

CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES DE ORDEM SUPERIOR COM  
ESTABILIDADE GLOBAL

Eduardo Vieira Leão Nunes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

---

Prof. Fernando Cesar Lizarralde, D.Sc.

---

Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat

---

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc.

---

Prof. Gilberto de Oliveira Corrêa, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 2004

NUNES, EDUARDO VIEIRA LEÃO

Controle por Modos Deslizantes de Ordem Superior com Estabilidade Global [Rio de Janeiro] 2004

X, 133 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Elétrica, 2004)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Controle por Modos Deslizantes
2. Sistemas Incertos
3. Controle Adaptativo
4. Rastreamento
5. Modelo de Referência
6. Diferenciador Exato

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES DE ORDEM SUPERIOR COM  
ESTABILIDADE GLOBAL

Eduardo Vieira Leão Nunes

Maio/2004

Orientadores: Fernando Cesar Lizarralde  
Liu Hsu

Programa: Engenharia Elétrica

Nesta tese é proposto um controlador por modos deslizantes para plantas incertas, monovariáveis, lineares e invariantes no tempo com grau relativo arbitrário, visando a obter um rastreamento assintoticamente exato de um modelo de referência.

Para compensar o grau relativo excedente é utilizado um esquema baseado em uma combinação convexa de um compensador *lead* linear e um diferenciador robusto e exato, baseado em modos deslizantes de ordem superior.

O sistema completo do erro é globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual, que é independente das condições iniciais. Além disso, o estado completo do erro converge assintoticamente para zero após algum tempo finito.

Resultados experimentais e de simulação são apresentados para verificar os resultados teóricos obtidos e para ilustrar o desempenho e a robustez do controlador proposto.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## HIGH ORDER SLIDING MODE CONTROL WITH GLOBAL STABILITY

Eduardo Vieira Leão Nunes

May/2004

Advisors: Fernando Cesar Lizarralde

Liu Hsu

Department: Electrical Engineering

In this thesis a sliding mode controller is proposed for uncertain SISO LTI plants with arbitrary relative degree in order to achieve asymptotic exact tracking of a model reference.

In order to compensate the excess of relative degree, a scheme based on a convex combination of a linear lead compensator with a robust exact differentiator, based on higher order sliding modes is used.

The complete error system is globally exponentially stable with respect to some small residual set which is independent of initial conditions. Moreover the complete error state converges asymptotically to zero after some finite time.

Experimental and simulation results are presented so as to verify the theoretical results obtained and to illustrate the performance and the robustness of the proposed controller.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Notações e Definições . . . . .	4
1.2 Organização da Tese . . . . .	6
<b>2 Sistemas a Estrutura Variável</b>	<b>8</b>
2.1 Sistema de Controle Descontínuo . . . . .	9
2.2 Noções Básicas de Controladores por Modos Deslizantes . . . . .	10
2.3 Descrição Matemática de Modos Deslizantes . . . . .	15
2.3.1 Método de <i>Filippov</i> . . . . .	15
2.3.2 Existência de Modo Deslizante . . . . .	19
2.3.3 Método da Regularização . . . . .	20
2.3.4 Método do Controle Equivalente . . . . .	22
2.4 Caso Geral: Projeto da Lei de Controle . . . . .	25
2.5 Modos Deslizantes de Ordem Superior . . . . .	26
2.5.1 Definições de Modos Deslizantes de Ordem Superior . . . . .	27
2.5.1.1 Modos Deslizantes sobre Variedades . . . . .	28
2.5.1.2 Modos Deslizantes com Respeito a Funções de Restrição	30
2.5.2 Modos Deslizantes de Ordem Superior em Sistemas de Controle	33
2.5.3 Controlador por Modos Deslizantes de Segunda Ordem . . . . .	34
2.5.3.1 Controlador Sub-Ótimo . . . . .	34
2.5.3.2 Controlador Super-Twisting . . . . .	36
2.5.4 Controlador por Modos Deslizantes de Ordem Arbitrária . . . . .	37
2.5.5 Diferenciador Exato e Robusto (RED) . . . . .	41
2.5.6 Controlador Universal por Realimentação de Saída . . . . .	44
2.5.6.1 Resultados de Simulação . . . . .	45
<b>3 Controle Adaptativo por Modelo de Referência a Estrutura Variável</b>	<b>50</b>
3.1 Controle Adaptativo por Modelo de Referência <i>MRAC</i> . . . . .	52
3.1.1 Esquema de Controle do <i>MRAC</i> . . . . .	53
3.1.2 Equação do Erro de Saída do <i>MRAC</i> . . . . .	56
3.2 <i>VS-MRAC</i> . . . . .	59
3.2.1 Definição do Problema . . . . .	59

3.2.2	<i>VS-MRAC</i> - Caso: Grau Relativo $n^* = 1$	61
3.2.3	<i>VS-MRAC</i> Compensado - Caso: Grau Relativo $n^* > 1$	63
3.2.3.1	Análise de Estabilidade	64
<b>4</b>	<b>GRED/VS-MRAC</b>	<b>66</b>
4.1	Definição do Problema	67
4.2	Esquema de Controle do GRED/VS-MRAC	69
4.3	Função de Chaveamento Ponderada	74
4.4	Resultados de Simulação	80
4.4.1	Caso 1: Planta Desconhecida com Grau Relativo ( $n^* = 2$ )	81
4.4.2	Caso 2: Planta Desconhecida ( $n^* = 2$ ) com Dinâmica Não Modelada	86
4.4.3	Caso 3: Planta Desconhecida com Grau Relativo ( $n^* = 3$ )	89
4.4.4	Caso 4: Planta Desconhecida ( $n^* = 3$ ) com Dinâmica Não Modelada	93
4.5	Exemplo de Aplicação a um Servomecanismo	98
4.5.1	Descrição e Modelagem do Servomecanismo	98
4.5.2	Resultados Experimentais	100
<b>5</b>	<b>Discussão e Conclusões Gerais</b>	<b>108</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>110</b>
<b>A</b>	<b>Noções Básicas de Geometria Diferencial</b>	<b>110</b>
A.1	Variiedades Suaves e Mapas Suaves	110
A.2	Mudança de Coordenadas	113
A.3	Espaço Tangente	113
<b>B</b>	<b>Sistemas a Estrutura Variável</b>	<b>116</b>
B.1	Demonstração do Lema 2.1	116
<b>C</b>	<b>Controle Adaptativo por Modelo de Referência a Estrutura Variável</b>	
	<i>VS-MRAC</i>	<b>119</b>
C.1	Demonstração da Proposição 2	119
C.2	Demonstração do Teorema 3.2	120
<b>D</b>	<b><i>GRED/VS-MRAC</i></b>	<b>123</b>
D.1	Demonstração da Proposição 3	123
D.2	Demonstração da Proposição 4	123
D.3	Demonstração da Corolário 4.1.2	124
D.4	Demonstração do Lema 4.1	125
D.5	Demonstração da Proposição 5	128
D.6	Demonstração da Proposição 6	128
D.7	Demonstração do Teorema 4.2	129
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>131</b>

# Lista de Figuras

2.1	Plano de fase para o sistema (2.5). . . . .	11
2.2	Plano de fase para o sistema (2.6). . . . .	12
2.3	Plano de fase para o sistema (2.4). . . . .	13
2.4	Trajétórias do sistema (2.4) para diferentes condições de atraso: (a) atraso igual a $0.1s$ ; (b) atraso igual a $0.05s$ ; (c) atraso igual a $0.01s$ . Sinal de controle do sistema (2.4) para diferentes condições de atraso: (d) atraso igual a $0.1s$ ; (e) atraso igual a $0.05s$ ; (f) atraso igual a $0.01s$ . . . . .	14
2.5	Plano de fase para o sistema (2.7). . . . .	15
2.6	Interpretação geométrica da solução de Filippov. . . . .	18
2.7	Plano de fase para o sistema (2.22). . . . .	23
2.8	(a) Gráfico de $x_1$ x $t$ para os sistemas (2.22) e (2.24); (b) Gráfico de $x_2$ x $t$ para os sistemas (2.22) e (2.24); (c) Sinal de controle do sistema (2.22) (controle descontínuo); (d) Sinal de controle do sistema (2.24) (controle equivalente). . . . .	24
2.9	Exemplo de um modo deslizante de segunda ordem. . . . .	30
2.10	Modo deslizante de segunda ordem. . . . .	31
2.11	Idéia do controlador sub-ótimo. . . . .	36
2.12	Trajétórias do controlador Super-Twisting. . . . .	38
2.13	Idéia do controlador por modos deslizantes de ordem $r$ . . . . .	40
2.14	Conjunto de descontinuidade $\Gamma$ para o controlador por modos deslizantes de ordem 3. . . . .	40
2.15	Controlador Universal por Realimentação de Saída: Sinais $s(t)$ , $\dot{s}(t)$ e $\ddot{s}(t)$ . . . . .	47
2.16	Controlador Universal por Realimentação de Saída: (a) $e_0(t) = z_0(t) - r(t)$ ; (b) $e_1(t) = z_1(t) - \dot{r}(t)$ ; (c) $e_2(t) = z_2(t) - \ddot{r}(t)$ . . . . .	48
2.17	Controlador Universal por Realimentação de Saída: Sinal de controle $u(t)$ . . . . .	49
3.1	Estrutura do controlador adaptativo por modelo de referência ( <i>MRAC</i> ). . . . .	55
3.2	Representação equivalente da estrutura do controlador adaptativo por modelo de referência ( <i>MRAC</i> ) . . . . .	55
3.3	Esquema equivalente da estrutura do controlador <i>MRAC</i> com parâmetros ideais. . . . .	58
3.4	<i>VS-MRAC</i> - caso: grau relativo $n^* = 1$ . . . . .	62
3.5	<i>LF/VS-MRAC</i> : <i>VS-MRAC</i> usando um filtro <i>lead</i> linear para compensação de grau relativo. . . . .	63

4.1	VS-MRAC usando um operador $L(p)$ para compensação de grau relativo.	69
4.2	VS-MRAC usando um filtro <i>lead</i> para compensação de grau relativo ( <i>LF/VS-MRAC</i> ).	70
4.3	Implementação equivalente para o filtro <i>lead</i> utilizado no <i>LF/VS-MRAC</i> .	70
4.4	Esquema do controlador <i>GRED/VS-MRAC</i>	73
4.5	Representação equivalente do controlador <i>GRED/VS-MRAC</i> .	73
4.6	<i>VS-MRAC</i> usando um filtro <i>lead</i> para a compensação de grau relativo, com uma perturbação de saída uniformemente limitada.	75
4.7	Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ): (a) Erro de rastreamento $e_0(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Erro de rastreamento $e_0(t)$ para $\epsilon_M = 20\tau$ e $c = 5\tau$ ( $\epsilon_M$ e $c$ provenientes da equação (4.30)).	82
4.8	Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ): Comportamento no tempo da função de chaveamento ponderada $\alpha(\tilde{e}_{rl})$ para $\epsilon_M = 20\tau$ e $c = 5\tau$ (ver figura 4.7 (b)).	83
4.9	Sistema Instável quando somente o <i>RED</i> é usado para estimar $\bar{e}_0$ .	83
4.10	Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ): (a) Sinal $\dot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Trecho ampliado do sinal $\dot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (c) Sinal $\dot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 20\tau$ e $c = 5\tau$ ; (d) Trecho ampliado do sinal $\dot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 20\tau$ e $c = 5\tau$ .	84
4.11	Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ): (a) Sinal de controle $u(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Trecho ampliado do sinal $u(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ ; (c) Sinal de controle $u(t)$ para $\epsilon_M = 20\tau$ e $c = 5\tau$ ; (d) Trecho ampliado do sinal $u(t)$ para $\epsilon_M = 20\tau$ e $c = 5\tau$ .	85
4.12	Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ) com dinâmica não modelada; (a) Erro de rastreamento $e_0(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Erro de rastreamento $e_0(t)$ para $\epsilon_M = 60\tau$ e $c = 40\tau$ .	86
4.13	Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ) com dinâmica não modelada: Comportamento no tempo da função de chaveamento ponderada $\alpha(\tilde{e}_{rl})$ para $\epsilon_M = 60\tau$ e $c = 40\tau$ (ver figura 4.12 (b)).	87
4.14	Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ) com dinâmica não modelada: (a) Sinal $\dot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Sinal $\dot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 60\tau$ e $c = 40\tau$ .	88
4.15	Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ) com dinâmica não modelada: (a) Sinal de controle $u(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Sinal de controle $u(t)$ para $\epsilon_M = 60\tau$ e $c = 40\tau$ .	88
4.16	Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ); (a) Erro de rastreamento $e_0(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Erro de rastreamento $e_0(t)$ para $\epsilon_M = 150\tau$ e $c = 75\tau$ .	90
4.17	Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ): Comportamento no tempo da função de chaveamento ponderada $\alpha(\tilde{e}_{rl})$ para $\epsilon_M = 150\tau$ e $c = 75\tau$ (ver figura 4.16 (b)).	91
4.18	Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ): (a) Sinal $\dot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Sinal $\dot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 150\tau$ e $c = 75\tau$ .	91
4.19	Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ): (a) Sinal $\ddot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Sinal $\ddot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 150\tau$ e $c = 75\tau$ .	92



4.20	Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ): (a) Sinal de controle $u(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Trecho ampliado do sinal $u(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ ; (c) Sinal de controle $u(t)$ para $\epsilon_M = 150\tau$ e $c = 75\tau$ ; (d) Trecho ampliado do sinal $u(t)$ para $\epsilon_M = 150\tau$ e $c = 75\tau$ . . . . .	92
4.21	Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ) com dinâmica não modelada: (a) Erro de rastreamento $e_0(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Erro de rastreamento $e_0(t)$ para $\epsilon_M = 50\tau$ e $c = 20\tau$ . . . . .	94
4.22	Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ) com dinâmica não modelada: Comportamento no tempo da função de chaveamento ponderada $\alpha(\tilde{e}_{rl})$ para $\epsilon_M = 50\tau$ e $c = 20\tau$ (ver figura 4.21 (b)). . . . .	94
4.23	Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ) com dinâmica não modelada: (a) Sinal $\dot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Trecho ampliado do sinal $\dot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ ; (c) Sinal $\dot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 50\tau$ e $c = 20\tau$ ; (d) Trecho ampliado do sinal $\dot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 50\tau$ e $c = 20\tau$ . . . . .	95
4.24	Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ) com dinâmica não modelada: (a) Sinal $\ddot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Sinal $\ddot{e}_0(t)$ para $\epsilon_M = 50\tau$ e $c = 20\tau$ . . . . .	96
4.25	Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ) com dinâmica não modelada: (a) Sinal de controle $u(t)$ para $\epsilon_M = 0$ e $c = 0$ (somente filtro <i>lead</i> ); (b) Sinal de controle $u(t)$ para $\epsilon_M = 50\tau$ e $c = 20\tau$ . . . . .	97
4.26	Servomecanismo para posicionamento angular (SRV-02) fabricado pela Quanser Consulting . . . . .	99
4.27	Diagrama do servomecanismo (SRV-02) . . . . .	99
4.28	Resultados Experimentais: Controlador <i>GRED/V S-MRAC</i> : (a) Erro de rastreamento $e_0(t)$ em graus; (b) Trecho ampliado do sinal $e_0(t)$ . . . . .	103
4.29	Resultados Experimentais: Controlador <i>GRED/V S-MRAC</i> : Comportamento no tempo da função de chaveamento ponderada $\alpha(\tilde{e}_{rl})$ . . . . .	103
4.30	Resultados Experimentais: Controlador <i>GRED/V S-MRAC</i> : Sinal de controle $u(t)$ . . . . .	104
4.31	Resultados Experimentais: <i>RED</i> $\times$ filtro <i>lead</i> : Sinais $y_m(t)$ e $y_p(t)$ (a) filtro <i>lead</i> ( $t \in [0, 10] \rightarrow \Delta = 15$ , $t \in (10, 20] \rightarrow \Delta = 25$ ); (b) <i>RED</i> ( $\Delta = 15$ ). . . . .	105
4.32	Resultados Experimentais: <i>RED</i> $\times$ filtro <i>lead</i> : (a) Erro de rastreamento $e_0(t)$ : (a) filtro <i>lead</i> ( $t \in [0, 10] \rightarrow \Delta = 15$ , $t \in (10, 20] \rightarrow \Delta = 25$ ); (b) <i>RED</i> ( $\Delta = 15$ ). . . . .	106
4.33	Resultados Experimentais: <i>RED</i> $\times$ filtro <i>lead</i> : (a) Sinal de Controle $u(t)$ : (a) filtro <i>lead</i> ( $t \in [0, 10] \rightarrow \Delta = 15$ , $t \in (10, 20] \rightarrow \Delta = 25$ ); (b) <i>RED</i> ( $\Delta = 15$ ). . . . .	107
A.1	Ilustração da Definição de Variedade. . . . .	111
A.2	Parametrização da esfera unitária $S^2$ . . . . .	112
A.3	Mudança de coordenadas. . . . .	113
A.4	Espaço Tangente de uma variedade suave de dimensão 2. . . . .	114

# Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros utilizados na simulação do Controlador Universal por Realimentação de Saída . . . . .	46
4.1	Parâmetros utilizados na simulação do sistema cuja planta possui grau relativo $n^* = 2$ . . . . .	81
4.2	Parâmetros utilizados na simulação do sistema cuja planta possui grau relativo $n^* = 3$ . . . . .	89
4.3	Parâmetros do servomecanismo SRV-02 . . . . .	100
4.4	Parâmetros utilizados na experiência para verificar o comportamento do controlador <i>GREED/VS-MRAC</i> . . . . .	102
4.5	Parâmetros utilizados na experiência para comparar o desempenho obtido utilizando-se um filtro <i>lead</i> com o desempenho obtido utilizando-se um <i>RED</i> . . . . .	104

# Capítulo 1

## Introdução

O controle robusto e o controle adaptativo são as principais estratégias para lidar com sistemas que possuem modelagem precária ou grandes incertezas, incluindo variação de parâmetros, dinâmicas não modeladas e distúrbios externos.

A idéia básica do controle adaptativo é calcular o sinal de controle utilizando estimativas dos parâmetros incertos da planta ou, diretamente, dos parâmetros do controlador obtidas em tempo real através de informações provenientes dos sinais mensuráveis do sistema (Slotine & Li 1991).

A estratégia denominada de controle adaptativo por modelo de referência (Model Reference Adaptive Control - MRAC) é considerada uma das principais abordagens na literatura referente a controle adaptativo (Mareels & Polderman 1996). No controlador MRAC tradicional (Narendra & Annaswamy 1989) a adaptação é baseada na estimação de parâmetros utilizando uma ação integral pura, o que resulta em uma conhecida falta de robustez a perturbações externas ou a dinâmicas não modeladas. Além disso, a qualidade do transitório de adaptação não é uniforme com respeito as condições iniciais e a convergência pode ser muito lenta, ver (Hsu & Costa 1989).

Por outro lado o controle a estrutura variável por modos deslizantes, ou, de forma abreviada, controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control* - SMC), também é uma técnica muito eficiente para controlar sistemas incertos, mostrando-se muito eficaz em diversos problemas de engenharia como: controle automático de vôos, controle de motores elétricos, processos químicos, sistemas espaciais, robótica, dentre outros.

aplicações práticas de inúmeros problemas de engenharia.

O controle a estrutura variável caracteriza-se pela utilização de uma lei de controle descontínua que chaveia, seguindo uma dada regra, entre um conjunto de funções possíveis das variáveis de estado da planta, mudando, assim, a estrutura do sistema em malha fechada.

Uma motivação para esta abordagem consiste na possibilidade de combinar propriedades úteis de cada uma das estruturas do sistema realimentado. Além disso, podem ser obtidas novas propriedades que **não são inerentes a nenhuma das estruturas usadas** (por exemplo: um sistema assintoticamente estável pode ser constituído de duas estruturas instáveis). Outro aspecto é a possibilidade adicional de serem obtidas trajetórias que descrevem um novo tipo de movimento (não característico de nenhuma estrutura) denominado de **modo deslizante**. Este tipo de movimento é, sob certas condições, invariante com relação às incertezas da planta, propriedade conhecida como **princípio da invariância**.

Em geral, as funções de chaveamento são projetadas de tal forma que as trajetórias do sistema alcancem e mantenham-se em uma superfície (**superfície de deslizamento**), no espaço de estado, que especifica um comportamento desejado para a dinâmica do sistema em malha fechada.

