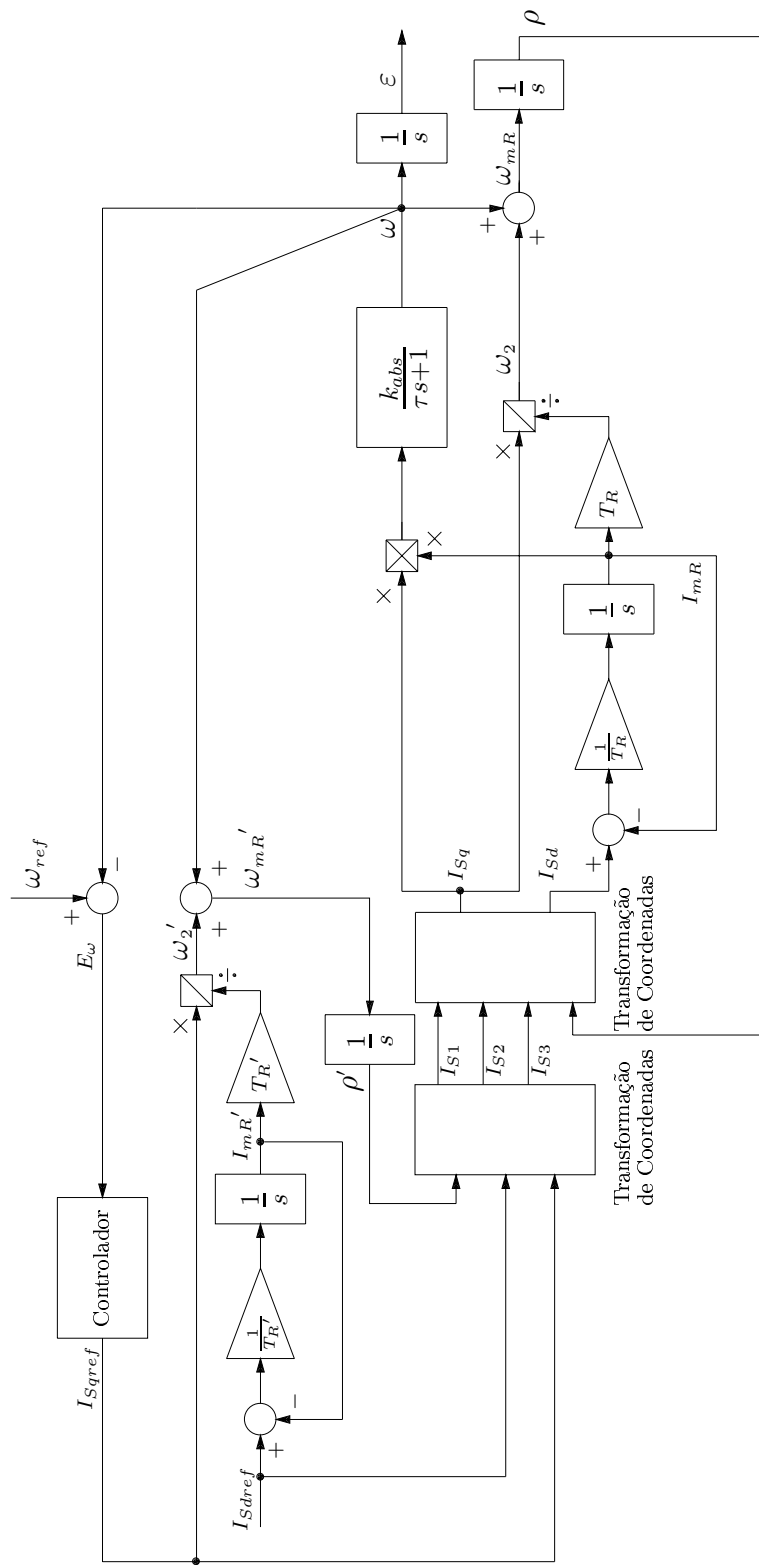


Figura 4.3: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada, usado para simulação.

do rotor. Assim, o algoritmo de controle lê o valor medido e o circuito auxiliar é "resetado" para aceitar um novo pulso. O "encoder" incremental acoplado ao eixo do motor produz 800 pulsos por revolução e o contador trabalha a $2MHz$. Esta combinação leva a um erro de medição menor que 2% [32] para velocidades até $3000rpm$. O limite inferior de velocidade é dado pelo intervalo de amostragem usado para medição de velocidade e cálculo de i_{sqref} , e fica em torno de $100rpm$.

A Figura 4.2 mostra o modelo do sistema completo, em malha aberta, usado para simulação no Matlab e na Figura 4.3 pode-se observar o modelo em malha fechada, com a inclusão do bloco controlador e do sinal ω_{ref} sendo o sinal de erro $e_\omega = \omega_{ref} - \omega$.

Finalmente, deve ser observado que o valor de T_R' pode ser obtido a partir dos ensaios feitos no motor de indução. Contudo, esse valor dificilmente será suficientemente preciso e daí vem a idéia de se aplicar a teoria de controle robusto \mathcal{H}_∞ , objeto do Capítulo 3.

4.2 CONCEITOS PRELIMINARES PARA IDENTIFICAÇÃO

Antes da apresentação dos experimentos para identificação, é conveniente estudar uma teoria básica do fluxo de potência no motor. Extraiu-se para tal estudo o modelo desenvolvido por Chapman [18], que é mostrado na Figura 4.4. Este modelo é útil para estudos em regime permanente, com alimentação trifásica senoidal

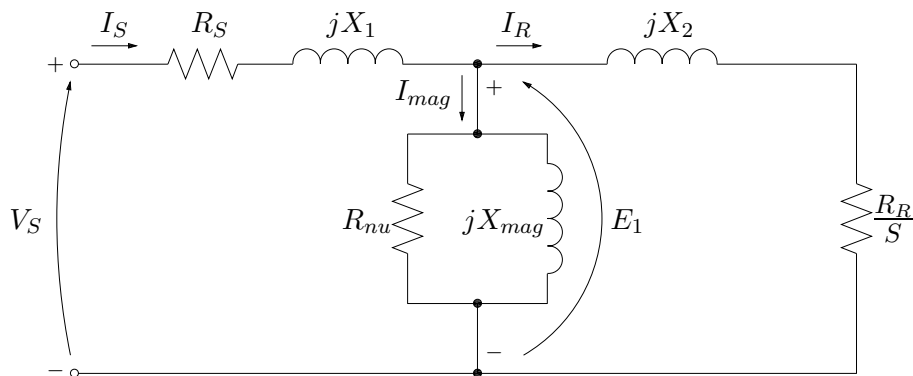


Figura 4.4: Circuito equivalente por fase de um motor de indução.

simétrica do motor. Todas as grandezas estão referenciadas ao estator. A resistência R_{nu} representa as perdas no ferro (devidas à histerese e correntes parasitas) do motor, que foram desprezadas no modelo vetorial da seção 2.1 e aqui assumem caráter ilustrativo. A resistência $\frac{R_R}{S}$ concentra as perdas no cobre do rotor e a potência convertida para a forma mecânica no eixo do rotor, sendo que S denota o escorregamento. Tem-se ainda que $X_{mag} = \omega_1 L_{mag}$ é a reatância de magnetização do motor, onde ω_1 é a frequência angular das correntes do estator. A resistência R_S representa a perda no cobre do estator, $X_1 = \omega_1 L_1$ e $X_2 = \omega_1 L_2$ são, respectivamente, as reatâncias de dispersão do estator e do rotor; se o número de espiras do enrolamento de cada fase do estator e do rotor for igual, ou seja, $N_S = N_R$, então $L_1 = \sigma_S L_{mag}$ e $L_2 = \sigma_R L_{mag}$ representam as indutâncias de dispersão do estator e do rotor. Assim, podem-se determinar os valores de σ_S e σ_R . Os valores reais dessas grandezas podem ser encontrados executando-se uma série de ensaios no motor de indução. Os ensaios devem ser feitos sob condições controladas precisamente, uma vez que as resistências variam com a temperatura e a resistência do rotor também varia com a frequência do rotor.

4.2.1 Perdas e diagrama de fluxo de potência

Um motor de indução pode ser basicamente descrito como um transformador rotativo. Sua entrada é um sistema trifásico de tensões e correntes. Para um transformador comum, a saída é a potência elétrica do secundário. Como o enrolamento secundário de um motor de indução (o rotor) é curto circuitado, não existe saída

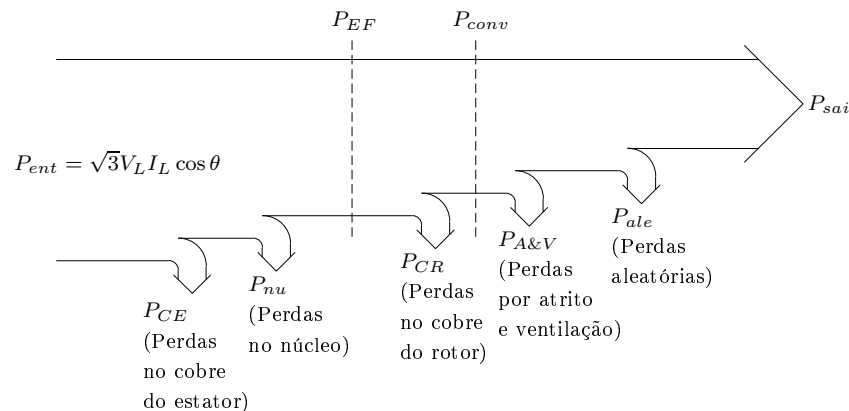


Figura 4.5: Diagrama de fluxo de potência de um motor de indução.

elétrica no motor de indução normal. Ao invés disso, a saída é mecânica. A relação entre a potência elétrica de entrada e a potência mecânica de saída é mostrada no diagrama de fluxo de potência da Figura 4.5.

A potência de entrada em um motor de indução P_{ent} está na forma trifásica de tensões e correntes de linha, denotadas por V_L e I_L respectivamente, onde θ é o ângulo de defasagem entre elas. A primeira perda encontrada na máquina é a perda nos enrolamentos do estator (P_{CE}). Depois alguma potência é perdida em forma de histerese e correntes parasitas no estator (P_{nu}). A potência restante neste ponto é transferida para o rotor através do entreferro. Esta potência é chamada de potência do entreferro (P_{EF}). Após a transferência de potência para o rotor, alguma é perdida nos seus enrolamentos (P_{CR}), e o restante é convertido da forma elétrica para a forma mecânica (P_{conv}). Finalmente, perdas por atrito e ventilação ($P_{A\&V}$) e perdas aleatórias P_{ale} são subtraídas. A potência restante é a saída do motor P_{sai} . As perdas no núcleo nem sempre aparecem no diagrama no ponto mostrado na Figura 4.5. Devido à natureza da perda no núcleo, o local onde ela é considerada na máquina é de certa maneira arbitrário. As perdas no núcleo de um motor de indução vêm parcialmente do circuito do estator e parcialmente do circuito do rotor. Como um motor de indução normalmente é operado a uma velocidade próxima da velocidade síncrona, o movimento relativo dos campos magnéticos sobre a superfície do rotor é bastante lento e as perdas no núcleo do rotor são pequenas se comparadas com as perdas no núcleo do estator. Como a maior parte das perdas no núcleo vêm do circuito do estator, todas as perdas no núcleo são concentradas naquele ponto do diagrama. Essas perdas são representadas no circuito equivalente do motor de indução pelo resistor R_{nu} (ou pela condutância G_{nu}). Se as perdas no núcleo simplesmente forem dadas por um número (X Watts) ao invés de um elemento circuitual, elas são freqüentemente agregadas às perdas mecânicas e subtraídas no ponto do diagrama onde as perdas mecânicas estão localizadas.

Quanto maior for a velocidade do motor de indução, maiores serão as perdas por atrito e ventilação. Por outro lado, quanto maior for a velocidade do motor menores são as perdas no núcleo [18]. Essas três categorias de perdas são algumas vezes agregadas e chamadas de perdas rotacionais. A perda rotacional total do motor às vezes é considerada constante, mesmo em velocidade variável, uma vez que as

parcelas que a compõe mudam em sentidos opostos com a variação de velocidade.

4.2.2 Separando as perdas no cobre do rotor e a potência convertida no circuito equivalente do motor de indução

Parte da potência vinda do entreferro em um motor de indução é consumida nas perdas no cobre do rotor e parte dela é convertida em potência mecânica para girar o eixo do motor. É possível separar os dois usos da potência do entreferro e indicá-los separadamente no circuito equivalente do motor.

A potência do entreferro é a potência que deveria ser consumida em um resistor de valor $\frac{R_R}{S}$, enquanto que as perdas no cobre do rotor correspondem à potência que deveria ser consumida em um resistor de valor R_R . A diferença entre elas é P_{conv} , que deve portanto ser a potência consumida em um resistor de valor

$$\begin{aligned} R_{conv} &= \frac{R_R}{S} - R_R \\ R_{conv} &= R_R \left(\frac{1}{S} - 1 \right) \\ R_{conv} &= R_R \left(\frac{1-S}{S} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

O circuito equivalente por fase com as perdas no cobre do rotor e a potência convertida para a forma mecânica, separadas em elementos distintos é mostrado na Figura 4.6. Para se determinar os parâmetros do motor de indução, adotar-se-á este modelo do circuito equivalente.

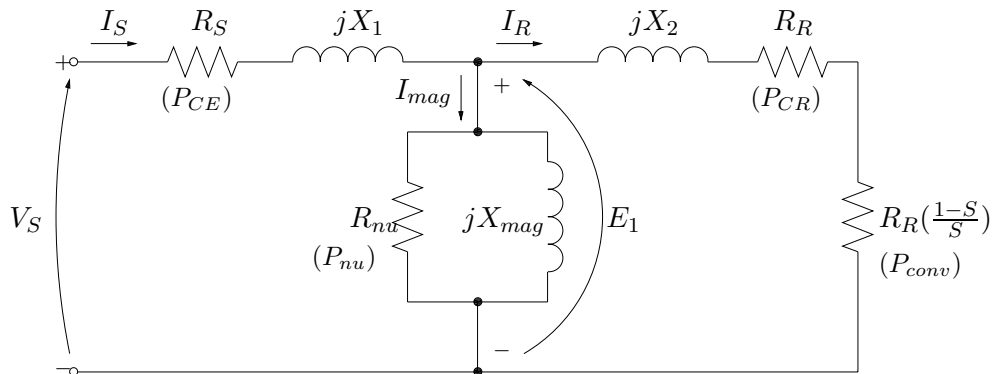


Figura 4.6: Circuito equivalente por fase com P_{CR} e P_{conv} separados.

4.3 ENSAIO DO MOTOR A VAZIO

O ensaio do motor a vazio mede as perdas rotacionais do motor e fornece informação sobre a corrente de magnetização. O circuito para este ensaio é mostrado na figura 4.7a. São conectados dois wattímetros, um voltímetro e três amperímetros ao motor de indução, que pode girar livremente. As únicas cargas no motor são o atrito e a perda devido à ventilação, de modo que toda a potência convertida pelo motor é consumida por perdas mecânicas, e o escorregamento do motor é muito pequeno. O circuito equivalente deste motor é mostrado na Figura 4.7b. Como

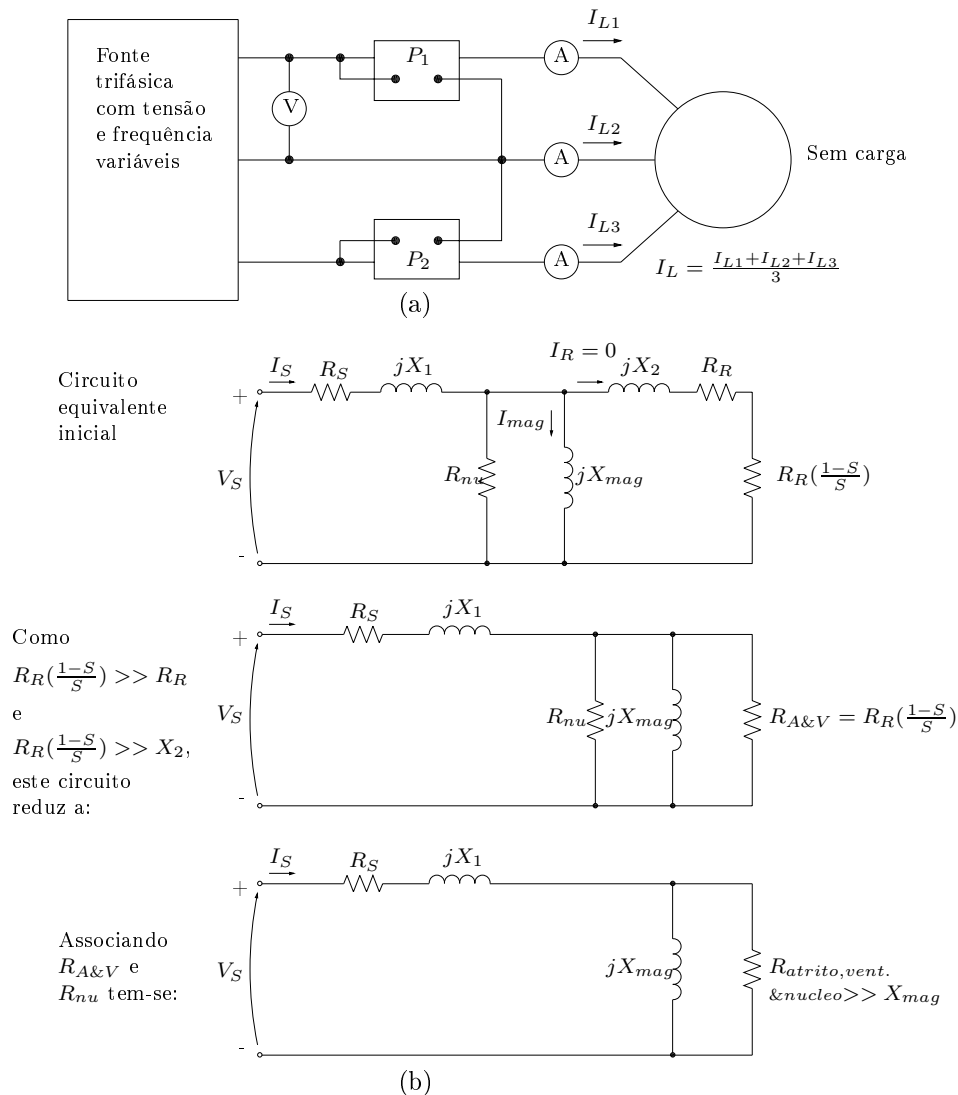


Figura 4.7: Ensaio sem carga de um motor de indução: (a) Circuito de teste. (b) O circuito equivalente resultante. Note que sem carga a impedância do motor é essencialmente a combinação em série de R_S , jX_1 e jX_{mag} .

o escorregamento é pequeno, a resistência que corresponde à potência convertida, $R_R(1 - S)/S$, é muito maior que a resistência correspondente às perdas no cobre, R_R , e muito maior que a reatância do rotor X_2 . Neste caso, o circuito equivalente é reduzido aproximadamente ao último circuito na Figura 4.7b. Neste, o resistor de saída está em paralelo com a reatância de magnetização X_{mag} e as perdas no núcleo R_{nu} .

No motor a vazio, a potência de entrada medida pelos wattímetros precisa ser igual às perdas no motor. As perdas no cobre do rotor são desprezíveis, pois a corrente I_R é extremamente pequena (devido à alta resistência de carga $R_R(1 - S)/S$). A perda no cobre do estator é então dada por

$$P_{CE} = 3I_S^2 R_S, \quad (4.2)$$

e, portanto, a potência de entrada deve ser igual a:

$$\begin{aligned} P_{ent} &= P_{CE} + P_{nu} + P_{A\&V} + P_{ale} \\ &= 3I_S^2 R_S + P_{rot} \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde P_{rot} é a perda rotacional do motor

$$P_{rot} = P_{nu} + P_{A\&V} + P_{ale}. \quad (4.4)$$

Assim, dada a potência de entrada, a perda rotacional do motor pode ser determinada.

O circuito equivalente que descreve a operação do motor nesta condição possui os resistores R_{nu} e $R_R(1 - S)/S$ em paralelo com a reatância de magnetização X_{mag} . A corrente necessária para estabelecer um campo magnético é bastante grande em um motor de indução, devido à alta relutância do entreferro. Isto faz com que a reatância X_{mag} seja muito menor do que as resistências em paralelo com ela e portanto, o fator de potência de entrada será pequeno. Com a alta corrente em atraso, a maioria das quedas de tensão será sobre os componentes indutivos no circuito. A impedância equivalente de entrada é, deste modo, aproximadamente igual a

$$|Z_{eq}| = \frac{V_S}{I_S} = \frac{V_L}{\sqrt{3}I_L} \approx X_1 + X_{mag}. \quad (4.5)$$

Assim, se X_1 puder ser encontrada de alguma outra maneira, a reatância de magnetização X_{mag} será conhecida.

4.4 ENSAIO PARA A RESISTÊNCIA DO ESTATOR

A resistência do rotor R_R representa um papel extremamente crítico na operação de um motor de indução; por exemplo, R_R determina o formato da curva torque x velocidade, estipulando a velocidade na qual ocorre o torque máximo. Outro exemplo é a sua influência no valor da constante de tempo rotórica, T_R . Um ensaio padrão no motor, chamado ensaio com rotor bloqueado, pode ser usado para determinar a resistência total do circuito do motor (este ensaio será abordado na próxima seção). Entretanto, este ensaio encontra somente a resistência total. Para encontrar a resistência R_R do rotor com precisão, é necessário conhecer R_S de maneira que ela possa ser subtraída do total.

Existe mais de um ensaio para se determinar R_S independente de R_R , X_1 e X_2 . Neste trabalho realizou-se um ensaio que considera o efeito pelicular. Para realizar o ensaio, os enrolamentos do estator devem estar conectados em Y. O ensaio consiste na sobreposição de uma corrente CC à corrente CA nos enrolamentos. Efetua-se então a medida da corrente I_{CC} e das tensões V_{CC1} , V_{CC2} e V_{CC3} entre os terminais dos enrolamentos e em seguida calcula-se a média V_{CC} das tensões medidas. A corrente nos enrolamentos do estator é ajustada para o valor nominal, em uma tentativa de aquecer os enrolamentos na mesma temperatura que deveriam ter durante

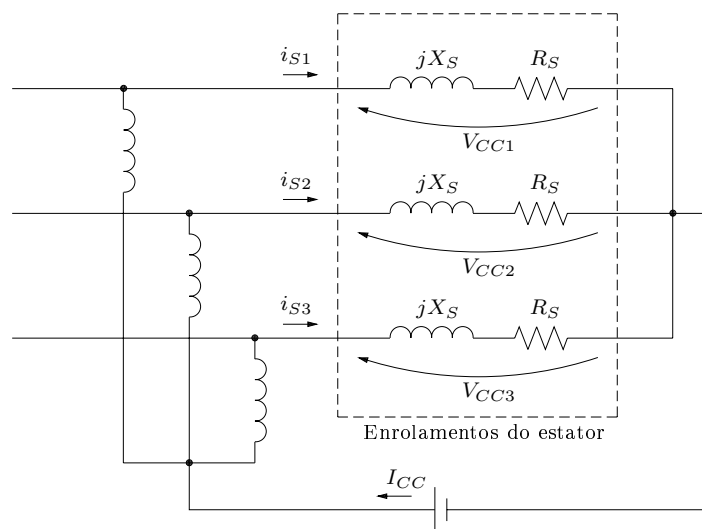


Figura 4.8: Ensaio para determinar a resistência do estator.

a operação normal. O ensaio não deve ser prolongado para se evitar um aquecimento excessivo devido à corrente CC .

A corrente I_{CC} na Figura 4.8 se divide de maneira aproximadamente igual através dos três enrolamentos, de maneira que a resistência total na malha pode ser considerada como $\frac{R_S}{3}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\frac{R_S}{3} &= \frac{V_{CC}}{I_{CC}} \\ R_S &= \frac{3V_{CC}}{I_{CC}}\end{aligned}\quad (4.6)$$

Com este valor para R_S , as perdas no cobre do estator com o motor a vazio podem ser determinadas, e as perdas rotacionais podem ser encontradas a partir da Equação 4.3 como a diferença entre a potência de entrada com motor a vazio e as perdas no cobre do estator.

4.5 ENSAIO COM ROTOR BLOQUEADO

O terceiro ensaio que deve ser executado em um motor de indução para determinar os parâmetros de seu circuito é o chamado ensaio com rotor bloqueado, que corresponde ao ensaio de curto circuito em um transformador. Neste ensaio, o rotor é bloqueado de maneira que ele não possa girar. Em seguida, uma tensão é aplicada ao motor, e medem-se a tensão, a corrente e a potência resultantes. A Figura 4.9a mostra as conexões para o ensaio com rotor bloqueado. Para realizar o ensaio, aplica-se uma tensão CA ao estator e a corrente é ajustada aproximadamente para o valor de carga máxima. Após isso, tensão, corrente e potência são medidas. O circuito equivalente para este ensaio é mostrado na Figura 4.9b. Note que uma vez que o rotor não gira, então o escorregamento é $S = 1$ e, portanto, a resistência do rotor $\frac{R_R}{S}$ fica igual a R_R (de valor bastante pequeno). Como R_R e X_2 são muito pequenos, quase toda a corrente de entrada circulará através deles, ao invés de circular através da reatância de magnetização X_{mag} , que é muito maior. Então, o circuito da Figura 4.6 sob estas condições se comporta como uma combinação em série de X_1 , R_S , X_2 , e R_R , levando ao circuito da Figura 4.9b.

Entretanto existe um problema com este ensaio. Em operação normal, a frequência do estator é a mesma da rede. Em condições de partida, o rotor também está

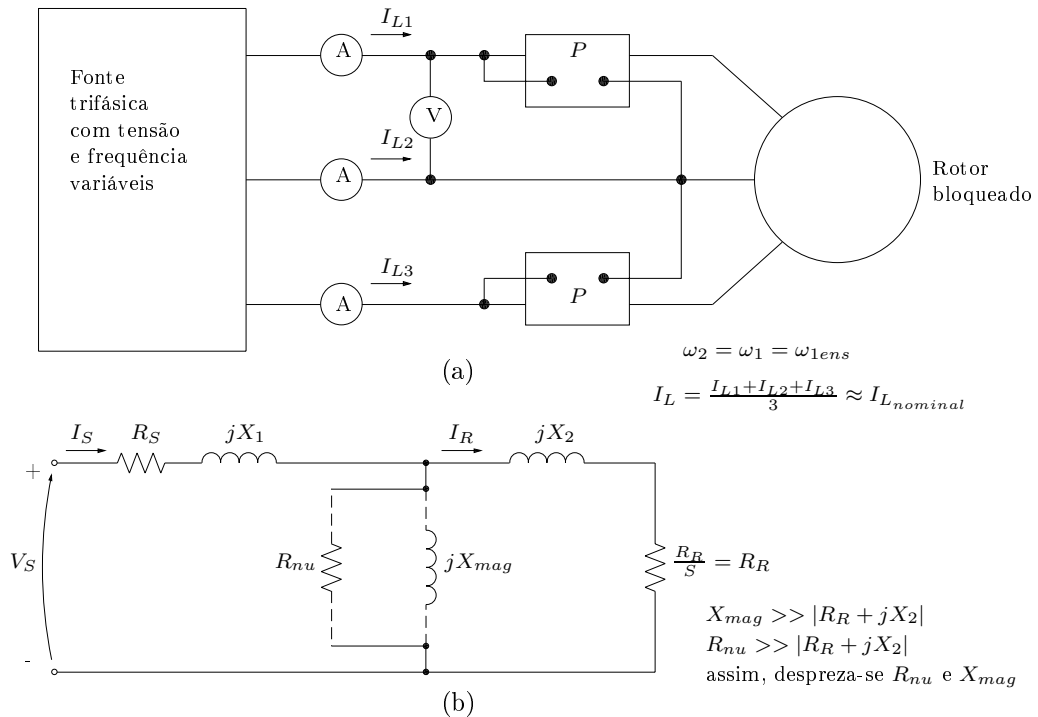


Figura 4.9: O ensaio com rotor bloqueado: (a) Circuito de teste. (b) Circuito equivalente do motor.

na frequência da rede. Porém, em condições de operação normal, o escorregamento da maioria dos motores é de 2 a 4 por cento, e a frequência resultante no rotor está na faixa entre 1 e 3 Hz. Isto cria um problema que consiste em que a frequência da rede não representa as condições de operação normal do rotor. Como a resistência efetiva do rotor é fortemente dependente da frequência para motores das classes² B e C, a frequência incorreta do rotor pode levar a resultados errados neste ensaio. Uma correção típica é usar uma frequência 25% ou menos da frequência estipulada. Enquanto esta abordagem é aceitável para rotores com resistência essencialmente constantes (projetos classe A e D), ela deixa a desejar quando se tenta encontrar a resistência normal de um rotor com resistência variável. Devido a estes e outros problemas, muito cuidado deve ser tomado ao se fazer medições nestes ensaios.

Após o ajuste da tensão e da frequência do ensaio, a corrente no motor é rapidamente ajustada para próximo do valor nominal, e a potência, tensão e corrente de entrada são medidas antes que o rotor se aqueça muito. A potência de entrada

²As classes de projeto definidas pela National Electrical Manufacturers Association (NEMA) para motores de indução com rotor gaiola são: classe A - barras largas e superficiais; classe B - barras largas e profundas; classe C - gaiola dupla; classe D - barras estreitas e superficiais.

do motor é dada por

$$P_{ent} = \sqrt{3}V_L I_L \cos \theta$$

então o fator de potência do rotor bloqueado pode ser encontrado,

$$FP = \cos \theta = \frac{P_{ent}}{\sqrt{3}V_L I_L} \quad (4.7)$$

e o ângulo da impedância é igual a $\cos^{-1}(FP)$. O módulo da impedância total no circuito do motor com o rotor bloqueado é

$$|Z_{RB}| = \frac{V_S}{I_S} = \frac{V_L}{\sqrt{3}I_L} \quad (4.8)$$

e o ângulo da impedância total é θ . Então

$$\begin{aligned} Z_{RB} &= R_{RB} + jX'_{RB} \\ &= |Z_{RB}| \cos \theta + j |Z_{RB}| \sen \theta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

A resistência de rotor bloqueado R_{RB} é igual a

$$R_{RB} = R_S + R_R, \quad (4.10)$$

enquanto que a reatância de rotor bloqueado é igual a

$$X'_{RB} = X'_1 + X'_2, \quad (4.11)$$

onde X'_1 e X'_2 são as reatâncias do estator e do rotor respectivamente, na frequência de ensaio.

A resistência do rotor R_R pode ser encontrada como

$$R_R = R_{RB} - R_S \quad (4.12)$$

onde R_S foi determinada no ensaio para a resistência do estator. A reatância total do rotor referida para o estator também pode ser encontrada. Como a reatância é diretamente proporcional à frequência, a reatância equivalente total na frequência de operação normal pode ser encontrada como

$$X_{RB} = \frac{\omega_{1nom}}{\omega_{1ens}} X'_{RB} = X_1 + X_2 \quad (4.13)$$

Infelizmente, não existe uma maneira simples para separar as contribuições das reatâncias do estator e do rotor uma da outra. A experiência tem mostrado que motores de certos tipos de projeto têm certas proporções entre as reatâncias do estator e do rotor, que estão resumidas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Tabela para divisão das reatâncias do estator e do rotor.

Projeto do rotor	X_1 e X_2 em função de X_{RB}	
	X_1	X_2
Rotor Bobinado	$0.5X_{RB}$	$0.5X_{RB}$
Classe A	$0.5X_{RB}$	$0.5X_{RB}$
Classe B	$0.4X_{RB}$	$0.6X_{RB}$
Classe C	$0.3X_{RB}$	$0.7X_{RB}$
Classe D	$0.5X_{RB}$	$0.5X_{RB}$

4.6 RESULTADOS DOS ENSAIOS DO MOTOR A VAZIO, PARA A RESISTÊNCIA DO ESTATOR E COM ROTOR BLOQUEADO

O motor utilizado neste trabalho é um motor de indução de dois polos trifásico com rotor gaiola de esquilo fabricado pela Equacional, modelo EA2/MSR/MS-56, classe A. Os dados nominais de placa são: conexão do estator em triângulo, potência de 60 W, tensão de 30 V, frequência de 60 Hz, corrente de 2.8 A, rotação de 3500 - 3600 rpm. Os ensaios foram realizados com as bobinas do estator conectadas em estrela.

Em uma tentativa de minimizar o erro no resultado final, no ensaio para determinação da resistência do estator foram efetuadas 5 medições e o valor adotado foi calculado utilizando-se mínimos quadrados. A tabela 4.2 apresenta os resultados do ensaio. Se as colunas I_{CC} e V_{CC} na tabela 4.2 forem consideradas como vetores, tem-se que o valor obtido para a resistência de cada enrolamento do estator é

$$R_S = \frac{I_{CC}^T V_{CC}}{I_{CC}^T I_{CC}} = 2.00 \Omega,$$

onde I_{CC}^T denota o vetor transposto de I_{CC} .

No ensaio com rotor bloqueado, também foram realizadas várias medições e encontrou-se um valor que minimiza a norma quadrática do erro (método dos mínimos quadrados). A tabela 4.3 mostra os valores medidos nesse ensaio. Considerando

Tabela 4.2: Tabela com os valores das medidas efetuadas no ensaio para a resistência do estator.

Medida	I_{CC} (A)	V_{CC1} (V)	V_{CC2} (V)	V_{CC3} (V)	V_{CC} (V)
1	0.90	0.63	0.61	0.64	0.63
2	0.90	0.62	0.55	0.62	0.60
3	1.20	0.85	0.74	0.81	0.80
4	1.20	0.82	0.73	0.80	0.78
5	0.30	0.21	0.19	0.20	0.20

Tabela 4.3: Tabela com os valores das medidas efetuadas no ensaio com rotor bloqueado.

Medida	I_L (A)	V_L (V)	P_{ent} (W)
1	1.62	11.28	28.65
2	2.75	18.40	77.50
3	2.60	17.60	71.00
4	1.64	10.43	26.20
5	1.61	10.24	25.20

as colunas como vetores, tem-se que

$$|Z_{RB}| = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{I_L^T V_L}{I_L^T I_L} = 3.85 \Omega.$$

O fator de potência nesse caso será dado por:

$$FP = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(V_L * I_L)^T P_{ent}}{(V_L * I_L)^T (V_L * I_L)} = 0.89,$$

onde * significa produto entre os elementos equivalentes de cada vetor, cujo resultado continua sendo um vetor. Portanto, o ângulo da impedância é $\theta = \cos^{-1} FP = 0.47$ rad. Assim,

$$R_{RB} = |Z_{RB}| \cos \theta = R_S + R_R = 3.43 \Omega.$$

Isso implica que

$$R_R = R_{RB} - R_S = 3.43 - 2.00 = 1.43 \Omega.$$

Uma vez que a frequência elétrica utilizada no teste foi a da rede, ou seja, 60 Hz, a reatância total com rotor bloqueado será

$$X_{RB} = |Z_{RB}| \sin \theta = X_1 + X_2 = 1.76 \Omega.$$

Considerando a tabela 4.1, tem-se que, como o motor é de classe A:

$$X_1 = X_2 = \frac{1.76}{2} = 0.88 \Omega.$$

e as indutâncias de dispersão são dadas por

$$L_1 = L_2 = \frac{0.88}{120\pi} = 2.33 \text{ mH}.$$

Finalmente, no ensaio do motor a vazio, foram obtidos os resultados apresentados na tabela 4.4. Novamente, aplicando-se o método dos mínimos quadrados às colunas da tabela, tem-se, a partir da Equação 4.5, que:

$$|Z_{eq}| = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{I_L^T V_L}{I_L^T I_L} = 27.99 \Omega,$$

$$X_{mag} \approx |Z_{eq}| - X_1 = 27.99 - 0.88 = 27.11 \Omega.$$

e

$$L_{mag} = \frac{27.11}{120\pi} = 71.91 \text{ mH}.$$

Com a coluna da potência pode-se determinar as perdas rotacionais, mas não há interesse de fazê-lo neste trabalho. O principal objetivo desses ensaios, dentro do

Tabela 4.4: Tabela com os valores das medidas efetuadas no ensaio do motor a vazio.

Medida	I_L (A)	V_L (V)	P_{ent} (W)
1	1.10	51.87	56.80
2	1.10	51.96	53.75
3	0.59	30.52	18.80
4	1.09	52.32	53.24
5	0.76	40.20	29.13

contexto do trabalho, é a determinação de um valor para a constante de tempo rotórica T_R' , a ser usado tanto no estimador implementado no algoritmo de controle como nos modelos para simulação em Matlab, vistos nas Figuras 4.2 e 4.3. Para tanto, devem ser determinados os valores das dispersões, das indutâncias próprias dos enrolamentos.

$$\sigma_S = \sigma_R = \frac{L_1}{L_{mag}} = \frac{2.33}{71.91} = 0.0324,$$

$$\sigma = 1 - \frac{1}{(1 + \sigma_R)(1 + \sigma_S)} = 0.0618,$$

portanto,

$$L_S = L_R = (1 + \sigma_S)L_{mag} = 74.24 \text{ mH}.$$

Dessa maneira, o valor da constante de tempo rotórica do motor será:

$$T_R = \frac{L_R}{R_R} = \frac{0.07424}{1.43} = 0.0519 \frac{H}{\Omega}.$$

Porém, ainda faltam determinar os valores de J , k_{abs} e τ para completar os modelos. Tem-se, inicialmente, que o valor adotado para o momento de inércia do rotor será o fornecido pelo fabricante, ou seja,

$$J = 0.00057 \text{ Kg.m}^2.$$

A determinação de k_{abs} e τ será feita a partir do ensaio de resposta ao degrau, objeto a ser considerado na próxima seção.

4.7 ENSAIO DE RESPOSTA AO DEGRAU

O objetivo desse ensaio é a determinação do ganho absoluto k_{abs} e da constante de tempo τ do modelo matemático do motor. Isso pode ser feito graças ao fato de um valor para T_R' já ter sido encontrado, que será adotado como sendo o valor T_R real. Essa suposição deve ser feita para que se possa dizer que há o cancelamento efetivo das transformações de coordenadas e, portanto, poder-se dizer que $i_{Sq} = i_{Sqref}$ e $i_{Sd} = i_{Sdref}$.

Conforme já foi explicado anteriormente, a variável de controle é i_{Sqref} sendo que i_{Sdref} assume valor constante em todos os outros experimentos e simulações daqui em diante. O valor foi escolhido após vários testes, onde adotou-se $i_{Sqref} = 0$ e variou-se i_{Sdref} até o motor começar a sair do repouso. O valor encontrado é $i_{Sdref} = 2.8 A$.

O ensaio de resposta ao degrau se baseia em aplicar um degrau na entrada ($i_{Sqref}(t)$) do sistema em regime permanente e medir a saída ($\omega(t)$), até que se atinja regime permanente outra vez. Como se deseja determinar os parâmetros para uma planta de primeira ordem, dada pela Equação (2.38), o valor do ganho k_{abs} pode ser obtido dividindo-se o valor de regime atingido pela saída ($\omega(t_{fin})$) pelo produto do valor final da entrada com o valor da corrente de magnetização ($i_{Sqref}(t_{fin})i_{Sdref}$), ou seja:

$$k_{abs} = \frac{\omega(t_{fin})}{i_{Sqref}(t_{fin})i_{Sdref}}.$$

O valor de τ é calculado a partir da seguinte expressão:

$$\tau = \frac{\int_{t_{degrau}}^{t_{reg}} (\omega(t_{fin}) - \omega(t))dt}{\frac{\omega(t_{fin}) - \omega(t_{inic})}{i_{Sqref}(t_{fin}) - i_{Sqref}(t_{inic})}} = \frac{\int_{t_{degrau}}^{t_{reg}} (\omega(t_{fin}) - \omega(t))dt}{k_{rel}}$$

onde $\omega(t)$ é a curva da resposta, $\omega(t_{fin})$ é o valor de regime permanente atingido por $\omega(t)$, t_{degrau} e t_{reg} denotam o instante da aplicação do degrau e o instante em que se atinge o valor de regime, respectivamente. k_{rel} é um ganho relativo, calculado pelo quociente das diferenças entre os valores final e inicial da saída ($\omega(t_{fin}) - \omega(t_{degrau})$) e os valores final e inicial da entrada ($i_{Sqref}(t_{fin}) - i_{Sqref}(t_{degrau})$). Este método para o cálculo da constnte de tempo é conhecido como método das áreas [33]. O método funciona muito bem no caso de medidas ruidosas como as que foram obtidas durante o ensaio.

4.8 RESULTADOS DO ENSAIO DE RESPOSTA AO DEGRAU

Devido à limitação no sistema de aquisição da velocidade angular, usado neste trabalho, o motor foi submetido a velocidades compreendidas entre $500rpm$ e $2600rpm$. Durante os experimentos foi observado que a comparação entre as curvas obtidas em bancada e a partir da simulação, para a entrada i_{Sqref} e a saída ω , não se superpunham, o que sugeriu que o valor encontrado para T_R' não era adequado.

Portanto, realizaram-se algumas identificações com valores diferentes para T_R' , em torno do valor original

$$T_R' = 0.0519 \frac{H}{\Omega}$$

e concluiu-se que o valor a ser adotado é 5% menor do que o original, ou seja,

$$T_R' = 0.0493 \frac{H}{\Omega}. \quad (4.14)$$

Em seguida, degraus de várias amplitudes em i_{Sqref} são aplicados e medidas as diferentes respostas em ω . Isto é feito para se verificar a faixa de variação do ganho k_{abs} e da constante de tempo τ . Cada curva de resposta (1 a 7) mostrada no gráfico da Figura 4.10(b) é o resultado da média de cinco experimentos realizados sob as mesmas condições, com o intuito de se obter valores mais confiáveis. A partir dos dados obtidos, apresentados na Figura 4.10, calculam-se os valores de k_{abs} e τ para cada par de curvas de entrada e saída representando a aplicação de

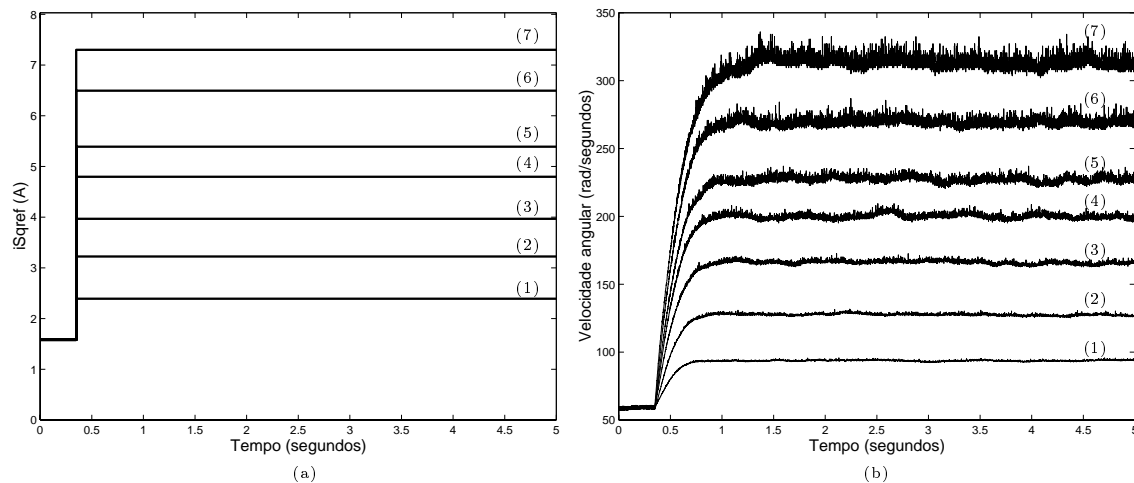


Figura 4.10: Ensaio de resposta ao degrau: (a) i_{Sqref} e (b) ω .

Tabela 4.5: Tabela com os valores calculados a partir dos ensaios de resposta ao degrau.

Degrau	k_{abs}	$\tau(\text{segundos})$
1	14.0220	0.1443
2	14.1415	0.1551
3	14.9371	0.1677
4	14.9036	0.1698
5	14.9978	0.1780
6	14.7999	0.1872
7	15.2992	0.2158

um degrau. Devido ao ruído, os valores iniciais e finais da saída são resultados das médias calculadas dentro de intervalos de regime permanente. A Tabela 4.5 retrata os valores calculados para os parâmetros em cada ensaio.

4.9 VALIDAÇÃO DO MODELO PARA SIMULAÇÃO

Concluída a fase de identificação de parâmetros a serem usados no algoritmo de controle e nos modelos para simulação do sistema de controle do motor de indução, o passo final, antes do projeto e implementação dos controladores \mathcal{H}_∞ , é a validação do modelo. Para tanto, serão comparadas as respostas ao degrau obtidas em bancada e outras simuladas no Matlab, utilizando-se o modelo da Figura 4.2. O modelo varia automaticamente os valores de k_{abs} e τ de acordo com a Tabela 4.5, conforme a faixa de operação do motor. Na Figura 4.11 estão plotadas as curvas de $i_{S_{qref}}$ e ω reais e simuladas para comparação, de onde se pode concluir que o modelo representa satisfatoriamente o sistema real.

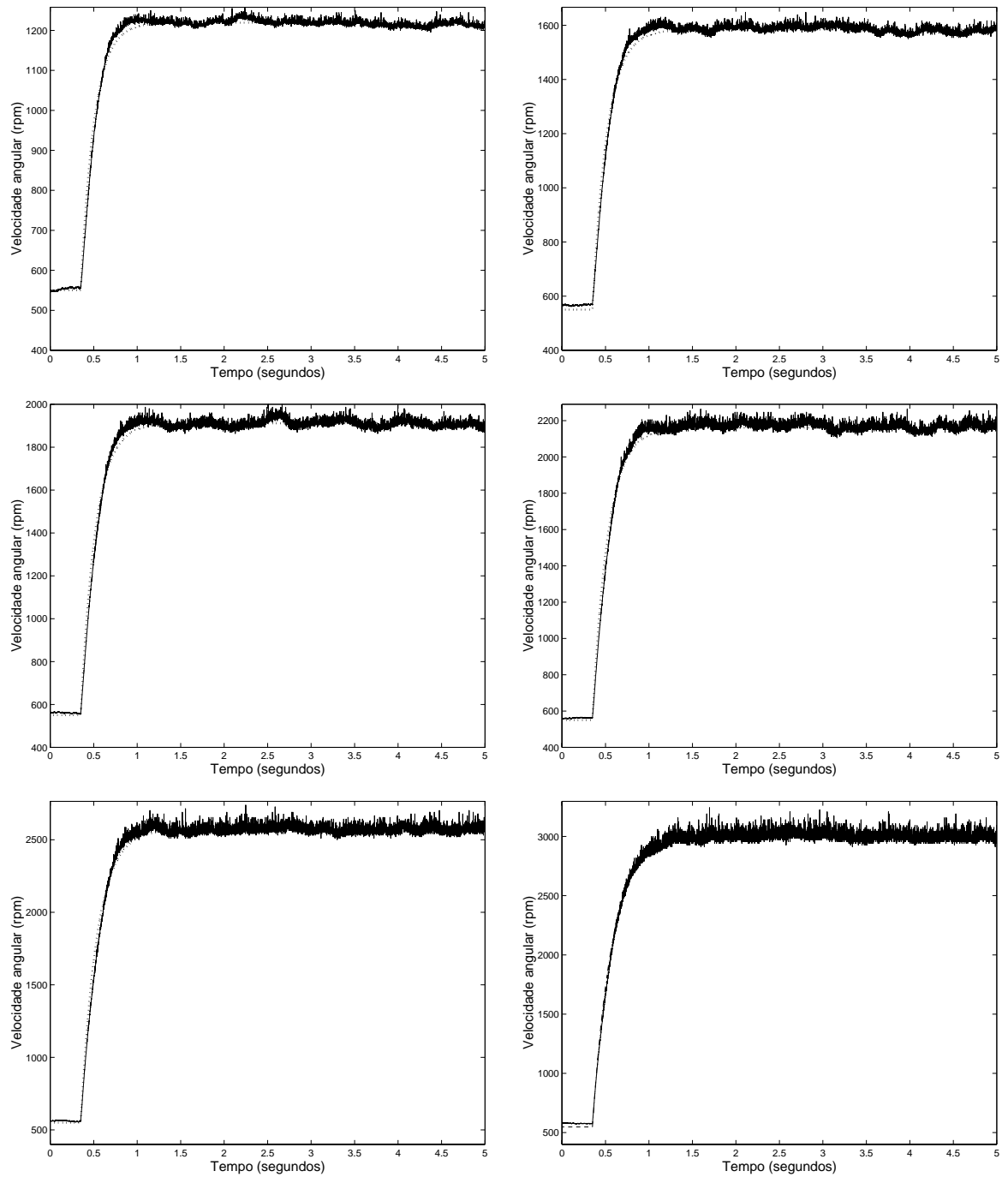


Figura 4.11: Respostas em malha aberta para o sistema real (linha contínua) e para o modelo (linha pontilhada) em várias faixas de operação do motor.

4.10 CONCLUSÕES

Os resultados mostram que o modelo para simulação é confiável quando comparado com o sistema montado em bancada. A grande importância de se ter um modelo que represente bem as características da planta real é que simulações podem ser realizadas para se antever o comportamento dos sistemas com os controladores \mathcal{H}_∞ a serem projetados, aumentando a segurança do processo de implementação em bancada.

Capítulo 5

PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLADORES ROBUSTOS \mathcal{H}_∞

Neste capítulo, controladores robustos \mathcal{H}_∞ serão projetados para o motor de indução [34] a partir da definição de objetivos de controle. Inicialmente, na seção 5.1, define-se como objetivo de controle o rastreamento de sinais e desempenho transitório, que conforme visto no Capítulo 3, leva à formulação de um problema de 1-bloco. A seção 5.2 apresenta resultados obtidos com a implementação dos controladores calculados a partir da solução do problema formulado na seção anterior. Com a definição de um problema misto, que considera a estabilidade robusta e a atenuação de ruído, e também o rastreamento de sinais e desempenho transitório, desenvolve-se na seção 5.3 o projeto de controladores a partir do problema de 2-blocos. Os resultados da implementação desses controladores estão na seção 5.4.

5.1 PROJETO DO CONTROLADOR A PARTIR DE UM PROBLEMA \mathcal{H}_∞ DE 1-BLOCO

Inicialmente, considere como objetivo de controle apenas o rastreamento de sinais e desempenho transitório. Isto leva à necessidade de solução do problema 2,

dado pela Equação (3.58) e repetido a seguir:

$$\min_{K(s) \text{ est } G(s)} \|W_2 S\|_\infty = \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|W_2(X - NQ)\tilde{M}\|_\infty = \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|T_1 - T_2 Q T_3\|_\infty,$$

que representa um problema de 1-bloco. O fato do sistema ser escalar facilita muito sua solução. Note, inicialmente, que a planta nominal do sistema tem a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{k_{abs} I_{Sdref}}{(\tau s + 1)}. \quad (5.1)$$

Assim, para a solução do problema, o primeiro passo é encontrar uma fatoração duplamente coprima para $G(s)$, isto é:

$$G(s) = \frac{\tilde{N}(s)}{\tilde{M}(s)} = \frac{N(s)}{M(s)}.$$

Como $G(s)$ é escalar e estável, pode-se adotar:

$$N(s) = \tilde{N}(s) = G(s) = \frac{k_{abs} I_{Sdref}}{(\tau s + 1)} \quad \text{e} \quad M(s) = \tilde{M}(s) = 1. \quad (5.2)$$

Devem-se agora obter funções $X(s) = \tilde{X}(s)$ e $Y(s) = \tilde{Y}(s)$ que satisfaçam a equação de Bezout (3.39):

$$X(s)\tilde{M}(s) - Y(s)\tilde{N}(s) = 1. \quad (5.3)$$

Substituindo-se as funções das Equações (5.2) na Equação (5.3), tem-se que:

$$\begin{aligned} X(s) - Y(s) \frac{k_{abs} I_{Sdref}}{(\tau s + 1)} &= 1, \\ X(s)(\tau s + 1) - Y(s) k_{abs} I_{Sdref} &= (\tau s + 1). \end{aligned} \quad (5.4)$$

É fácil verificar que

$$Y(s) = 0 \text{ e } X(s) = 1, \quad (5.5)$$

são soluções da equação diofantina (5.4). Note ainda que $\tilde{M}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $M(s)$, $N(s)$, $\tilde{X}(s)$, $\tilde{Y}(s)$, $X(s)$ e $Y(s) \in \mathcal{RH}_\infty$.

O problema agora é encontrar $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ que minimize $\|W_2(X - NQ)\tilde{M}\|_\infty = \|W_2(1 - GQ)\|_\infty$, uma vez que $\tilde{M}(s) = 1$ e $N(s) = G(s)$. Vê-se que, neste caso, como $G(s)$ é estável, a solução do problema $\min \|W_2 S\|_\infty$ é obtida para $Q(s) = 1/G(s)$, que independe de $W_2(s)$. Para esse valor de $Q(s)$, tem-se que $W_2(j\omega)(1 - G(j\omega)Q(j\omega)) = 0$, $\forall \omega$ e, portanto, $\|W_2 S\|_\infty = 0$. Conseqüentemente:

$$Q(s) = \frac{1}{G(s)} = \frac{(\tau s + 1)}{k_{abs} I_{Sdref}}.$$

Porém esta é uma função imprópria, e, portanto, não satisfaz à condição $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, o que força a introdução de um fator no denominador, para que se tenha uma função racional, própria e estável. Assim, define-se:

$$Q_p(s) = \frac{Q(s)}{\bar{\tau}s + 1} = \frac{(\tau s + 1)}{k_{abs} I_{Sdref}(\bar{\tau}s + 1)}.$$

Note que quanto menor for o valor de $\bar{\tau}$ mais próxima de $Q(s)$ estará $Q_p(s)$.

Finalmente, sabendo que da Equação (3.41) (Parametrização de Youla-Kučera), o conjunto de todos os controladores $K(s)$ que estabilizam o sistema é dado por

$$K = -\frac{(Y - MQ_p)}{(X - NQ_p)},$$

e tem-se que substituindo-se M , N , X , Y e Q_p na equação acima resulta:

$$\begin{aligned} K(s) &= \frac{\frac{(\tau s + 1)}{k_{abs} I_{Sdref}(\bar{\tau}s + 1)}}{1 - \frac{k_{abs} I_{Sdref}(\tau s + 1)}{(\tau s + 1) k_{abs} I_{Sdref}(\bar{\tau}s + 1)}} = \frac{(\tau s + 1)}{k_{abs} I_{Sdref}(\bar{\tau}s + 1)} \frac{(\bar{\tau}s + 1)}{(\bar{\tau}s + 1 - 1)} = \\ &= \frac{(\tau s + 1)}{k_{abs} I_{Sdref} \bar{\tau} s} = \frac{\tau}{k_{abs} I_{Sdref} \bar{\tau}} \left(\frac{s + \frac{1}{\tau}}{s} \right), \\ K(s) &= \frac{I_{Sqref}(s)}{E_\omega(s)} = \frac{\tau}{k_{abs} I_{Sdref} \bar{\tau}} \left(1 + \frac{1}{\tau s} \right), \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde $E_\omega(s)$ é a Transformada de Laplace do sinal de erro $e_\omega(t) = \omega_{ref}(t) - \omega(t)$.