Sistemas a estrutura variável (*Variable Structure Systems - VSS*) oferecem vantagens significantes: bom comportamento no transiente, estabilidade exponencial global, capacidade de rejeitar perturbações não-modeladas, insensibilidade a não-linearidades da planta ou variações dos parâmetros e destacável robustez com respeito a estabilidade e desempenho. Entretanto, para ser justo, deve-se destacar as duas maiores dificuldades ao se aplicar controladores a estrutura variável:

1. a necessidade geral de se ter acesso ao vetor de estados completo para implementar a superfície de chaveamento e,
2. a possível ocorrência do indesejável fenômeno de trepidação (*chattering*) induzido por não-idealidades como pequenos atrasos ou dinâmicas não-modeladas da planta ou do relé. Isto leva ao conhecido *modo deslizante real* (Utkin 1992).

No *modo deslizante ideal*, o estado permanece na superfície de deslizamento enquanto que o sinal de controle possui frequência infinita (no sentido limite em que

as não-idealidades tendem a zero). No deslizamento real, as variáveis de controle oscilam em frequência alta, mas finita. Este fenômeno é denominado de *chattering*. Certamente, na prática, frequência infinita não pode ser realizada. Sendo assim, o deslizamento será referido como ideal quando a frequência de chaveamento for muito maior do que a banda passante do sistema.

Uma abordagem clássica para se obter sinais de controle suaves a partir de sistemas a estrutura variável consiste em se realizar aproximações contínuas das funções de chaveamento (Utkin 1992). Entretanto, o controle por modos deslizantes com zonas lineares (*boundary layer*) não apresenta um desempenho melhor do que o controle proporcional-derivativo (PD) devido ao fato de que o ganho na região linear não pode exceder o ganho do controlador PD, devido ao ruído e à discretização (Glatzl, Murphy, Wen & Kopacek 1993).

Uma maneira de se preservar modos deslizantes ideais foi apresentada em (Bondarev, Bondareva, Kostyleva & Utkin 1985) onde a idéia principal era a utilização de observadores de estado assintóticos. A restrição principal desta abordagem é que um bom conhecimento do modelo da planta, incluindo perturbações externas, é necessário para uma estimação razoável.

Recentemente, com a introdução dos modos deslizantes de ordem superior em (Levant 2003), que generalizam o conceito de modos deslizantes convencionais, surgiu uma nova abordagem para se obter sinais de controle suaves. A idéia básica é aumentar artificialmente o grau relativo do sistema, permitindo, assim, que o efeito de *chattering* possa se completamente removido. Exemplos desta técnica podem ser encontrados em (Bartolini, Ferrara & Usai 1998, Bartolini, Levant, Pisano & Usai 2002, Levant 2003). Embora estes controladores consigam evitar o problema do *chattering* eles só apresentem estabilidade local, ou então, requerem condições que não são viáveis na prática.

Outro desafio a ser superado é a necessidade geral de se ter acesso ao vetor de estados completo para implementar a superfície de chaveamento. Para evitar a necessidade de medir todos os estados, uma técnica é introduzir conceitos de controle adaptativo por modelo de referência (Narendra & Valavani 1978, Narendra, Lin & Valavani 1980, Sastry 1984) em controle a estrutura variável (Ambrosino, Celentano & Garofalo 1984, Bartolini & Zolezzi 1988). Seguindo este conceito o *VS-MRAC* (*Variable Structure Model-Reference Adaptive Control*) foi proposto em (Hsu & Costa 1989, Hsu 1990).

Este controlador, que pode ser implementado utilizando-se apenas medidas de entrada e saída (I/O), possui uma estrutura similar ao controlador MRAC, substituindo a lei de adaptação do tipo integral para síntese direta do sinal de controle.

A principal vantagem do VS-MRAC é a sua capacidade de garantir estabilidade exponencial global. Entretanto, para plantas de grau relativo maior que um, o erro de rastreamento se torna arbitrariamente pequeno, mas não necessariamente zero.

Uma outra técnica para se obter as informações necessárias para a implementação destes controladores consiste em utilizar o chamado diferenciador robusto e exato (Robust Exact Differentiator - RED) introduzido em (Levant 1999, Levant 2001b, Levant 2001a). Em artigos recentes (Levant 2001b, Levant 2003) foram propostos controladores por modos deslizantes por realimentação de saída para plantas de grau relativo arbitrário baseados nestes diferenciadores exatos. Embora esta classe de controladores consiga um rastreamento exato, sua estabilidade ou convergência tem sido provadas apenas localmente (Levant 2003).

Para tentar combinar as vantagens das duas técnicas, procurando não só preservar a estabilidade global, mas também garantir que o erro convirja assintoticamente para zero foi desenvolvido um controlador, denominado de **GRD/VS-MRAC** (Global Robust Exact Differentiator Variable Structure Model Reference Adaptive Controle), apresentado originalmente em (Nunes, Hsu & Lizarralde 2004).

Embora em (Nunes et al. 2004) o desenvolvimento teórico tenha ficado restrito ao caso de plantas com grau relativo  $n^* = 2$ . Neste trabalho será apresentada uma generalização para plantas de grau relativo arbitrário.

## 1.1 Notações e Definições

1. Os valores singulares máximo e mínimo de uma matriz  $A$  são denotados por  $\sigma_{max}(A)$  e  $\sigma_{min}(A)$ , respectivamente.
2. Os autovalores máximo e mínimo de uma matriz  $A$  são denominados de  $\lambda_{max}(A)$  e  $\lambda_{min}(A)$ , respectivamente.
3.  $\|x\|$  denota a norma *Euclidiana* do vetor  $x$  e  $\|A\| = \sigma_{max}(A)$  denota a norma induzida da matriz  $A$  correspondente, i.e., o máximo valor singular de  $A$ .

4. A norma  $L_{\infty}$  de um sinal  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é definida como em (Ioannou & Sun 1996) por

$$\|x_t\|_{\infty} := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|x(\tau)\|$$

5. O símbolo “ $p$ ” representa tanto a variável de *Laplace* quanto o operador diferencial ( $d/dt$ ), de acordo com o contexto.
6.  $f^{(i)}(t)$  representa a derivada  $i$  da função  $f(t)$  ( $f^{(i)}(t) = \frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}} f(t)$ ). Para o caso de  $i = 0$ , tem-se:  $f^{(0)}(t) = f(t)$ .

7. Será adotada a representação mista no domínio do tempo (espaço de estados) e no domínio da frequência (transformadas de *Laplace* e operadores). Entretanto, para dar um significado preciso para tal representação, os seguintes conceitos e notações serão adotados. A saída  $y$  de um sistema linear invariante no tempo com função de transferência  $H(p)$  e entrada  $u$  é denotada por  $H(p)u$ . Para  $H(p)$  estável (estritamente), considere uma realização arbitrária estável, possivelmente não-mínima

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

Seja  $h(t)$  a resposta ao impulso de  $H(p)$  e  $y^0$  o transiente devido ao estado inicial  $x^0(0)$  do sistema homogêneo

$$\dot{x}^0 = Ax^0, \quad y^0 = Cx^0$$

O estado  $x^0$  é denominado de estado transiente. O símbolo  $(.)^0$  será utilizado para identificar termos transientes. Desta forma a seguinte notação será adotada:

$$y(t) = H(p)u(t) = h(t) * u(t) + y^0(t)$$

Operadores de convolução serão denotados por

$$H(p) * u \quad (= h(t) * u(t))$$

Logo  $Hu = H * u + y^0$ .

8. A definição de Filippov para a solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo será adotada (Filippov 1964).
9. No caso de  $s(x)$ , com  $x$  sendo a solução de  $\dot{x} = f(x)$ . A derivada  $\dot{s}(x)$ , será considerada como sendo a derivada de  $s(x)$  com respeito ao tempo ao longo da trajetória do sistema  $\dot{x} = f(x)$ , sendo dada por:

$$\dot{s}(x) = \nabla_x s(x) f(x)$$

10.  $\pi(t)$  é uma função de decaimento exponencial, (i.e.,  $\pi(t) \leq Re^{-\lambda t}$ , para alguns escalares positivos  $\lambda$ ,  $R$  e  $\forall t$ ).
11. A norma de um operador ( $\|H(p)\|$  será considerada como sendo uma norma induzida do tipo  $L_\infty$ )
12. Um operador  $H(p)$  é de ordem  $\mathcal{O}(\tau)$  se e somente se

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\|H(p)\|}{\tau}$$

existe.

13. A sigla *sqw* é utilizada para representar uma onda quadrada unitária.

## 1.2 Organização da Tese

Este trabalho é organizado da seguinte forma:

- No capítulo 2 são apresentados conceitos básicos de sistemas a estrutura variável, sendo introduzido o conceito de modos deslizantes de ordem superior recentemente desenvolvido. Neste capítulo também é apresentado o diferenciador exato e robusto utilizado na construção do *GRED/VS-MRAC*.
- No capítulo 3 é apresentada a estrutura básica de um sistema baseado em modelo de referência. Neste capítulo também são apresentados detalhes sobre o desen-



volvimento teórico do *VS-MRAC*, sendo discutidas as principais características deste controlador.

- No capítulo 4 é apresentada a estrutura do controlador *GRED/VS-MRAC*, sendo mostrado o desenvolvimento teórico detalhado e sendo discutidas as principais características deste controlador. Além disso, são apresentadas simulações e resultados experimentais que comprovam os resultados teóricos obtidos e ilustram as principais características do controlador proposto.
- No capítulo 5 são apresentados conclusões gerais sobre o trabalho e perspectivas futuras visando a continuidade do mesmo.

## Capítulo 2

# Sistemas a Estrutura Variável

O controle por modos deslizantes (*SMC*) foi proposto e elaborado inicialmente no início da década de 1950 na União Soviética por Emelyanov e diversos outros pesquisadores (ver, (Hung, Gao & Hung 1993)).

Estas idéias ficaram restritas à União Soviética até meados da década de 1970, quando foram difundidas para o mundo através da publicação de um livro por (Itkis 1976) e de um artigo de levantamento bibliográfico por (Utkin 1978) ambos escritos em inglês (ver, (Edwards & Spurgeon 1998)).

O controle por modos deslizantes pode ser interpretado como um tipo especial de técnica de controle não-linear robusto. A principal característica de controladores a estrutura variável é que, uma vez que o modo deslizante tenha sido alcançado, o desempenho do sistema torna-se insensível a incertezas paramétricas da planta e a algumas classes de perturbações externas. Esta característica é conhecida por **propriedade da invariância**, i.e., quando o regime deslizante é alcançado a dinâmica invariante é regida pela dinâmica correspondente a superfície de deslizamento, que é escolhida pelo projetista.

Um dos aspectos mais intrigantes do controle por modos deslizantes é que a natureza descontínua da ação de controle tem como função principal o chaveamento entre sistemas com estruturas diferentes, gerando um novo tipo de movimento, denominado de **modo deslizante** (ver (Emelyanov 1970), (Itkis 1976) e (Utkin 1978)). Durante este movimento, a trajetória do estado  $x$  pode não ser nenhuma das trajetórias que descrevem os sistemas que estão sendo chaveados.

No modo deslizante convencional a trajetória do sistema fica restrita a uma superfície de deslizamento definida por  $s(x) = 0$ . Este conceito foi recentemente generalizado em (Levant 1993) com a introdução dos modos deslizantes de ordem superior (Higher Order Sliding Modes - HOSM). Neste caso a superfície de deslizamento passa a ser definida por  $s(x) = \dot{s}(x) = \dots = s^{(r-1)}(x) = 0$ , onde  $r$  é a ordem do deslizamento.

Embora o modo deslizante convencional seja um caso particular dos modos deslizantes de ordem superior, ele será chamado simplesmente por modo deslizante por razões históricas. Em algumas situações, por motivo de clareza, o termo modo deslizante convencional será empregado.

Do ponto de vista matemático, os Sistemas de Controle a Estrutura Variável (*VSCS*) são representados por equações diferenciais com lado direito descontínuo. O problema básico destas equações diferenciais é que as teorias convencionais de existência e unicidade de soluções não podem ser aplicadas, nos pontos nos quais o lado direito da equação não for analítico. Nesta tese será adotada a definição de Filippov para a solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo (Filippov 1964)

## 2.1 Sistema de Controle Descontínuo

Considere sistemas de controle do seguinte tipo:

$$\dot{x} = a(x, t) + b(x, t)u \quad (2.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $a(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  são funções suaves (contínuas no sentido de Lipschitz) e  $u \in \mathbb{R}$ , é uma lei de controle descontínua.

Suponha que a dinâmica desejada para o sistema seja obtida com trajetórias restritas à superfície de deslizamento  $s(x) = 0$ . Considera-se que  $s(x)$  é continuamente diferenciável e que a superfície  $\mathcal{S}$  definida por  $\mathcal{S} = \{x : s(x) = 0\}$  é contínua em  $x$ , satisfazendo a seguinte condição de regularidade:

$$\nabla_x s(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{S} \quad (2.2)$$

O sinal de controle é descontínuo e dado por:

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{se } s(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{se } s(x) < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

onde  $u^+(x)$  e  $u^-(x)$  são funções localmente Lipschitz. Note que  $u(x)$  não é definido em  $s(x) = 0$ .

## 2.2 Noções Básicas de Controladores por Modos Deslizantes

Nesta seção serão apresentadas as principais características do controle por modos deslizantes. Para tornar o processo mais intuitivo e visando a facilitar o entendimento, os conceitos serão passados através de exemplos ilustrativos.

Considere o seguinte sistema de controle a estrutura variável:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \\ u = -\text{sign}(s) \\ s = x_1 + x_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Este sistema é analiticamente definido em duas regiões do plano de fase por dois modelos matemáticos distintos:

- Na região I onde  $s(x) > 0$ , o modelo é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

- Na região II onde  $s(x) < 0$ , o modelo é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Os planos de fase para os sistemas representados pelas equações (2.5) e (2.6) são apresentados nas figuras 2.1 e 2.2 respectivamente. Para facilitar a visualização da região de validade de cada modelo, a reta de chaveamento ( $s(x) = 0$ ) foi traçada nos dois planos de fase. Observando a figura 2.1 pode ser visto que na região de validade do modelo matemático todas as trajetórias do sistema apontam na direção da reta de chaveamento. Este fenômeno também pode ser observado na figura 2.2.

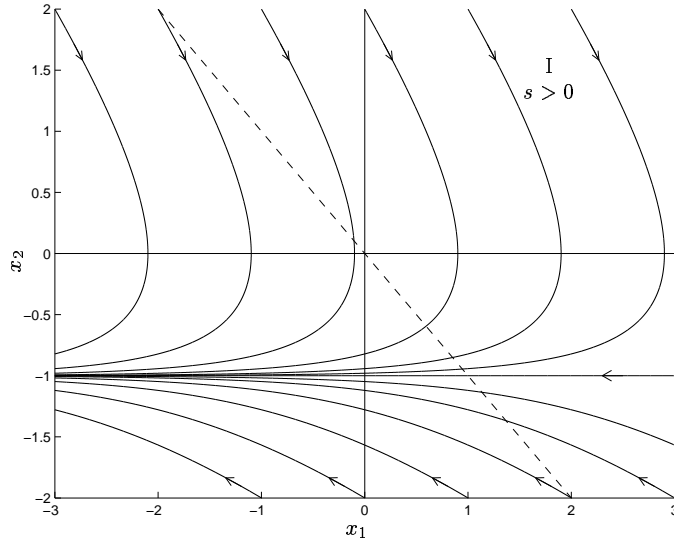


FIGURA 2.1: Plano de fase para o sistema (2.5).

O plano de fase para o sistema (2.4), apresentado na figura 2.3, é formado através do desenho do plano de fase do sistema (2.5) na região I e do plano de fase do sistema (2.6) na região II. Para se obter o plano de fase completo é necessário descrever a trajetória do sistema no conjunto  $s(x) = 0$ .

Para esta finalidade, será utilizado um argumento intuitivo, ilustrado na figura 2.4. Imagine que exista um atraso no chaveamento, ou seja, a mudança do sinal do controle ocorra um pouco depois da trajetória do sistema passar pela superfície de chaveamento.

A figura 2.4 apresenta a trajetória do sistema e o sinal de controle para diferentes condições de atraso. Na figura 2.4 (a) pode ser visto que se o atraso for igual a  $0.1s$ , a trajetória do sistema irá oscilar em torno da superfície de chaveamento. Na figura 2.4 (b) pode ser observado que à medida que o atraso diminui ( $0.05s$ ) a amplitude das oscilações é reduzida e a trajetória do sistema se aproxima cada vez mais da reta de chaveamento. Finalmente na figura 2.4 (c) pode ser visto que para um atraso de  $0.01s$

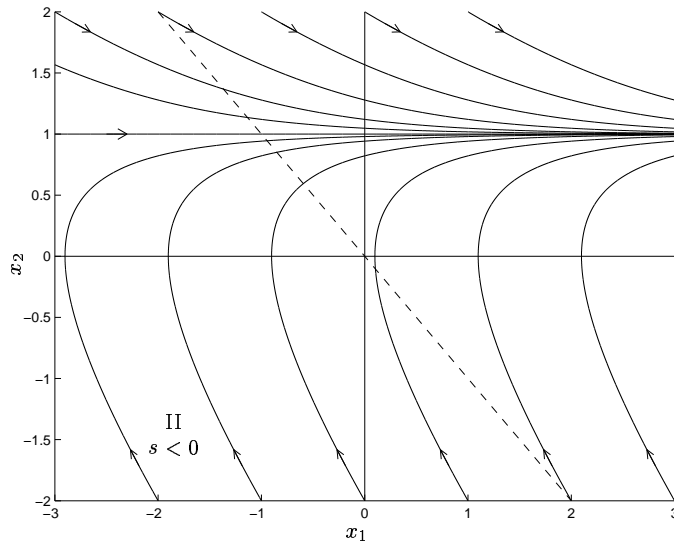


FIGURA 2.2: Plano de fase para o sistema (2.6).

a trajetória do sistema fica praticamente sobre a superfície de chaveamento. Deve-se destacar também que à medida que o sistema vai se aproximando do ideal (sistema sem atraso) a frequência de chaveamento vai crescendo indefinidamente, conforme pode ser visto nas figuras 2.4 (d), (e) e (f).

Através deste raciocínio é possível concluir que, no deslizamento ideal, a trajetória do sistema fica confinada à superfície deslizante, gerando um novo tipo de movimento, já que esta trajetória não pertence a nenhum dos dois sistemas que estão sendo chaveados. Além disso, a frequência de chaveamento se torna infinita e o sinal de controle passa a não ser mais definido no tempo.

Neste movimento, denominado de **modo deslizante**, a trajetória do estado se desloca por uma superfície denominada de **superfície de deslizamento**, denotada por  $s(x) = 0$ . Por outro lado, no espaço de estado, o chaveamento ocorre em uma superfície denominada de **superfície de chaveamento**. Embora no caso analisado estas duas superfícies se confundam, este fato nem sempre é verdadeiro.

De modo geral, o movimento das trajetórias do sistema pode ser dividido em duas fases. Na fase de aproximação, a trajetória iniciada em qualquer lugar do plano de fase é conduzida em tempo finito para a superfície de deslizamento. Na segunda fase, o sistema entra em modo deslizante, ocorrendo uma redução na ordem da dinâmica do sistema, que passa a ser dada pela equação da superfície de deslizamento. Para

o caso analisado, no deslizamento o sistema irá ser governado pela seguinte equação diferencial:

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = -x_1$$

Neste momento o sistema apresentará um comportamento idêntico ao de um sistema de primeira ordem, apresentando, assim, uma convergência exponencial para a origem.

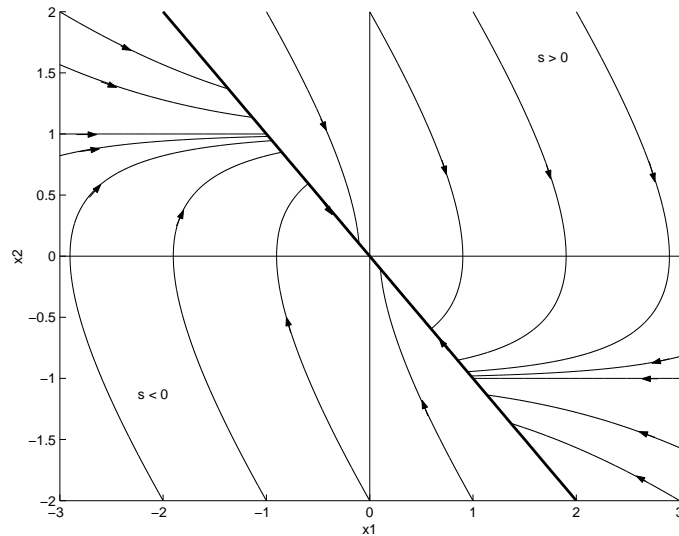


FIGURA 2.3: Plano de fase para o sistema (2.4).