Surpreendentemente o controlador obtido na Equação (5.6) é um PI, que deve ter seus parâmetros ajustados de maneira idêntica ao descrito pelo princípio do modelo interno de Morari [35], com ganho proporcional dado por

$$k_p = \frac{\tau}{k_{abs} I_{Sdref} \bar{\tau}}, \quad (5.7)$$

e constante de tempo de integração dada por

$$t_i = \tau. \quad (5.8)$$

que é a constante de tempo do sistema em malha aberta. Este resultado, obtido a partir da teoria de controle robusto \mathcal{H}_∞ , confirma que o controlador PI, ajustado de acordo com o princípio do modelo interno, é realmente a melhor opção a ser utilizada, se o objetivo de controle for rastreamento de sinais e desempenho transitório.

Para se implementar o controlador, deve-se obter o equivalente discreto da Equação (5.6). Utilizando-se a regra bilinear de Tustin [36], onde o mapeamento do plano-s para o plano-z é dado por

$$s \sim \frac{2z - 1}{h z + 1}$$

onde h denota o intervalo de amostragem e realizando-se algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$K(z) = \frac{I_{Sqref}(z)}{E_\omega(z)} = k_p \left(\frac{\left(\frac{h}{2t_i} + 1\right) + \left(\frac{h}{2t_i} - 1\right) z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right). \quad (5.9)$$

A partir da Equação (5.9) obtém-se a seguinte equação a diferenças, que torna possível a implementação do controlador no algoritmo de controle:

$$i_{Sqref}(k) = i_{Sqref}(k-1) + k_p \left(\frac{h}{2t_i} + 1 \right) e(k) + k_p \left(\frac{h}{2t_i} - 1 \right) e(k-1). \quad (5.10)$$

Os valores de k_{abs} e τ utilizados para o cálculo dos parâmetros do PI são, respectivamente, as médias aritméticas simples das colunas da Tabela 4.5 enquanto que o valor de $\bar{\tau}$ pode ser escolhido arbitrariamente, sendo este o único parâmetro de ajuste para o controlador PI.

5.2 RESULTADOS EXPERIMENTAIS OBTIDOS A PARTIR DOS CONTROLADORES \mathcal{H}_∞ DE 1-BLOCO

Nesta seção apresentam-se os resultados experimentais obtidos com as implementações de três controladores, calculados a partir das expressões da seção anterior. Cada controlador é projetado com um valor de $\bar{\tau}$ diferente. É importante observar que, de acordo com a Equação (5.7), quanto menor o valor de $\bar{\tau}$, maior será o valor do ganho do controlador. Inicialmente foram realizadas simulações com o intuito de se observar o comportamento das variáveis do sistema. Depois de analisados o desempenho, a estabilidade e o esforço de controle por meio das simulações, os controladores foram implementados no algoritmo em bancada e aplicaram-se degraus de várias amplitudes na referência de velocidade, tanto para o sistema considerado nominal como para variações de +50% e -50% em torno do valor nominal de T_R' . Com o intuito de se avaliar as respostas do sistema real em termos de ruído, utilizaram-se as curvas da variável de controle I_{Sqref} ao invés da variável de saída ω , ou seja, fez-se uma medição indireta do ruído uma vez que a variável de saída ω não pode ser medida antes da atuação do ruído, ou melhor, a própria medição de velocidade introduz o ruído que se quer eliminar.

5.2.1 Resultados para $\bar{\tau} = 5\tau$

Para este caso, o controlador obtido tem a seguinte função de transferência:

$$K(s) = 0.0049 \left(1 + \frac{1}{0.1740s} \right).$$

A Figura 5.1 apresenta a comparação entre três resultados nominais, simulados no Matlab e usando-se o modelo da Figura 4.3 (linhas pontilhadas), e resultados reais obtidos em bancada (linhas contínuas). O tempo de subida¹ médio é de 1.39s e o tempo de acomodação² médio é de 3,15s. As Figuras 5.2 e 5.3 mostram a variação que ocorre no sistema real quando perturbado por erros no valor nominal de T_R' de +50% e -50% respectivamente. Na Figura 5.2 (coluna da esquerda) pode-se observar um aumento nos tempos de subida e de acomodação do sistema quando perturbado. Observando a Figura 5.2 (coluna da direita) vê-se que as diferenças percentuais entre as curvas de resposta nominal e com perturbação de T_R' alcançam valores máximos de 7%, 14% e 17%. Já na Figura 5.3, que representa os resultados com perturbação de -50% em T_R' , observa-se um comportamento inverso, ou seja, uma diminuição nos tempos de subida e de acomodação. As diferenças percentuais entre as curvas de resposta nominal e com perturbação de T_R' alcançam valores máximos de -12%, -19% e -26%. Em ambos os casos manteve-se a estabilidade e não houve sobre-sinal, exceto na resposta ao degrau de maior amplitude quando o erro em T_R' é para -50%, onde aparece um ligeiro sobre-sinal. A Figura 5.4 apresenta os gráficos de ruído percentual do sistema real correspondentes à corrente de referência (coluna da esquerda da Figura 5.1). Observa-se que os níveis de ruído aumentam com a velocidade ficando dentro das faixas (-0.4% a 0.6%), (-0.4% a 1%) e (-0.5% a 1.5%).

¹Tempo para a resposta passar de 10% a 90% do seu valor final.

²Deve-se entender por tempo de acomodação como o tempo necessário para a curva de resposta alcançar e permanecer dentro de uma faixa de tolerância em torno de 2% do valor final.

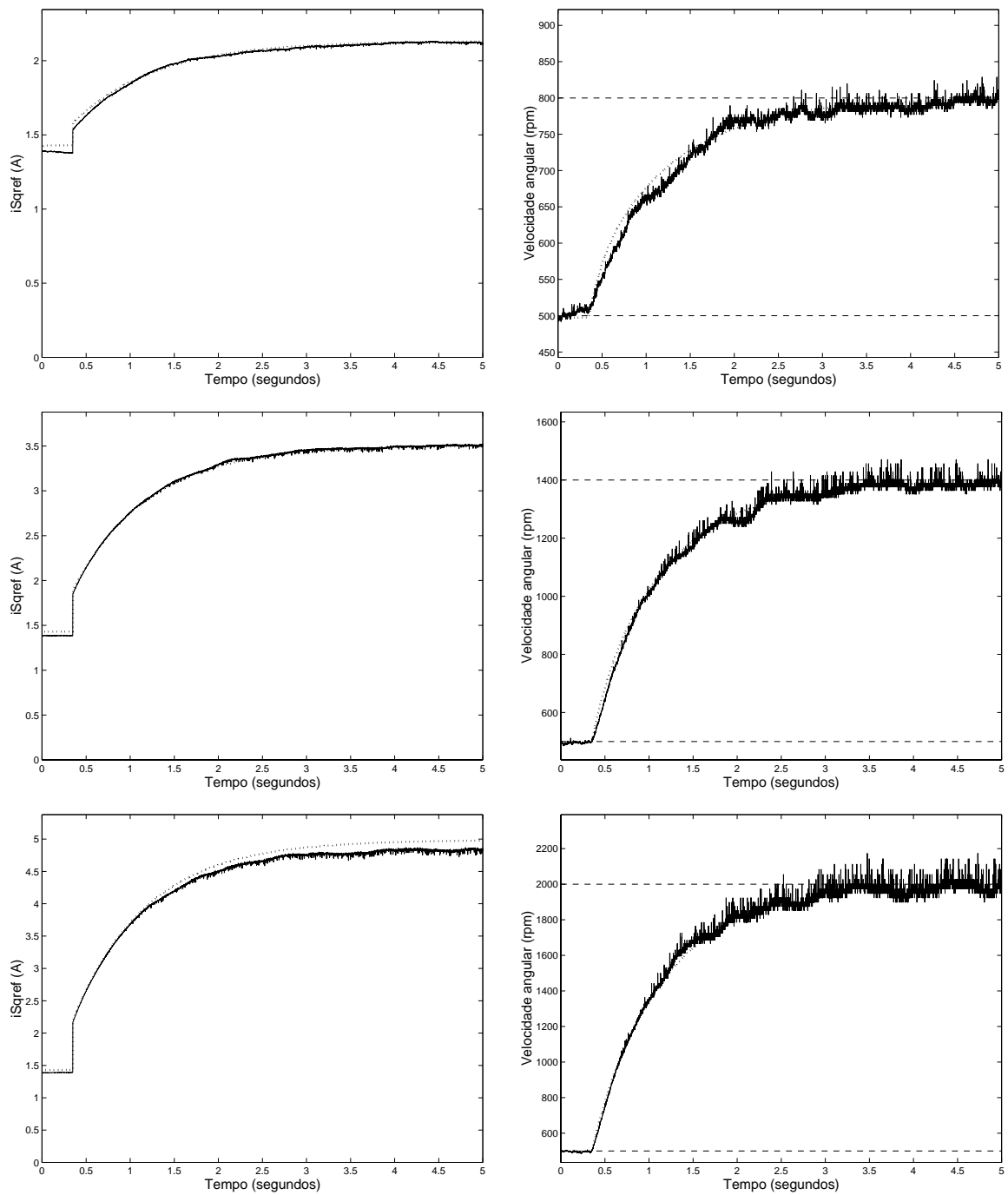


Figura 5.1: Respostas em malha fechada do sistema real (linha contínua) e do modelo (linha pontilhada) em três faixas de operação do motor, usando o controlador PI obtido a partir do problema de 1-bloco, com $\bar{\tau} = 5\tau$. Coluna da esquerda: Tempo(segundos) \times i_{Sqref} (A). Coluna da direita: Tempo(segundos) \times velocidade angular (rpm).

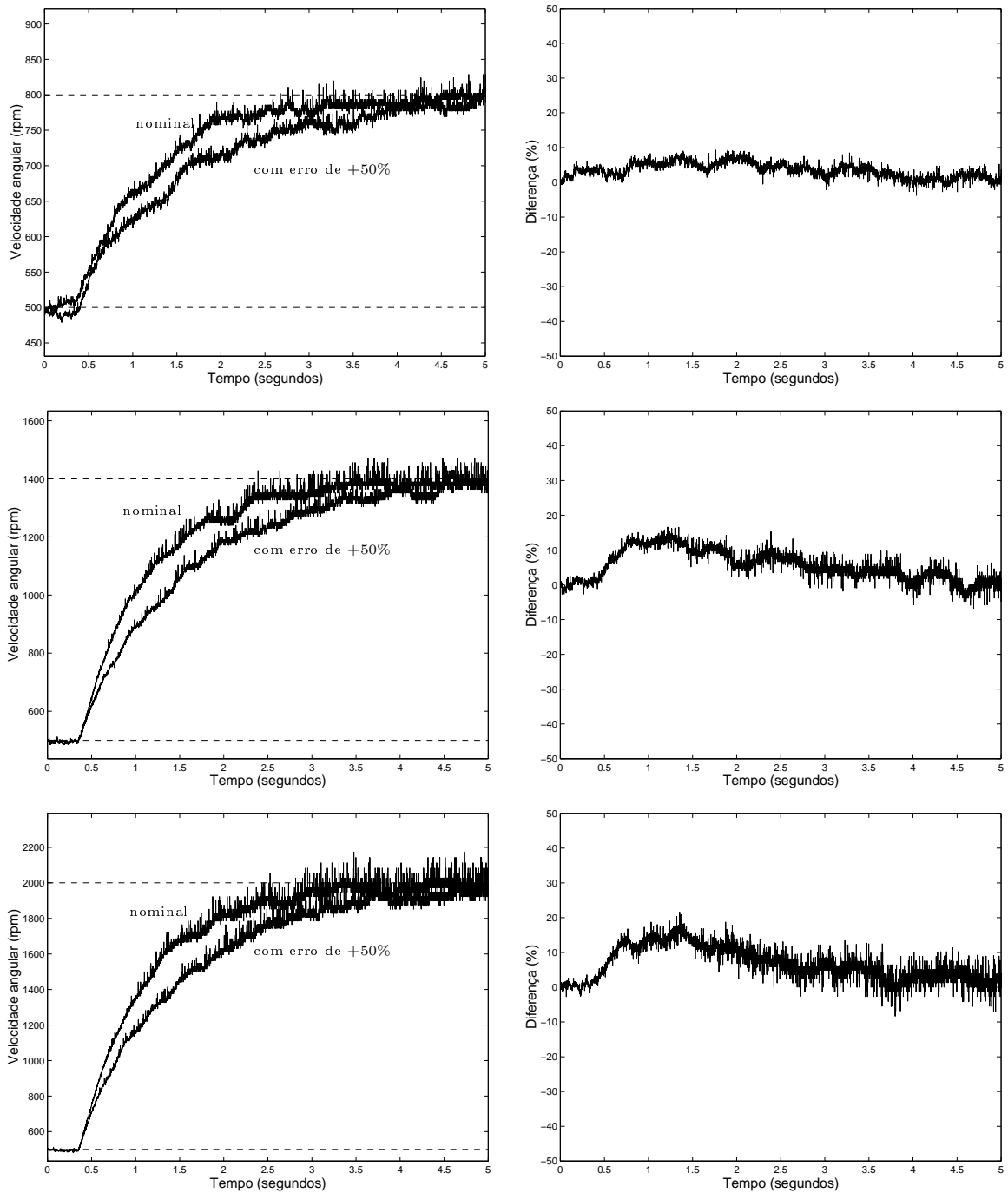


Figura 5.2: Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 1-bloco (PI), com $\bar{\tau} = 5\tau$. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de +50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.

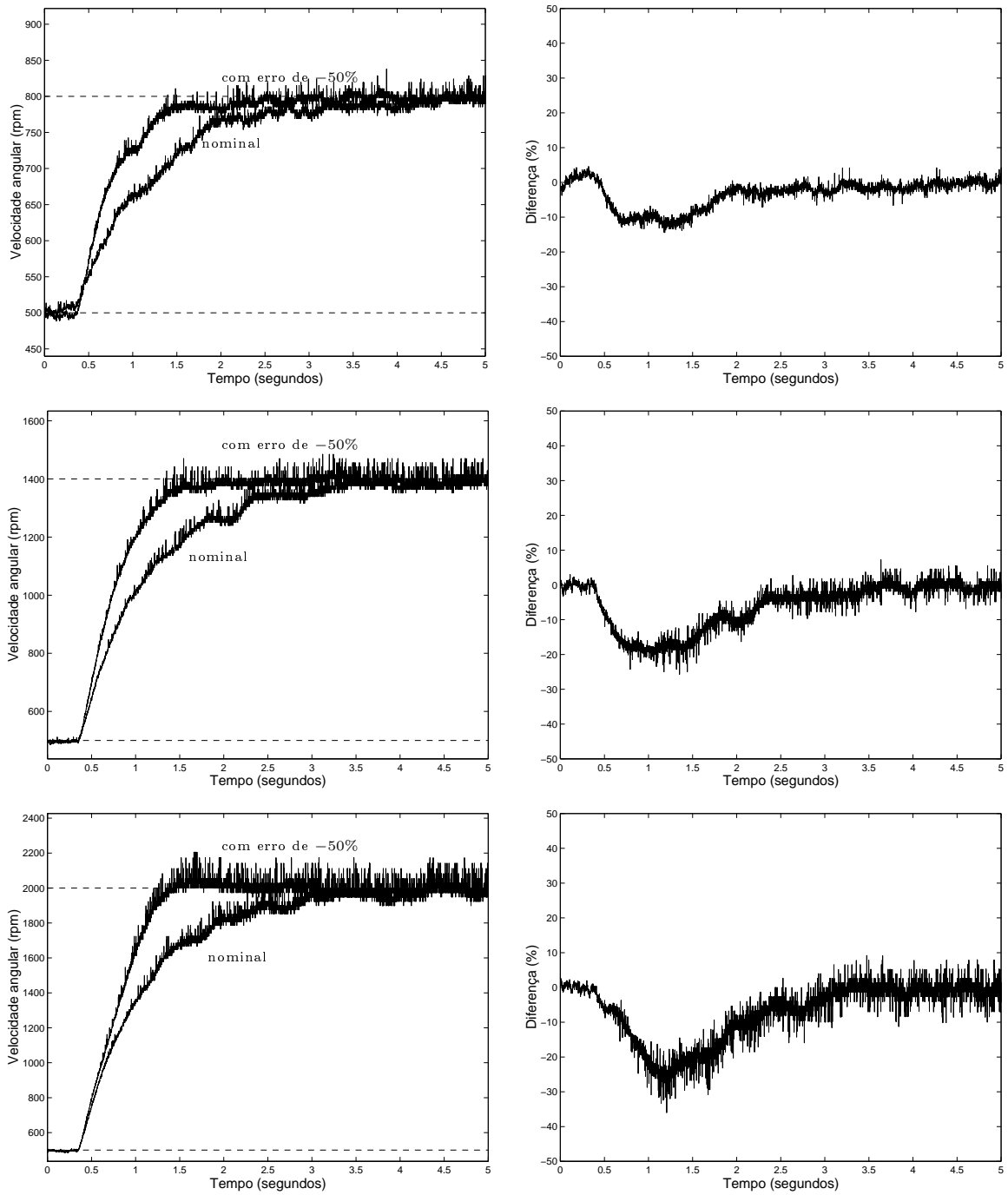


Figura 5.3: Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 1-bloco (PI), com $\bar{\tau} = 5\tau$. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de -50% . Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.

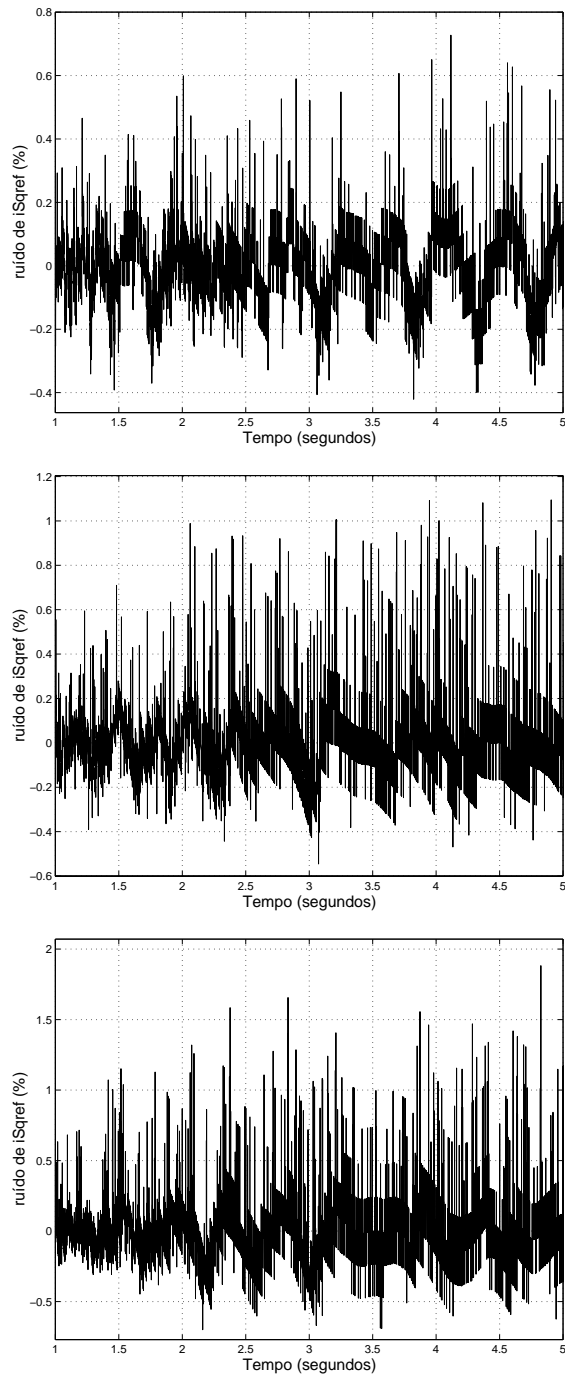


Figura 5.4: Gráficos de ruído percentual das curvas de i_{Sqref} do sistema real, extraídos da coluna da esquerda da Figura 5.1.

5.2.2 Resultados para $\bar{\tau} = \tau$

Agora, o controlador PI \mathcal{H}_∞ tem a seguinte função de transferência:

$$K(s) = 0.0246 \left(1 + \frac{1}{0.1740s} \right).$$

Note que, com relação ao controlador anterior, apenas o ganho foi alterado.

Na Figura 5.5 é apresentada a comparação entre três resultados simulados (linhas pontilhadas) e resultados reais (linhas contínuas), para o modelo nominal do sistema obtido no capítulo anterior. O tempo de subida médio agora é naturalmente menor que o anterior, devido ao aumento do ganho k_p , valendo $0.27s$ e o tempo de acomodação médio neste caso é de $0.89s$. As Figuras 5.6 e 5.7 mostram a variação que ocorre na resposta ao degrau do sistema real quando T_R' é perturbado em $+50\%$ e -50% respectivamente. Na Figura 5.6 novamente se observa um aumento nos tempos de subida e de acomodação do sistema quando perturbado, além de ausência de sobre-sinal. Note que as diferenças percentuais entre a curva de resposta com T_R' nominal e com perturbação de T_R' alcançam valores máximos de 6% , 10% e 13% . Pode-se ainda notar na Figura 5.7 que para o degrau de menor amplitude há uma diminuição nos tempos de subida e de acomodação assim como um pequeno sobre-sinal percentual, enquanto que, para os degraus de maior amplitude, o comportamento se inverte. As diferenças percentuais entre a curva de resposta nominal e com perturbação de T_R' alcançam valores máximos de -8% , -19% e -28% . A Figura 5.8 apresenta os gráficos de ruído percentual do sistema real para a coluna da esquerda da Figura 5.5. A Figura 5.8 apresenta os gráficos de ruído percentual do sistema real para as correntes de referência mostradas na Figura 5.5 (coluna da esquerda). Observa-se que os níveis de ruído aumentam com a velocidade ficando dentro das faixas de $(-3\% \text{ a } 3\%)$, $(-4\% \text{ a } 6\%)$ e $(-4\% \text{ a } 10\%)$.

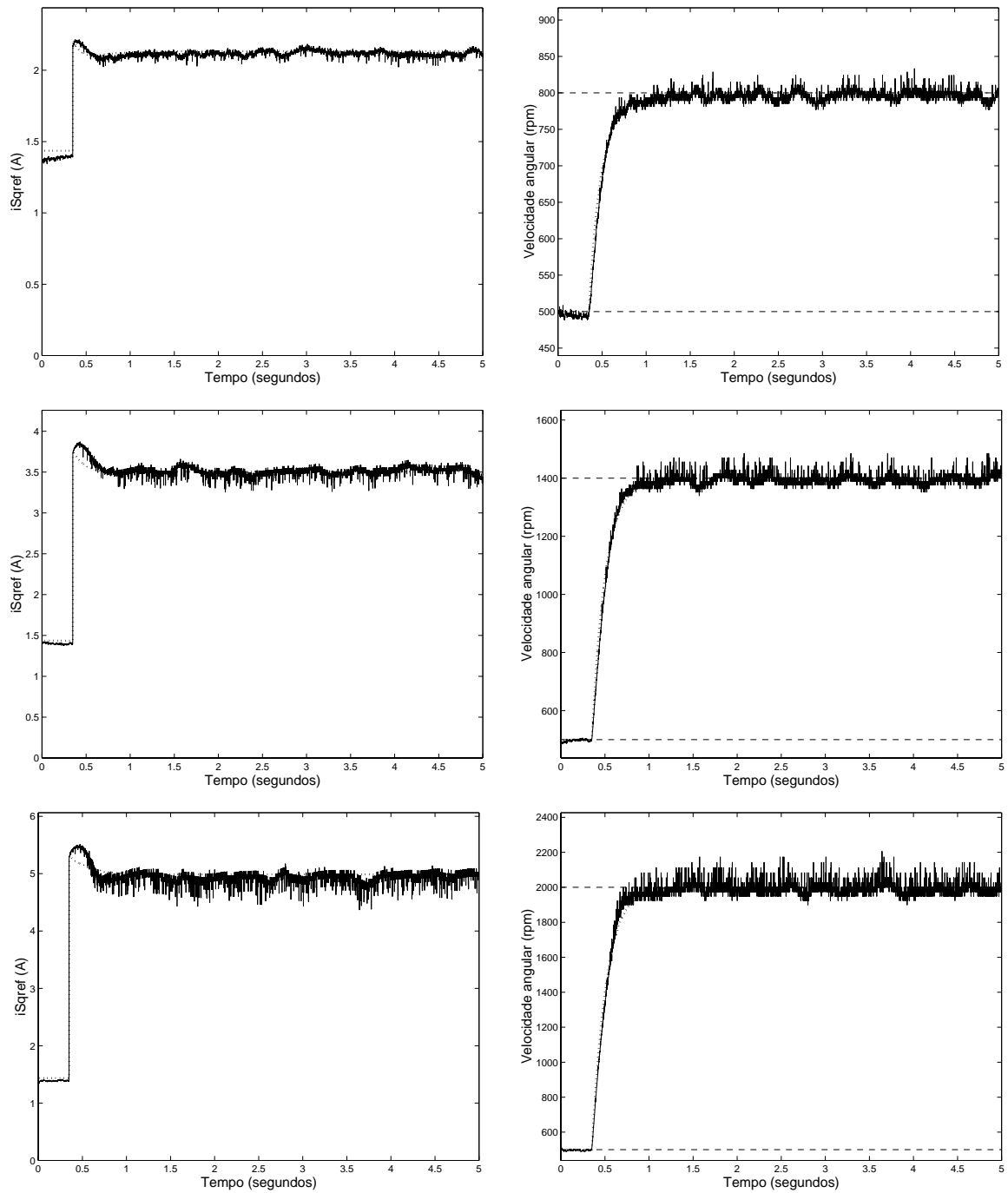


Figura 5.5: Respostas em malha fechada do sistema real (linha contínua) e do modelo (linha pontilhada) em três faixas de operação do motor, usando o controlador PI obtido a partir do problema de 1-bloco, com $\bar{\tau} = \tau$. Coluna da esquerda: Tempo(segundos) \times i_{Sqref} (A). Coluna da direita: Tempo(segundos) \times velocidade angular (rpm).