Outro aspecto que deve ser ressaltado é a robustez deste tipo de controlador. Se apesar das incertezas e das perturbações existentes, as trajetórias do sistema continuarem apontando em direção a superfície de deslizamento, o sistema continuará entrando em modo deslizante, apresentando o mesmo desempenho, governado pela dinâmica referente a equação da superfície deslizante.

Para ilustrar este fato considere o seguinte exemplo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 0.5 \sin(x_1) - x_2 + u \\ u = -\text{sign}(s) \\ s = x_1 + x_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Observando o plano de fase do sistema (2.7), apresentado na figura 2.5, pode ser visto que apesar da perturbação existente no sistema, as trajetórias continuam apon-

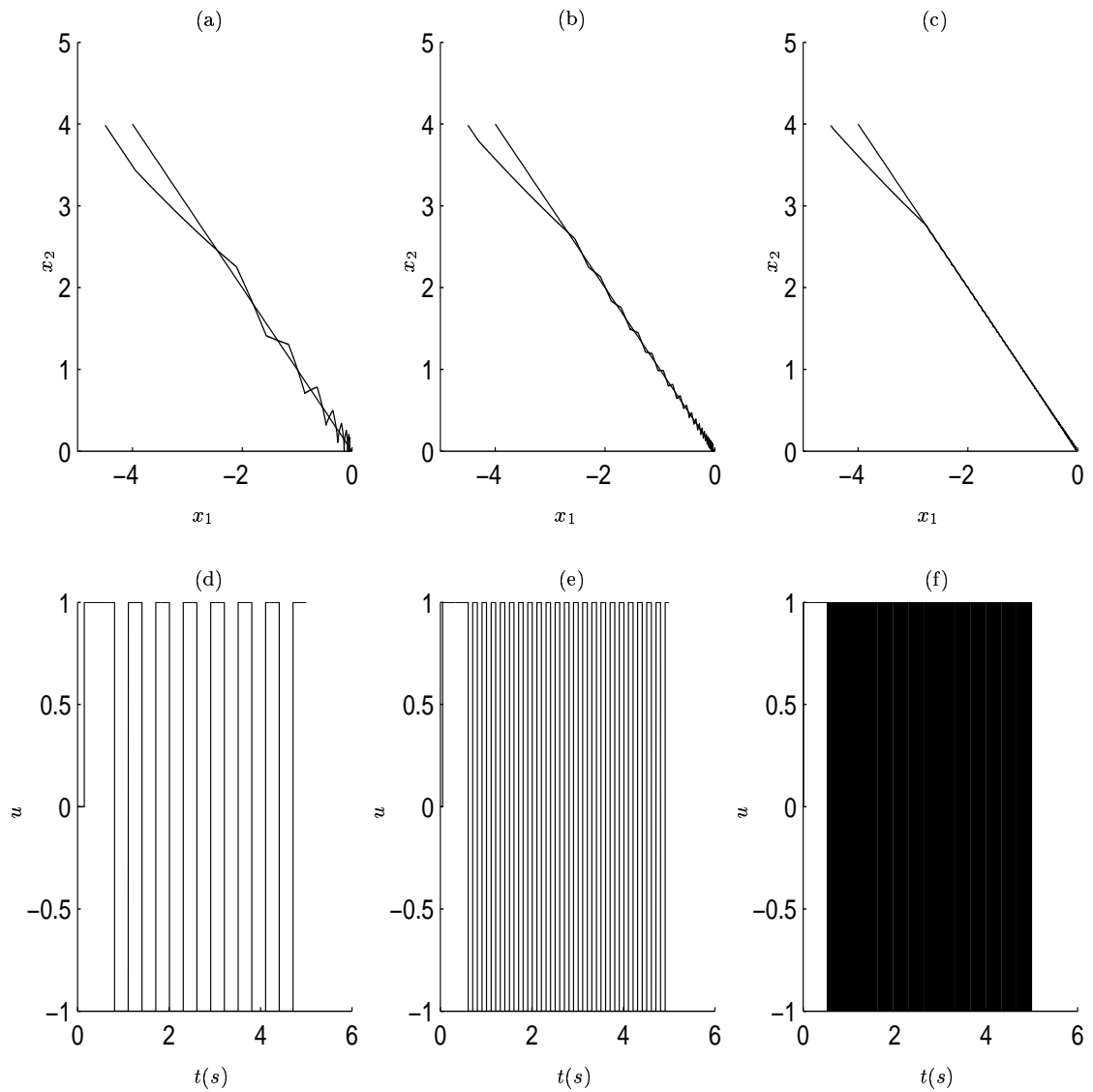


FIGURA 2.4: Trajetórias do sistema (2.4) para diferentes condições de atraso: (a) atraso igual a 0.1s; (b) atraso igual a 0.05s; (c) atraso igual a 0.01s. Sinal de controle do sistema (2.4) para diferentes condições de atraso: (d) atraso igual a 0.1s; (e) atraso igual a 0.05s; (f) atraso igual a 0.01s.



tando na direção da superfície de deslizamento, garantindo, assim, que o sistema entre em modo deslizante. A partir deste momento o sistema se torna insensível à perturbação.

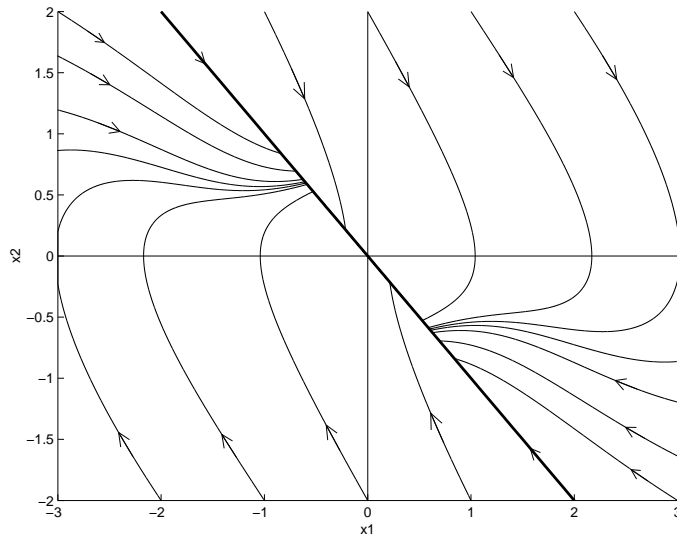


FIGURA 2.5: Plano de fase para o sistema (2.7).

## 2.3 Descrição Matemática de Modos Deslizantes

A descrição matemática de modos deslizantes não é simples, devido ao fato de que o sinal de controle descontínuo (equação (2.3)) e, conseqüentemente, o sistema (2.1), não serem definidos sobre a superfície de deslizamento. Além disso, a condição de *Lipschitz* para a existência e unicidade de solução de equações diferenciais é violada na vizinhança da superfície de chaveamento. Os métodos a seguir apresentam soluções para descrever, de maneira formal, o movimento durante o deslizamento.

### 2.3.1 Método de *Filippov*

Este método trata de forma axiomática a solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo. Considere a seguinte equação diferencial:

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.8}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $f(x, t)$  ( $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) é uma função mensurável (no sentido de Lebesgue) definida para quase todo  $(x, t)$  em um domínio  $E$  do espaço de fase  $(x, t)$ .

Além disso, para qualquer subconjunto compacto  $D \subset E$ , existe uma função  $A(t)$  finita (localmente integrável) em quase todo  $(x, t)$  em  $D$ , tal que:

$$\|f(x, t)\| < A(t) \quad (2.9)$$

A solução da equação diferencial com lado direito descontínuo é dada pela definição a seguir, devido a (Filippov 1964).

**Definição 1** (*Solução no sentido de Filippov*)

Uma função vetorial  $x(\cdot)$  é denominada uma solução de (2.8), definida em  $[t_0, t_1]$  se  $x(\cdot)$  é absolutamente contínua em  $[t_0, t_1]$ , e se, para quase todo  $t \in [t_0, t_1]$ , tem-se:

$$\dot{x} \in \mathcal{K}[f(x, t)] \quad (2.10)$$

com

$$\mathcal{K}[f(x, t)] = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \text{conv} f[B(x, \delta) - N, t] \quad (2.11)$$

onde “conv” denota o fecho convexo,  $B(x, \delta)$  é uma bola de raio  $\delta$  centrada em  $x$  e  $\mu$  é a medida no sentido de Lebesgue. A notação  $\bigcap_{\mu N = 0}$  denota a intersecção de todos os conjuntos  $N$  de medida nula (no sentido de Lebesgue).

Esta definição é interpretada da seguinte forma:

- **Interpretação de  $\mathcal{K}[f(x, t)]$**  - considere um ponto  $x^s$  da superfície de descontinuidade  $s(x) = 0$ .  $\mathcal{K}[f(x, t)]$  é o conjunto convexo mínimo que contém todos os valores de  $f(x, t)$  para  $x$  variando em quase (a menos de um conjunto de medida nula) toda uma vizinhança  $\delta$  ( $\delta \rightarrow 0$ ) do ponto  $x^s$ . Considere agora um ponto  $x^p$  que não pertença à superfície.  $\mathcal{K}[f(x, t)]$  corresponde ao próprio campo vetorial  $f(x^p, t)$ .
- **Interpretação da relação (2.10)** - esta relação, denominada de inclusão diferencial, define, de forma axiomática, que o campo vetorial da solução no sentido

de *Filippov* pertence a  $\mathcal{K}[f(x, t)]$ . A possibilidade de se rejeitar qualquer conjunto de medida nula em  $\mathcal{K}[f(x, t)]$  é que permite a definição do campo vetorial na superfície de chaveamento.

Para o sistema de controle considerado (2.1)(2.3), como  $u(x)$  é uma função do estado, o sistema em malha fechada pode ser representado por:

$$\dot{x} = \begin{cases} f^+(x, t) & \text{se } s(x) > 0 \\ f^-(x, t) & \text{se } s(x) < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

A superfície de chaveamento  $\mathcal{S}$  particiona o espaço de estados em duas regiões mutuamente excludentes, que são denotadas por  $\mathcal{F}^+ := \{x : s(x) > 0\}$  e  $\mathcal{F}^- := \{x : s(x) < 0\}$ . A normal em um ponto  $x \in \mathcal{S}$  é denotada<sup>1</sup> por  $N_S(x)$  e os escalares  $f_N^+(x, t) := N_S(x) \cdot f^+(x, t)$  e  $f_N^-(x, t) := N_S(x) \cdot f^-(x, t)$  são as projeções de  $f^+(x, t)$  e  $f^-(x, t)$ , respectivamente em  $N_S(x)$ .

Se a trajetória do sistema (2.1) iniciada em  $\mathcal{F}^+$  ou  $\mathcal{F}^-$  atingir a superfície  $\mathcal{S}$ , i.e.,  $x(t^*) = x^* \in \mathcal{S}$ , ela pode cruzar  $\mathcal{S}$  ou ser forçada a permanecer sobre  $\mathcal{S}$ . Por exemplo, se  $f_N^+(x^*, t^*)$  e  $f_N^-(x^*, t^*)$  possuírem o mesmo sinal, i.e.,  $f_N^+ f_N^- > 0$ , então os dois vetores  $f^+(x^*, t^*)$  e  $f^-(x^*, t^*)$  apontarão para a mesma região e portanto a trajetória irá cruzar a superfície  $s(x) = 0$ . Se  $f_N^+(x^*, t^*) \leq 0$ ,  $f_N^-(x^*, t^*) \geq 0$  e  $f_N^-(x^*, t^*) - f_N^+(x^*, t^*) > 0$  os dois vetores  $f^+(x^*, t^*)$  e  $f^-(x^*, t^*)$  estarão direcionados para a superfície  $\mathcal{S}$ . Neste caso pode ser mostrado que para  $x^* \in \mathcal{S}$ , o campo vetorial  $f_0(x^*, t^*)$ , da solução no sentido de Filippov, pode ser determinado pelos campos vetoriais  $f^+(x^*, t^*)$  e  $f^-(x^*, t^*)$  que são os valores limites de  $f$  obtidos através da aproximação da superfície  $\mathcal{S}$  a partir de  $\mathcal{F}^+$  e  $\mathcal{F}^-$  respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x^*, t^*) \\ f_0(x^*, t^*) &= \alpha f^+(x^*, t^*) + (1 - \alpha) f^-(x^*, t^*), \quad \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  é um escalar que depende das projeções  $f_N^+$  e  $f_N^-$  dos campos  $f^+$  e  $f^-$  sobre o

---

<sup>1</sup>Por conveniência de notação, a direção positiva da normal  $N_S(x)$  será definida como sendo de  $\mathcal{F}^-$  para  $\mathcal{F}^+$ . Portanto, se o gradiente  $\nabla_x s(x) \in \mathbb{R}^n$  da superfície  $\mathcal{S}$  em  $x \in \mathcal{S}$  é direcionado de  $\mathcal{F}^-$  para  $\mathcal{F}^+$ , então  $N_S(x) = \nabla_x s(x)$  caso contrário  $N_S(x) = -\nabla_x s(x)$ .

vetor normal  $N_S(x)$ , respectivamente, do seguinte modo:

$$\alpha = \frac{f_N^-(x^*, t^*)}{f_N^-(x^*, t^*) - f_N^+(x^*, t^*)} \quad (2.13)$$

Note que para esta definição é fácil verificar que o campo vetorial  $f_0(x^*, t^*)$  é ortogonal ao gradiente de  $\mathcal{S}$ , sendo, portanto, tangente a superfície  $s(x) = 0$ . Deste modo, as trajetórias do sistema são forçadas a permanecer sobre a superfície de deslizamento.

A interpretação geométrica da solução de Filippov na superfície de deslizamento  $\mathcal{S}$  é apresentada na figura 2.6. No ponto  $x^* \in \mathcal{S}$ , os vetores  $f^+$ ,  $f^-$  estão direcionados para as regiões  $\mathcal{F}^-$ ,  $\mathcal{F}^+$ , respectivamente. O vetor  $f_0$  do modo deslizante é a intersecção do hiperplano tangente a  $\mathcal{S}$  em  $x^*$  com o segmento de linha que une  $f^+$  e  $f^-$ .

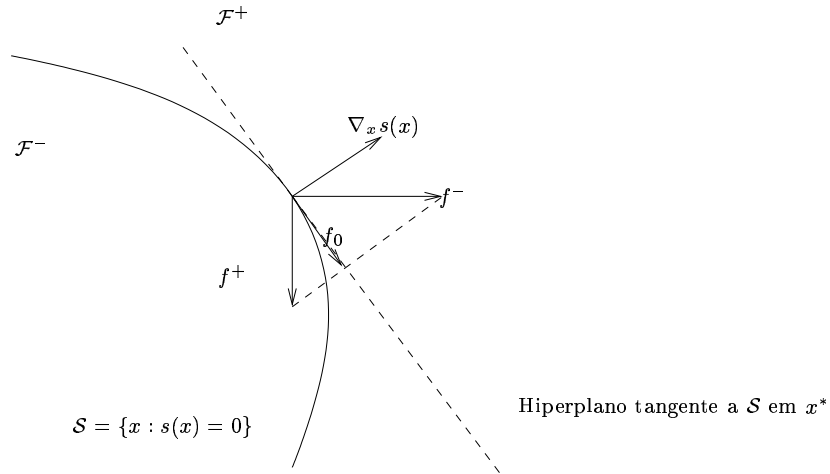


FIGURA 2.6: Interpretação geométrica da solução de Filippov.

Até este momento foram apresentadas as condições necessárias para a existência da solução do sistema (2.8) no sentido de Filippov. Para concluir, basta mostrar as condições para as quais esta solução seja única. Se  $f^+$  e  $f^-$  forem localmente Lipschitz (em  $x$ ) nas regiões  $\mathcal{F}^+$  e  $\mathcal{F}^-$  respectivamente e  $f$  for contínua por partes, uma condição suficiente para garantir unicidade da solução é que pelo menos uma das desigualdades

$$f_N^- > 0, \quad f_N^+ < 0 \quad (2.14)$$

seja satisfeita para cada  $x \in \mathcal{S}$ .

### 2.3.2 Existência de Modo Deslizante

Intuitivamente, para que o sistema entre em modo deslizante, a superfície de deslizamento deve ser pelo menos localmente atrativa, i.e., deve existir um domínio envolvendo a superfície no qual as trajetórias do sistema apontem na sua direção. Este fato pode ser matematicamente expresso da seguinte forma:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \quad (2.15)$$

em algum domínio  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ . Neste caso a superfície de deslizamento seria:

$$\mathcal{D} = S \cap \Omega = \{x \in \Omega : s(x) = 0\}$$

A expressão dada em (2.15) é freqüentemente substituída, pelo critério mais sucinto, porém equivalente dado por:

$$\dot{s}s < 0 \quad (2.16)$$

As condições (2.15) e (2.16) são chamadas de **condições de alcançabilidade**. No caso da condição (2.16) ser satisfeita globalmente, i.e  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , a função

$$V(s) = \frac{1}{2}s^2$$

será uma função de Lyapunov para o estado  $s$ , uma vez que  $\dot{V}(s) = \dot{s}s < 0$ .

Embora as condições (2.15) e (2.16) sejam freqüentemente encontradas na literatura, elas não garantem a existência de um modo deslizante ideal, já que estas condições garantem apenas que a superfície de deslizamento seja alcançada assintoticamente.

Para garantir que a superfície de deslizamento seja alcançada em tempo finito, uma condição mais restritiva deve ser satisfeita. Uma condição muito utilizada na literatura é a condição de alcançabilidade- $\eta$  dada por:

$$\dot{s}s \leq -\eta|s| \quad (2.17)$$

onde  $\eta$  é uma constante positiva.

Reescrevendo a equação (2.17) como

$$\frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt} \leq -\eta |s|$$

e integrando de 0 a  $t_s$ , segue que:

$$|s(t_s)| - |s(0)| \leq -\eta t_s$$

Deste modo, o tempo necessário para atingir a superfície  $s = 0$ , representado por  $t_s$ , satisfaz:

$$t_s \leq \frac{|s(0)|}{\eta} \quad (2.18)$$

Nos casos analisados anteriormente, esta condição é satisfeita, garantindo, assim, o aparecimento do deslizamento ideal.

- Exemplo 1:

$$\begin{aligned} s &= x_1 + x_2 \\ \dot{s} &= -\text{sign}(s) \\ s\dot{s} &\leq -|s| \end{aligned}$$

- Exemplo 2:

$$\begin{aligned} s &= x_1 + x_2 \\ \dot{s} &= 0.5 \sin(x_1) - \text{sign}(s) \\ s\dot{s} &\leq -|s| (1 - 0.5 \sin(x_1)) \\ s\dot{s} &\leq -0.5 |s| \end{aligned} \quad (2.19)$$

### 2.3.3 Método da Regularização

Uma abordagem simples para o problema de se encontrar uma representação matemática para o modo de deslizamento real é a introdução de imperfeições físicas (atrasos, zona morta, histerese) no dispositivo de chaveamento. Como resultado, o modo de deslizamento que apareceria na superfície descontínua dará lugar a trajetórias que

são contínuas por parte. Desta forma, as dificuldades matemáticas encontradas para descrever o comportamento do sistema são removidas. A equação do modo deslizante ideal correspondente é obtida através de uma análise limite quando os parâmetros que representam as imperfeições tendem a zero.

Por outro lado, deve ser conhecida a natureza dessas imperfeições, o que nem sempre é fácil. Para resolver este problema pode-se usar o conceito de “camada de fronteira” (*boundary layer*) que permite obter as equações do deslizamento sem especificar a natureza das imperfeições.

Considere novamente o sistema (2.1) e suponha que a superfície de deslizamento exista e seja dada por  $s(x) = 0$ . Essencialmente, a idéia é substituir o controle  $u$ , em uma vizinhança de  $s(x) = 0$ , por outro controle  $\tilde{u}$  que leve em consideração todas as imperfeições (tanto do dispositivo de chaveamento quanto da planta). O movimento do sistema passa a ser descrito por:

$$\dot{x} = a(x, t) + b(x, t)\tilde{u}$$

Assume-se que a solução da equação regularizada acima existe no sentido usual (clássico). Entretanto, esta solução resulta em um movimento que não ocorre somente sobre a superfície  $s(x) = 0$ , mas sim em alguma vizinhança

$$|s(x)| \leq \Delta$$

onde  $\Delta$  é uma constante positiva pequena. Este movimento é denominado de deslizamento real. Como foi visto na figura 2.4 durante o deslizamento real o chaveamento do sistema apresenta uma frequência finita. Este fenômeno denominado de *chattering* é extremamente prejudicial, pois pode gerar oscilações indesejadas de alta frequência, além de poder excitar modos rápidos do sistema que haviam sido desprezados, podendo tornar o sistema instável.