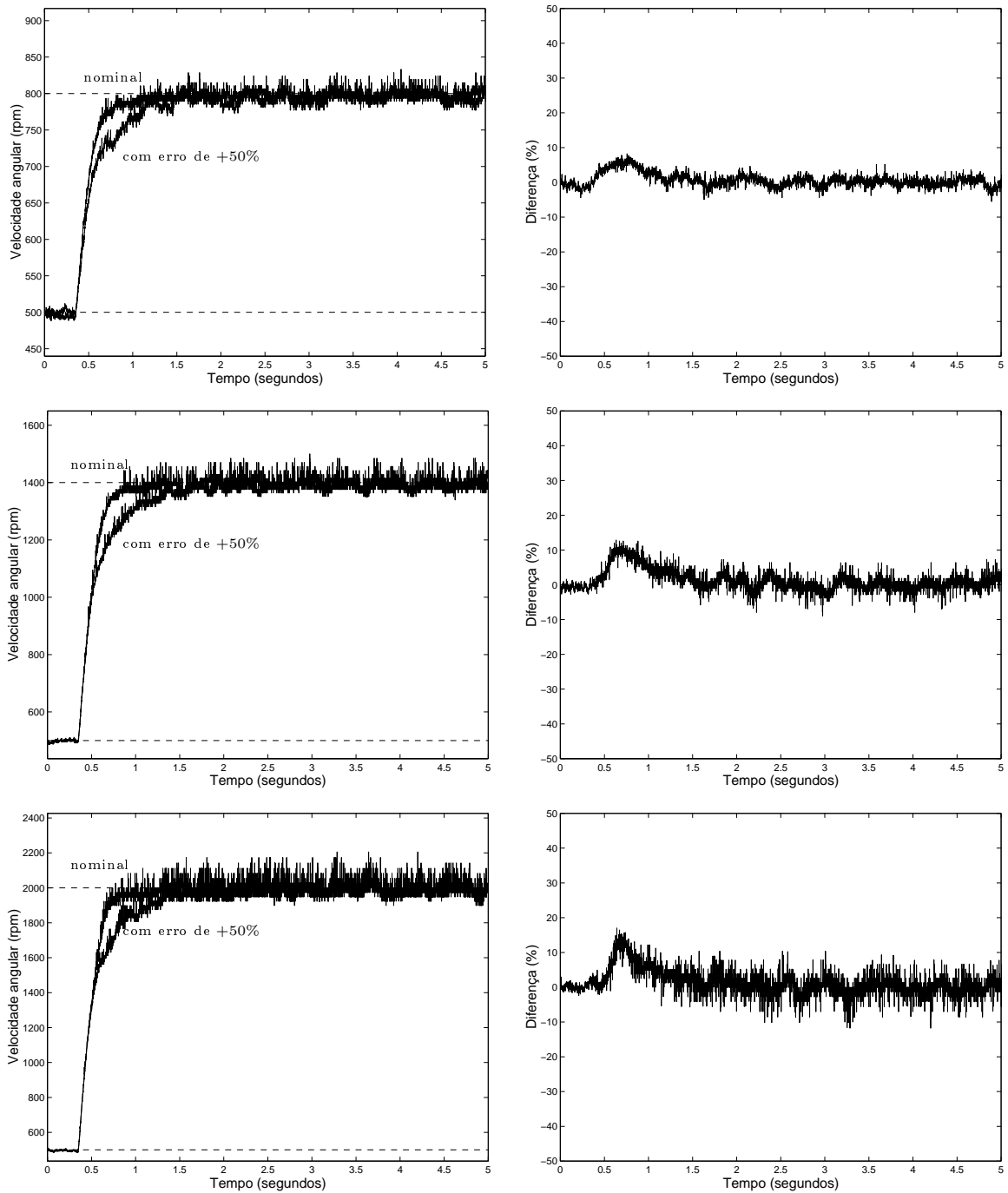


Figura 5.6: Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 1-bloco (PI), com $\bar{\tau} = \tau$. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de +50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.

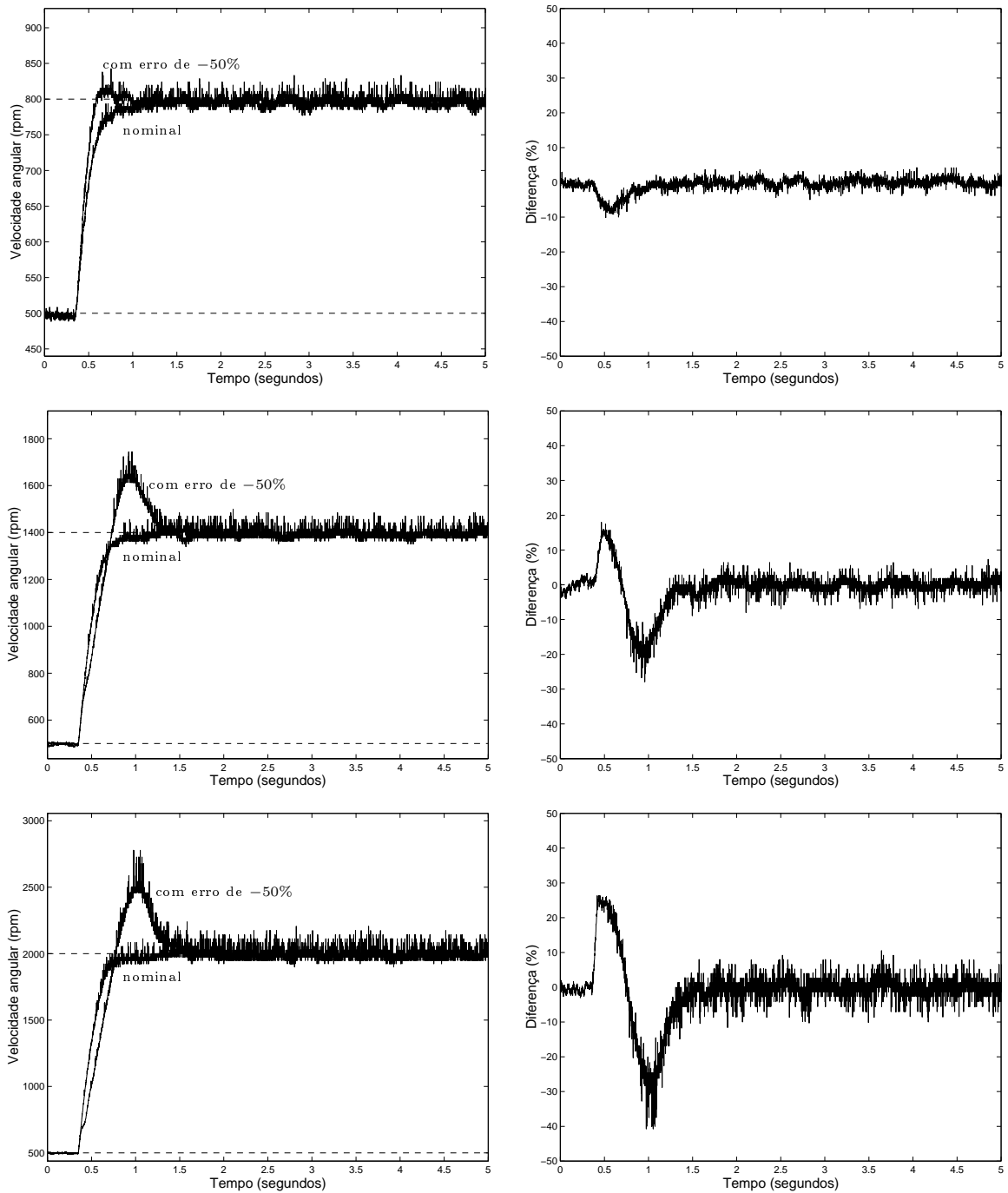


Figura 5.7: Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 1-bloco (PI), com $\bar{\tau} = \tau$. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de -50% . Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.

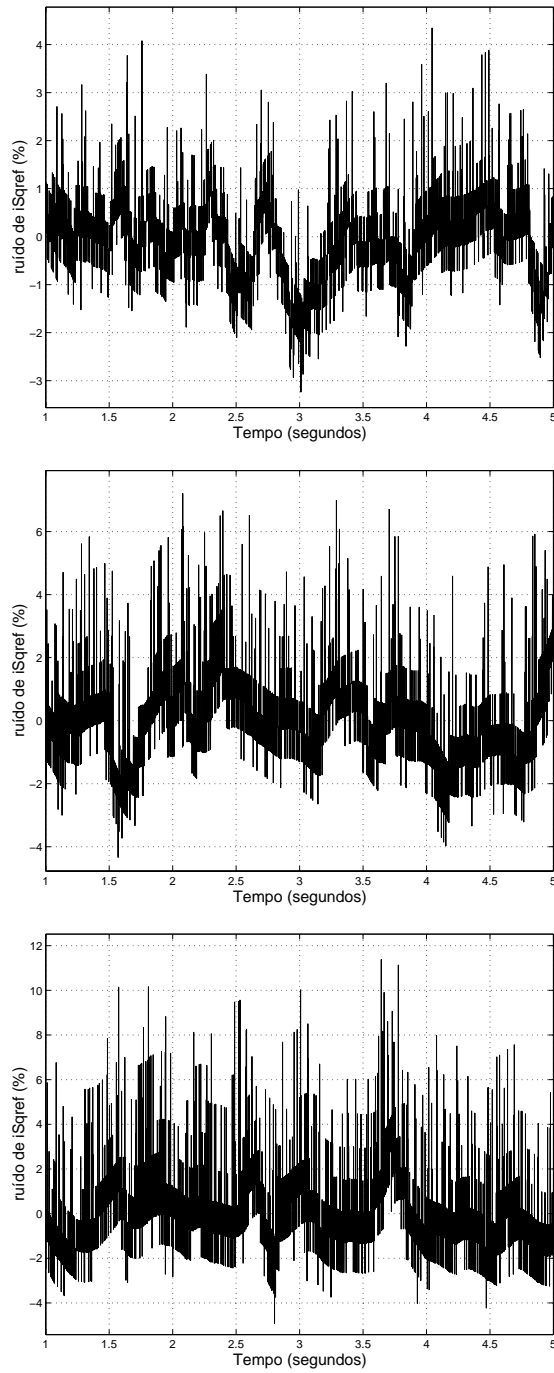


Figura 5.8: Gráficos de ruído percentual das curvas de i_{Sqref} do sistema real, extraídos da coluna da esquerda da Figura 5.5.

5.2.3 Resultados para $\bar{\tau} = \tau/5$

Aqui, o controlador tem a seguinte função de transferência:

$$K(s) = 0.1230 \left(1 + \frac{1}{0.1740s} \right).$$

Mais uma vez, somente o ganho foi alterado.

Na Figura 5.9 tem-se a comparação entre três resultados simulados (linhas pontilhadas) e resultados reais (linhas contínuas), de onde se pode mais uma vez comprovar a validade do modelo matemático desenvolvido. Os tempos de subida e de acomodação médios são ainda menores que os anteriores, iguais a $0.05s$ e $0.45s$ respectivamente, porém há um pequeno sobre-sinal percentual. As Figuras 5.10 e 5.11 mostram a variação que ocorre no sistema real quando o valor de T_R' é perturbado em $+50\%$ e -50% , respectivamente. Na Figura 5.10 observa-se que não há diferença significativa no tempo de subida e a diferença no tempo de acomodação é pequena, além do desaparecimento do sobre-sinal. Note ainda que as diferenças percentuais máximas entre a curva de resposta nominal e após perturbação são 3% , (-5% e 6%) e (-14% e 10%). Nota-se ainda na Figura 5.11 que há um aumento nos tempos de subida e de acomodação assim como no sobre-sinal percentual. As diferenças percentuais entre as curvas de resposta nominal e com perturbação de T_R' alcançam valores máximos de ($\pm 5\%$), (32% e -16%) e (38% e -32%). A Figura 5.12 apresenta os gráficos de ruído percentual do sistema real para as correntes de referência da Figura 5.9 (coluna da esquerda). Observa-se que os níveis de ruído aumentam com a velocidade ficando dentro das faixas (-10% a 15%), (-10% a 30%) e (-13% a 40%).

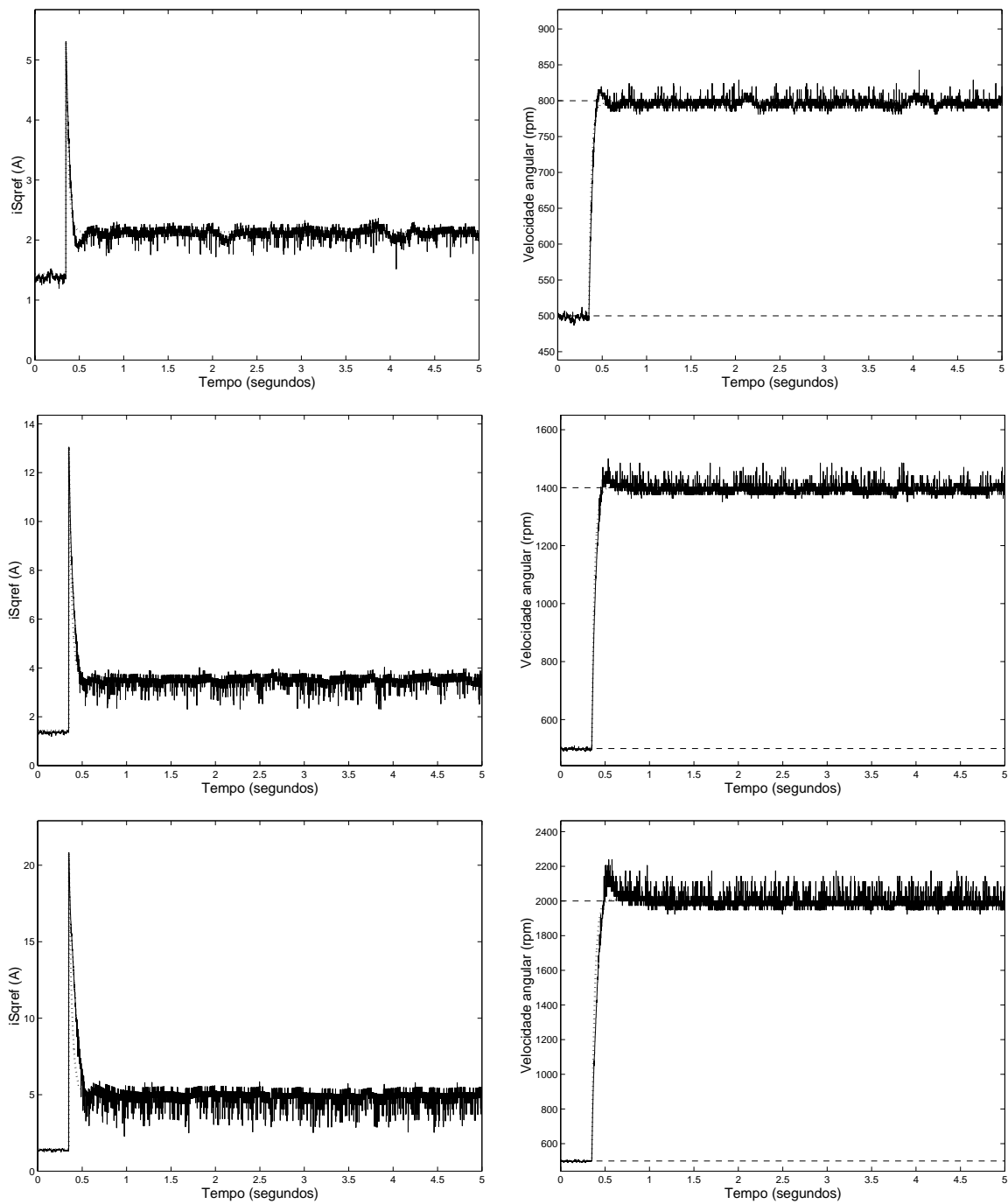


Figura 5.9: Respostas em malha fechada do sistema real (linha contínua) e do modelo (linha pontilhada) em três faixas de operação do motor, usando o controlador PI obtido a partir do problema de 1-bloco, com $\bar{\tau} = \tau/5$. Coluna da esquerda: Tempo(segundos) \times i_{Sqref} (A). Coluna da direita: Tempo(segundos) \times velocidade angular (rpm).

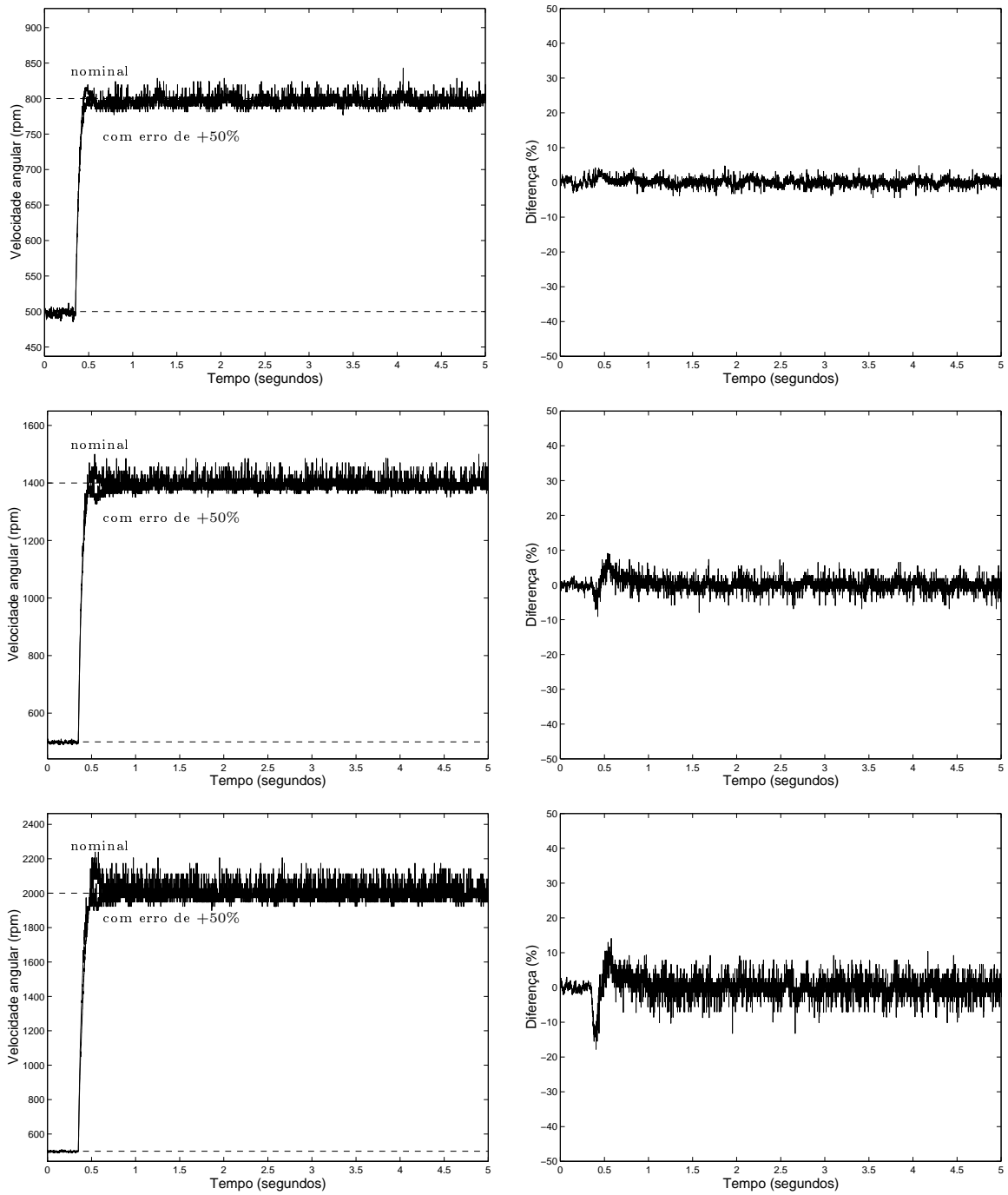


Figura 5.10: Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 1-bloco (PI), com $\bar{\tau} = \tau/5$. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de +50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.

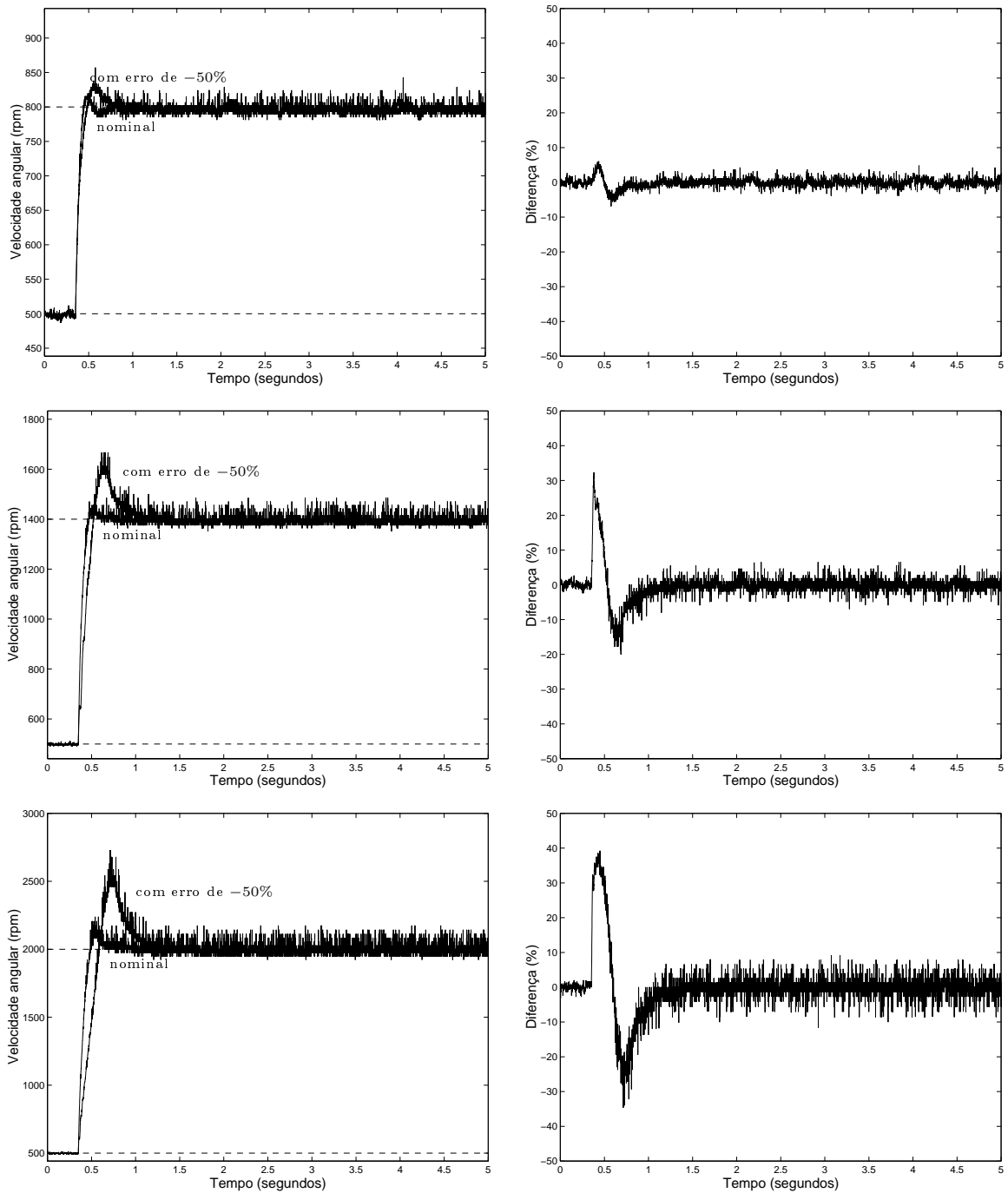


Figura 5.11: Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 1-bloco (PI), com $\bar{\tau} = \tau/5$. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de -50% . Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.

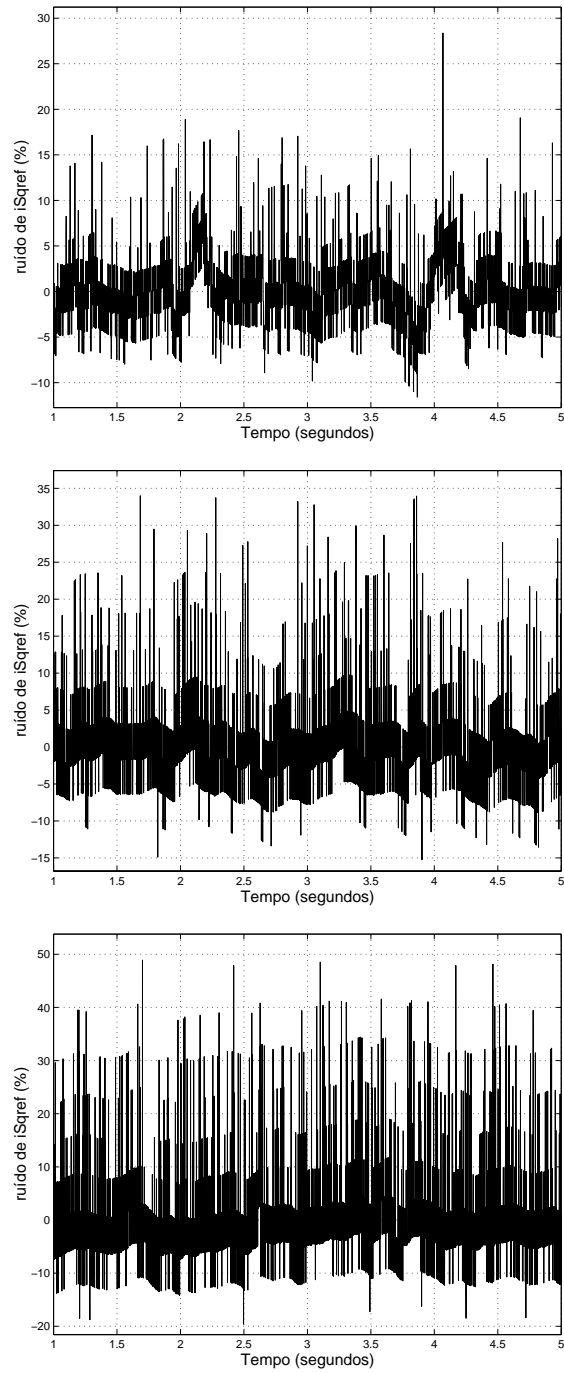


Figura 5.12: Gráficos de ruído percentual das curvas de i_{Sqref} do sistema real, extraídos da coluna da esquerda da Figura 5.9.

5.2.4 Análise dos resultados

Um primeiro fato que se pode comentar é que, conforme esperado, a diminuição no valor de $\bar{\tau}$ (aumento de k_p) implicou na melhora da resposta transitória. Observa-se ainda que a variação de $\bar{\tau}$ não afetou significativamente os erros entre as respostas nominais e com perturbação de T_R' , pois eles apresentam aproximadamente a mesma ordem de grandeza. Deve-se ressaltar que, embora nesse caso o PI seja o controlador mais utilizado na prática, não é qualquer PI que deve ser implementado, mas sim aquele cujos parâmetros são ajustados de acordo com as Equações (5.7) e (5.8). Finalmente, observa-se que os níveis de ruído na corrente de referência aumentam com a velocidade e com a diminuição de $\bar{\tau}$ (aumento de k_p).

5.3 PROJETO DO CONTROLADOR A PARTIR DE UM PROBLEMA \mathcal{H}_∞ DE 2-BLOCOS

No problema de 2-blocos os objetivos de projeto são, além do rastreamento de sinais e desempenho transitório, também a estabilidade robusta e atenuação de ruído. Deste modo, formula-se o seguinte problema misto

$$\begin{aligned} \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \left\| \begin{bmatrix} W_1 T \\ W_2 S \end{bmatrix} \right\|_\infty &= \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \left\| \begin{bmatrix} -W_1 Y \tilde{N} \\ W_2 X \tilde{M} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -W_1 N \\ W_2 N \end{bmatrix} Q \tilde{M} \right\|_\infty = \\ &= \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|T_1 - T_2 Q T_3\|_\infty. \end{aligned}$$

As funções $\tilde{M}(s)$, $\tilde{N}(s)$, $M(s)$, $N(s)$, $\tilde{X}(s)$, $\tilde{Y}(s)$, $X(s)$ e $Y(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ podem ser definidas da mesma maneira que no caso de 1-bloco, na seção 5.1. Note que a formulação definida na Equação (3.60) introduz as funções:

$$T_1 = \begin{bmatrix} -W_1 Y \tilde{N} \\ W_2 X \tilde{M} \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} -W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} N \text{ e } T_3 = \tilde{M}, \quad (5.11)$$

entretanto, como $T_3 = \tilde{M}$ é escalar, pode-se também definir

$$T_2 = \begin{bmatrix} -W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} N \tilde{M}. \quad (5.12)$$

Assim, a formulação do problema misto passa a ser

$$\begin{aligned} \min_{K(s) \text{ est } G(s)} \left\| \begin{bmatrix} W_1 T \\ W_2 S \end{bmatrix} \right\|_{\infty} &= \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_{\infty}} \left\| \begin{bmatrix} -W_1 Y \tilde{N} \\ W_2 X \tilde{M} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -W_1 N \\ W_2 N \end{bmatrix} \tilde{M} Q \right\|_{\infty} = \\ &= \min_{Q(s) \in \mathcal{RH}_{\infty}} \|T_1 - T_2 Q\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Normalmente, a função $W_1(s)$, relacionada à estabilidade robusta e atenuação de ruído, é introduzida de forma a penalizar as altas frequências. Isso faz sentido, uma vez que os objetivos associados têm componentes significativas nessa faixa de frequência. Já a função $W_2(s)$, relativa ao rastreamento de sinais e desempenho transitório, naturalmente deve penalizar as baixas frequências, pois essa faixa é preponderante, de acordo com o objetivo considerado.