Caso as imperfeições do sistema tendam para zero, i.e. caso  $\Delta \rightarrow 0$  o deslizamento real tenderá para o deslizamento ideal e a frequência de chaveamento do sistema tenderá para o infinito, evitando, assim, o surgimento de *chattering*.

### 2.3.4 Método do Controle Equivalente

Uma forma alternativa de se representar modos deslizantes é através do conceito de controle equivalente proposto por (Utkin 1977). Este método consiste, basicamente, em encontrar um controle **contínuo**  $u_{eq}$ , chamado de **controle equivalente**, que, para uma dada condição inicial **sobre a superfície deslizante**, a trajetória resultante do sistema

$$\dot{x} = a(x, t) + b(x, t)u_{eq}$$

coincida com a trajetória descrita pelo sistema a estrutura variável (2.1) (2.3) durante o deslizamento.

Para encontrar o controle equivalente é suficiente notar que  $\dot{s}(x) = 0$  é uma condição necessária para que as trajetórias de estado permaneçam na superfície de deslizamento  $s(x) = 0$ . Derivando  $s(x)$  com respeito ao tempo ao longo das trajetórias de (2.1), obtém-se:

$$\dot{s}(x) = \frac{\partial s}{\partial x}a(x, t) + \frac{\partial s}{\partial x}b(x, t)u = 0 \quad (2.20)$$

Resolvendo a equação (2.20) para  $u$ , pode-se obter o seguinte resultado:

$$u_{eq} = - \left( \frac{\partial s}{\partial x}b(x, t) \right)^{-1} \left( \frac{\partial s}{\partial x}a(x, t) \right) \quad (2.21)$$

onde a existência de  $\left( \frac{\partial s}{\partial x}b(x, t) \right)^{-1}$  é uma condição necessária.

Para ilustrar este procedimento considere o seguinte exemplo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ u = -\text{sign}(s) \\ s = x_1 + 2x_2 \end{cases} \quad (2.22)$$

A figura 2.7 apresenta o plano de fase para o sistema (2.22). Repare que neste caso o sistema só entra em modo deslizante dentro do conjunto  $\mathcal{D}$ , definido por

$$\mathcal{D} = \{x : |x_2| < 2, s(x) = 0\}$$



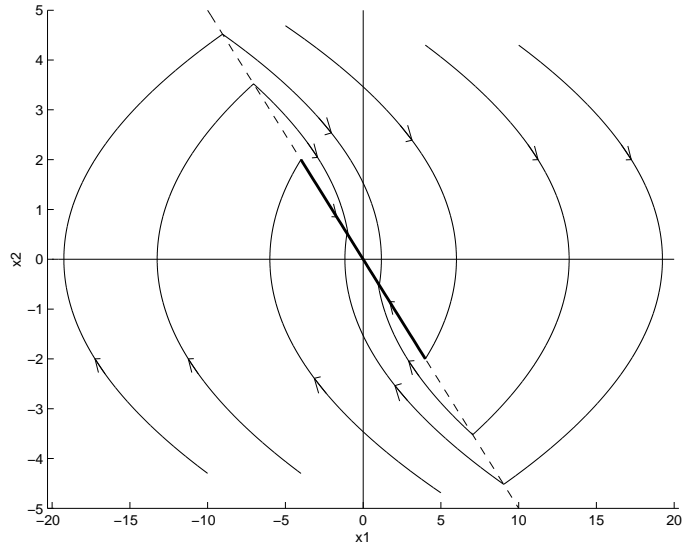


FIGURA 2.7: Plano de fase para o sistema (2.22).

Para este caso o controle equivalente é obtido do seguinte modo:

$$\dot{s}(x) = x_2 + 2u \quad \Rightarrow \quad u_{eq} = -\frac{x_2}{2} \quad (2.23)$$

Desta forma, substituindo o controle equivalente obtido em (2.23) no sistema (2.22), pode-se obter o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u_{eq} \\ u_{eq} = -\frac{x_2}{2} \end{cases} \quad (2.24)$$

que é equivalente ao sistema (2.22) durante o deslizamento.

A figura 2.8 apresenta o gráfico dos sinais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $u$  dos sistemas (2.22) e (2.24), para as seguintes condições iniciais:  $x_1(0) = 2$  e  $x_2(0) = -1$ . Nesta figura, pode ser visto que os dois sistemas apresentam o mesmo desempenho.

Embora o controle equivalente (figura 2.8 (d)) seja muito diferente do controle  $u$  descontínuo (figura 2.8 (c)), ele pode ser pensado como sendo o comportamento médio deste controle descontínuo.

Como foi mencionado anteriormente o sinal de controle  $u$  não é necessariamente uma função do tempo no sentido usual quando o sistema entra em modo deslizante.

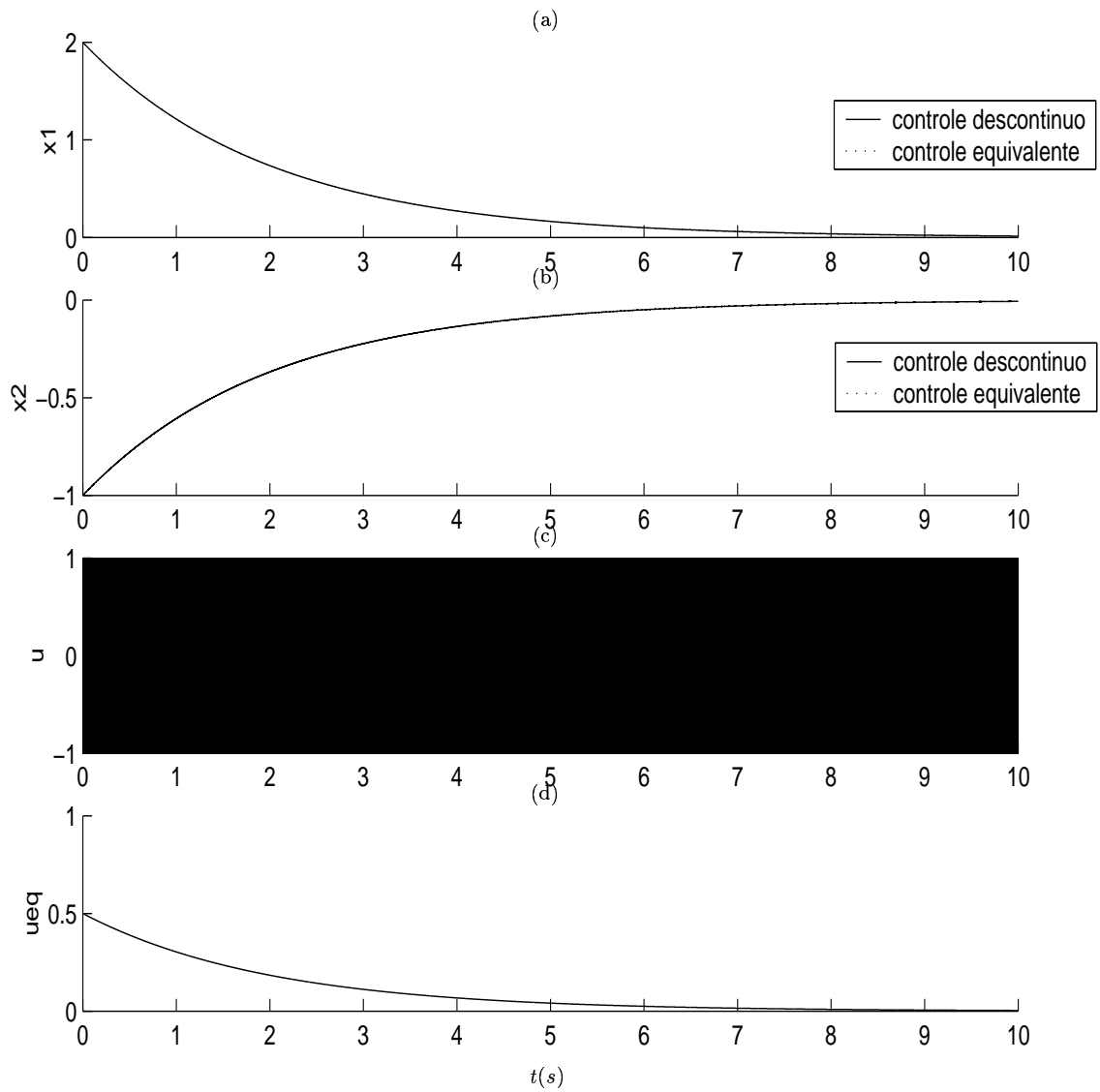


FIGURA 2.8: (a) Gráfico de  $x_1$  x  $t$  para os sistemas (2.22) e (2.24); (b) Gráfico de  $x_2$  x  $t$  para os sistemas (2.22) e (2.24); (c) Sinal de controle do sistema (2.22) (controle descontinuo); (d) Sinal de controle do sistema (2.24) (controle equivalente).

Para evitar confusão, o termo  $u(t)$  será utilizado para denotar a função localmente integrável, que é equivalente a  $u$ , no sentido de *controle equivalente*, ao longo de qualquer solução de Filippov do sistema em malha fechada. Também deve ser enfatizado que a solução de Filippov é, *por definição*, absolutamente contínua. Então, ao longo de qualquer uma destas soluções,  $u$  pode ser substituído por  $u(t)$ , no lado direito das equações diferenciais governantes. Embora o controle equivalente  $u(t) = u_{eq}(t)$  não seja diretamente disponível, ele pode ser obtido indiretamente através da filtragem de  $u$  utilizando um filtro  $G(s)$  estritamente próprio ( $G(s)u = G(s)u(t) = G(s)u_{eq}(t)$ ).

## 2.4 Caso Geral: Projeto da Lei de Controle

Considere o seguinte sistema não linear monovariável (SISO)

$$\begin{cases} \dot{x} &= a(x, t) + b(x, t)u \\ s &= s(x, t) \end{cases} \quad (2.25)$$

onde  $a(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  são funções suaves (contínuas no sentido de Lipschitz) e desconhecidas,  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u \in \mathbb{R}$  é o sinal de controle e  $s = s(x, t)$  é uma função de saída mensurável, cuja dinâmica dos zeros (ver, (Isidori 1995)) associada é estável e satisfaz o objetivo de controle (rastreamento ou estabilização).

O grau relativo do sistema  $n^*$  é assumido como conhecido e constante, sendo igual a 1. Isto significa de modo simplificado que o controle  $u$  só aparece explicitamente na primeira derivada de  $s$ .

O objetivo é garantir que o sistema entre em deslizamento ideal num tempo finito, i.e., a seguinte restrição deve ser satisfeita:

$$s(x, t) = 0, \quad \forall t > T_1 \quad (T_1 \text{ finito}) \quad (2.26)$$

Para satisfazer a restrição (2.26) basta atender a condição de alcançabilidade- $\eta$  (2.17). Derivando  $s(x, t)$  com respeito ao tempo, tem-se:

$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x}a(x, t) + \frac{\partial s}{\partial x}b(x, t)u = h(x, t) + g(x, t)u \quad (2.27)$$

Para o projeto da lei de controle as seguintes hipóteses devem ser satisfeitas.

**Hipótese 1** Assume-se que os limitantes das funções  $|g(x, t)|$  e  $|h(x, t)|$  são conhecidos. Mais especificamente, são conhecidas funções positivas  $H(x, t)$ ,  $G_1(x, t)$  e  $G_2(x, t)$  tais que, globalmente

$$\begin{cases} |h(x, t)| \leq H(x, t) \\ 0 < G_1(x, t) \leq |g(x, t)| \leq G_2(x, t) \end{cases} \quad (2.28)$$

**Hipótese 2** Assume-se que o sinal de  $g(x, t)$  é conhecido.

Portanto, o controle

$$u = -\frac{H(x, t) + \eta}{G_1(x, t)} \text{sign}(g(x, t)) \text{sign}(s(x, t)) \quad (2.29)$$

garante que a condição (2.17) seja satisfeita. Como resultado,  $s(x, t)$  será globalmente conduzida para zero em algum tempo finito, independentemente do crescimento não linear das incertezas.

## 2.5 Modos Deslizantes de Ordem Superior

A idéia básica no controle por modos deslizantes é garantir que o sistema satisfaça uma restrição apropriadamente escolhida. Para isto, o controle deve reagir imediatamente a qualquer desvio que o sistema apresente, conduzindo-o novamente para a restrição através de um controle suficientemente intenso.

O controle por modos deslizantes, por apresentar esta característica, é muito eficiente para o controle de sistemas incertos, tendo provado sua robustez e grande acurácia com respeito a diversas perturbações internas e externas.

Entretanto, a reação intensa e imediata ao mínimo desvio da restrição, pode provocar oscilações indesejadas de alta freqüência no sistema. Este fenômeno denominado de *chattering* é um dos principais problemas deste controlador.

Recentemente proposto (Levant 1993), o controle por modos deslizantes de ordem superior (Higher Order Sliding Modes - HOSM) generaliza a idéia básica do controle por modos deslizantes atuando nas derivadas temporais de ordem superior do desvio em

relação à restrição, em vez de influenciar a primeira derivada do desvio como acontece no controle por modos deslizantes convencional.

O controle por modos deslizantes de ordem superior além de preservar as principais vantagens do controle por modos deslizantes e fornecer uma acurácia ainda maior, também possibilita a remoção do *chattering* (Fridman & Levant 2002).

O principal problema na implementação de um HOSM é o acréscimo de informação requerida. De forma geral, um controlador por modos deslizantes de ordem  $r$ , para manter a restrição  $s = 0$ , necessita que os sinais  $s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)}$  estejam disponíveis. Este problema foi resolvido, pelo menos de forma teórica, através dos diferenciadores exatos e robustos (Robust Exact Differentiators - REDs), apresentados em (Levant 1999, Levant 2001*b*, Levant 2001*a*).

Estes diferenciadores são capazes de fornecer em tempo real derivadas exatas até a ordem  $l$ , desde que a derivada de ordem  $l + 1$  seja limitada. Na prática, devido a existência de atrasos e ruídos o diferenciador apresenta erros na estimativa das derivadas, embora possua uma performance assintoticamente ótima na presença de pequenos ruídos de medição (Levant 2003).

### 2.5.1 Definições de Modos Deslizantes de Ordem Superior

O modo deslizante de ordem superior, é na verdade, um movimento num conjunto de descontinuidade do sistema dinâmico entendido no sentido de Filippov (Filippov 1964). A ordem do deslizamento caracteriza o grau de suavidade dinâmica na vizinhança do modo deslizante. Se a tarefa for garantir que uma função suave  $s$  seja mantida igual a zero, então a ordem do deslizamento é o número total de derivadas contínuas de  $s$  (incluindo a derivada zero, i.e.,  $s^{(0)} = s$ ), na vizinhança do modo deslizante. Desta forma, o modo deslizante de ordem  $r$  é determinado pelas igualdades  $s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots = s^{(r-1)} = 0$ , que formam uma condição de dimensão  $r$  no espaço de estado do sistema dinâmico.

Deve ser ressaltado que para um deslizamento de ordem  $r$  a derivada  $s^{(r)}$  não é uma função contínua das variáveis do espaço de estado ou não existe devido, talvez, à não unicidade da solução. O modo deslizante convencional, no qual a maior parte dos sistemas a estrutura variável é baseada é de primeira ordem ( $\dot{s}$  é descontínua).

Segundo a definição, para que o modo deslizante convencional se estabeleça a convergência deve ocorrer em tempo finito. Já no caso dos modos deslizantes de ordem superior a convergência também pode ser assintótica.

Casos triviais de HOSM assintoticamente estáveis são encontrados em diversos controles a estrutura variável. Por exemplo, considere um VSC que mantém a restrição  $x + \dot{x} = 0$  por meio de um modo deslizante de primeira ordem. Neste caso, existe um modo deslizante de segunda ordem assintoticamente estável com respeito a restrição  $x = 0$  na origem  $x = \dot{x} = 0$  (somente neste ponto).

No modo deslizante convencional a precisão obtida é proporcional ao intervalo de tempo entre duas medições ou ao atraso de chaveamento<sup>2</sup>, i.e.  $|s| = O(\tau)$ . Já o modo deslizante de ordem  $r$  pode fornecer uma precisão de até a ordem  $r$  com respeito ao intervalo de medição ou ao atraso de chaveamento, i.e.  $|s| = O(\tau^r)$

Embora o controle por modos deslizantes de ordem superior apresente algumas vantagens sobre o controle por modos deslizantes convencional, o fato de não existir uma condição de alcançabilidade generalizada, dificulta muito o desenvolvimento deste tipo de controlador.

### 2.5.1.1 Modos Deslizantes sobre Variedades

Seja  $\mathcal{S}$  uma variedade suave. O próprio conjunto  $\mathcal{S}$  é chamado de conjunto deslizante de primeira ordem com respeito à superfície  $\mathcal{S}$ . O conjunto deslizante de segunda ordem  $\mathcal{S}_2$  é definido como sendo o conjunto de pontos  $x$ , para os quais  $\mathcal{K}[f(x)]$  esteja completamente situado dentro do espaço tangente  $T_x\mathcal{S}$  à variedade  $\mathcal{S}$  no ponto  $x$ .

**Definição 2** *Existe um modo deslizante de primeira (ou segunda) ordem sobre uma variedade  $\mathcal{S}$  numa vizinhança de um ponto  $x$ , se nesta vizinhança o conjunto deslizante de primeira (ou segunda) ordem for um conjunto integral, i.e. consistir de trajetórias no sentido de Filippov.*

Seja  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$ . Denote o conjunto de pontos deslizantes de segunda ordem com respeito à variedade  $\mathcal{S}$  por  $\mathcal{S}_2$ . Assuma que a própria variedade  $\mathcal{S}_2$  pode ser considerada com sendo suficientemente suave. Então a mesma construção pode ser empregada para

---

<sup>2</sup>Por conveniência de notação será utilizado o mesmo símbolo  $\tau$  para representar tanto o intervalo de tempo entre duas medições quanto o atraso de chaveamento

$\mathcal{S}_2$ . Denote o conjunto de pontos deslizantes de segunda ordem com respeito à variedade  $\mathcal{S}_2$  por  $\mathcal{S}_3$ . O conjunto  $\mathcal{S}_3$  é chamado de conjunto deslizante de terceira ordem com respeito à variedade  $\mathcal{S}$ . Continuando este processo, pode se obter conjuntos deslizantes de qualquer ordem.

**Definição 3** *Existe um modo deslizante de ordem  $r$  sobre uma variedade  $\mathcal{S}$  numa vizinhança de um ponto  $x \in \mathcal{S}_r$ , se nesta vizinhança o conjunto deslizante de ordem  $r$   $\mathcal{S}_r$  for um conjunto integral, i.e. consistir de trajetórias no sentido de Filippov.*

Para ilustrar estes conceitos considere o seguinte exemplo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = v \\ s = x_1 + x_2 \\ v = -2\text{sign}(\dot{s} + |s|^{1/2} \text{sign}(s)) \end{cases} \quad (2.30)$$

Considere a variedade suave  $\mathcal{S} := \{x : x_1 + x_2 = 0\}$ . Como  $\mathcal{S}$  é um plano o espaço tangente  $T_x\mathcal{S}$  será igual à  $\mathcal{S}$ . Desta forma, o conjunto deslizante de segunda ordem corresponde ao conjunto de pontos  $x$ , para os quais  $\mathcal{K}[f(x)]$  esteja completamente situado dentro do plano  $\mathcal{S}$ .

Considere o conjunto  $\mathcal{S}_2 := \{x : x_1 + x_2 = 0, x_3 = 0\}$ , formado pela intersecção da variedade suave  $\mathcal{S}$  com a variedade suave  $\mathcal{M} := \{x : x_3 = 0\}$ , conforme pode ser visto na figura 2.9.

Considere um ponto  $x^*$  pertencente ao conjunto  $\mathcal{S}_2$ . Para este ponto, tem-se:

$$f^+(x^*) = \begin{bmatrix} x_2^* \\ -x_2^* \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f^-(x^*) = \begin{bmatrix} x_2^* \\ -x_2^* \\ 2 \end{bmatrix}$$

Note que os vetores  $f^+(x^*)$  e  $f^-(x^*)$  pertencem ao plano  $\mathcal{S}$ . Logo o fecho convexo de Filippov  $\mathcal{K}[f(x)]$  estará completamente situado dentro do plano  $\mathcal{S}$ . Desta forma, o conjunto  $\mathcal{S}_2$  corresponde a um conjunto deslizante de segunda ordem. Como  $\mathcal{S}_2$  é um conjunto integral, pode-se concluir que existe um modo deslizante de segunda ordem sobre a variedade  $\mathcal{S}$  no conjunto  $\mathcal{S}_2$ .

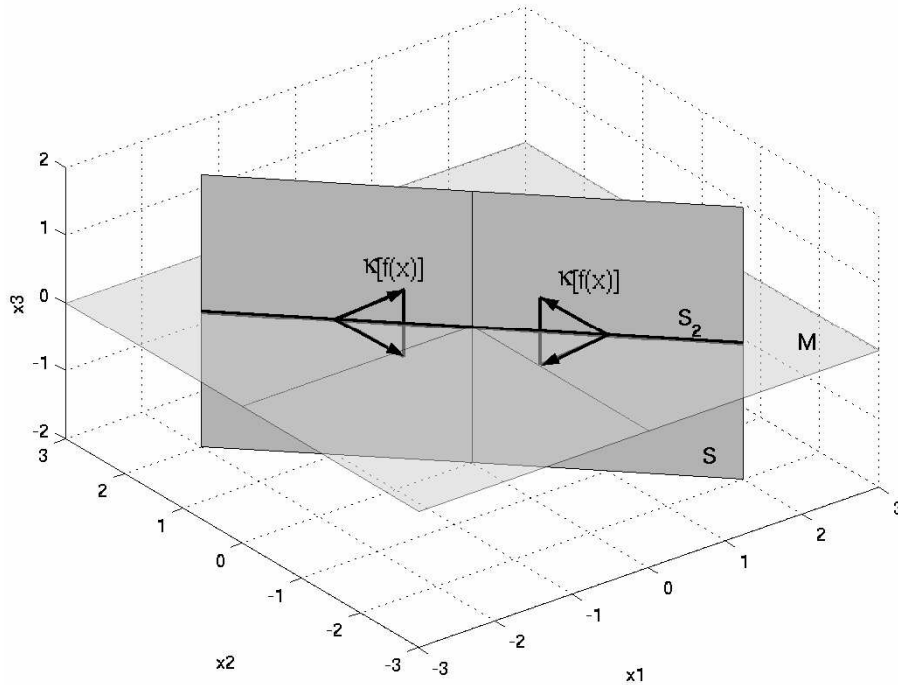


FIGURA 2.9: Exemplo de um modo deslizante de segunda ordem.

### 2.5.1.2 Modos Deslizantes com Respeito a Funções de Restrição

Considere que a restrição seja dada pela equação  $s(x) = 0$ , onde  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de restrição suficientemente suave. Assuma que todas as derivadas temporais ao longo das trajetórias  $s, \dot{s}, \ddot{s}, \dots, s^{(r-1)}$  sejam funções contínuas das variáveis de estado do sistema em malha fechada. Então o conjunto deslizante de ordem  $r$  é determinado pelas seguintes igualdades.

$$s = \dot{s} = \ddot{s} = \dots s^{(r-1)} = 0 \quad (2.31)$$

**Definição 4** *Seja o conjunto deslizante de ordem  $r$  não vazio e assuma que ele seja localmente um conjunto integral no sentido de Filippov (i.e. consiste de trajetórias de Filippov do sistema dinâmico descontínuo). Então o movimento resultante, satisfazendo a restrição (2.31) é chamado de modo deslizante de ordem  $r$  com respeito a função de restrição  $s$  (ver figura 2.10).*

Desta forma, o modo deslizante de ordem  $r$  é determinado pelas igualdades (2.31), que impõem uma condição de dimensão  $r$  sobre o estado do sistema dinâmico. A ordem



do deslizamento caracteriza o grau de suavidade dinâmica em alguma vizinhança do modo deslizante.

Suponha que  $s, \dot{s}, \ddot{s}, \dots, s^{(r-1)}$  sejam funções diferenciáveis de  $x$  e que

$$\text{posto} \left( \left[ \nabla_x s, \nabla_x \dot{s}, \dots, \nabla_x s^{(r-1)} \right] \right) = r \quad (2.32)$$

A igualdade (2.32) em conjunto com o requerimento que as correspondentes derivadas de  $s$  sejam funções diferenciáveis de  $x$  formam uma condição chamada de **condição de regularidade de deslizamento de ordem  $r$** . Se esta condição for satisfeita então o conjunto deslizante de ordem  $r$  será uma variedade diferenciável (ver Teorema A.1) e a Definição 4 será equivalente a Definição 3.

**Proposição 1** *Considere que a condição de regularidade (2.32) seja satisfeita e que a variedade deslizante de ordem  $r$  não seja vazia. Então um modo deslizante de ordem  $r$  com respeito a função de restrição  $s$  existe se e somente se a intersecção do fecho convexo de Filippov com o espaço tangente à variedade (2.31) não for vazia para qualquer ponto de deslizamento de ordem  $r$ .*

*Prova: ver (Levant 2003).* ■

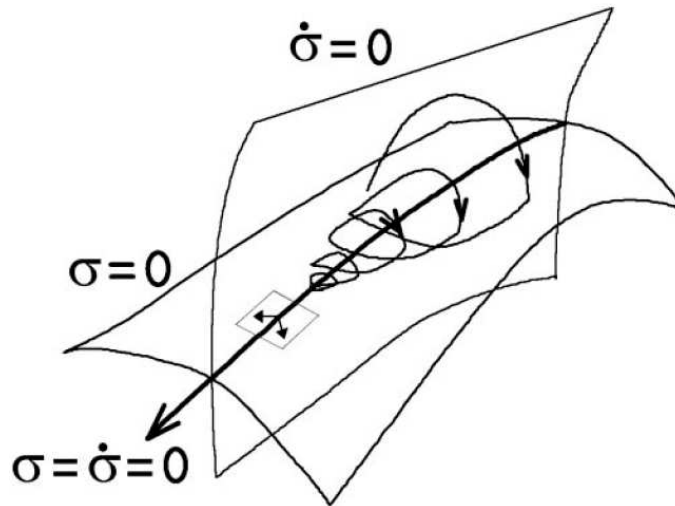


FIGURA 2.10: Modo deslizante de segunda ordem.

Um modo deslizante é chamado de estável se o conjunto deslizante integral correspondente for estável.

Para ilustrar estes conceitos considere o sistema (2.30). Derivando  $s(x)$  com respeito ao tempo ao longo das trajetórias de (2.30), obtém-se:

$$\dot{s}(x) = x_3$$

Portanto,  $s(x)$  e  $\dot{s}(x)$  são funções diferenciáveis de  $x$ . O conjunto deslizante de segunda ordem, determinado pelas igualdades  $s(x) = \dot{s}(x) = 0$ , é dado por  $\mathcal{S}_2 := \{x : x_1 + x_2 = 0, x_3 = 0\}$ , ver figura 2.9.

Como a condição de regularidade é satisfeita

$$\text{posto}([\nabla_x s, \nabla_x \dot{s}]) = \text{posto} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 2$$

as variedades  $\mathcal{S} = \{x : s(x) = 0\}$ ,  $\mathcal{M} = \{x : \dot{s}(x) = 0\}$  e  $\mathcal{S}_2 = \{x : s(x) = \dot{s}(x) = 0\}$  são variedades suaves, ver o Teorema A.1.

O espaço tangente  $T_x \mathcal{S}_2$  é igual à  $\mathcal{S}_2$ , já que  $\mathcal{S}_2$  é uma reta. Como para qualquer ponto  $x$  pertencente à  $\mathcal{S}_2$  a interseção do fecho convexo de Filippov com o espaço tangente  $T_x \mathcal{S}_2$  não é vazia, de acordo com a Proposição 1, existe um modo deslizante de segunda ordem com respeito a função de restrição  $s$ , ou de forma equivalente, existe um modo deslizante de segunda ordem sobre a variedade  $\mathcal{S}$  no conjunto  $\mathcal{S}_2$ .

**Observação 1** *As definições acima também incluem casos triviais de variedades integrais em sistema suaves. Para excluir estes casos, pode-se, por exemplo, chamar um modo deslizante de “não trivial” se o conjunto de velocidades admissíveis de Filippov  $\mathcal{K}[f(x)]$  correspondente consistir de mais de um vetor.*

**Observação 2** *As definições acima podem ser facilmente estendidas para incluir o caso de equações diferenciais não autônomas através da introdução do estado fictício  $\dot{t} = 1$ . Note que isto difere levemente da definição de Filippov, considerando tempo e coordenadas de estado separadamente.*

## 2.5.2 Modos Deslizantes de Ordem Superior em Sistemas de Controle

Considere sistemas de controle do seguinte tipo:

$$\begin{cases} \dot{x} &= a(x, t) + b(x, t)u \\ s &= s(x, t) \end{cases} \quad (2.33)$$

onde  $a(\cdot)$  e  $b(\cdot)$  são funções suaves e desconhecidas,  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u \in \mathbb{R}$  é o sinal de controle e  $s = s(x, t)$  é uma função de saída suave e mensurável. A dimensão do sistema também é desconhecida. O grau relativo do sistema  $n^* = r$  é assumido como sendo conhecido e constante.

O objetivo é garantir que a restrição  $s(x, t) = 0$  seja satisfeita em um tempo finito e que seja mantida exata através de uma realimentação.

Como o sistema possui grau relativo  $n^* = r$  o sinal de controle só aparece explicitamente na derivada de ordem  $r$  de  $s$ , i.e.  $\frac{\partial s^{(i)}}{\partial u} = 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, r - 1$ ),  $\frac{\partial s^{(r)}}{\partial u} \neq 0$ . Deste modo, a saída  $s$ , satisfaz a seguinte equação:

$$s^{(r)} = h(x, t) + g(x, t)u \quad (2.34)$$

onde  $h(x, t) = s^{(r)}|_{u=0}$  e  $g(x, t) = \frac{\partial s^{(r)}}{\partial u}$ .

**Teorema 2.1** *Considere que o sistema (2.33) possua grau relativo  $n^* = r$  com respeito a função de saída  $s$  em algum ponto deslizante  $(x_0, t_0)$  de ordem  $r$ . Seja  $u$  uma função descontínua que assuma valores pertencentes aos conjuntos  $(-\infty, -K]$  e  $[K, \infty)$  em alguns conjuntos de medida não nula em qualquer vizinhança de cada ponto deslizante de ordem  $r$  próximo ao ponto  $(x_0, t_0)$ . Então, isto garante, para  $K$  suficientemente grande, a existência de um modo deslizante de ordem  $r$  em alguma vizinhança do ponto  $(x_0, t_0)$ . Prova: ver (Fridman & Levant 2002)*

**Observação 3** *Além de poderem ser empregados no controle de sistemas com grau relativo arbitrário, os controladores por modos deslizantes de ordem superior também podem ser usados para evitar o problema de chattering. Para esta finalidade o grau relativo do sistema é aumentado artificialmente, introduzindo-se um filtro de primeira*

ordem antes da entrada  $u(t)$  da planta. Desta forma, o sistema passaria a ser controlado pela variável  $v$  correspondente a entrada do sistema dinâmico introduzido.

Por exemplo, considere um sistema com grau relativo  $n^* = 1$ . Poderia se introduzir um integrador na entrada da planta e utilizar o controle descontínuo  $v = \dot{u}$  para conduzir a variável de deslizamento  $s$  para zero, mantendo  $s = 0$  em um modo deslizante de segunda ordem. Como o controle  $u(t)$  é a saída de um sistema dinâmico, ele será contínuo, evitando, assim, o problema de chattering.

### 2.5.3 Controlador por Modos Deslizantes de Segunda Ordem

Nesta seção serão apresentados alguns exemplos de controladores por modos deslizantes de segunda ordem. Dentre os diferentes controladores conhecidos pode-se destacar: Controlador Twisting (Emelyanov, Korovin & Levantovsky 1986, Levant 1993), Controlador Sub-Ótimo (Bartolini et al. 1998, Bartolini, Pisano & Usai 2001), Controlador Super-Twisting (Levant 1998b, Fridman & Levant 2002), Controlador com uma Lei de Convergência Pré-Estabelecida (Emelyanov et al. 1986, Levant 1993, Fridman & Levant 2002).

#### 2.5.3.1 Controlador Sub-Ótimo

Este controlador proposto em (Bartolini et al. 1998) foi inspirado no problema de controle em tempo mínimo de um duplo integrador. Ele foi desenvolvido como sendo uma implementação sub-ótima deste controlador clássico.

Considere o seguinte sistema auxiliar:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = H(z_1, z_2) + d(z_1, z_2)w(t) \end{cases} \quad (2.35)$$

onde  $H(z_1, z_2)$  e  $d(z_1, z_2)$  são funções desconhecidas e  $z_2$  é um sinal não mensurável do sistema.

As seguintes hipóteses são feitas sobre o sistema:

**Hipótese 3** Assume-se que as funções  $H(z_1, z_2)$  e  $d(z_1, z_2)$  são uniformemente limitadas e que a função  $d(z_1, z_2)$  é positiva. Desta forma, é requerido que para algumas

constantes positivas  $D_1, D_2, H$  as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$\begin{cases} |H(z_1, z_2)| \leq H \\ 0 < D_1 \leq |d(z_1, z_2)| \leq D_2 \end{cases} \quad (2.36)$$

**Hipótese 4** Assume-se que os valores extremos de  $z_1(t)$ , denominados de  $z_M$ , podem ser obtidos com precisão ideal.

O objetivo do controlador é manter o sistema confinado na região formada por arcos parabólicos limites (ver figura 2.11), de forma que as variáveis  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$  convirjam para zero em tempo finito. Para isto, o seguinte algoritmo é utilizado:

**Algoritmo 1:**

1. Escolha  $\alpha^* \in (0, 1] \cap (0, 3D_1/D_2)$
2. Faça  $z_M = z_1(0)$

3.

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha^*, & \text{se } \left(z_1(t) - \frac{z_M}{2}\right) (z_M - z_1(t)) > 0 \\ 1, & \text{se } \left(z_1(t) - \frac{z_M}{2}\right) (z_M - z_1(t)) \leq 0 \end{cases}$$

4. Se  $z_1(t)$  é um valor extremo, então  $z_M = z_1(t)$
5. Aplique a seguinte lei de controle:

$$w(t) = -\alpha(t)U_M \text{sign} \left( z_1(t) - \frac{z_M}{2} \right)$$

onde:

$$U_M > \max \left( \frac{H}{\alpha^* D_1}; \frac{4H}{3D_1 - \alpha^* D_2} \right)$$

6. Retorne ao passo 3

O resultado de convergência para esta estratégia de controle é apresentado no Teorema a seguir.

**Teorema 2.2** Considere o sistema (2.35). Se as hipóteses 3 e 4 forem verdadeiras, então a estratégia de controle definida no Algoritmo 1 garante que o sistema converge em tempo finito para a origem.

*Prova: ver (Bartolini et al. 1998)*

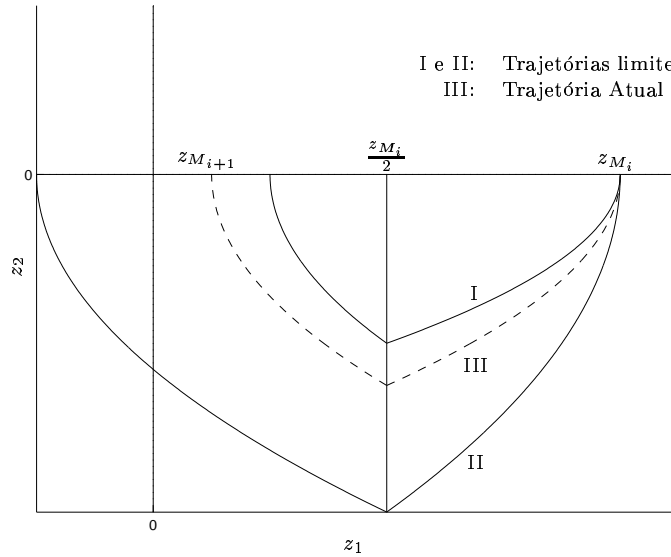


FIGURA 2.11: Idéia do controlador sub-ótimo.

A prova deste teorema consiste, basicamente, em mostrar que a propriedade de contração  $|z_{M_{i+1}}| < |z_{M_i}|$  é válida para a trajetória II (ver figura 2.11), que representa o pior caso em termos de convergência do sistema, e que esta convergência ocorre em tempo finito.

Uma extensão desta estratégia de controle foi apresentada em (Bartolini et al. 2001) para que o algoritmo pudesse ser aplicado para uma classe mais abrangente de sistemas.

O algoritmo do controlador sub-ótimo requer que os valores de pico da variável de deslizamento  $z_1 = s$  possam ser detectados com uma precisão ideal. Entretanto, na prática esta condição não pode ser satisfeita. Na verdade, o que pode ser feito é uma estimativa destes valores, o que seria equivalente a se estimar os momentos nos quais a derivada  $z_2 = \dot{s}$  se anula. Por este motivo o valor do sinal de controle  $u$  depende na verdade do histórico das medições de  $s$  e  $\dot{s}$ , i.e. de  $s(\cdot)$  e  $\dot{s}(\cdot)$ , conforme foi observado em (Levant 2003).

### 2.5.3.2 Controlador Super-Twisting

Este controlador foi desenvolvido para evitar o problema de *chattering* em sistemas com grau relativo  $n^* = 1$ , sendo caracterizado por um movimento espiral ao redor da

origem no plano de deslizamento de segunda ordem ( $s-\dot{s}$ ), conforme pode ser visto na figura 2.12.

A principal vantagem deste controlador com relação a outros controladores de segunda ordem reside no fato de que o controlador *Super-Twisting* não necessita de nenhuma informação sobre a derivada temporal da variável de deslizamento.

Considere que o sistema (2.33) possua grau relativo  $n^* = 1$ . Para este sistema a lei de controle pode ser definida da seguinte forma:

$$\begin{cases} u &= -\lambda |s|^\rho \text{sign}(s) + u_1 \\ \dot{u}_1 &= -\alpha \text{sign}(s) \end{cases} \quad (2.37)$$

O sinal  $\tilde{s}$  pode ser escrito do seguinte modo:

$$\ddot{s} = h(x, t) + g(x, t)\dot{u} \quad (2.38)$$

Para que o sistema apresente convergência em tempo finito para a origem do plano  $s-\dot{s}$  ( $\dot{s} = s = 0$ ), as seguintes condições devem ser satisfeitas (ver (Fridman & Levant 2002)):

$$\begin{aligned} |h(x, t)| &\leq H \\ 0 < K_m &\leq g(x, t) \leq K_M \\ \alpha &> \frac{H}{K_m} \\ \lambda^2 &\geq \frac{4H}{K_m^2} \frac{K_M(\alpha+H)}{K_m(\alpha-H)} \\ 0 < \rho &\leq 0.5 \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde  $H$ ,  $K_m$  e  $K_M$  são constantes positivas.

Por ser extremamente robusto este controlador pode ser usado com sucesso no problema de diferenciação exata e robusta em tempo real (Levant 1998b).

## 2.5.4 Controlador por Modos Deslizantes de Ordem Arbitrária

O objetivo é obter uma lei de controle descontínua que garanta o aparecimento de um modo deslizante de ordem  $r$  num tempo finito. Embora o controle  $u = -K \text{sign}(s)$  satisfaça o Teorema 2.1, o modo deslizante resultante é geralmente instável. Como o

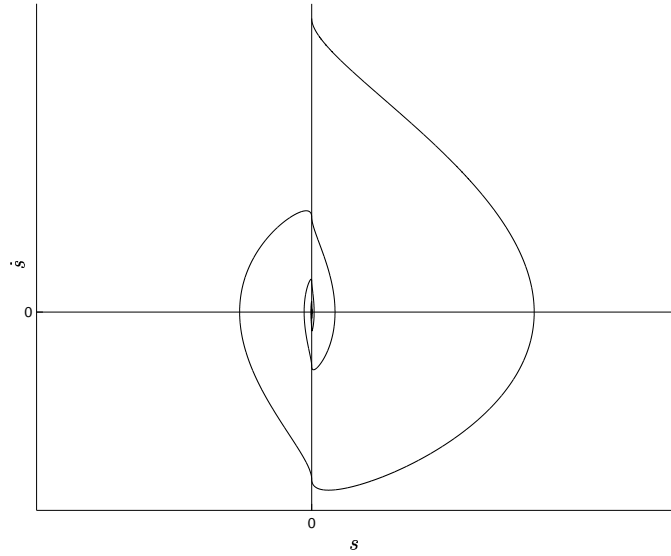


FIGURA 2.12: Trajetórias do controlador Super-Twisting.

controle por modos deslizantes de ordem superior é uma generalização do controle por modos deslizantes convencional, seria apropriado que o controle por modos deslizantes de ordem arbitrária fosse uma generalização do controle por modos deslizantes convencional  $u = -k \text{sign}(s)$ . Para isto, serão consideradas hipóteses similares às hipóteses utilizadas para o caso de deslizamento de primeira ordem.