A função de peso $W_1(s)$ é usualmente definida a partir de ensaios de resposta em frequência da planta a ser controlada [37]. O método é o seguinte: aplicam-se senoides de várias frequências, w_i , $i = 1, \dots, m$ e para cada uma delas, faz-se a aquisição da saída de regime permanente e calculam-se o ganho e a defasagem entre a saída e a entrada correspondente. É importante ressaltar que o que está sendo feito aqui não é identificar a função de transferência do sistema a ser controlado e sim obter uma descrição de como o erro na estimação de T_R' influencia na função de transferência do sistema como um todo. Note que, ao se errar T_R' , o sistema deixa de ter um comportamento linear e, portanto, o termo correto a ser adotado deveria ser obtenção da função descritiva [38] e não levantamento da resposta em frequência. Apesar disso, dar-se-á preferência a essa última nomenclatura. Neste trabalho três experimentos foram realizados em bancada para várias frequências: um deles considerado nominal, com o valor de T_R' dado pela Equação (4.14) e os outros dois com erros de +50% e -50% do valor nominal adotado para T_R' . Os resultados desses experimentos estão plotados na Figura 5.13. Note agora que, como estamos considerando perturbação multiplicativa, isto é, $G_p(s) = G(s)[1 + W_1(s)]$ então tem-se que para cada frequência w_i

$$\frac{G_p(jw_i)}{G(jw_i)} - 1 = W_1(jw_i),$$

e, como,

$$\left| \frac{G_p(jw_i)}{G(jw_i)} - 1 \right| = |W_1(jw_i)|, \quad (5.14)$$

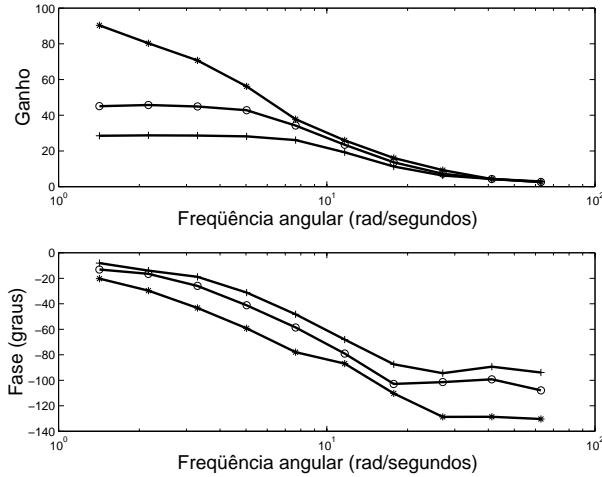


Figura 5.13: Respostas em frequência do sistema real, para diferentes valores da constante de tempo rotórica estimada T_R' . (+) +50% de erro, (o) 0% de erro e (*) -50% de erro.

então

$$\left| \frac{G_p(jw_i)}{G(jw_i)} - 1 \right| \leq |W_1(jw_i)| \leq \left| \frac{G_p(jw_i)}{G(jw_i)} + 1 \right|.$$

Observe que, de acordo com o descrito no parágrafo anterior, $G(jw_i)$ será obtida para o valor de T_R' considerado nominal enquanto $G_p(jw_i)$ será obtida a partir da resposta em frequência do sistema para T_R' perturbada em $\pm 50\%$ do seu valor nominal. Seja então $G(jw_i) = g_i e^{j\phi_i}$ e $G_p(jw_i) = g_{iq} e^{j\phi_{iq}}$, onde $q = 2(3)$ para T_R' perturbada em +50%(-50%). A partir dos dados dos experimentos de resposta em frequência, calcula-se

$$\max \left(\left| \frac{g_{i2} e^{j\phi_{i2}}}{g_i e^{j\phi_i}} - 1 \right|, \left| \frac{g_{i3} e^{j\phi_{i3}}}{g_i e^{j\phi_i}} - 1 \right| \right) \quad (5.15)$$

para cada frequência w_i e ajusta-se a função de peso $W_1(jw_i)$ que satisfaça a Equação (5.14). A Figura 5.14 mostra o gráfico da Expressão (5.15) considerando-se os resultados experimentais da Figura 5.13. A Figura 5.14 sugere que a função de peso $W_1(s)$ deve ter módulo maior nas baixas frequências do que nas altas frequências, ou seja o peso relacionado à estabilidade robusta e atenuação de ruído deve ter um comportamento passa-baixa. Este resultado inesperado contradiz o que está escrito na tabela 3.1 e indica que os objetivos de projeto, que são conflitantes, competem nas mesmas faixas de frequência, pois o peso para o objetivo de rastreamento, $W_2(s)$, deve ser também passa baixa. Esse fato é extremamente indesejável e sugere que

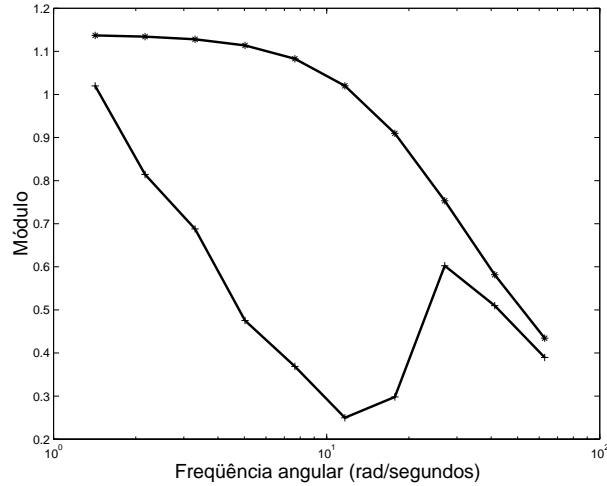


Figura 5.14: Curvas de $\max \left(\left| \frac{g_{i2}e^{j\phi_{i2}}}{g_i e^{j\phi_i}} - 1 \right|, \left| \frac{g_{i3}e^{j\phi_{i3}}}{g_i e^{j\phi_i}} - 1 \right| \right)$ (+) e $|W_1(s)|$ (*), para $a_1 = 0.2$, $b_1 = 131$ e $c_1 = 23$.

será bastante difícil atender a todos os objetivos de controle ao mesmo tempo. Assim, a função racional adotada para o peso $W_1(s)$, de acordo com a expressão 5.14, deve ser do tipo:

$$W_1(s) = \frac{a_1(s + b_1)}{(s + c_1)}, \quad a_1, b_1, c_1 > 0 \text{ e } b_1 > c_1. \quad (5.16)$$

Para o experimento realizado no motor de indução real, a curva dada pela Expressão (5.15) pode ser vista na Figura 5.14. Na mesma figura, pode-se observar a curva da função peso $W_1(s)$ ajustada para esse caso, ou seja:

$$W_1(s) = \frac{0.2(s + 131)}{(s + 23)}, \quad (5.17)$$

e na Figura 5.15 podem ser vistos os gráficos de $|1 \pm W_1(jw)||G(jw)|$ envolvendo as curvas de módulo obtidas experimentalmente a partir do sistema real, para diferentes valores da constante de tempo rotórica estimada T_R' .

Devido à natureza do objetivo associado, o peso $W_2(s)$, relativo ao rastreamento de sinais e desempenho transitório, será definido como do tipo passa-baixa, ou seja:

$$W_2(s) = \frac{a_2(s + b_2)}{(s + c_2)}, \quad a_2, b_2, c_2 > 0 \text{ e } b_2 > c_2. \quad (5.18)$$

Portanto, conforme já ressaltado anteriormente, os dois pesos, da maneira como estão definidos nas Equações (5.16) e (5.18) competem nas mesmas faixas de frequência. Neste ponto, torna-se conveniente introduzir o conceito de desempenho robusto [30] e em seguida enunciar um teorema sobre este desempenho. A noção

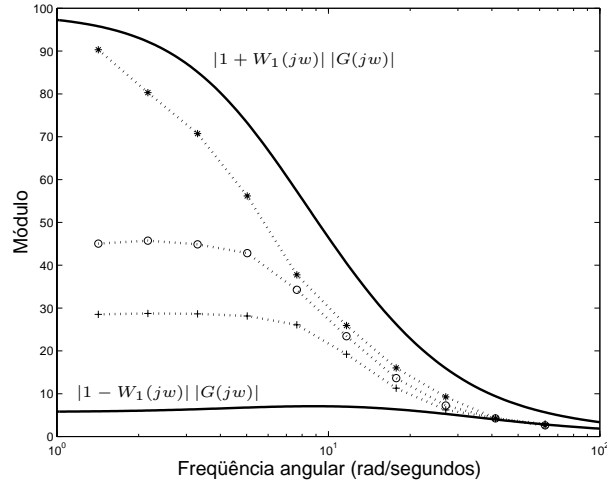


Figura 5.15: Curvas de $|1 \pm W_1(jw)| |G(jw)|$ envolvendo as curvas de módulo obtidas experimentalmente a partir do sistema real, para diferentes valores da constante de tempo rotórica estimada T_R' . (+) +50% de erro, (o) 0% de erro e (*) -50% de erro.

geral de desempenho robusto é que a estabilidade interna e o desempenho especificado devem se manter para perturbações na função de transferência da planta $G(s)$.

Teorema 11 *Uma condição necessária e suficiente para que haja o desempenho robusto é*

$$\| |W_2 S| + |W_1 T| \|_{\infty} < 1 \quad (5.19)$$

Demonstração: Vide Doyle *et al.* [37], pág. 56. □

Definidos os pesos $W_1(s)$ e $W_2(s)$, pode-se agora prosseguir com o cálculo de $T_1(s)$ e $T_2(s)$, definidos, respectivamente nas Equações (5.11) e (5.12). Substituindo os valores de $X(s)$, $Y(s)$, $\tilde{N}(s)$ e $M(s)$ dados pelas Equações (5.2) e (5.5), e dos pesos W_1 e W_2 definidos nas Equações (5.16) e (5.18), resulta:

$$T_1(s) = \begin{bmatrix} -W_1 Y \tilde{N} \\ W_2 X \tilde{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a_2(s+b_2)}{(s+c_2)} \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

$$T_2(s) = \begin{bmatrix} -W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} N \tilde{M} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1(s+b_1)}{(s+c_1)} \\ \frac{a_2(s+b_2)}{(s+c_2)} \end{bmatrix} \frac{k_{abs} I_{Sdref}}{(\tau s + 1)}. \quad (5.21)$$

De acordo com o Capítulo 3, para se resolver esse problema é necessário convertê-lo no seguinte problema de Nehari.

$$\begin{aligned}
\|T_1 - T_2 Q\|_\infty &= \left\| \begin{bmatrix} T_{2i}^* \\ I - T_{2i} T_{2i}^* \end{bmatrix} (T_1 - T_{2i} T_{2o} Q) \right\|_\infty = \\
&= \left\| \begin{bmatrix} T_{2i}^* \\ I - T_{2i} T_{2i}^* \end{bmatrix} (T_1 - T_{2i} T_{2o} Q) \right\|_\infty = \\
&= \left\| \begin{bmatrix} T_{2i}^* T_1 - T_{2o} Q \\ (I - T_{2i} T_{2i}^*) T_1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \bar{R}_1 - \bar{X} \\ R_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty \tag{5.22}
\end{aligned}$$

onde $\bar{R}_1(s) = T_{2i}^*(s) T_1(s) \in \mathcal{RL}_\infty$, $\bar{X}(s) = T_{2o}(s) Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ e $R_2(s) = (I - T_{2i}(s) T_{2i}^*(s)) T_1(s) \in \mathcal{RL}_\infty$. Para tanto, o primeiro passo é obter uma fatoração 'inner'-'outer' de T_2 , ou seja:

$$T_2 = T_{2i} T_{2o}, \quad T_{2i} \text{ 'inner' e } T_{2o} \text{ 'outer'}.$$

Isto é feito encontrando-se inicialmente um fator espectral T_{2o} de $T_2^* T_2$, isto é, $T_2^* T_2 = T_{2o}^* T_{2o}$ e depois fazendo-se $T_{2i} = T_2 T_{2o}^{-1}$. Assim:

$$\begin{aligned}
T_2^* T_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{a_1(-s+b_1)}{(-s+c_1)} & \frac{a_2(-s+b_2)}{(-s+c_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{a_1(s+b_1)}{(s+c_1)} \\ \frac{a_2(s+b_2)}{(s+c_2)} \end{bmatrix} \frac{k_{abs} I_{Sdref}}{(-\tau s + 1)} \frac{k_{abs} I_{Sdref}}{(\tau s + 1)} = \\
&= \frac{(k_{abs} I_{Sdref})^2}{(\tau s + 1)(-\tau s + 1)} \left[\frac{a_1^2(s+b_1)(s-b_1)}{(s+c_1)(s-c_1)} + \frac{a_2^2(s+b_2)(s-b_2)}{(s+c_2)(s-c_2)} \right] = \\
&= \frac{(k_{abs} I_{Sdref})^2 [a_1^2(s^2 - b_1^2)(s^2 - c_2^2) + a_2^2(s^2 - b_2^2)(s^2 - c_1^2)]}{(\tau s + 1)(-\tau s + 1)(s+c_1)(s-c_1)(s+c_2)(s-c_2)} = \\
&= \frac{(k_{abs} I_{Sdref})^2 [(a_1^2 + a_2^2) s^4 - (a_1^2(b_1^2 + c_2^2) + a_2^2(b_2^2 + c_1^2)) s^2 + b_1^2 c_2^2 + b_2^2 c_1^2]}{(\tau s + 1)(-\tau s + 1)(s+c_1)(s-c_1)(s+c_2)(s-c_2)}, \tag{5.23}
\end{aligned}$$

e, portanto:

$$T_{2o} = \frac{k_{abs} I_{Sdref} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} (s + \rho_1)(s + \rho_2)}{(\tau s + 1)(s + c_1)(s + c_2)}, \tag{5.24}$$

onde $-\rho_1$ e $-\rho_2$ são as raízes estáveis da equação

$$(a_1^2 + a_2^2) s^4 - (a_1^2(b_1^2 + c_2^2) + a_2^2(b_2^2 + c_1^2)) s^2 + b_1^2 c_2^2 + b_2^2 c_1^2 = 0.$$

Uma vez calculado T_{2o} , procede-se ao cálculo de T_{2i} que é dado por:

$$\begin{aligned} T_{2i} &= T_2 T_{2o}^{-1} = \frac{k_{abs} I_{Sdref}}{(\tau s + 1)} \begin{bmatrix} -\frac{a_1(s+b_1)}{(s+c_1)} \\ \frac{a_2(s+b_2)}{(s+c_2)} \end{bmatrix} \frac{(\tau s + 1)(s+c_1)(s+c_2)}{k_{abs} I_{Sdref} \sqrt{a_1^2 + a_2^2}(s+\rho_1)(s+\rho_2)} = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{a_1(s+b_1)(s+c_2)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}(s+\rho_1)(s+\rho_2)} \\ \frac{a_2(s+b_2)(s+c_1)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}(s+\rho_1)(s+\rho_2)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

O próximo passo é o cálculo de R_2 , que é dado por:

$$\begin{aligned} R_2(s) &= (I - T_{2i} T_{2i}^*) T_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{a_1(s+b_1)(s+c_2)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}(s+\rho_1)(s+\rho_2)} \\ \frac{a_2(s+b_2)(s+c_1)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}(s+\rho_1)(s+\rho_2)} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} -\frac{a_1(s-b_1)(s-c_2)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}(s-\rho_1)(s-\rho_2)} & \frac{a_2(s-b_2)(s-c_1)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}(s-\rho_1)(s-\rho_2)} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a_2(s+b_2)}{(s+c_2)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{a_1^2(s+b_1)(s-b_1)(s+c_2)(s-c_2)}{(a_1^2 + a_2^2)(s+\rho_1)(s+\rho_2)(s-\rho_1)(s-\rho_2)} & \frac{a_1 a_2(s+b_1)(s-b_2)(s+c_2)(s-c_1)}{(a_1^2 + a_2^2)(s+\rho_1)(s+\rho_2)(s-\rho_1)(s-\rho_2)} \\ \frac{a_1 a_2(s+b_2)(s-b_1)(s+c_1)(s-c_2)}{(a_1^2 + a_2^2)(s+\rho_1)(s+\rho_2)(s-\rho_1)(s-\rho_2)} & 1 - \frac{a_2^2(s+b_2)(s-b_2)(s+c_1)(s-c_1)}{(a_1^2 + a_2^2)(s+\rho_1)(s+\rho_2)(s-\rho_1)(s-\rho_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a_2(s+b_2)}{(s+c_2)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a_1 a_2^2(s+b_1)(s+b_2)(s-b_2)(s-c_1)}{(a_1^2 + a_2^2)(s+\rho_1)(s+\rho_2)(s-\rho_1)(s-\rho_2)} \\ \frac{a_2(s+b_2)}{(s+c_2)} - \frac{a_2^3(s+b_2)^2(s-b_2)(s+c_1)(s-c_1)}{(a_1^2 + a_2^2)(s+c_2)(s+\rho_1)(s+\rho_2)(s-\rho_1)(s-\rho_2)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a_1 a_2^2(s+b_1)(s+b_2)(s-b_2)(s-c_1)}{(a_1^2 + a_2^2)(s+\rho_1)(s+\rho_2)(s-\rho_1)(s-\rho_2)} \\ \frac{a_2(a_1^2 + a_2^2)(s+b_2)(s+\rho_1)(s+\rho_2)(s-\rho_1)(s-\rho_2) - a_2^3(s+b_2)^2(s-b_2)(s+c_1)(s-c_1)}{(a_1^2 + a_2^2)(s+c_2)(s+\rho_1)(s+\rho_2)(s-\rho_1)(s-\rho_2)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Assim sendo, o problema a ser resolvido será:

$$\inf_{X(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \left\| \begin{bmatrix} \bar{R}_1 - \bar{X} \\ R_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty, \quad (5.27)$$

lembrando, mais uma vez, que $\bar{R}_1(s) = T_{2i}^*(s) T_1(s)$, $\bar{X}(s) = T_{2o}(s) Q(s)$ e $R_2(s) = (I - T_{2i}(s) T_{2i}^*(s)) T_1(s)$.

De acordo com o Algoritmo 1 na Subseção 3.8.2, o próximo passo é calcular o valor de $\gamma_0 = \|R_2\|_\infty$ e, em seguida, através do processo de iteração descrito nesse mesmo algoritmo, encontrar o valor γ^* que "minimiza" o custo 5.27. Com o valor de γ^* encontrado, obtém-se então o fator espectral Z_o , extraído de $\gamma^{*2} I - R_2^* R_2$, isto é, $\gamma^{*2} I - R_2^* R_2 = Z_o^* Z_o$ e resolve-se o problema de Nehari de 1-bloco associado, encontrando-se \hat{X} . O problema original é encontrar \bar{X} , que é calculado pela seguinte expressão:

$$\bar{X} = \left(\hat{X} + \bar{R}_{1-} \right) Z_o,$$

deduzida a partir das definições de funções do Algoritmo 1 na Subseção 3.8.2, Desta forma:

$$\bar{Q} = T_{2o}^{-1} \bar{X}.$$

Se $Q(s)$ for imprópria, podem ser introduzidos fatores no seu denominador para torná-la uma função própria $Q_p(s)$ como se fez no caso de 1-bloco. O controlador é então calculado pela expressão:

$$K(s) = -\frac{(Y(s) - M(s)Q_p(s))}{(X(s) - N(s)Q_p(s))}.$$

Finalmente, tem-se que o controlador obtido é discretizado, através da regra bilinear de Tustin, para que possa ser implementado no algoritmo de controle. No Apêndice B, tem-se um exemplo de algoritmo para se calcular controladores a partir do problema \mathcal{H}_∞ de 2-blocos, utilizando-se o MATLAB.

5.4 RESULTADOS EXPERIMENTAIS OBTIDOS A PARTIR DOS CONTROLADORES \mathcal{H}_∞ DE 2-BLOCOS

Os controladores projetados com os pesos $W_1(s)$ e $W_2(s)$, da maneira como foram definidos nas Equações, (5.16) e (5.18) e considerando $W_1(s)$ com os valores experimentais determinados na Equação (5.17), levam a dois tipos de resultados: ou o teorema 11 não é satisfeito quando $W_2(s)$ dá ênfase às baixas frequências ou, quando o teorema é satisfeito, ao se diminuir a ênfase de $W_2(s)$ nas baixas frequências, o rastreamento fica seriamente comprometido. Para se chegar a essa conclusão foram realizados diversos projetos e testes com estes pesos sem que fosse obtido um desempenho satisfatório do sistema, a não ser que a Equação (5.14) e/ou o teorema 11 fossem violados. Para contornar essa situação, o peso $W_1(s)$ foi modificado a fim de se dar menos ênfase nas baixas frequências, deixando de competir com $W_2(s)$ nessa faixa de frequência. Assim, com uma nova definição de $W_1(s)$, isto é,

$$W_1(s) = \frac{a_1(s + b_1)}{(s + c_1)}, \quad a_1, b_1, c_1 > 0 \text{ e } b_1 < c_1, \quad (5.28)$$

é possível alcançar bom desempenho dinâmico e ao mesmo tempo respeitar o teorema 11, conforme será visto a seguir. Serão apresentados os resultados de implementações de três controladores, obtidos definindo-se $W_1(s)$ de acordo com a Equação (5.28). Cada controlador é projetado com combinações diferentes das funções de peso $W_1(s)$ e $W_2(s)$. Depois de analisados o desempenho, a estabilidade e o esforço de controle por meio das simulações, os controladores foram implementados no algoritmo em bancada, tendo sido aplicados degraus de várias amplitudes na referência de velocidade, tanto para o sistema considerado nominal como para variações de +50% e -50% em torno do valor nominal de T_R' . Deve-se lembrar mais uma vez que a medição de velocidade introduz ruído, fato que levou à escolha de I_{Sqref} para se avaliar as respostas do sistema real em termos de atenuação de ruído.

5.4.1 Resultados para $W_1(s) = \frac{(s+3)}{(s+10)}$ e $W_2(s) = \frac{0.1(s+0.1)}{(s+0.01)}$

Usando-se estes pesos, o seguinte controlador foi calculado:

$$K(s) = \frac{0.0252(s + 10.0000)(s + 5.7477)(s + 3.1318)(s + 0.0413)}{(s + 24.7184)(s + 3.1342)(s + 0.9012)(s + 0.0100)}.$$

Observe na Figura 5.16 que, neste caso, a diferença relativa entre as ênfases de $W_1(s)$ e $W_2(s)$ nas baixas frequências é pequena, se comparada com as Figuras 5.21 e 5.26. Por isso, conforme era de se esperar, o rastreamento apresenta um comportamento deteriorado no sentido de que há um elevado erro de regime permanente, conforme mostra a Figura 5.17 (coluna da direita). O valor do erro de regime permanente médio é igual a 7.6636%, calculado através de simulação. Note ainda que os tempos médios de subida e de acomodação valem respectivamente 27.24s e 67.03s, e foram determinados por meio de simulação.. As diferenças percentuais entre a curva nominal e a obtida perturbando-se T_R' em +50% alcançam valores máximos de 13%, 15% e 19%, conforme mostrado na Figura 5.18. Perturbando-se T_R' em -50%, tem-se que, de acordo com a Figura 5.19 essas diferenças atingem até -20%, -25% e (9% e -30%). A Figura 5.20 apresenta os gráficos de ruído percentual do sistema real para as correntes de referência representadas na Figura 5.17 (coluna da esquerda). Observa-se que os níveis de ruído aumentam com a velocidade ficando dentro das faixas (-1.5% a 2%), (-2% a 4%) e (-2% a 6%). Comparando-se os gráficos das Figuras 5.4 e 5.20 vê-se que houve até uma piora no que se refere ao

ruído de $i_{S_{qref}}$. Isto se deve ao fato de se estar considerando no peso $W_1(s)$ frequências muito baixas, quando comparadas com as do ruído de medição.

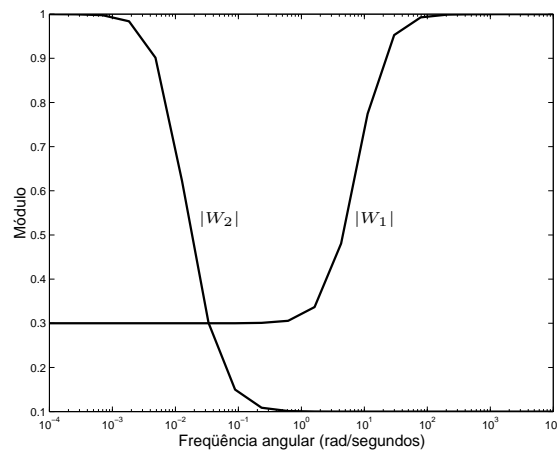


Figura 5.16: Curvas de módulo das funções de peso para $W_1(s) = \frac{(s+3)}{(s+10)}$ e $W_2(s) = \frac{0.1(s+0.1)}{(s+0.01)}$.

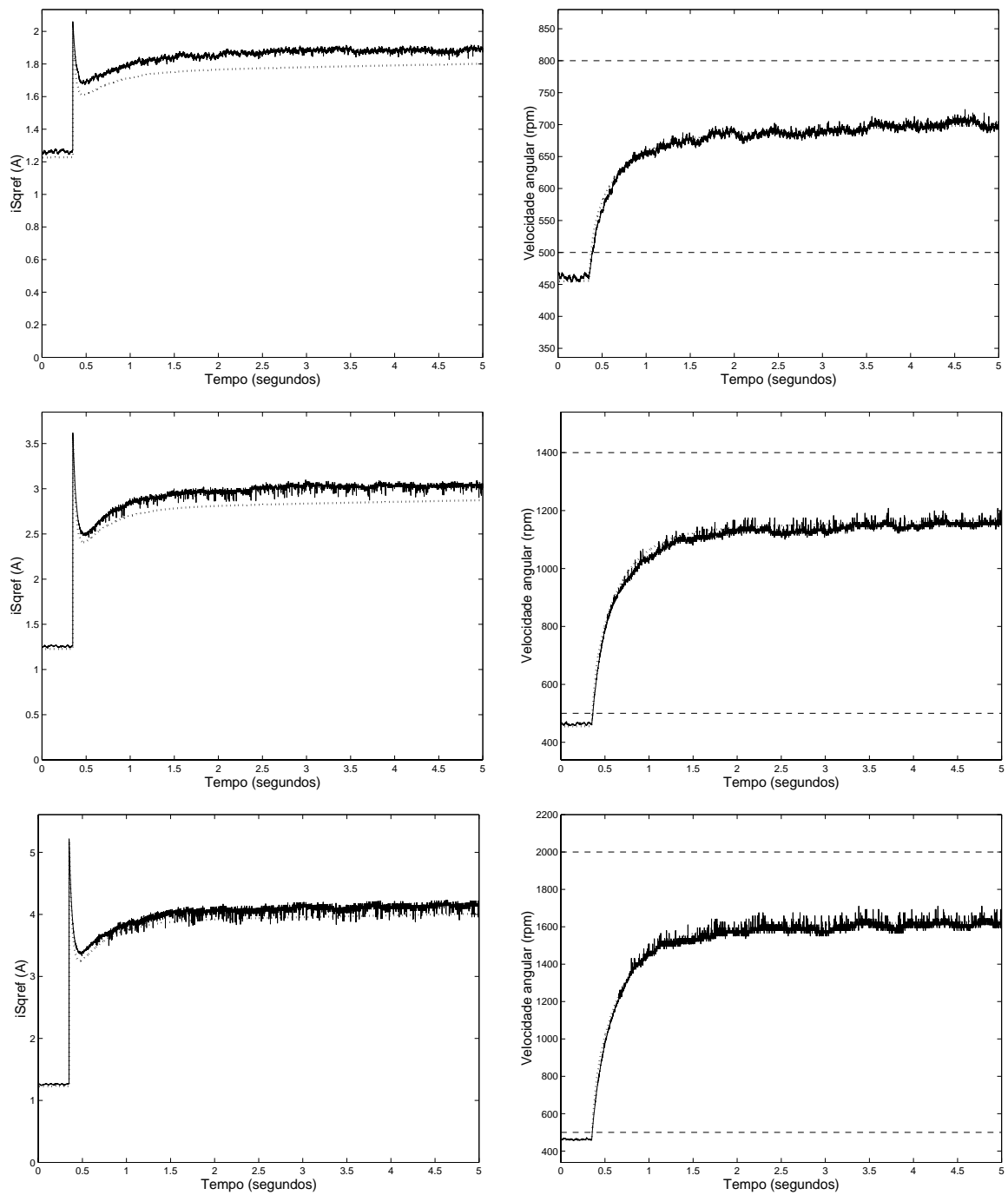


Figura 5.17: Respostas em malha fechada do sistema real (linha contínua) e do modelo (linha pontilhada) em três faixas de operação do motor, usando um controlador obtido a partir do problema de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.16. Coluna da esquerda: Tempo(segundos) \times i_{Sqref} (A). Coluna da direita: Tempo(segundos) \times velocidade angular (rpm).