**Hipótese 5** *Assume-se que as funções  $h(x, t)$  e  $g(x, t)$  são uniformemente limitadas e que a função  $g(x, t)$  é positiva. Desta forma, é requerido que para algumas constantes positivas  $K_m, K_M, H$  as seguintes condições sejam satisfeitas:*

$$\begin{cases} |h(x, t)| \leq H \\ 0 < K_m \leq |g(x, t)| \leq K_M \end{cases} \quad (2.40)$$

Considere o seguinte controlador, para plantas de grau relativo  $n^* = r$ , proposto inicialmente em (Levant 1998a, Levant 2001b).

$$u = -\alpha \text{sign}(\phi_{r-1,r}(s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)})) \quad (2.41)$$



$$\begin{aligned}
\phi_{0,r} &= s \\
\phi_{1,r} &= \dot{s} + \beta_1 N_{1,r} \text{sign}(s) \\
\phi_{i,r} &= s^{(i)} + \beta_i N_{i,r} \text{sign}(\phi_{i-1,r}), \quad i = 1, \dots, r-1 \\
N_{1,r} &= |s|^{(r-1)/r} \\
N_{i,r} &= (|s|^{p/r} + |\dot{s}|^{p/(r-1)} + \dots + |s^{(i-1)}|^{p/(r-i+1)})^{(r-i)/p}, \quad i = 1, \dots, r-1 \\
N_{r-1,r} &= (|s|^{p/r} + |\dot{s}|^{p/(r-1)} + \dots + |s^{(r-2)}|^{p/2})^{1/p}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

onde  $p \geq r$  e  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, r-1$  são constantes positivas.

**Teorema 2.3** *Considere que o sistema (2.33) possua grau relativo  $n^* = r$  com respeito a função de saída  $s$  e que a hipótese 5 seja satisfeita. Então, para parâmetros  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$  escolhidos apropriadamente o controlador*

$$u = -\alpha \text{sign}(\phi_{r-1,r}(s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)}))$$

*garante o aparecimento de um modo deslizante de ordem  $r$  ( $s \equiv 0$ ), atraindo as trajetórias em tempo finito.*

*Prova: ver (Levant 2003)*

Os parâmetros positivos  $\beta_1, \dots, \beta_{r-1}$  devem ser escolhidos suficientemente grandes na ordem dos índices. Cada escolha determina uma família de controladores aplicáveis para todos os sistemas representados por (2.33) de grau relativo  $n^* = r$  que satisfaçam a hipótese 5. O parâmetro  $\alpha > 0$  deve ser escolhido especificamente para cada conjunto  $H$ ,  $K_m$  e  $K_M$  de um determinado sistema.

Certamente o número de escolhas de  $\beta_i$  é infinito. Aqui serão mostrados alguns exemplos com  $\beta_i$  testados para  $r \leq 4$  e para  $p$  definido como sendo o mínimo múltiplo comum de  $1, 2, \dots, r$ .

1.  $u = -\alpha \text{sign}(s)$
2.  $u = -\alpha \text{sign}(\dot{s} + |s|^{1/2} \text{sign}(s))$
3.  $u = -\alpha \text{sign}(\ddot{s} + 2(|\dot{s}|^3 + |s|^2)^{1/6} \text{sign}(\dot{s} + |s|^{2/3} \text{sign}(s)))$
4.  $u = -\alpha \text{sign}(s^{(3)} + 3(|\ddot{s}|^6 + |\dot{s}|^4 + |s|^3)^{1/12} \text{sign}(\ddot{s} + (|\dot{s}|^4 + |s|^3)^{1/6} \text{sign}(\dot{s} + 0.5 |s|^{3/4} \text{sign}(s))))$

A idéia do controlador é que um deslizamento de primeira ordem é estabelecido nas partes suaves do conjunto descontínuo  $\Gamma$  de (2.41) (figuras 2.13 e 2.14). Este modo deslizante é descrito pela equação diferencial  $\phi_{r-1,r} = 0$ , que por sua vez possibilita o aparecimento de um modo deslizante de primeira ordem  $\phi_{r-2,r} = 0$ . Entretanto o modo deslizante primário desaparece no momento no qual o modo secundário está para aparecer. O movimento resultante se dá numa vizinhança de um subconjunto cilíndrico de  $\Gamma$  que satisfaz  $\phi_{r-2,r} = 0$ , transferindo em tempo finito para uma vizinhança do conjunto que satisfaz  $\phi_{r-3,r} = 0$  e assim por diante. Enquanto a trajetória se aproxima do conjunto deslizante de ordem  $r$ , o conjunto  $\Gamma$  se retrai para a origem nas coordenadas  $s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)}$ . O conjunto  $\Gamma$  para  $r = 3$  é mostrado na figura 2.14.

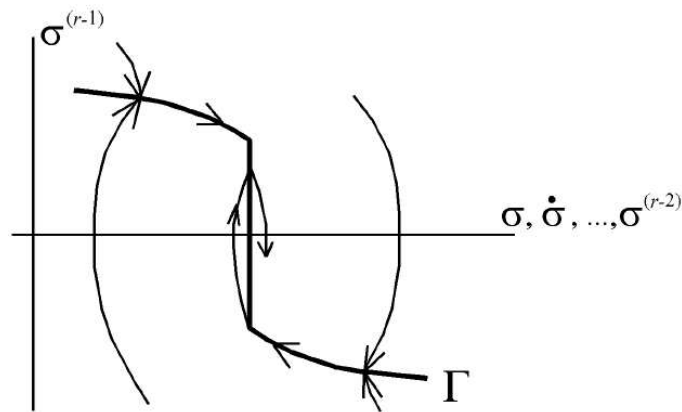


FIGURA 2.13: Idéia do controlador por modos deslizantes de ordem  $r$ .

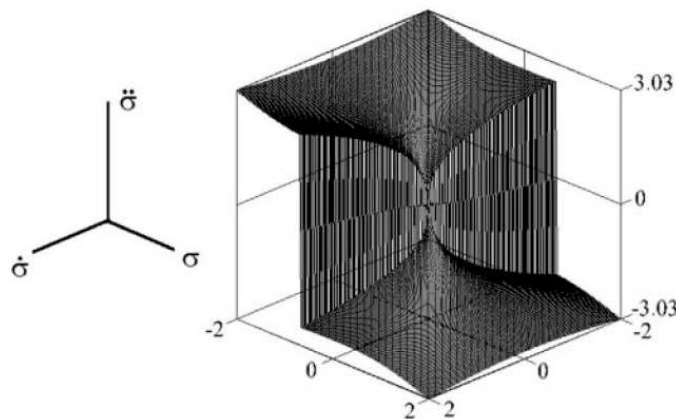


FIGURA 2.14: Conjunto de descontinuidade  $\Gamma$  para o controlador por modos deslizantes de ordem 3.

## 2.5.5 Diferenciador Exato e Robusto (RED)

A diferenciação de sinais em tempo real é um problema antigo e bem conhecido. Um diferenciador ideal deveria ser capaz de fornecer como saída a derivada exata de qualquer sinal de entrada. Entretanto, na prática, como os sinais são corrompidos por ruídos de alta frequência, que possuem derivadas com amplitudes muito elevadas, seria impossível para estes diferenciadores fornecerem uma estimativa razoável da derivada do sinal base de interesse.

Desta forma, o objetivo é encontrar um diferenciador capaz não só de fornecer a derivada exata para uma classe de sinais de entrada, mas também de rejeitar pequenos ruídos de alta frequência.

A maior parte dos diferenciadores conhecidos fornecem estimativas muito próximas das derivadas dos sinais de entrada, além de serem capazes de rejeitar parcialmente a presença de ruídos de alta frequência. No entanto, estes diferenciadores não são capazes de fornecer derivadas exatas na ausência de ruídos. Deste modo, estes diferenciadores são robustos, mas não são exatos.

Neste trabalho será considerada a seguinte classe de sinais de entrada: seja o sinal de entrada  $f(t)$  uma função definida em  $[0, \infty)$  constituída por um sinal base  $f_0(t)$  desconhecido, cuja derivada de ordem  $n$  possua constante de Lipschitz  $C_{n+1}$ , e por um ruído mensurável (no sentido de Lebesgue) e limitado com propriedades desconhecidas.

Para esta classe de sinais foi provado em (Levant 1998b) que a melhor acurácia possível obtida por um diferenciador para a derivada de ordem  $i$  é proporcional a

$$C_{n+1}^{i/(n+1)} \varepsilon^{(n-i+1)/(n+1)}, \quad i = 0, \dots, n$$

onde  $C_{n+1}$  é a constante de Lipschitz da derivada de ordem  $n$  e  $\varepsilon$  é a magnitude máxima do ruído de medição.

O problema é encontrar uma estimativa em tempo real de  $\dot{f}_0(t), \ddot{f}_0(t), \dots, f_0^{(n)}(t)$  que seja robusta na presença de ruídos de medição, sendo exata na sua ausência.

Considere o seguinte diferenciador de ordem  $(n)$ , baseado em modos deslizantes de

ordem superior, apresentado em (Levant 2001a, Levant 2003):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_0 = v_0, \\ v_0 = -\lambda_0 |z_0 - f(t)|^{n/(n+1)} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 = v_1, \\ v_1 = -\lambda_1 |z_1 - v_0|^{(n-1)/n} \text{sign}(z_1 - v_0) + z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_i = v_i, \\ v_i = -\lambda_i |z_i - v_{i-1}|^{(n-i)/(n-i+1)} \text{sign}(z_i - v_{i-1}) + z_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = v_{n-1}, \\ v_{n-1} = -\lambda_{n-1} |z_{n-1} - v_{n-2}|^{1/2} \text{sign}(z_{n-1} - v_{n-2}) + z_n \\ \dot{z}_n = -\lambda_n \text{sign}(z_n - v_{n-1}) \end{array} \right. \quad (2.43)$$

É fácil checar que o diferenciador apresentado em (2.43) pode ser expresso na seguinte forma não recursiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_0 = -\kappa_0 |z_0 - f(t)|^{n/(n+1)} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 = -\kappa_1 |z_0 - f(t)|^{(n-1)/(n+1)} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_i = -\kappa_i |z_0 - f(t)|^{(n-i)/(n+1)} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{z}_n = -\kappa_n \text{sign}(z_0 - f(t)) \end{array} \right. \quad (2.44)$$

para algumas constantes  $\kappa_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  calculadas com base em  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ .

O Teorema a seguir mostra a propriedade de convergência em tempo finito do diferenciador (2.43)

**Teorema 2.4** *Considere o diferenciador (2.43) de ordem  $(n)$ , com sinal de entrada  $f_0(t)$  mensurável cuja derivada de ordem  $n$  possua uma constante de Lipschitz  $C_{n+1}$ . Se as constantes  $\lambda_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  forem escolhidas apropriadamente, as seguintes igualdades são verdadeiras após um processo transiente de tempo finito*

$$z_0 = f_0(t); \quad z_i = v_{i-1} = f_0^{(i)}(t), \quad i = 1, \dots, n$$

*Prova: ver (Levant 2003)*

A partir deste Teorema é possível concluir que as igualdades  $z_i = f_0^{(i)}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  são mantidas num modo deslizante de segunda ordem.

O sistema (2.43) é homogêneo, suas trajetórias são invariantes com respeito a transformação  $\mathcal{G}_\eta : (t, f, z_i, v_i) \mapsto (\eta t, \eta^{n+1} f, \eta^{n-i+1} z_i, \eta^{n-i} v_i)$ . Desta forma, utilizando o conceito de campos vetoriais homogêneos (Rosier 1992) é possível provar que o sistema (2.43) é estável no sentido de Lyapunov.

No Teorema a seguir a performance do diferenciador (2.43) na presença de um ruído é investigada.

**Teorema 2.5** *Considere o diferenciador (2.43) de ordem  $(n)$ . Se o ruído de entrada satisfizer  $|f(t) - f_0(t)| \leq \varepsilon$ , então as seguinte desigualdades são estabelecidas em tempo finito para algumas constantes positivas  $\mu_i$  e  $\nu_i$  que dependem exclusivamente dos parâmetros do diferenciador.*

$$|z_i - f_0^{(i)}(t)| \leq \mu_i \varepsilon^{(n-i+1)/(n+1)}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$|v_i - f_0^{(i+1)}(t)| \leq \nu_i \varepsilon^{(n-i)/(n+1)}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

*Prova: ver (Levant 2003)*

**Observação 4** *Analisando o Teorema 2.5 é fácil verificar que o diferenciador de ordem  $k$  fornece uma derivada de ordem  $l$  ( $l < k$ ), com uma acurácia muito maior que o diferenciador de ordem  $l$ .*

A melhor forma de se sintonizar os parâmetros  $\lambda_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  é através de simulações. Uma possível escolha para o diferenciador de ordem 4 é apresentada a seguir:

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = v_0, & v_0 = -8C_5^{1/5} |z_0 - f(t)|^{4/5} \text{sign}(z_0 - f(t)) + z_1 \\ \dot{z}_1 = v_1, & v_1 = -5C_5^{1/4} |z_1 - v_0|^{3/4} \text{sign}(z_1 - v_0) + z_2 \\ \dot{z}_2 = v_2, & v_2 = -3C_5^{1/3} |z_2 - v_1|^{2/3} \text{sign}(z_2 - v_1) + z_3 \\ \dot{z}_3 = v_3, & v_3 = -1.5C_5^{1/2} |z_3 - v_2|^{1/2} \text{sign}(z_3 - v_2) + z_3 \\ \dot{z}_4 = -1.1C_5 \text{sign}(z_4 - v_3) \end{cases} \quad (2.45)$$

Deve-se destacar que os valores  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ , utilizados para o diferenciador de ordem  $(n - 1)$ , também podem ser aplicados para o diferenciador de ordem  $(n)$ , e, portanto, para este diferenciador é necessário, apenas, escolher mais um parâmetro.

O princípio de separação (ver, (Atassi & Khalil 1999)) é trivialmente satisfeito para o diferenciador (2.43). De fato, como o diferenciador (2.43) é exato, os únicos requerimentos para sua implementação são a exigência de que alguma derivada de ordem superior do sinal de entrada seja limitada e que o sistema não apresente escape em tempo finito durante o transitório do diferenciador.

No Lema a seguir será demonstrado que se a derivada de ordem  $(n + 1)$  do sinal de entrada for limitada, então todos os sinais presentes no diferenciador (2.43) de ordem  $(n)$  não poderão escapar em tempo finito.

**Lema 2.1** *Considere o sistema (2.43) e assuma que os sinais  $f(t), \dot{f}(t), \dots, f^{(n)}(t)$  são limitados. Se  $|f^{(n+1)}(t)| \leq K_{n+1} \forall t$ , para alguma constante positiva  $K_{n+1}$ , então o estado do sistema não pode divergir em tempo finito. Prova: ver apêndice B*

## 2.5.6 Controlador Universal por Realimentação de Saída

Este controlador, proposto recentemente em (Levant 2002), utiliza o controlador por modos deslizantes de ordem arbitrária (2.41) em conjunto com o diferenciador (2.43), podendo, assim, controlar o sistema utilizando apenas realimentação de saída. Deve-se destacar que este controlador não necessita de um modelo detalhado do sistema a ser controlado.

Considere que o sistema seja descrito pela equação (2.33) e que a Hipótese 5 seja

satisfeita. A lei de controle é dada por:

$$\begin{aligned}
u &= -\alpha \text{sign}(\phi_{r-1,r}(z_0, z_1, \dots, z_{(r-1)})) \\
\dot{z}_0 &= v_0, \\
v_0 &= -\lambda_{0,0} C_r^{1/r} |z_0 - s|^{(r-1)/r} \text{sign}(z_0 - s) + z_1 \\
\dot{z}_1 &= v_1, \\
v_1 &= -\lambda_{0,1} C_r^{1/(r-1)} |z_1 - v_0|^{(r-2)/(r-1)} \text{sign}(z_1 - v_0) + z_2 \\
&\vdots \\
\dot{z}_{r-2} &= v_{r-2}, \\
v_{r-2} &= -\lambda_{0,r-2} C_r^{1/2} |z_{r-2} - v_{r-3}|^{1/2} \text{sign}(z_{r-2} - v_{r-3}) + z_{r-1} \\
\dot{z}_{r-1} &= -\lambda_{0,r-1} C_r \text{sign}(z_{r-1} - v_{r-2})
\end{aligned} \tag{2.46}$$

onde  $\phi_{i,r}$  é definida em (2.42), os parâmetros  $\lambda_{0,i}$  são escolhidos antecipadamente considerando  $C_r = 1$ , a constante  $C_r$  é escolhida de acordo com as seguintes condições:  $|s^{(r)}| \leq C_r$  e  $C_r \geq H + \alpha K_M$ .

No caso das constantes  $H$  e  $K_M$  serem conhecidas, apenas o parâmetro  $\alpha$  deve ser realmente sintonizado. Entretanto, se estas constantes não forem conhecidas tanto  $C_r$  quanto  $\alpha$  podem ser encontrados através de simulações.

O teorema 2.3 também é válido para o controlador (2.46). Em particular, sob as condições do Teorema 2.3 o controlador (2.46) garante convergência global para o modo deslizante de ordem  $r$  ( $s \equiv 0$ ), com o tempo do transiente sendo uma função localmente limitada das condições iniciais (Levant 2003).

### 2.5.6.1 Resultados de Simulação

Nesta seção será apresentada uma simulação da estratégia de controle considerada. Para comprovar os resultados teóricos as simulações apresentadas são realizadas com passo de integração fixo e suficientemente pequeno (método de Euler), a fim de se obter resultados próximos dos resultados teóricos. As simulações no campo contínuo se justificam já que, apesar do controlador ser implementado discretamente, ao se utilizar um período de amostragem suficientemente pequeno, o desempenho do controlador discreto se aproxima do controlador contínuo.

A planta é considerada desconhecida, com grau relativo  $n^* = 3$ , sendo dada por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y_p = h^T x \end{cases} \quad (2.47)$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad h^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Nesta seção será considerado o problema de rastreamento. O objetivo da simulação é garantir que a saída da planta  $y_p$  seja capaz de seguir um sinal de referência  $r(t)$ . Para isto, o controlador deve garantir que a variável  $s(t) = y_p(t) - r(t)$  seja identicamente nula. Além disso, o controlador deve ser capaz de manter o sistema em um modo deslizando de terceira ordem ( $s = \dot{s} = \ddot{s} = 0$ ).

Para a simulação desta seção serão utilizados os parâmetros apresentados na tabela 2.1.

TABELA 2.1: Parâmetros utilizados na simulação do Controlador Universal por Realimentação de Saída

Elemento	Valor
Perturbação de Entrada	$d_e(t) = sqw(5t)$
Sinal de Referência	$r(t) = \sin(0.5t)$
$RED$	$\lambda_0 = 3C_3^{1/3}; \lambda_1 = 1.5C_3^{1/2}; \lambda_2 = 1.1C_3; C_3 = 50$
$\alpha$	0.7

Nesta simulação são consideradas as seguintes condições iniciais:

- $y_p(0) = 0$ ;
- $\dot{y}_p(0) = 2$
- $\ddot{y}_p(0) = 0$

Na figura 2.15 pode ser visto que o sinal de referência é seguido perfeitamente pela planta, após um transiente de tempo finito. Nesta figura também pode ser constatado que o sistema é mantido em um modo deslizando de terceira ordem.