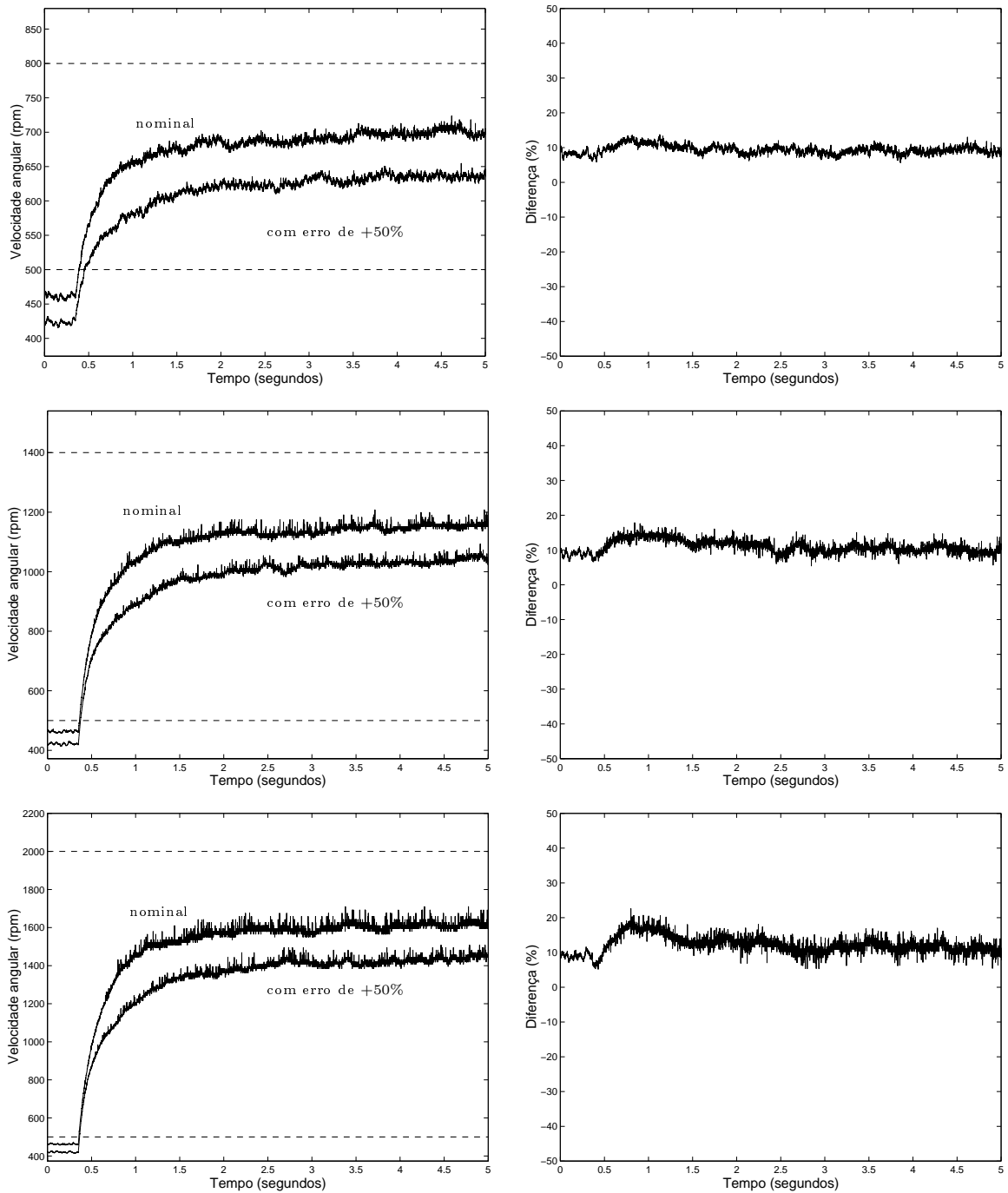


Figura 5.18: Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.16. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de +50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.

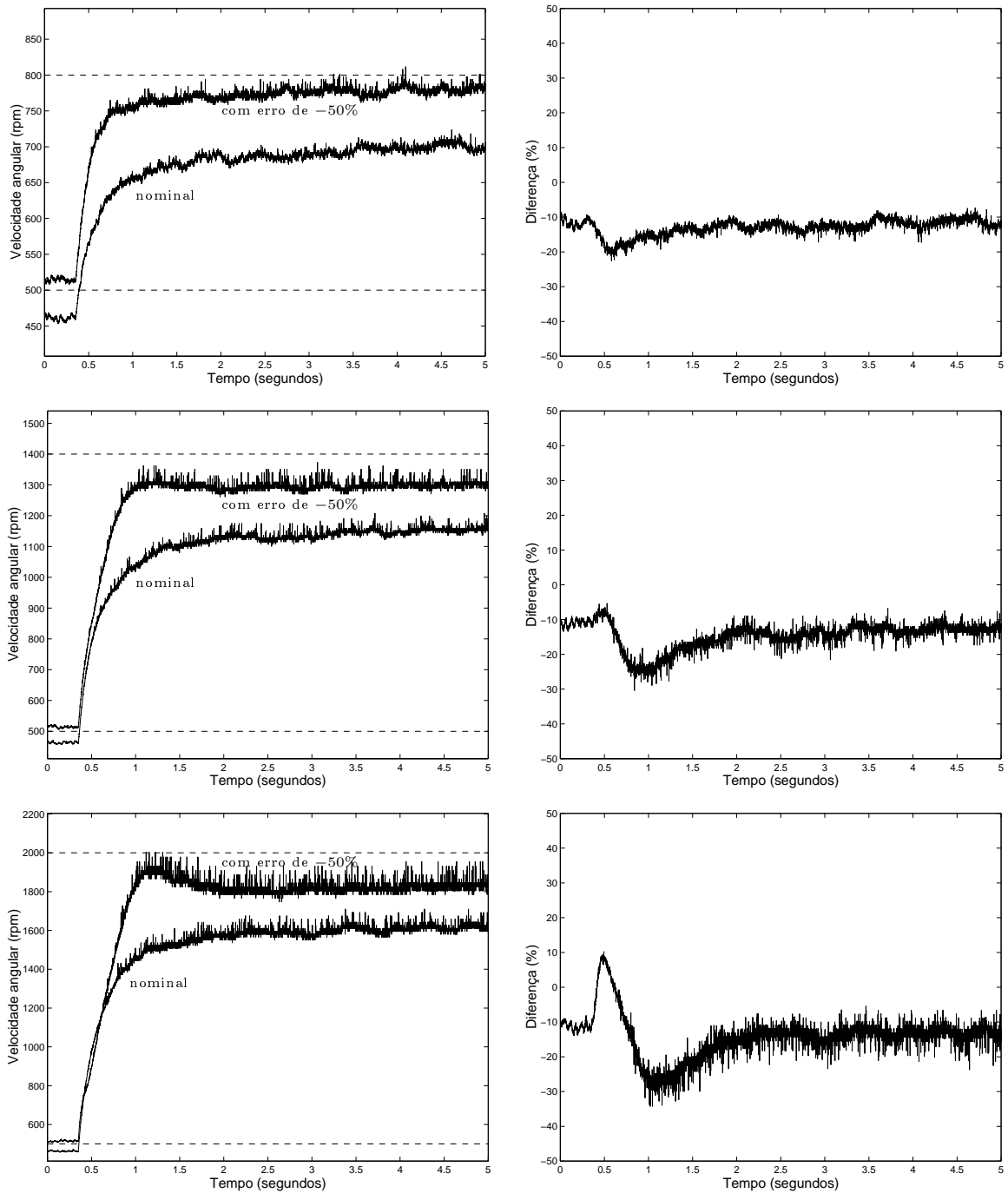


Figura 5.19: Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.16. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de -50% . Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.

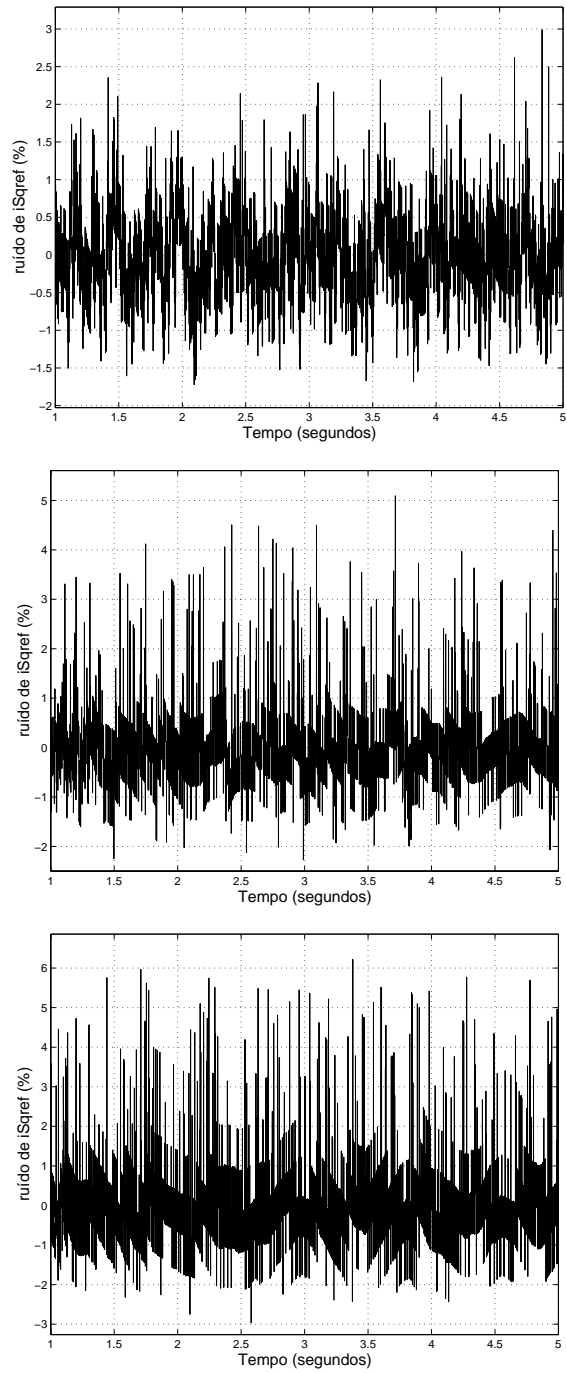


Figura 5.20: Gráficos de ruído percentual das curvas de i_{Sqref} do sistema real, extraídos da coluna da esquerda da Figura 5.17.

5.4.2 Resultados para $W_1(s) = \frac{(s+3)}{(s+10)}$ e $W_2(s) = \frac{0.1(s+1)}{(s+0.01)}$

Com estes pesos, obteve-se o seguinte controlador:

$$K(s) = \frac{0.0354(s + 10.0000)(s + 5.7477)}{(s + 23.2693)(s + 0.0087)}.$$

No intuito de melhorar o rastreamento da subseção anterior, mais ênfase é dada ao peso $W_2(s)$ nas baixas frequências, como se pode constatar através da comparação entre as Figuras 5.16 e 5.21. Como consequência tem-se que o erro de regime permanente foi reduzido drasticamente, tendo um valor médio de 0.6064%. Também há uma melhora significativa nos tempos de subida e de acomodação médios, que agora valem 0.47s e 1.42s, respectivamente, conforme pode ser observado na Figura 5.22 (coluna da direita). O sobre-sinal torna-se efetivo em degraus de maior amplitude, quando se erra o valor de T_R' para -50%, conforme pode ser visto na Figura 5.24 (coluna da esquerda). As diferenças percentuais entre a curva nominal e a perturbada alcançam valores máximos de 7%, 11% e 15% para T_R' com erro de +50%, na Figura 5.23 (coluna da direita) e para T_R' com erro de -50%, essas diferenças atingem até -9%, (11% e -17%) e (16% e -32%), conforme mostrado na Figura 5.24.(coluna da direita) A Figura 5.25 apresenta os gráficos de ruído percentual para a corrente de referência do sistema real, referentes à Figura 5.22 (coluna da esquerda). Observa-se que os níveis de ruído aumentam com a velocidade ficando dentro das faixas (-2% a 3%), (-3% a 6%) e (-4% a 10%). Note ainda que, como $W_2(s)$ não foi alterado, não foi possível obter uma melhora nos níveis de ruído.

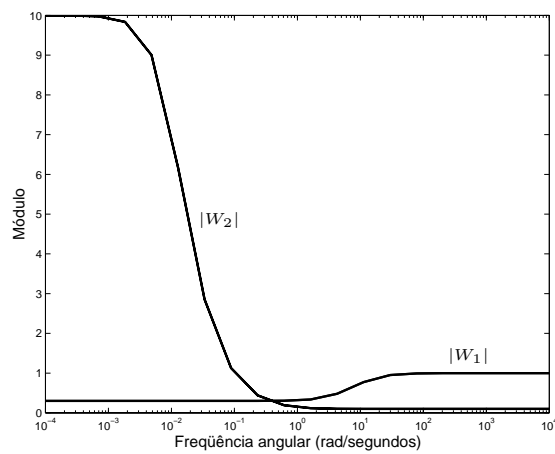


Figura 5.21: Curvas de módulo das funções de peso para $W_1(s) = \frac{(s+3)}{(s+10)}$ e $W_2(s) = \frac{0.1(s+1)}{(s+0.01)}$.

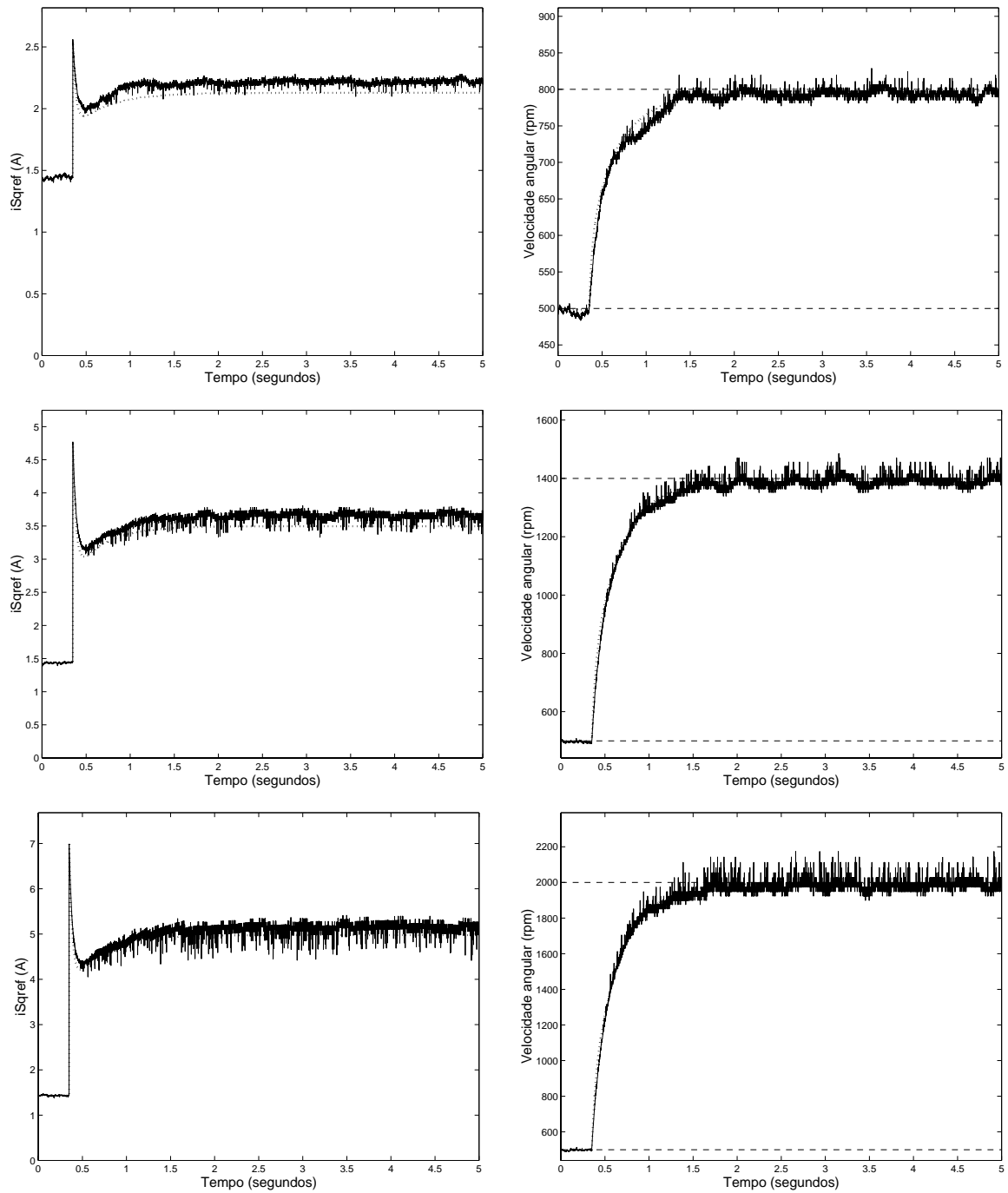


Figura 5.22: Respostas em malha fechada do sistema real (linha contínua) e do modelo (linha pontilhada) em três faixas de operação do motor, usando um controlador obtido a partir do problema de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.21. Coluna da esquerda: Tempo(segundos) \times i_{Sqref} (A). Coluna da direita: Tempo(segundos) \times velocidade angular (rpm).

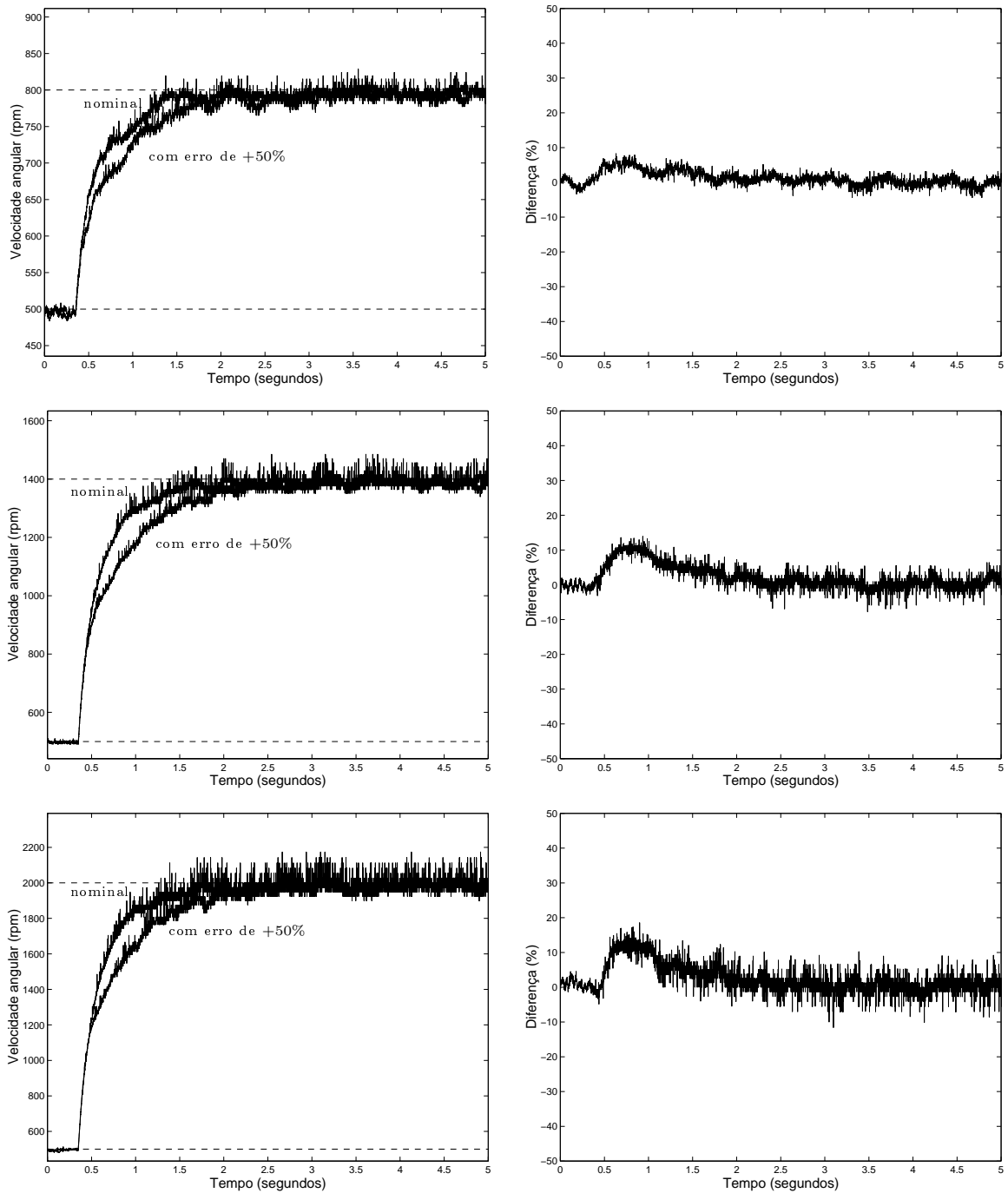


Figura 5.23: Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.21. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de +50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.

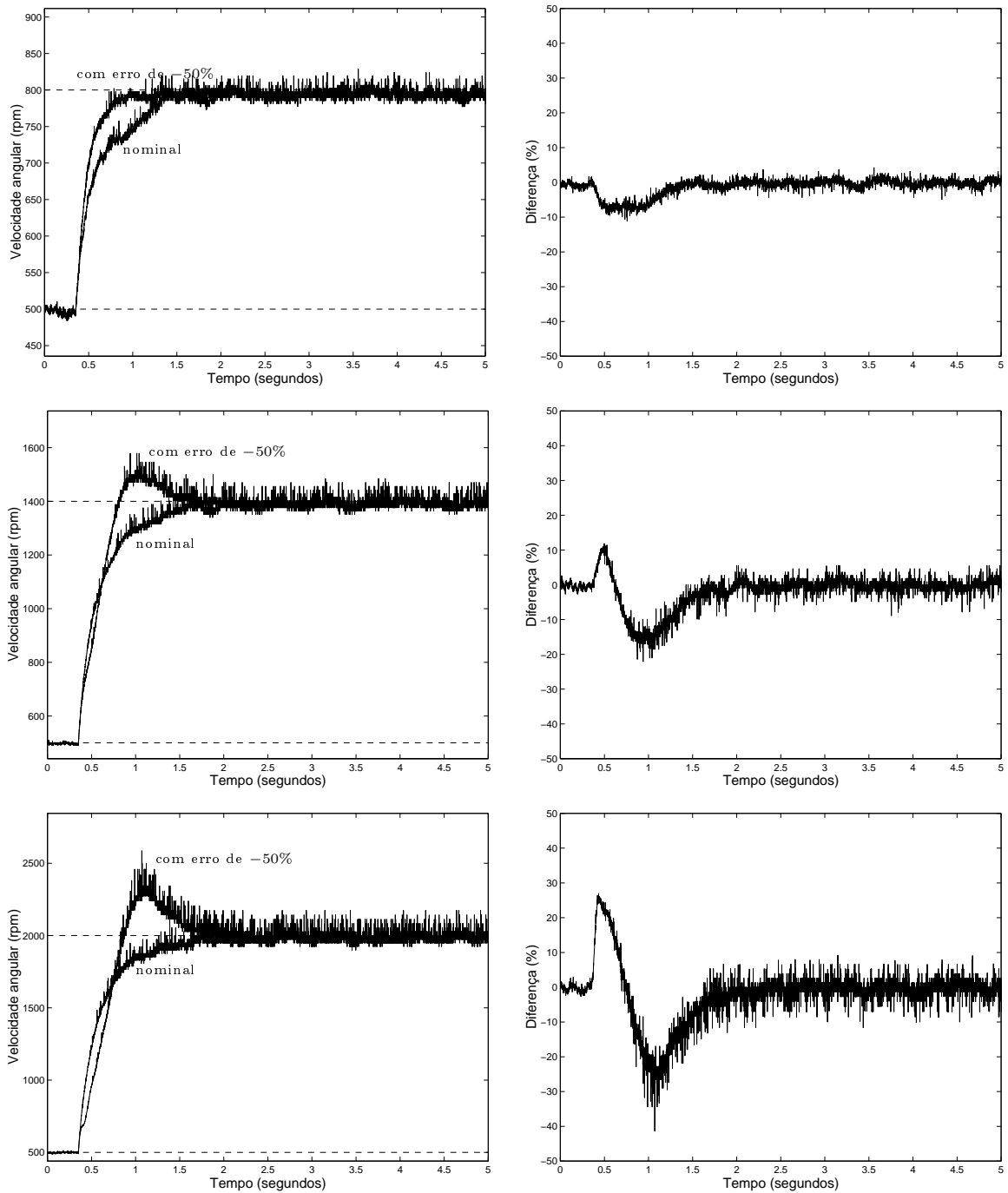


Figura 5.24: Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.21. coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de -50% . Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.

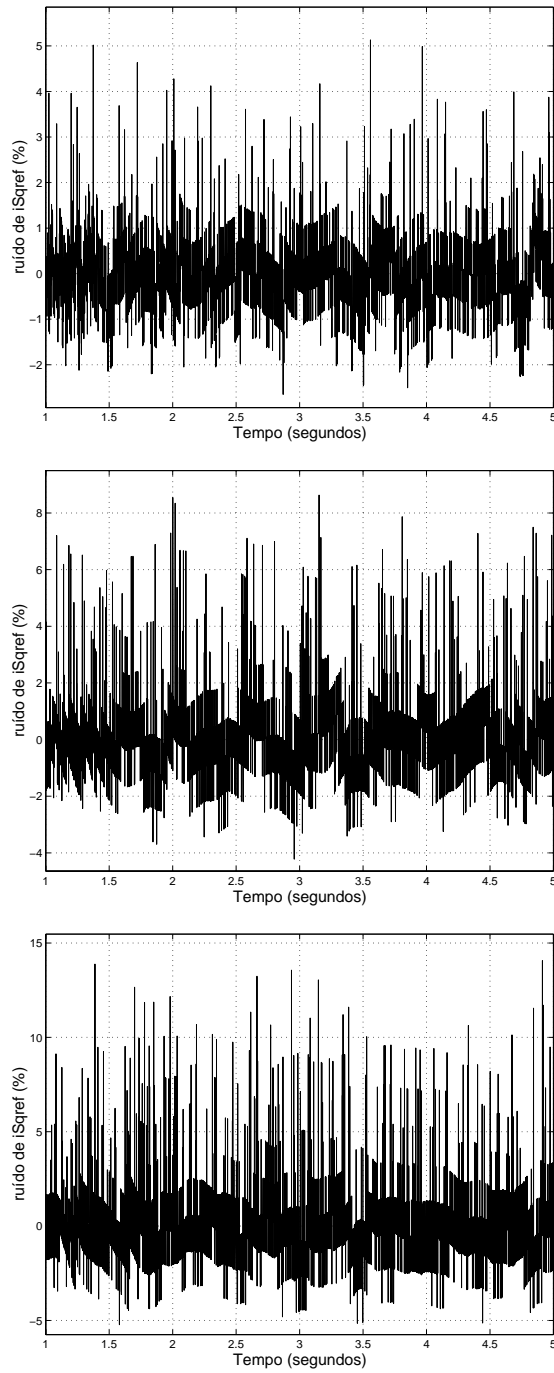


Figura 5.25: Gráficos de ruído percentual das curvas de i_{Sqref} do sistema real, extraídos da coluna da esquerda da Figura 5.22.