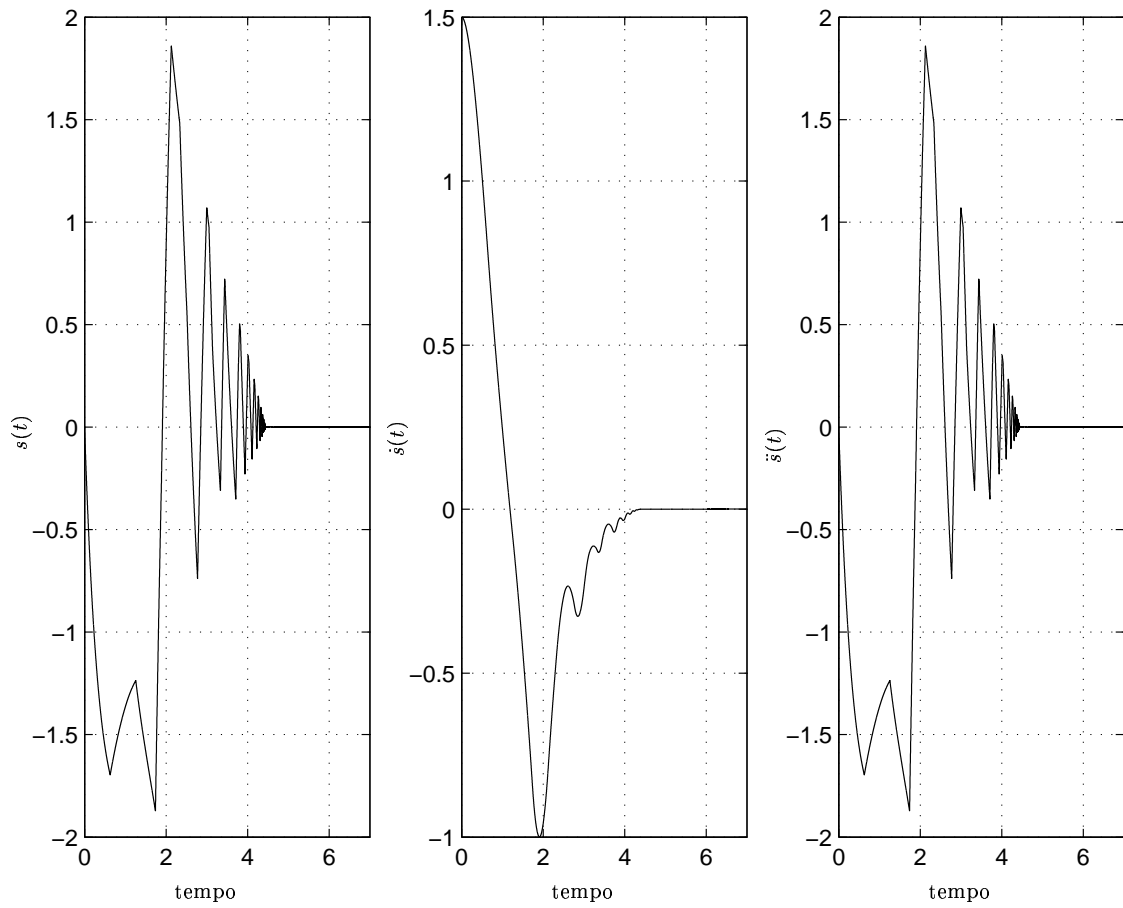


FIGURA 2.15: Controlador Universal por Realimentação de Saída: Sinais  $s(t)$ ,  $\dot{s}(t)$  e  $\ddot{s}(t)$

A figura 2.16 mostra os erros cometidos pelo *RED* na estimativa de  $s$ ,  $\dot{s}$  e  $\ddot{s}$ . Estes erros definidos por  $e_i = z_i - r^{(i)}$ ,  $i = 0, \dots, 2$ , convergem para zero em um tempo finito.

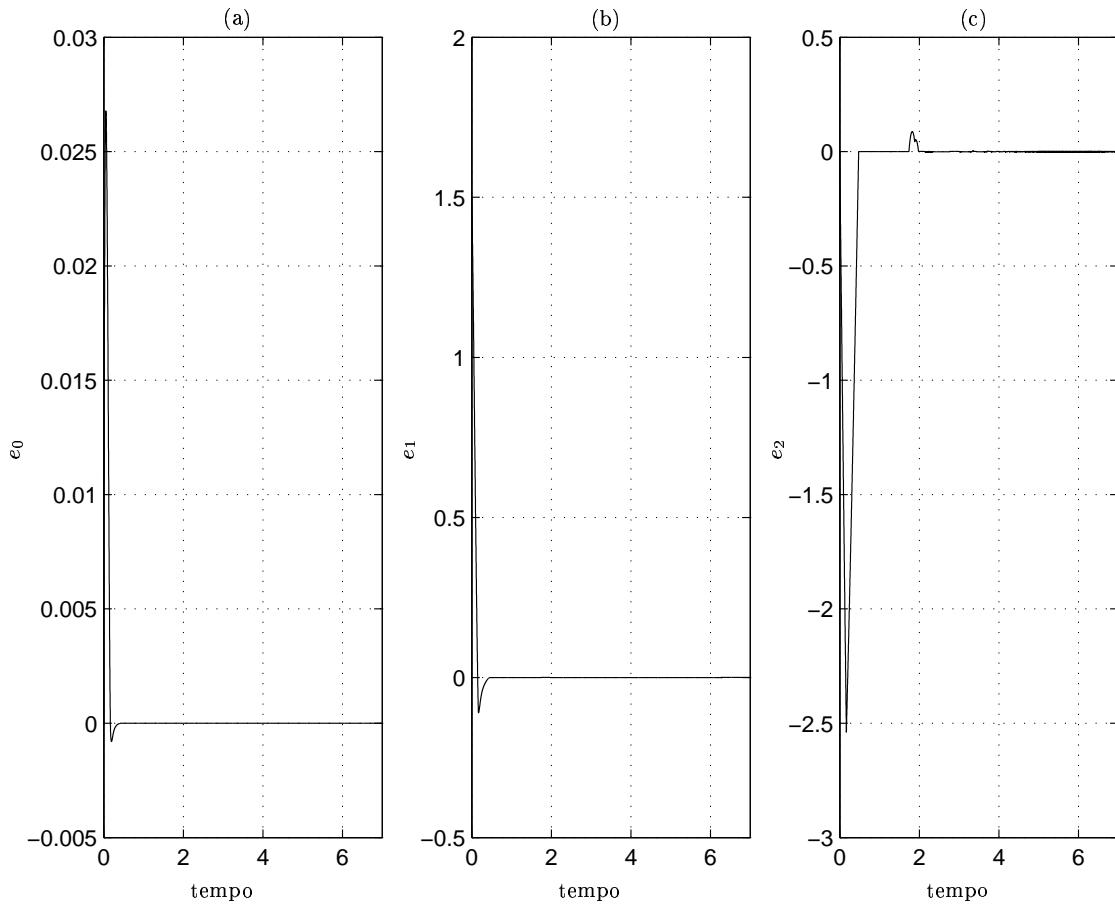


FIGURA 2.16: Controlador Universal por Realimentação de Saída: (a)  $e_0(t) = z_0(t) - r(t)$ ; (b)  $e_1(t) = z_1(t) - \dot{r}(t)$ ; (c)  $e_2(t) = z_2(t) - \ddot{r}(t)$

Na figura 2.17 é apresentado o sinal de controle  $u(t)$ . Comparando o resultado desta figura com os resultados apresentados na figura 2.15, pode ser verificado que as variáveis  $s$ ,  $\dot{s}$  e  $\ddot{s}$  convergem para zero quando o sistema entra num deslizamento ideal.

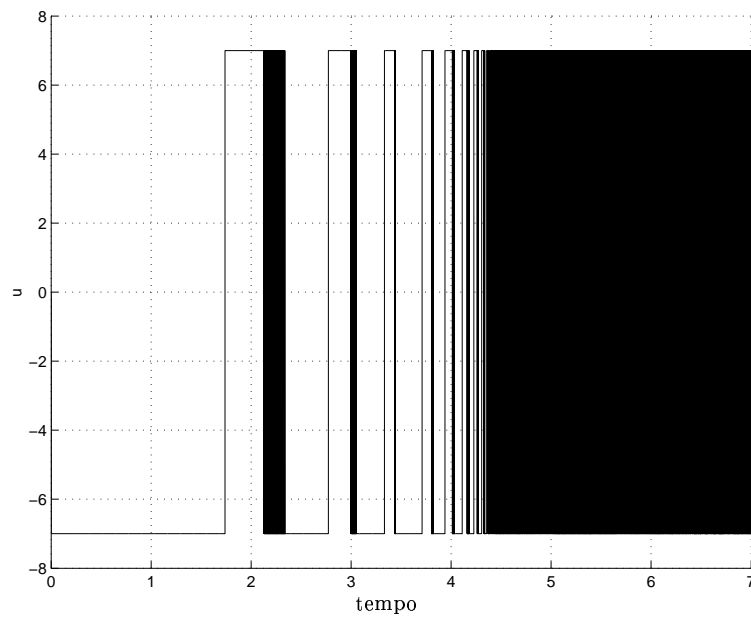


FIGURA 2.17: Controlador Universal por Realimentação de Saída: Sinal de controle  $u(t)$

## Capítulo 3

# Controle Adaptativo por Modelo de Referência a Estrutura Variável

O controle de sistemas dinâmicos incertos é um dos principais tópicos da teoria de controle moderno. Estes sistemas podem apresentar incertezas paramétricas ou estruturais. No caso de incertezas paramétricas a estrutura da planta é conhecida, entretanto seus parâmetros podem ser desconhecidos ou variantes no tempo. No caso de incertezas estruturais o sistema pode apresentar dinâmicas não modeladas, fato que dificulta a tarefa de projetar um controlador que garanta um bom desempenho para estes sistemas.

Diversas técnicas para o controle de sistemas incertos vêm sendo empregadas com sucesso. Dentre as técnicas existentes pode-se destacar o controle adaptativo, o controle por modos deslizantes, a técnica de *backstepping*, dentre outras.

O objetivo básico do controle adaptativo é garantir que o sistema permaneça apresentando um desempenho satisfatório, independentemente das incertezas ou variações de parâmetros presentes no sistema. Para isto, o controlador se utiliza de informações provenientes dos sinais mensuráveis do sistema, visando a estar sempre adaptado às diferentes configurações apresentadas pelo sistema a cada instante.

O controle adaptativo pode ser visto através de duas estratégias distintas. No método indireto os parâmetros desconhecidos da planta são estimados e, então, os parâmetros do controlador são calculados a partir destas estimativas. Já no método direto os parâmetros do controlador são estimados diretamente através de uma lei de

adaptação. Este método, em contraste com o método indireto, não realiza a identificação da planta de forma explícita.

Dentre as diferentes estratégias presentes na literatura de controle adaptativo a técnica de controle adaptativo por modelo de referência (Model Reference Adaptive Control - **MRAC**) se destaca como sendo uma das principais abordagens para lidar com sistemas lineares e invariantes no tempo.

O objetivo básico do *MRAC* é produzir um sinal de controle que torne o comportamento do sistema em malha fechada próximo ao de um modelo de referência arbitrado (rastreamento), mesmo na presença de incertezas ou variações nos parâmetros no sistema.

Para atingir este objetivo, os parâmetros do controlador responsáveis pelo perfeito casamento da planta com o modelo de referência são estimados através de uma lei de adaptação. Como esta estimativa é feita usando apenas informações provenientes da entrada e da saída da planta, este controlador possui um grande interesse prático.

Embora seja destinado para sistemas incertos, o controlador *MRAC* apresenta problemas de robustez na presença de perturbações ou dinâmicas não modeladas. Além disso, a qualidade do transitório de adaptação não é uniforme com respeito às condições iniciais e a convergência pode ser muito lenta, ver (Hsu & Costa 1989).

Para tentar resolver os problemas apresentados pelo *MRAC* foi desenvolvida na COPPE/UFRJ uma técnica de controle denominada de controle adaptativo por modelo de referência a estrutura variável (Variable Structure Model Reference Adaptive Control - **VS-MRAC**).

Esta técnica, apresentada originalmente em (Hsu & Costa 1989), é baseada no controlador *MRAC*, utilizando conceitos de controle a estrutura variável. Basicamente, a lei de adaptação do tipo integral foi substituída por uma síntese direta do sinal de controle.

Assim como o *MRAC* o *VS-MRAC* utiliza apenas medições da entrada e da saída da planta, sendo, deste modo, muito útil em diversas aplicações práticas, nas quais o estado completo não é acessível.

Neste capítulo, será apresentada a estrutura básica de um sistema baseado em modelo de referência, bem como as hipóteses iniciais necessárias para o projeto do controlador. Finalmente, detalhes sobre o desenvolvimento teórico do *VS-MRAC* serão

apresentados, sendo discutidas as principais características deste controlador.

### 3.1 Controle Adaptativo por Modelo de Referência

#### *MRAC*

O objetivo deste controlador é assegurar que o conjunto formado pela planta e pelo algoritmo de controle consiga rastrear o comportamento de um modelo de referência. A planta será considerada desconhecida (com incertezas), monovariável (*SISO*), linear e invariante no tempo (*LTI*) com grau relativo  $n^*$ , sendo modelada por uma função de transferência estritamente própria dada por:

$$G_p(p) = K_p \frac{N_p(p)}{D_p(p)} \quad (3.1)$$

com entrada  $u$  e saída  $y_p$ , onde:

- $K_p$  é o ganho em alta frequência.
- $D_p(p)$  é um polinômio mônico de grau  $n$ .
- $N_p(p)$  é um polinômio mônico de grau  $m$ .
- O grau relativo é dado por:  $n^* = n - m$

As especificações da resposta dinâmica em malha fechada são estabelecidas através do modelo de referência  $M(p)$ , com entrada  $r$  e saída  $y_m$ , que também possui grau relativo  $n^*$ , sendo caracterizado por uma função de transferência estritamente própria, linear, invariante no tempo e assintoticamente estável dada por:

$$M(p) = K_m \frac{1}{D_m(p)} \quad (3.2)$$

onde:

- $K_m$  é o ganho em alta frequência.
- $D_m(p)$  é um polinômio mônico.

O sinal de referência  $r$  é uma função arbitrária do tempo, contínua por partes e uniformemente limitada.

O objetivo de controle pode ser definido da seguinte forma:

- Projetar uma lei de controle  $u(t)$ , tal que o erro de saída  $e_0 := y_p - y_m$  tenda assintoticamente para zero ou para algum pequeno conjunto residual em torno de zero, para condições iniciais e sinais de referência  $r$  (contínuos por partes e uniformemente limitados) arbitrários.

As seguintes hipóteses usuais de projeto (Narendra & Annaswamy 1989, p.183) sobre a planta e o modelo de referência serão consideradas:

**Hipótese 6** *A planta  $G_p(p)$  é de fase mínima ( $N_p(p)$  é Hurwitz).*

**Hipótese 7** *A planta  $G_p(p)$  é controlável e observável (os polinômios  $N_p(p)$  e  $D_p(p)$  são coprimos).*

**Hipótese 8**  *$N_p(p)$  e  $D_p(p)$  são mônicos com  $\text{grau}[D_p(p)] = n$  e  $\text{grau}[N_p(p)] = m$ ,  $n$  e  $m$  conhecidos (o grau relativo  $n^* = n - m$  da planta é conhecido).*

**Hipótese 9** *O sinal do ganho de alta frequência da planta ( $K_p$ ) é conhecido (assume-se positivo por simplicidade, sem perda de generalidade).*

**Hipótese 10** *O modelo de referência  $M(p)$  é estável e de fase mínima, com mesmo grau relativo  $n^* = n - m$  que a planta.*

### 3.1.1 Esquema de Controle do MRAC

No MRAC, os coeficientes do numerador e do denominador da planta são considerados desconhecidos. Para contornar este problema, pode-se utilizar um procedimento baseado no princípio da equivalência certa. Neste princípio, os parâmetros do controlador são estimados e utilizados na lei de controle como se fossem os parâmetros ideais. O procedimento de projeto é baseado na combinação de uma lei de controle com uma lei de adaptação que gera estimativas em tempo real dos parâmetros do controlador, ver (Peixoto 2002).

Para gerar o sinal de controle, são utilizados os seguintes filtros de entrada e saída (conforme (Narendra & Annaswamy 1989) )

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \Lambda v_1 + gu \\ \dot{v}_2 &= \Lambda v_2 + gy_p\end{aligned}\tag{3.3}$$

onde  $v_1$  e  $v_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\Lambda$  é escolhido de modo que o polinômio  $\det(pI - \Lambda)$  seja Hurwitz e  $g$  é um vetor constante, tal que  $(\Lambda, g)$  seja controlável.

O sinal de controle é gerado por meio de uma combinação linear do sinal de referência  $r$ , da saída da planta  $y_p$  e dos vetores  $v_1$  e  $v_2$ . Para facilitar a notação o vetor  $\omega$ , denominado de vetor regressor, será definido como:

$$\omega^T(t) := [v_1^T \quad y_p \quad v_2^T \quad r]\tag{3.4}$$

Desta forma o controle pode ser parametrizado do seguinte modo:

$$u(t) = \theta^T(t)\omega(t)\tag{3.5}$$

onde  $\theta^T(t) := \left[ \underbrace{\theta_1(t) \dots \theta_{n-1}(t)}_{\theta_{v_1}^T(t)} \quad \theta_n(t) \quad \underbrace{\theta_{n+1}(t) \dots \theta_{2n-1}(t)}_{\theta_{v_2}^T(t)} \quad \theta_{2n}(t) \right]$  é o vetor de parâmetros adaptativos.

Considerando as hipóteses assumidas existe um único vetor constante  $\theta^*$ , tal que a função de transferência de malha fechada com  $u = \theta^{*T}\omega$  se adequie perfeitamente ao modelo, i.e.  $y_p = G_p(p)u = G_p(p)\theta^{*T}\omega = M(p)r$ .

Para abordar um caso mais geral será considerado que a planta esteja sujeita a perturbações de entrada. Para tratar deste caso a seguinte hipótese adicional será assumida.

**Hipótese 11** *A perturbação de entrada  $d_e$  é uniformemente limitada, e possui um limitante superior  $\bar{d}_e$  conhecido que satisfaz a  $\bar{d}_e \geq |d_e(t)|$  ( $\forall t$ ).*

O esquema completo do controlador *MRAC* para plantas sujeitas a perturbações de entrada pode ser visto na figura 3.1.



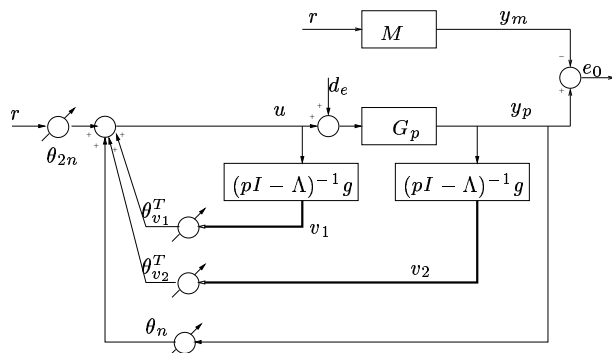


FIGURA 3.1: Estrutura do controlador adaptativo por modelo de referência (*MRAC*).

O esquema do *MRAC* apresentado na figura 3.1 pode ser representado, de forma equivalente, pelo esquema mostrado na figura 3.2.

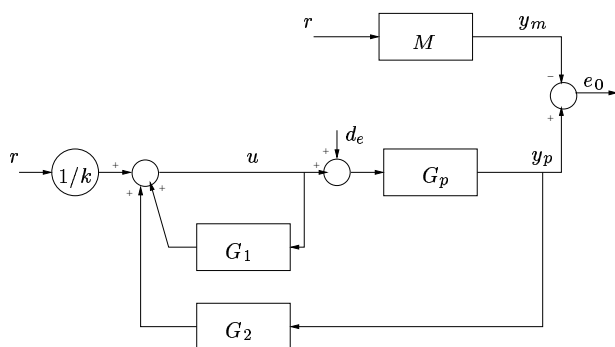


FIGURA 3.2: Representação equivalente da estrutura do controlador adaptativo por modelo de referência (*MRAC*)

Neste caso a **lei de controle**  $u$  é composta pelas saídas dos filtros  $G_1(p)$  e  $G_2(p)$  e pela entrada de referência  $r$ , sendo dada por:

$$u = \frac{1}{k}r + G_1(p)u + G_2(p)y \quad (3.6)$$

onde:

- $k := \frac{K_p}{K_m}$ .
- $G_1(p) := \frac{N_1(p)}{\Lambda(p)} = \theta_{v_1}^T (pI - \Lambda)^{-1} g$ .
- $G_2(p) := \frac{N_2(p)}{\Lambda(p)} = \theta_{v_2}^T (pI - \Lambda)^{-1} g + \theta_n$ .

com  $\text{grau}[N_1(p)] = n - 2$ ,  $\text{grau}[N_2(p)] = n - 1$  e  $\text{grau}[\Lambda(p)] = n - 1$ . Portanto, o filtro  $G_1(p)$  é estritamente próprio e o filtro  $G_2(p)$  é próprio.

Do mesmo modo, que na representação anterior, também existe um controlador ideal ( $k^*$ ,  $G_1^*(p)$  e  $G_2^*(p)$ ), para esta representação, que assegura o casamento perfeito entre o sistema em malha fechada e o modelo de referência, para o caso em que os parâmetros da planta sejam conhecidos e a perturbação de entrada  $d_e$  seja nula.

### 3.1.2 Equação do Erro de Saída do MRAC

Nesta seção a equação do erro de saída (ou erro de rastreamento)  $e_0$  será desenvolvida.