5.4.3 Resultados para $W_1(s) = \frac{(s+30)}{(s+100)}$ e $W_2(s) = \frac{0.1(s+1)}{(s+0.01)}$

A partir destes pesos calculou-se o seguinte controlador:

$$K(s) = \frac{0.0345(s + 100.0000)(s + 5.7477)(s + 0.3229)}{(s + 49.2995)(s + 0.6664)(s + 0.0072)}.$$

Neste caso, comparando-se as Figuras 5.21 e 5.26 observa-se um deslocamento para a direita da curva do módulo de $W_1(s)$. Isto faz com que menos frequências baixas sejam penalizadas, o que favorece a redução dos tempos de subida e de acomodação, que são de 0.09s e 0.53s, respectivamente, conforme pode ser visto a partir da Figura 5.27 (coluna da direita). Porém, há um pequeno sobre-sinal. O erro de regime permanente médio, neste caso, é igual a 0.9107%. As Figuras 5.28 e 5.29 mostram a variação que ocorre na resposta ao degrau do sistema real quando T_R' é perturbado em +50% e -50%, respectivamente. Na Figura 5.28 observa-se que não há diferença significativa no tempo de subida e a diferença no tempo de acomodação é pequena, além do desaparecimento do sobre-sinal e as diferenças percentuais entre a curva nominal e a perturbada alcançam valores de 5%, (-5% e 8%) e (-14% e 15%). Nota-se ainda, na Figura 5.29, que há um aumento nos tempos de subida e de acomodação assim como no sobre-sinal, e as diferenças percentuais entre a curva nominal e a perturbada alcançam valores máximos de -5%, (28% e -28%) e (30% e -34%). A Figura 5.30 apresenta os gráficos de ruído percentual do sistema real para a coluna da esquerda da Figura 5.27. Observa-se que os níveis de ruído aumentam com a velocidade ficando dentro das faixas (-4% a 6%), (-5% a 8%) e (-5% a 10%). Comparando-se as Figuras 5.12 e 5.30, vê-se que houve uma redução significativa nos níveis de ruído do sistema.

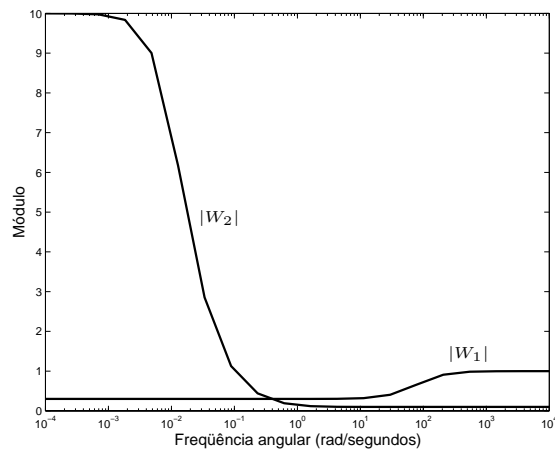


Figura 5.26: Curvas de módulo das funções de peso para $W_1(s) = \frac{(s+30)}{(s+100)}$ e $W_2(s) = \frac{0.1(s+1)}{(s+0.01)}$.

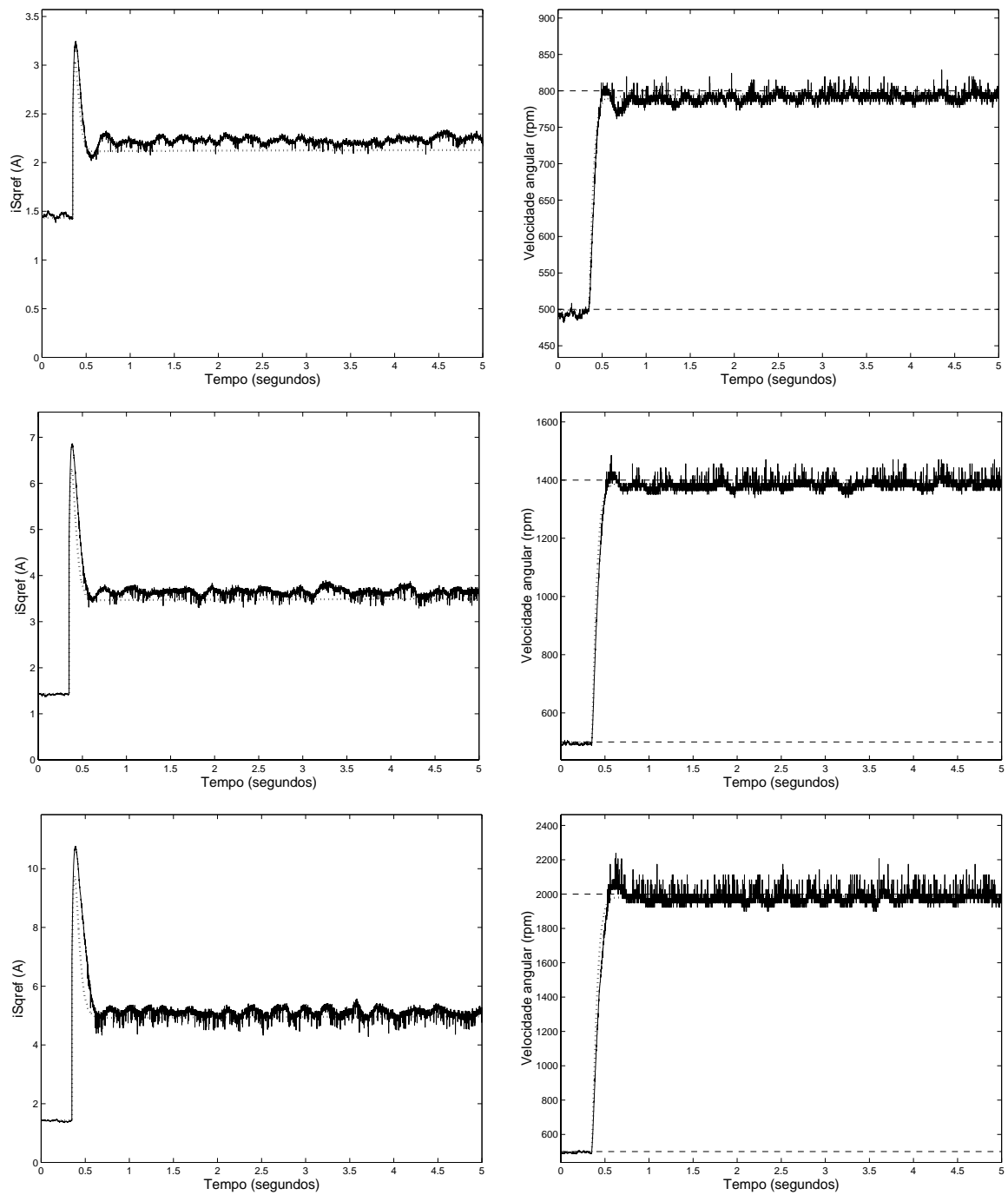


Figura 5.27: Respostas em malha fechada do sistema real (linha contínua) e do modelo (linha pontilhada) em três faixas de operação do motor, usando um controlador obtido a partir do problema de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.26. Coluna da esquerda: Tempo(segundos) \times i_{Sqref} (A). Coluna da direita: Tempo(segundos) \times velocidade angular (rpm).

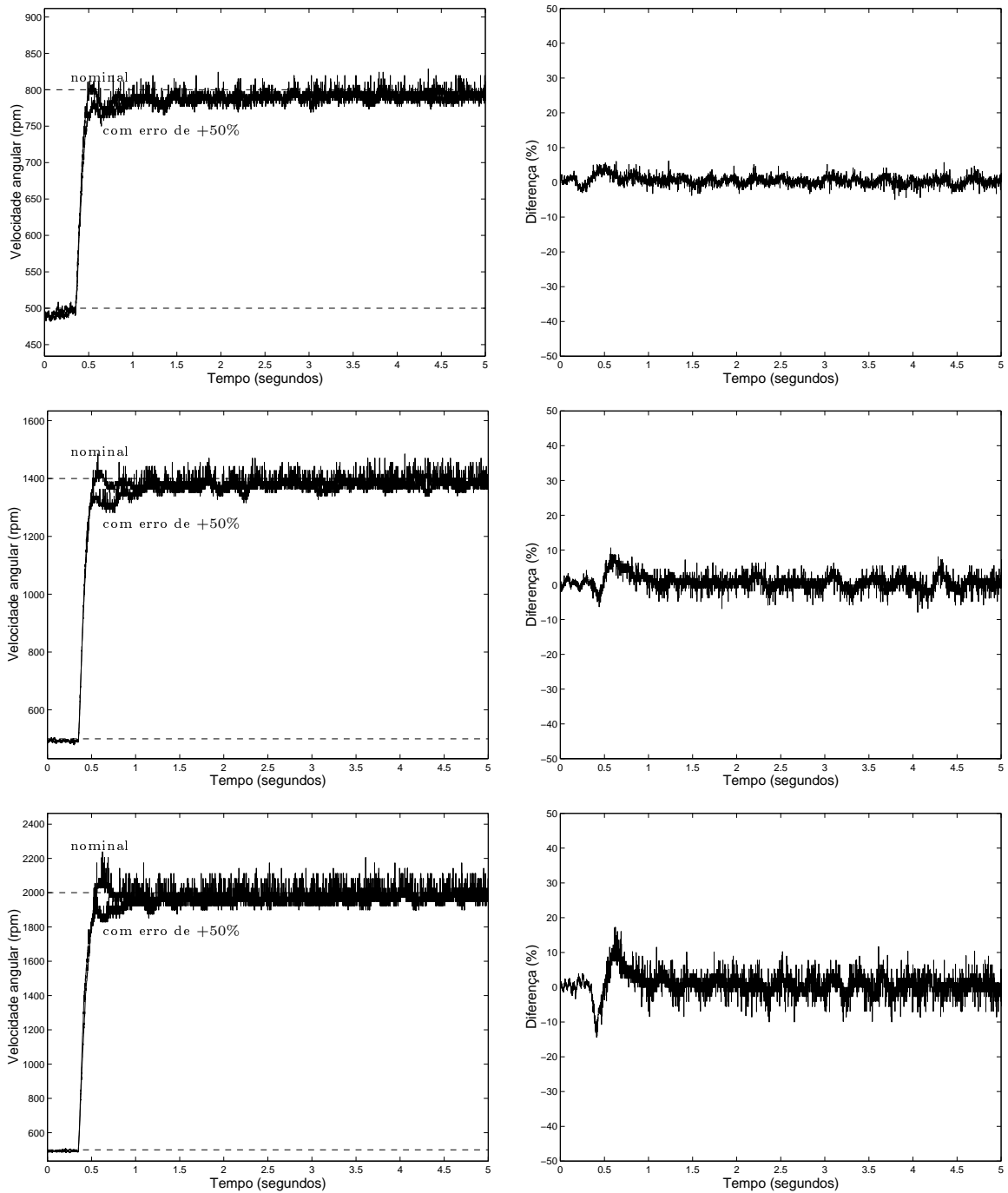


Figura 5.28: Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.26. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de +50%. Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro.

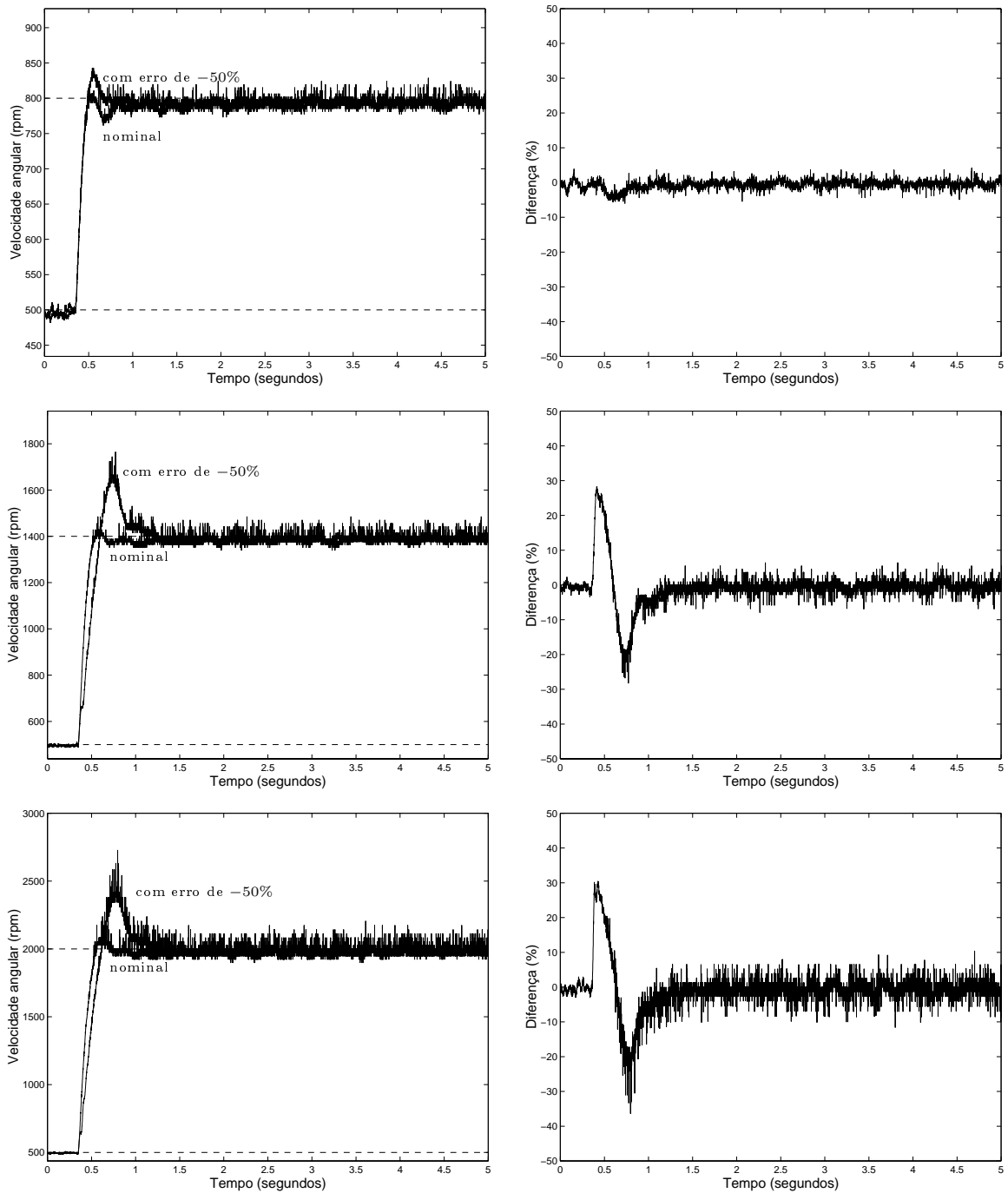


Figura 5.29: Resultados experimentais para o controlador \mathcal{H}_∞ de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.26. Coluna da esquerda: respostas em malha fechada do sistema real para T_R' nominal e com erro de -50% . Coluna da direita: diferença percentual entre a respectiva curva nominal e com erro. Usando um controlador obtido a partir do problema de 2-blocos, com os pesos da Figura 5.26.

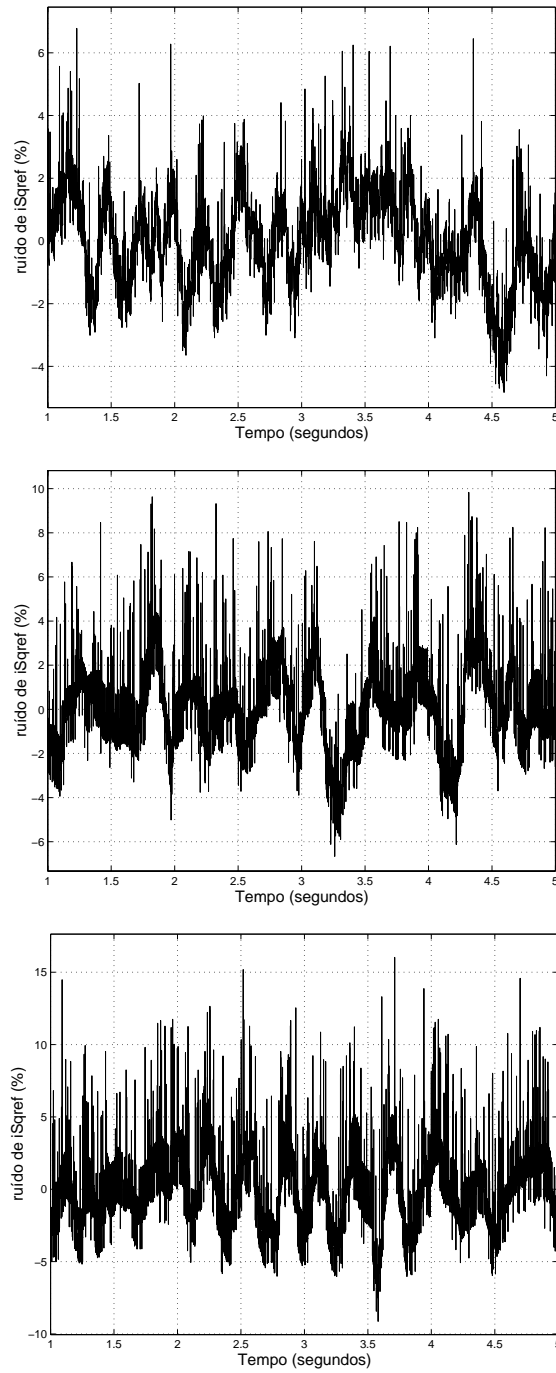


Figura 5.30: Gráficos de ruído percentual das curvas de i_{Sqref} do sistema real, extraídos da coluna da esquerda da Figura 5.27.

5.5 CONCLUSÕES

Os sinais de teste utilizados neste trabalho são do tipo degrau, que não é de quadrado integrável e a teoria \mathcal{H}_∞ não leva em conta sinais desse tipo. Porém, lembrando-se que se um degrau negativo de mesma amplitude, aplicado em um tempo seguinte à aplicação do degrau inicial, é somado ao primeiro, então o sinal resultante passa a ser de quadrado integrável³. Portanto é razoável que se tenha usado sinais do tipo degrau para a realização dos testes.

Pode-se afirmar que a única melhora introduzida pelos controladores advindos do problema de 2-blocos é com relação à atenuação de ruído. Note que para sistemas com respostas lentas, é mais vantajoso usar-se controladores obtidos do problema de 1-bloco (PI), enquanto que para desempenhos rápidos, controladores obtidos do problema de 2-blocos se mostram mais adequados, por reduzirem sobremaneira os níveis de ruído.

De modo geral, o PI resultante do problema de 1-bloco, que é o controlador utilizado largamente na prática nesse caso, se mostrou vantajoso do ponto de vista de maximização do desempenho, desde que seja ajustado conforme o princípio do modelo interno. Além disso, existe a vantagem de ser muito simples o projeto desse tipo de controlador.

³Este aliás, é o comportamento desejado para o perfil de velocidade de elevadores.

Capítulo 6

CONCLUSÃO

O que se pretende neste capítulo final é apresentar uma idéia geral do trabalho assim como as dificuldades que foram encontradas e apontar alguns temas que devem ser explorados para a sua continuação e o aperfeiçoamento do sistema que já existe e está funcionando em bancada.

Uma grande contribuição do trabalho é a constatação de que, do ponto de vista de maximização de desempenho, comprovou-se pela teoria \mathcal{H}_∞ que o PI ajustado de acordo com o princípio do modelo interno é a melhor opção a ser implementada. Controladores PI são de fato utilizados na prática; porém o ajuste de seus parâmetros não é necessariamente realizado de acordo com o proposto neste trabalho. Um outro aspecto a ser considerado é o fato de que o controlador robusto obtido a partir do problema de 2-blocos não levou a um desempenho robusto. Isto se deve à contradição entre a teoria apresentada no Capítulo 3, e os pesos obtidos na prática, no Capítulo 5. Como consequência, tem-se que os objetivos de projeto tornaram-se conflitantes no caso de 2-blocos e especificamente neste caso, competindo justamente nas mesmas faixas de frequência. Com isso o rastreamento fica seriamente comprometido, o que levou ao relaxamento de um critério de robustez que pode ter sido responsável pela deterioração desta última.

O modelo do sistema adotado no trabalho se mostrou satisfatório, embora haja uma certa variação no ganho em malha aberta para cada identificação que se faça o que explica diferenças entre o sinal de controle simulado e o real em algumas figuras do Capítulo 5.

Como propostas para a continuação e aperfeiçoamento deste trabalho podem-se

apontar:

- pesquisa da influência do inversor chaveado no sistema, considerando atrasos e ruído, e sua possível modelagem matemática para inclusão no modelo existente;
- investigação mais detalhada sobre a variação do ganho em malha aberta;
- utilização de outros sinais de referência diferentes do degrau;
- trabalhar com torque de carga e introduzir perturbações externas;
- troca de algumas partes do "hardware" como a placa de aquisição de dados por outra mais moderna e o sistema de medição de velocidade por um que introduza menos ruído e permita inversão no sentido de rotação, assim como as mudanças no "software" para se adequar ao novo equipamento.

Referências Bibliográficas

- [1] Doyle, J. C., Stein, G., “Multivariable feedback design: concepts for a classical modern synthesis,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-26, pp. 4–16, 1981.
- [2] Zames, G., “Feedback an optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-26, pp. 301–320, 1981.
- [3] Zames, G., Francis, B. A., “Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 28, pp. 585–601, 1983.
- [4] Attaianese, C., Tomasso, G., Perfetto, A., “Field oriented control of induction motor by means of a \mathcal{H}_∞ controller,” in *Proceedings of the 8th European Conference on Power Electronics and Applications*, Bled, Slovenia, 1999.
- [5] Makouf, A., Benbouzid, M. E. H., Diallo, D., et al., “Induction motor robust control: An \mathcal{H}_∞ control approach with field orientation and input-output linearizing,” in *The 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Denver, Colorado, 2001.
- [6] Chiaverini, S., Figalli, G., Fusco, G., “ \mathcal{H}_∞ design of a robust speed controller for induction motor,” in *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications*, Kohala Coast-Island of Hawai’i, Hawai’i, 1999.
- [7] Cauët, S., Rambault, L., Bachelier, O., et al., “Robust control and stability analysis of linearized system with parameter variation: application to induction motors,” in *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida, 2001.

- [8] Ortega, R., Espinosa-Pérez, G., “Torque regulation of induction motors,” *Automatica*, vol. 29, NO. 3, pp. 621–633, 1993.
- [9] Espinosa-Pérez, G., Ortega, R., “An output feedback globally stable controller for induction motors,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, NO. 1, pp. 138–143, 1995.
- [10] Ortega, R., Nicklasson, P. J., Espinosa-Pérez, G., “On speed control of induction motors,” in *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 3521–3525, Seattle, Washington, June/1995.
- [11] Ortega, R., Taoutaou, D., “On discrete-time control of current-fed induction motors,” *Systems and Control Letters*, vol. 27, 1996.
- [12] De Wit, P. A. S., Ortega, R., Mareels, I., “Indirect field-oriented control of induction motors is robustly globally stable,” *Automatica*, vol. 32, NO. 10, pp. 1393–1402, 1996.
- [13] Kim, K., Ortega, R., Charara, A., et al., “Theoretical and experimental comparison of two nonlinear controllers for current-fed induction motors,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 5, NO. 3, pp. 338–348, 1997.
- [14] Marino, R., Peresada, S., Tomei, P., “Output feedback control of current-fed induction motors with unknown rotor resistance,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 4, NO. 4, pp. 336–347, 1996.
- [15] Marino, R., Peresada, S., Tomei, P., “Global adaptive output feedback control of induction motors with uncertain rotor resistance,” in *Proceedings of the 35th Conference on decision and Control*, pp. 4701–4705, Kobe, Japan, December/1996.
- [16] Chiasson, J., “A new approach to dynamic feedback linearization control of an induction motor,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, NO. 3, pp. 391–397, 1998.
- [17] Furtunato, A. F. A., Salazar, A. O., Araújo, A. D., “Implementação de um controlador de velocidade usando modos deslizantes suaves para um motor de indução trifásico,” in *COBEP’97*, 1997, pp. 423–428.

- [18] Chapman, S. J., *Electric Machinery Fundamentals*, 2nd edition, New York, McGraw-Hill, 1991.
- [19] Leonhard, W., *Control of Electrical Drives*, 2nd edition, Berlin, Springer-Verlag, 1996.
- [20] Slemon, G. R., “Modelling of induction machines for electric drives,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 25, NO. 6, pp. 1126–1131, 1989.
- [21] Mohan, N., “Understanding vector control of induction motor drives based on physical principles,” Department of ECE, University of Minnesota, 1998.
- [22] Zhou, K., Doyle, J. C., Glover, K., *Robust and Optimal Control*, 1st edition, Upper Saddle River, New Jersey, Prentice-Hall, 1996.
- [23] Glover, K., “All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their l_∞ -error bounds,” *International Journal of Control*, vol. 39, pp. 1115–1193, 1984.
- [24] Vidyasagar, M., *Control System Synthesis*, 1st edition, Cambridge, MA, MIT Press, 1985.
- [25] Nett, C. N., Jacobson, C. A., Balas, M. J., “A connection between state-space and doubly coprime fractional representations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-29, pp. 831–832, 1984.
- [26] Moore, B. C., “Principal component analysis in linear systems: controllability, observability and model reduction,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, pp. 17–31, 1981.
- [27] Garcia, J. S., Basilio, J. C., “Computation of reduced-order models of multivariable systems by balanced truncation,” *International Journal of Systems Science*, vol. 33, pp. 847–854, 2002.
- [28] Basilio, J. C., “Notas de aula de controle robusto H_∞ ,” COPPE-UFRJ, 1999.
- [29] Francis, B. A., “A course in H_∞ control theory,” in *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Berlin, 1987, vol. 88, Springer-Verlag.

- [30] Doyle, J. C., “Advances in multivariable control,” in *ONR/Honeywell Workshop*, Minneapolis, MN, 1984.
- [31] Taurus Eletrônica, “Manual de operação da placa de aquisição de dados versão 2.1,” 1987.
- [32] Rolim, L. G. B., Suemitsu, W. I., Stephan, R. M., et al., “An experimental setup for the study of field-oriented control of ac machines,” in *XIII Congresso Brasileiro de Automática - CBA*, pp. 1008–1011, Florianópolis, SC, Setembro/2000.
- [33] Åström, K. J., Haglünd, T., *PID controllers: theory, design and tuning*, 2nd edition, Research Triangle Park, NC, Instrument Society of America, 1995.
- [34] Basilio, J. C., Silva Jr., J. A., Rolim, L. G. B., “ H_∞ optimal design of rotor flux oriented controlled induction motor drives,” in *IEEE International Symposium on Industrial Electronics (aceito para apresentação)*, Rio de Janeiro, 2003.
- [35] Rivera, D. E., Morari, M., Skogestad, S., “Internal model control. 4. PID controller design,” *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*, vol. 25, pp. 252–265, 1986.
- [36] Franklin, G. F., Powell, J. D., *Digital Control of Dynamic Systems*, 1st edition, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1980.
- [37] Doyle, J. C., Francis, B. A., Tannenbaum, A. R., *Feedback Control Theory*, 1st edition, New York, Macmillan Publishing Company, 1992.
- [38] Ogata, K., *Engenharia de Controle Moderno*, 1^a edição, Rio de Janeiro, Prentice-Hall do Brasil, 1985.

Apêndice A

LISTAGEM DO PROGRAMA PRINCIPAL DE INTERFACE E CONTROLE

O texto a seguir apresenta um exemplo de algoritmo para o programa que realiza as funções de interface com o usuário e de controle do motor de indução, utilizando-se o compilador Pascal. O exemplo de controlador neste caso é um PI.

```
{%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
PROGRAMA PARA CONTROLE VETORIAL DE MOTORES DE INDUÇÃO  
Autores: Marcus Boechat  
         Brunno Collussi  
         José de Alencar Silva Júnior  
Atualizado em: 03/02/2003  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
ESTE PROGRAMA LE E SALVA VELOCIDADE DO ROTOR E ISQ DE REFERENCIA,  
EM TRANSITORIO, PARA LER E SALVAR OUTRAS GRANDEZAS  
CONSULTAR IDENT*. OBS.: A REFERENCIA EH WROTOR  
}  
  
program controle;  
uses crt,elopot,ada,Dos;  
{%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%}  
const  
t_chaves = 70;           { expresso em microssegundos }  
N_CONT   = 10;          { no. de vezes que o acion. das chaves eh feito  
                        entre ativacoes sucessivas do alg. de controle da vel. }  
  
h        = t_chaves * 1e-6;  
h_cont   = N_CONT * h;  
nul      = #0;  
Ibase    = 12.82;  
PI       = 3.141592654;
```

```

PI30    = PI/30;
Trl     = (0.0519-0.050*0.0519);      {Constante de Tempo Rotorica}
N       = 256;
Kp      = 0.04924315698479;
Ti      = 0.18073528459952;
Kcont1  = Kp*(h_cont/(2*Ti)+1);
Kcont2  = Kp*(h_cont/(2*Ti)-1);
Kteta   = N*h/(2*PI);
size_buffer_rot = 7900;
{%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%}
var
ii,jj,iii           :   integer;
cont,indice,Corr_Wrotor :   integer;
Kisd_a,Kisd_bc,Kisq_a,Kisq_bc :   longint;
Wrotor,Wref,W_mRl,K_WmRl,Kgrau,dteta :   real;
Isd_ref,Isq_ref,erro,erro_anterior,posicao :   real;
Kpu_a,Kpu_bc,nivel_inf,nivel_sup :   real;
chaves             :   byte;
aux                :   word;
fim,CLR           :   boolean;
opcao             :   char;
dados             :   text;
sitchave         :   string[13];
Arqv_Wrotor      :   string[12];
coss,senn        :   array[0..N-1] of integer;
Iref,Ilida       :   array[1..3] of integer;
CH_SUP,CH_INF    :   array[1..3] of byte;
buffer_corr      :   array[1..size_buffer_rot] of real;
buffer_rot       :   array[1..size_buffer_rot] of word;
{%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%}
procedure recalcula_isq; forward;
{%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%}
procedure atribuicoes;
begin
    cont           := 0;
    erro           := 100*PI30;
    Isq_ref        := 2.0;
    Isd_ref        := 2.80;
    erro_anterior  := 0;
    K_WmRl         := 1/(Isd_ref*Trl);
    Kpu_a          := 32767*(2/3)/Ibase;
    Kpu_bc         := 32767*(1/3)/Ibase;
    Kisd_a         := round(Kpu_a*Isd_ref);
    Kisd_bc        := round(Kpu_bc*Isd_ref);
    Kisq_a         := round(Kpu_a*Isq_ref);
    Kisq_bc        := round(Kpu_bc*Isq_ref);
    fim            := false;
    Kgrau          := 360/N;
    nivel_inf      := 500 * PI30;  { rad/s }

```

```

nivel_sup      := 800 * PI30;
Arqv_Wrotor    := 'teste.m';
Corr_Wrotor    := 1;          { 0 para nao corrigir, 1 para reta e 2 para polinomio }
Wref           := nivel_inf;  { rad/s }
W_mRl          := 200*PI30;   { Isq_ref*K_WmRl+Wrotor; }
dteta          := Kteta*W_mRl; { Kteta = N*h/(2*PI) }

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
procedure tabela_de_chaves;
begin
{ BANCADA NOVA: }
  CH_SUP[1]:=CH1;
  CH_SUP[2]:=CH3;
  CH_SUP[3]:=CH5;
  CH_INF[1]:=CH2;
  CH_INF[2]:=CH4;
  CH_INF[3]:=CH6;
end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
procedure tabela_de_cossenos;
var i : integer;
begin
  for i:=0 to N-1 do
    begin
      coss[i]:=round(32767*cos(2*PI*i/N));
      senn[i]:=round(32767*sin(2*PI*i/N));
    end;
end;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
procedure aciona_chaves; Interrupt;
var k,auxi : integer;
    a,b,c,d : real;
begin
{ leitura das correntes: }
  Ilida[1]:= 514-ADRead(1);
  Ilida[2]:= 507-ADRead(2);
  Ilida[3]:= 511-ADRead(3);
{ calculo da posicao, por integracao: }
  posicao:= posicao + dteta; { dteta = Kteta*W_mRl } { Kteta = N*h/(2*PI) }
  auxi:=round(posicao);
  if (auxi > N-1) then posicao:=posicao-N;
  indice:= round(posicao);
{ calculo das correntes de referencia: }
{ SEGUNDO LEONHARD }
  a:=(1.73205081*senn[indice]-coss[indice]);
  b:=(1.73205081*coss[indice]+senn[indice]);
  c:=(-1.73205081*senn[indice]-coss[indice]);
  d:=(-1.73205081*coss[indice]+senn[indice]);
  Iref[1]:=(Kisd_a*coss[indice]-Kisq_a*senn[indice]) div 2097152; { 2^32 / 2^11 }

```

```

Iref[2]:=round(Kisd_bc*a+Kisq_bc*b) div 2097152;          { 2^32 / 2^11 }
Iref[3]:=round(Kisd_bc*c+Kisq_bc*d) div 2097152;          { 2^32 / 2^11 }

chaves:=abre_todas;
port[chaves1a8]:=chaves;
for k:=1 to 3 do
if {muda} ( Iref[k] > Ilida[k] )
    then chaves:=chaves and CH_SUP[k]
    else chaves:=chaves and CH_INF[k];
port[chaves1a8]:=chaves;
cont:=cont+1;
    if (cont>=N_CONT) then
        begin
            cont:=0;
            recalcula_isq;
        end;
port[InterruptManager8259] := eoi;
end;
{%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%}
Procedure inicializa;
begin
    port[chaves1a8] := abre_todas;
    programa_modo_temporizador(nosinc);
    instala_rotina_interrupcao_aciona_chaves(@aciona_chaves);
    desabilita_interrupcao_aciona_chaves;
    port[TimCtl]:=Timer1Mode3; {configura temporizador para operacao continua}
    carrega_temporizador(t_chaves);
    CLR:=TRUE;
    ii:=1;
    iii:=1;
end;
{%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%}
procedure finaliza;
begin
    desabilita_interrupcao_aciona_chaves;
    restaura_vetor_interrupcao_aciona_chaves;
    port[chaves1a8] := abre_todas;
{PARA LEITURA DA VELOCIDADE}
    assign(dados,Arqv_Wrotor);
    rewrite(dados);
    for jj:=1 to size_buffer_rot do
        begin
            writeln(dados,buffer_rot[jj],',',buffer_corr[jj]);
        end;
    close(dados);
    fim :=true;
end;
{%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%}
Procedure Tela;

```



```

var
  POSX, POSY  : BYTE;
BEGIN
  GOTOXY(22,2);
  WRITE('LABORATORIO DE ELETRONICA DE POTENCIA');
  GOTOXY(25,6);
  WRITE('ENSAIO EM PROGRAMA :- VETORIAL.PAS');
  gotoxy(25,09);
  write('1. Iniciar teste.');
```

gotoxy(25,11);

write('2. Interromper o teste.');

gotoxy(25,13);

write('3. Reiniciar.');

gotoxy(25,15);

write('4. Finalizar.');

gotoxy(25,17);

write('Tecla a opcao desejada : []');

gotoxy(2,25);write('Autores: Marcus Boechat, Brunno Collussi e Jose de Alencar S. Jr.');

gotoxy(30,23);write('Wref = ',Wref/PI30:2:0); {rpm}

gotoxy(5,23);write('Chaves : ',sitchave);

gotoxy(60,23);write('Posicao = 0');

gotoxy(45,23);write('Wrotor = ',Wrotor/PI30:2:1);{rpm}

FOR POSX:=2 TO 79 DO

BEGIN

GOTOXY(POSX,1);WRITE(CHAR(196));

GOTOXY(POSX,24);WRITE(CHAR(196));

END;

FOR POSX:=3 TO 78 DO

BEGIN

GOTOXY(POSX,22);WRITE(CHAR(196));

GOTOXY(POSX,3);WRITE(CHAR(196));

END;

FOR POSY:=4 TO 21 DO

BEGIN

GOTOXY(2,POSY);WRITE(CHAR(179));

GOTOXY(79,POSY);WRITE(CHAR(179));

END;

FOR POSY:=2 TO 23 DO

BEGIN

GOTOXY(1,POSY);WRITE(CHAR(179));

GOTOXY(80,POSY);WRITE(CHAR(179));

END;

gotoxy(1,1);write(char(218));

gotoxy(80,1);write(char(191));

gotoxy(1,24);write(char(192));

gotoxy(80,24);write(char(217));

gotoxy(2,3);write(char(218));

gotoxy(79,3);write(char(191));

gotoxy(2,22);write(char(192));

```

        gotoxy(79,22);write(char(217));
        gotoxy(51,17);
END;
{%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%}
procedure reset;
begin
    posicao           := 0;
    Isq_ref          := 0;
    port[TimCtl]:=Timer2Mode0;
    CarregaTemporizador(timer2,65535);
    port[TimCtl]:=Timer2Mode4;
    CarregaTemporizador(timer2,65535);
    CLR:=TRUE;
    ii :=1;
    iii:=1;
end;
{%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%}
Procedure Ler_Wrotor;
const Timer2Latch=$80;
var p1,p2,p3,p4: real;
    tempo: word;
    j: integer;
begin
    port[TimCtl]:=Timer2Latch;
    tempo:=port[timer2]*256 + port[timer2];
    if ((tempo>48000) and (tempo<65530)) then aux:=tempo;
    port[TimCtl]:=Timer2Mode0;
    CarregaTemporizador(timer2,0);
    Wrotor:=4*PI/((65535-aux{tempo})*800e-6); {rad/s}
    if (Corr_Wrotor=1) then Wrotor := 1.004*Wrotor;
    if (Corr_Wrotor=2) then
        begin
            { POLINOMIO }
            p1:=Wrotor*Wrotor*Wrotor*0.00000000164095;
            p2:=Wrotor*Wrotor*0.00000601217893;
            p3:=Wrotor*1.03939300710293;
            p4:=0.19401826807836;
            Wrotor:=p1-p2+p3+p4;
        end;
    DAWrite(round(Wrotor*3.9),0);
    port[TimCtl]:=Timer2Mode4;
    CarregaTemporizador(timer2,0);
end;
{%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%}
procedure recalcula_isq;
begin
{ leitura da velocidade: }
    Ler_Wrotor;
    erro:=Wref-Wrotor; {rad/s}

```

```

Isq_ref := Isq_ref + Kcont1*erro - Kcont2*erro_anterior;
erro_anterior:=erro;

if (Isq_ref < -20.0) then Isq_ref := -20.0;
if (Isq_ref > 20.0) then Isq_ref := 20.0;

{ calculo de W_mRl: }
W_mRl:=Isq_ref*K_WmRl+Wrotor; { K_WmRl := 1/(Isd_ref*Trl) }

{ regioao critica: }
dteta := Kteta*W_mRl; { Kteta = N*h/(2*pi) }
Kisq_a := round(Kpu_a*Isq_ref);
Kisq_bc:= round(Kpu_bc*Isq_ref);

buffer_rot[ii]:=aux; {rad/s}
buffer_corr[ii]:=Isq_ref;

ii:=ii+1;
iii:=iii+1;

if (ii>size_buffer_rot) then finaliza;

if (ii=500) then Wref:=nivel_sup;
if (iii<7000) then
begin
Wref:=nivel_inf;
ii:=1;
end
else
begin
iii:=8000;
end;
end;

{%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%}
{CORPO PRINCIPAL}
Begin
atribuicoes;
inicializa;
clrscr;
tabela_de_chaves;
tabela_de_cossenos;
reset;
tela;
repeat
gotoxy(53,23);write(Wrotor/PI30:5:0);
gotoxy(70,23);write(round(posicao*Kgrau));clreol;
If keypressed then
begin
opcao := readkey;

```

```
case opcao of
    '1' : begin
        reset;
        habilita_interrupcao_aciona_chaves;
        sitchave:=' ATIVADAS';
        gotoxy(5,23);write('Chaves : ',sitchave);
        gotoxy(51,17);
        end;
    '2' : begin
        desabilita_interrupcao_aciona_chaves;
        sitchave:='DESATIVADAS';
        gotoxy(5,23);write('Chaves : ',sitchave);
        gotoxy(51,17);
        port[chaves1a8] := abre_todas;
        end;

    '3' : begin
        reset;
        gotoxy(70,23);write('000');
        end;
    '4' : finaliza;
    nul : opcao := readkey;
end;
end;

until fim;
clrscr;
end.
{%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%}
```

Apêndice B

LISTAGEM DO PROGRAMA PARA CÁLCULO DOS CONTROLADORES A PARTIR DO PROBLEMA \mathcal{H}_∞ DE 2-BLOCOS

O texto a seguir apresenta um exemplo de algoritmo para se calcular controladores a partir do problema \mathcal{H}_∞ de 2-blocos formulado na tese, utilizando-se o MATLAB:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
% PROGRAMA PARA CÁLCULO DE CONTROLADORES A PARTIR DO PROBLEMA Hinf DE  
% 2-BLOCOS FORMULADO NA TESE  
% Autor: José de Alencar Silva Júnior  
% Atualizado em: 06/01/2003  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
clear all;  
h=10*70e-6;  
fatortaubarra=5;  
criterioparada=1e-12;  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PESOS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
nw1=1.0*[1 30.0]; dw1=[1 100.0]; a1=nw1(1);b1=nw1(2);c1=dw1(1);d1=dw1(2);w1s=tf(nw1,dw1);  
nw2=0.1*[1 1]; dw2=[1 0.01]; a2=nw2(1);b2=nw2(2);c2=dw2(1);d2=dw2(2);w2s=tf(nw2,dw2);  
W=logspace(-4,4,20);  
[modw1s,angw1s]=bode(w1s,W);  
modw1(1)=modw1s(1,1,1); modw1(2)=modw1s(1,1,2);  
modw1(3)=modw1s(1,1,3); modw1(4)=modw1s(1,1,4);  
modw1(5)=modw1s(1,1,5); modw1(6)=modw1s(1,1,6);  
modw1(7)=modw1s(1,1,7); modw1(8)=modw1s(1,1,8);
```

```

modw1(9)=modw1s(1,1,9); modw1(10)=modw1s(1,1,10);
modw1(11)=modw1s(1,1,11); modw1(12)=modw1s(1,1,12);
modw1(13)=modw1s(1,1,13); modw1(14)=modw1s(1,1,14);
modw1(15)=modw1s(1,1,15); modw1(16)=modw1s(1,1,16);
modw1(17)=modw1s(1,1,17); modw1(18)=modw1s(1,1,18);
modw1(19)=modw1s(1,1,19); modw1(20)=modw1s(1,1,20);
figure;semilogx(W,modw1,'g','linewidth',2);hold on
xlabel('Frequência angular (rad/segundos)','fontsize',14)
ylabel('Módulo','fontsize',14)
[modw2s,angw2s]=bode(w2s,W);
modw2(1)=modw2s(1,1,1); modw2(2)=modw2s(1,1,2);
modw2(3)=modw2s(1,1,3); modw2(4)=modw2s(1,1,4);
modw2(5)=modw2s(1,1,5); modw2(6)=modw2s(1,1,6);
modw2(7)=modw2s(1,1,7); modw2(8)=modw2s(1,1,8);
modw2(9)=modw2s(1,1,9); modw2(10)=modw2s(1,1,10);
modw2(11)=modw2s(1,1,11); modw2(12)=modw2s(1,1,12);
modw2(13)=modw2s(1,1,13); modw2(14)=modw2s(1,1,14);
modw2(15)=modw2s(1,1,15); modw2(16)=modw2s(1,1,16);
modw2(17)=modw2s(1,1,17); modw2(18)=modw2s(1,1,18);
modw2(19)=modw2s(1,1,19); modw2(20)=modw2s(1,1,20);
semilogx(W,modw2,'r','linewidth',2);hold on
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% PLANTA, M, N, X e Y %%%%%%%%%
load k_e_tau6 % ARQUIVO COM AS MEDIDAS DE GANHO E CONSTANTE DE TEMPO
k=mean(kabsm5pc(2:8));
tau=mean(tauasm5pc);
ng=[k]; dg=[tau 1]; Gs=tf(ng,dg);
disp('===== Gs ====='); zpk(Gs)
taubarra=tau/fatortaubarra;
nn=k; dn=[tau 1]; ns=tf(nn,dn);
disp('===== ns ====='); zpk(ns)
nm=1; dm=1; ms=tf(nm,dm);
disp('===== ms ====='); zpk(ms)
nxtil=1; dxtil=1; xtils=tf(nxtil,dxtil);
disp('===== xtils ====='); zpk(xtils)
nytil=0; dytil=1; ytils=tf(nytil,dytil);
disp('===== ytils ====='); zpk(ytils)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
lw=6000;w=logspace(-4,4,lw);
gammas=roots([(a1^2*c2^2)+(a2^2*c1^2) 0 ...
-(a1^2*d2^2)+(b1^2*c2^2)+(a2^2*d1^2)+(b2^2*c1^2) 0 ((d1^2*b2^2)+(d2^2*b1^2))]);
g=[];for i=1:4;if real(gammas(i))>=0;g=[g gammas(i)];end;end;g1=g(1);g2=g(2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% NUMERADORES E DENOMINADORES DE T1, T2 E T3 %%%%%%%%%
T1s=[-w1s*ytils*ns;w2s*xtils*ms];
[nt111,dt111]=tfdata(T1s(1),'v');
[nt121,dt121]=tfdata(T1s(2),'v');
disp('===== T1s ====='); zpk(T1s)
T1s=minreal(T1s);
disp('===== T1s min ====='); zpk(T1s)
T2s=[-w1s*ns*ms;w2s*ns*ms];

```

```

[nt211,dt211]=tfdata(T2s(1),'v');
[nt221,dt221]=tfdata(T2s(2),'v');
disp('===== T2s ====='); zpk(T2s)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% FATORAÇÃO INNER - OUTER DE T2 %%%%%%%%%
nt2o=sqrt((a1^2*c2^2)+(a2^2*c1^2))*k*conv([1 g1],[1 g2]);
dt2o=conv(conv([c1 d1],[c2 d2]),conv(dn,dm));
T2os=tf(nt2o,dt2o);
disp('===== T2os min ====='); zpk(T2os)
T2is=T2s/T2os;
disp('===== T2is ====='); zpk(T2is)
T2is=minreal(T2is);
disp('===== T2is min ====='); zpk(T2is)
[nt2i11,dt2i11]=tfdata(T2is(1),'v');
[nt2i21,dt2i21]=tfdata(T2is(2),'v');
T2ists=T2is';
[nt2ist11,dt2ist11]=tfdata(T2ists(1),'v');
[nt2ist21,dt2ist21]=tfdata(T2ists(2),'v');
disp('===== T2i*s ====='); zpk(T2ists)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CÁLCULO DE R2 %%%%%%%%%
R2s=(eye(2)-T2is*T2ists)*T1s;
disp('===== R2s ====='); zpk(R2s)
R2s=minreal(R2s);
disp('===== R2s min ====='); zpk(R2s)
[nr211,dr211]=tfdata(R2s(1),'v');
[nr221,dr221]=tfdata(R2s(2),'v');
R2sts=R2s';
[nr2st11,dr2st11]=tfdata(R2sts(1),'v');
[nr2st21,dr2st21]=tfdata(R2sts(2),'v');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% POLINÔMIOS CALCULADOS %%%%%%%%%
nt111jw=polyval(nt111,j*w); dt111jw=polyval(dt111,j*w);
nt121jw=polyval(nt121,j*w); dt121jw=polyval(dt121,j*w);
t1jw=[nt111jw./dt111jw ; nt121jw./dt121jw];
nt211jw=polyval(nt211,j*w); dt211jw=polyval(dt211,j*w);
nt221jw=polyval(nt221,j*w); dt221jw=polyval(dt221,j*w);
t2jw=[nt211jw./dt211jw ; nt221jw./dt221jw];
nt2i11jw=polyval(nt2i11,j*w); dt2i11jw=polyval(dt2i11,j*w);
nt2i21jw=polyval(nt2i21,j*w); dt2i21jw=polyval(dt2i21,j*w);
t2ijw=[nt2i11jw./dt2i11jw ; nt2i21jw./dt2i21jw];
nt2ist11jw=polyval(nt2ist11,j*w)'; dt2ist11jw=polyval(dt2ist11,j*w)';
nt2ist21jw=polyval(nt2ist21,j*w)'; dt2ist21jw=polyval(dt2ist21,j*w)';
t2istjw=[nt2ist11jw./dt2ist11jw nt2ist21jw./dt2ist21jw];
nr211jw=polyval(nr211,j*w); dr211jw=polyval(dr211,j*w);
nr221jw=polyval(nr221,j*w); dr221jw=polyval(dr221,j*w);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% CALCULO DA NORMA INFINITA DE R2 %%%%%%%%%
r2jw=[nr211jw./dr211jw ; nr221jw./dr221jw];
for i=1:lw;norm2r2jw(i)=norm(r2jw(:,i),2);end;
norminfr2=max(norm2r2jw2)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% COEFICIENTES PARA FACILITAR AS CONTAS %%%%%%%%%
T2istT1s=T2ists*T1s;

```

```

[nt2istt1,dt2ist1]=tfdata(T2istT1s,'v');
R2stR2s=R2sts*R2s;
R2stR2s=minreal(R2stR2s);
[nr2str2,dr2str2]=tfdata(R2stR2s,'v');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ROTINA PARA CALCULAR NORMA DE HANKEL DE R+ (BISSECÇÃO) %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
alfa1=10*norm(R2s,inf);gammastop=alfa1;gammainf=norm(R2s,inf);dados=[];chutealfa1= 0;
normhankelrmais=1.1;
while ((abs(gammastop-gammainf)>criterioparada) | (normhankelrmais>1))
gammaatual=(gammainf+gammastop)/2;
R2ostR2os=((gammaatual^2)-R2stR2s);
R2ostR2os=minreal(R2ostR2os);
[nr2ostr2o,dr2ostr2o]=tfdata(R2ostR2os,'v');
rnr2ostr2o=roots(nr2ostr2o);ind=find(real(rnr2ostr2o)<0);
rnr2o=rnr2ostr2o(ind);nr2o=sqrt(nr2ostr2o(1))/sqrt(dr2ostr2o(1))*poly(rnr2o);
rdr2ostr2o=roots(dr2ostr2o);ind=find(real(rdr2ostr2o)<0);rdr2o=rdr2ostr2o(ind);dr2o=poly(rdr2o);
R2os=tf(nr2o,dr2o);
Rs=T2istT1s/R2os;
Rs=minreal(Rs);
[nr,dr]=tfdata(Rs,'v');
[ar,br,cr,ddr]=tf2ss(nr,dr);
[amenos,bmenos,cmenos,dmenos,amais,bmais,cmais,dmais,MM]=stabproj(ar,br,cr,ddr);
dmenos=dmais;dmais=0;
wc=lyap(amais,(bmais*bmais'));
wo=lyap(amais',(cmais'*cmais));
lambda=eig(wc*wo);lambdamax=max(abs(lambda));normhankelrmais=sqrt(lambdamax);
dados=[dados;gammainf gammastop gammaatual normhankelrmais];
if normhankelrmais<1
gammastop=gammaatual;
chutealfa1=1;
elseif chutealfa1==0
alfa1=2*alfa1;
gammastop=alfa1;
else
gammainf=gammaatual;
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE NEHARI E CÁLCULOS FINAIS %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
disp('===== Rs ====='); zpk(Rs)
Rmass=ss(amais,bmais,cmais,dmais);
Rmas=tf(Rmass);
disp('===== Rmas ====='); zpk(Rmas)
[nrmais,drmais]=tfdata(Rmas,'v');
Rmess=ss(amenos,bmenos,cmenos,dmenos);
Rmes=tf(Rmess);
disp('===== Rmes ====='); zpk(Rmes)
[nrmenos,drmenos]=tfdata(Rmes,'v');
[Ahat,Bhat,Chat,Dhat]=nehari(amais,bmais,cmais,dmais);
Xss=ss(Ahat,Bhat,Chat,Dhat);
Xs=tf(Xss);

```



```

disp('===== Xs ====='); zpk(Xs)
[nx,dx]=tfdata(Xs,'v');
Xhats=Xs+Rmes;
disp('===== Xhats ====='); zpk(Xhats)
[nxhat,dxhat]=tfdata(Xhats,'v');
Xbarras=Xhats*R2os;
disp('===== Xbarras ====='); zpk(Xbarras)
[nxbarra,dxbarra]=tfdata(Xbarras,'v');
Qs=Xbarras/T2os;
disp('===== Qs ====='); zpk(Qs)
Qs=minreal(Qs);
disp('===== Qs min ====='); zpk(Qs)
[nq,dq]=tfdata(Qs,'v');
flats=(Rs-Xhats);
flats=minreal(flats);
[nflat,dflat]=tfdata(flats,'v');
nflatjw=polyval(nflat,j*w); dflatjw=polyval(dflat,j*w);
flatjw=[nflatjw./dflatjw]; flatjw=abs(flatjw);
figure;
semilogx(w,flatjw);
nqp=nq;
dqp=conv(dq,[taubarra 1]);
Qps=tf(nqp,dqp);
disp('===== Qps ====='); zpk(Qps)
Ks=-(ytils-ms*Qps)/(xtils-ns*Qps);
disp('===== Ks ====='); zpk(Ks)
Kmins=minreal(Ks,1e-2);
[nkmin,dkmin]=tfdata(Kmins,'v');
disp('===== Kmins ====='); zpk(Kmins)
kminz = c2d(Kmins,h,'tustin');
[nkminz,dkminz]=tfdata(kminz,'v');
nkminz=round(nkminz*100000000000000)/100000000000000;
dkminz=round(dkminz*100000000000000)/100000000000000;
kminz=tf(nkminz,dkminz,h);
format long
zpk(kminz)
%%%%% CALCULO PARA VERIFICAR SE ||W1*T + W2*S||INF < 1 PARA GARANTIR DESEMPENHO ROBUSTO %%%%%
W1Ts=w1s*Gs*Kmins/(1+Gs*Kmins); [nw1t,dw1t]=tfdata(W1Ts,'v');
nw1tjw=polyval(nw1t,j*w); dw1tjw=polyval(dw1t,j*w); w1tjw=nw1tjw./dw1tjw;
W2Ss=w2s/(1+Gs*Kmins); [nw2s,dw2s]=tfdata(W2Ss,'v');
nw2sjw=polyval(nw2s,j*w); dw2sjw=polyval(dw2s,j*w); w2sjw=nw2sjw./dw2sjw;
estrobusta=max(abs(w1tjw)+abs(w2sjw))
figure;semilogx(w,abs(w1tjw),w,abs(w2sjw),w,abs(w1tjw)+abs(w2sjw))

```