Seja  $(A_p, b_p, h_p)$  uma realização mínima da planta  $K_p N_p(p)/D_p(p)$  apresentada em (3.1) com a seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_p x + b_p u + b_p d_e \\ y &= h_p^T x \end{aligned} \quad (3.7)$$

Definindo o vetor de estado  $X^T := [x^T \quad v_1^T \quad v_2^T]$  do sistema formado pelos filtros de entrada e de saída e pela planta, a seguinte representação no espaço de estados pode ser obtida:

$$\dot{X} = A_0 X + b_0 u + b'_0 d_e \quad (3.8)$$

$$y = h_c^T X \quad (3.9)$$

onde:

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ g h_p^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} b_p \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b'_0 = \begin{bmatrix} b_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad h_c^T = \begin{bmatrix} h_p^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

O vetor regressor  $\omega$  pode ser escrito em função do vetor de estados  $X$  da seguinte

forma:

$$\begin{aligned}\omega &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h_p^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Omega} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r \\ &= \Omega X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r\end{aligned}$$

Multiplicando a relação acima pelo vetor de parâmetros ideais, obtém-se a seguinte expressão para o controle ideal  $u^*$ :

$$\begin{aligned}u^* &= \theta^{*T} \omega \\ &= \theta^{*T} \Omega X + \theta_{2n}^* r\end{aligned}$$

Somando e subtraindo  $b_0 u^*$  na equação (3.8) tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \underbrace{[A_0 + b_0 \theta^{*T} \Omega]}_{A_c} X + \underbrace{(b_0 \theta_{2n}^*)}_{b_c} r + \underbrace{(b_0 \theta_{2n}^*)}_{b_c} \left(\frac{1}{\theta_{2n}^*}\right) [u - u^*] + b_0' d_e \\ y &= h_c^T X\end{aligned}\tag{3.11}$$

O sistema em malha fechada passa a ser representado por:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A_c X + b_c r + b_c \left(\frac{1}{\theta_{2n}^*}\right) [u - u^*] + b_0' d_e \\ y &= h_c^T X\end{aligned}$$

Note que, pela definição de controle ideal ( $u = u^*$  e perturbação nula  $d_e = 0$ ), a transferência de  $r$  para  $y_p$  deve ser igual a  $M$ . Portanto,  $(A_c, b_c, h_c)$  é uma realização, possivelmente não-mínima, da transferência  $M$  do modelo de referência. Sendo assim

o modelo e sua saída podem ser representados por:

$$\begin{aligned}\dot{X}_m &= A_c X_m + b_c r \\ y_m &= h_c^T X_m\end{aligned}\quad (3.12)$$

Definindo  $e := X - X_m$  e  $k^* = 1/\theta_{2n}^*$  a equação do erro de saída  $e_0$  é dada por:

$$\dot{e} = A_c e + k^* b_c [u - u^*] + b'_0 d_e \quad (3.13)$$

$$e_0 = h_c^T e \quad (3.14)$$

Definindo  $\bar{W}_d := h_c^T (pI - A_c)^{-1} b'_0$  como sendo a transferência entre a perturbação  $d_e$  e o erro de rastreamento  $e_0$ , com  $u = u^*$ , e  $W_d := (k^* M)^{-1} \bar{W}_d$ , tem-se que:

$$e_0 = k^* M (u - u^*) + \bar{W}_d d_e \quad (3.15)$$

$$= k^* M (u - u^* + W_d d_e) \quad (3.16)$$

Considerando a representação para o esquema de controle apresentada na figura 3.2 a equação (3.16) pode ser representada pelo diagrama de blocos apresentado na figura 3.3.

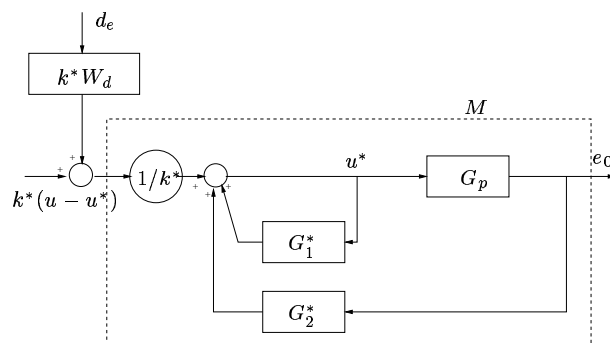


FIGURA 3.3: Esquema equivalente da estrutura do controlador *MRAC* com parâmetros ideais.

Note que  $W_d = 1 - G_1^*$ . Como a função de transferência  $G_1^*$  é estritamente própria e estável, pode-se concluir que a função de transferência  $W_d$  é própria e estável.

Finalmente, definindo  $\bar{U} = -u^* + W_d d_e$  a equação do erro pode ser reescrita por:

$$e_0 = k^* M(u + \bar{U}) \quad (3.17)$$

Equivalentemente, a equação do erro pode ser representada no espaço de estado por:

$$\dot{e} = A_c e + k^* b_c [u + \bar{U}] \quad (3.18)$$

$$e_0 = h_c^T e \quad (3.19)$$

## 3.2 VS-MRAC

O controlador *VS-MRAC* utiliza a mesma estrutura do controlador *MRAC* apresentado na seção 3.1. Assim como no *MRAC* o *VS-MRAC* utiliza apenas medições de entrada e de saída para gerar o sinal de controle.

### 3.2.1 Definição do Problema

Da mesma forma que na seção 3.1, o seguinte sistema será considerado (3.1)-(3.3)(3.17)-(3.19). Além disso, serão adotadas as hipóteses (hipóteses 6-11 da seção 3.1) usuais de projeto do controle adaptativo por modelo de referência (*MRAC*) (Narendra & Annaswamy 1989, p.183) sobre: a planta, o modelo, o sinal de referência e a perturbação presente na entrada da planta.

Novamente, o objetivo é projetar uma lei de controle  $u(t)$  de forma que todos os sinais do sistema realimentado permaneçam limitados e o erro de rastreamento  $e_0 = y_p - y_m$  tenda assintoticamente para zero ou para algum pequeno conjunto residual em torno de zero para condições iniciais e sinais de referência arbitrários.

Tendo em vista a parametrização de controle  $u = \theta^T \omega$  a seguinte restrição para a classe de sinais de controle admissíveis será considerada

$$\sup_{0 \leq t_s \leq t} |u(t_s)| \leq K_\omega \sup_{0 \leq t_s \leq t} \|\omega(t_s)\| + K_\delta; \quad \forall t \quad (3.20)$$

onde  $K_\omega, K_\delta$  são constantes positivas.

Desta forma, os sinais do sistema serão regulares (*regular signals*) e, portanto, podem crescer no máximo exponencialmente (Sastry & Bodson 1989). Este limitante superior garante que todos os sinais no sistema pertençam a  $L_{\infty e}$ .

Para a implementação da lei de controle, as seguintes hipóteses serão adicionadas:

**Hipótese 12** *Assume-se que é conhecido um vetor  $\bar{\theta}^T$  formado por limitantes superiores do vetor de parâmetros  $\theta^*$ , i.e.,  $\bar{\theta}^T = [\bar{\theta}_1 \cdots \bar{\theta}_{2n}]$ , com  $\bar{\theta}_i > |\theta_i^*|$*

**Hipótese 13** *De acordo com a hipótese 11 é conhecido um limitante superior da perturbação de entrada  $d_e$ . Assume-se que é conhecida uma constante positiva  $\bar{k}_e$  de forma que um limitante superior para  $|W_d d_e|$  possa ser obtido a partir de uma versão filtrada de  $\bar{d}_e$  ( $\geq d_e$ ) através de um filtro de 1ª ordem, ou seja,  $\hat{d}_e = \frac{\bar{k}_e}{p+\gamma} \bar{d}_e$  onde  $\gamma < \min_k |Re(p_k)|$ , com  $p_k$  sendo os pólos de  $W_d$  (para detalhes ver Lema 3 em (Hsu, Lizarralde & Araújo 1997)).*

Os lemas apresentados a seguir serão úteis para a análise de estabilidade do controlador *VS-MRAC*.

**Lema 3.1** *Considere a seguinte relação entrada/saída:*

$$s(t) = M(p)[u + d(t) + \pi(t)]$$

onde  $s$ ,  $u$ ,  $d$  e  $\pi$  são sinais escalares,  $M(p)$  é uma função de transferência estritamente real positiva (*SPR*),  $d(t)$  é localmente integrável e  $\pi(t)$  é uma função com decaimento exponencial (i.e.  $|\pi(t)| \leq Re^{-\lambda t}$ ). Seja  $x$  o vetor de estados de uma realização estável, possivelmente não-mínima, de  $M$ . Se  $u$  é dado pela lei descontínua de realimentação  $u = -f(t) \text{sign}(s(t))$ , onde  $f$  é localmente integrável e satisfaz  $f(t) \geq |d(t)|, \forall t$ , então a desigualdade

$$|s(t)| \text{ e } \|x(t)\| \leq [c_1 \|x(0)\| + c_2 R] e^{-\lambda_1 t}$$

é satisfeita  $\forall t \geq 0$  para algumas constantes positivas  $c_1, c_2, \lambda_1$ . Além disso, se  $f(t)$  satisfaz  $f(t) \geq |d(t)| + \delta, \forall t$ , com uma constante positiva arbitrária  $\delta$ , então  $s(t)$  torna-se identicamente igual a zero após algum tempo finito  $t_r \geq 0$ .

*Prova:* A demonstração está baseada na teoria de Lyapunov estendida para sistemas descontínuos, ver (Bailey & Arapostathis 1987). Para uma completa demonstração ver (Hsu & Costa 1989). ■

**Lema 3.2** *Considere a seguinte relação entrada/saída:*

$$s(t) = M(p)[u + d(t)] + \pi(t) + \beta(t)$$

onde  $M(p) = K_m/(p + a_m)$  ( $K_m, a_m > 0$ );  $d(t)$  é localmente integrável;  $\beta(t)$  é absolutamente contínua ( $\forall t$ ) e  $\pi(t)$  é uma função com decaimento exponencial (i.e.  $|\pi(t)| \leq Re^{-\lambda t}$ ). Se  $u = -f(t)\text{sign}(s(t))$ , onde  $f$  é localmente integrável e  $f(t) \geq |d(t)| \forall t$ , então os sinais  $s(t)$  e  $\hat{s}(t) := s(t) - (\beta(t) + \pi(t))$  são limitados por

$$|s(t)| \text{ e } |\hat{s}(t)| \leq |\hat{s}(0)| e^{-a_m t} + 2 \left[ Re^{-\min(a_m, \lambda)t} + \sup_{0 \leq t_s \leq t} |\beta(t_s)| \right]$$

*Prova:* A demonstração é baseada no Lema da comparação (Filippov 1964). Ver (Hsu et al. 1997) para uma demonstração. ■

### 3.2.2 VS-MRAC - Caso: Grau Relativo $n^* = 1$

A principal idéia do VS-MRAC para o caso de plantas com grau relativo  $n^* = 1$  é fechar a malha do erro com um relé, com uma modulação apropriada, ou seja o sinal de controle é dado por:

$$u = -f(t)\text{sign}(e_0) \quad (3.21)$$

Neste caso, o modelo de referência pode ser escolhido como sendo estritamente real positivo (SPR), de forma que uma malha de deslizamento ideal (*ideal sliding loop - ISL*) (Hsu 1997) se forme ao redor da função de chaveamento, fazendo com que o estado do erro convirja para zero exponencialmente ou em tempo finito.

A figura 3.4 apresenta o diagrama em blocos do VS-MRAC para o caso de plantas com grau relativo  $n^* = 1$ .

Como o VS-MRAC utiliza a mesma estrutura de controle do MRAC a equação do erro de saída é descrita pela equação (3.17). De acordo com o Lema 3.1, quando o modelo de referência é escolhido de forma a ser SPR, para que o objetivo de controle seja satisfeito a função de modulação deve atender a seguinte restrição:

$$f(t) \geq |u^*| + |W_d d_e| + \delta \quad (3.22)$$

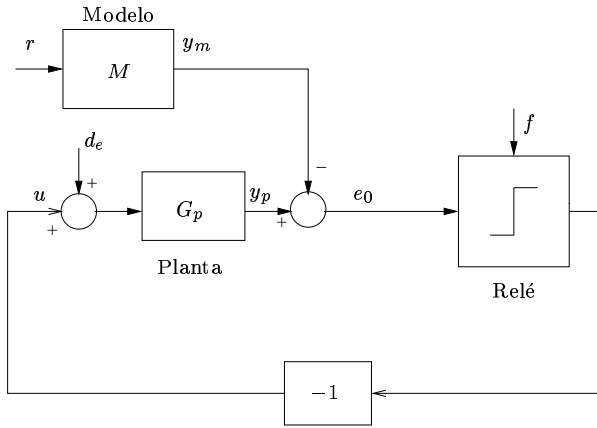


FIGURA 3.4: *VS-MRAC* - caso: grau relativo  $n^* = 1$ .

onde  $\delta$  é uma constante arbitrária não negativa.

Neste caso o sistema é globalmente exponencialmente estável, possuindo todos os sinais uniformemente limitados. Se a constante  $\delta$  for positiva o erro de rastreamento  $e_0$  torna-se identicamente nulo após algum tempo finito.

Considerando o limitante superior  $\bar{\theta}^T$  apresentado na hipótese 12 e o limitante superior  $\hat{d}_e(t)$  para  $|W_d d_e(t)|$  apresentado na hipótese 13, a função de modulação pode ser implementada do seguinte modo:

$$f(t) = \bar{\theta}^T |\omega(t)| + \hat{d}_e(t) + \delta \quad (3.23)$$

Como esta implementação da função de modulação satisfaz a condição (3.22) os objetivos de controle são assegurados. Estes resultados de estabilidade estão formalizados no Teorema 3.1.

**Teorema 3.1** *Considere o sistema (3.1)-(3.3)(3.21)(3.17) e assuma que as hipóteses (6)-(13) são válidas. Se  $M(s)$  é uma função de transferência estritamente positiva real (SPR) e a função de modulação satisfaz a restrição (3.22), então o sistema é globalmente exponencialmente estável, possuindo todos os sinais uniformemente limitados. Para o caso de  $\delta > 0$  o erro de rastreamento  $e_0$  torna-se identicamente nulo após algum tempo finito. ■*



### 3.2.3 VS-MRAC Compensado - Caso: Grau Relativo $n^* > 1$

Para o caso de plantas com grau relativo  $n^* > 1$  o modelo de referência não pode ser escolhido *SPR*. Para resolver este problema pode-se utilizar um operador  $L(p)$  (não-causal) de forma a compensar o grau relativo excedente da planta. Como o modelo de referência é conhecido, o operador  $L(p)$  pode ser escolhido de forma que a função de transferência  $ML(p)$  seja *SPR*, reduzindo o problema ao caso  $n^* = 1$  ( $L(p) = 1$ ), abordado na seção 3.2.2.

Entretanto, como este operador não é causal, ele não pode ser implementado na prática. Na verdade, o que pode ser feito é uma realização aproximada deste operador. No controlador **LF/VS-MRAC** este operador é realizado através de um compensador *lead* linear com a seguinte função de transferência:

$$L_a(p) = \frac{L(p)}{F(\tau p)} \quad (3.24)$$

onde  $F(\tau p)$  é um polinômio Hurwitz em  $\tau p$ , ou seja,  $F(\tau p) = (\tau p + 1)^l$ , onde  $l$  é o grau de  $F(\tau p)$  e  $F(0) = 1$ .

O esquema do controlador *LF/VS-MRAC* para plantas com grau relativo  $n^* > 1$  pode ser visto na figura 3.5

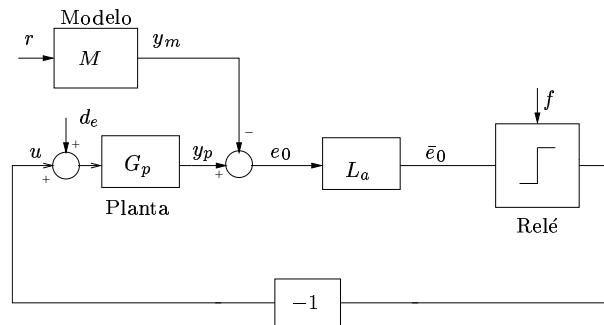


FIGURA 3.5: *LF/VS-MRAC*: *VS-MRAC* usando um filtro *lead* linear para compensação de grau relativo.

À medida que  $\tau$  tende para zero a função de transferência  $L_a(p)$  tende para  $L(p)$ . Portanto o esquema apresentado na figura 3.5 compensa aproximadamente o excesso de grau relativo da planta.

O sinal de erro auxiliar  $\bar{e}_0$  apresentado na figura 3.5 pode ser definido como:

$$\bar{e}_0 = L_a(p)e_0 \quad (3.25)$$

Substituindo (3.17) em (3.25), após algumas manipulações algébricas, o seguinte resultado pode ser obtido:

$$\bar{e}_0 = k^*ML[u + \bar{U}] + \beta_{\bar{U}} + \beta_u \quad (3.26)$$

onde:

$$\beta_{\bar{U}} = - \left[ k^*ML \left( \frac{F-1}{F} \right) \right] \bar{U} \quad (3.27)$$

$$\beta_u = - \left[ k^*ML \left( \frac{F-1}{F} \right) \right] u \quad (3.28)$$

Note que a função de transferência  $M(p)L(p) \left[ \frac{F(\tau p)-1}{F(\tau p)} \right]$  é estável e estritamente própria.

### 3.2.3.1 Análise de Estabilidade

De agora em diante, seja  $z$  o vetor de estados completo do sistema (3.18)(3.26)-(3.28). A fim de levar em consideração as condições iniciais, é conveniente criar a seguinte partição do vetor de estados  $z$ :

$$z^T = [(z^0)^T, z_e^T] \quad z_e^T = [e^T, \bar{e}^T]$$

onde o vetor  $\bar{e}^T = [\bar{e}_0, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_l]$  corresponde ao vetor de estados do filtro *lead* e o vetor  $z^0$  denota o estado do transiente correspondente aos operadores  $W_d$  e  $ML \left[ \frac{F-1}{F} \right]$ , de modo similar ao vetor  $z^0$  considerado em (Hsu et al. 1997).

No que se segue,  $EXP$  e  $EXP^0$  denotam qualquer termo da forma  $K \|z(0)\| e^{-at}$  e  $K \|z^0(0)\| e^{-at}$ , respectivamente, onde  $a$  é uma constante positiva (genérica) (Hsu 1997).

A proposição a seguir caracteriza as propriedades de convergência do erro auxiliar  $\bar{e}_0(t)$ . Esta proposição garante que, para funções de modulação apropriadas, o sinal  $\bar{e}_0(t)$  é limitado por uma norma  $L_{\infty e}$  do vetor regressor.

**Proposição 2** *Considere a equação do erro auxiliar (3.26), com  $u = -f(t)\text{sign}(\bar{e}_0)$ .*

Se a função de modulação do relé satisfaz a restrição (3.22) e a função de transferência  $ML(p)$  é da forma  $ML(p) = K_m/(p + a_m)$  ( $K_m, a_m > 0$ ) então,

$$|\bar{e}_0(t)| \leq \tau K_{\bar{e}_0} C(t) + EXP, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.29)$$

onde  $K_{\bar{e}_0} > 0$  é uma constante,  $\tau$  é a constante de tempo de  $F^{-1}$  e

$$C_1(t) = \sup_{0 \leq t_s \leq t} \|\omega(t_s)\|; \quad C(t) = K_\theta C_1(t) + K_\beta \quad (3.30)$$

para algumas constantes positivas  $K_\theta, K_\beta$ .

*Prova:* ver apêndice C ■

O resultado de estabilidade global é enunciado no Teorema a seguir.

**Teorema 3.2** *Considere o sistema (3.18)(3.25), com  $u = -f(t)\text{sign}(\bar{e}_0)$ . Assuma que a condição (3.22) é satisfeita e  $ML(p) = K_m/(p + a_m)$  ( $K_m, a_m > 0$ ). Então, para  $\tau$  suficientemente pequeno, o sistema completo do erro, com estado  $z$ , é globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual de ordem  $\tau$  independentemente das condições iniciais, isto é, existem constantes positivas  $K_z$  e  $a$  tais que  $\forall z(0), \forall t \geq 0, \|z(t)\| \leq K_z e^{-at} \|z(0)\| + O(\tau)$ .*

*Prova:* ver apêndice C ■

# Capítulo 4

## GRED/VS-MRAC

Como foi visto no capítulo 3 para o caso de plantas com grau relativo  $n^* > 1$  o controlador *VS-MRAC* utilizando um filtro *lead* para compensação do grau relativo conduz, globalmente, o estado completo do erro  $z$  para um conjunto residual de ordem  $O(\tau)$ . Este fato ocorre devido à presença do atraso introduzido pelo filtro *lead*, que impossibilita que o estado  $z$  convirja para zero .

Para tentar solucionar este problema poderia se utilizar o diferenciador apresentado na seção 2.5.4 que é robusto e exato, não introduzindo atrasos na malha de controle. Entretanto, quando este diferenciador é utilizado para realizar a realimentação do sistema em malha fechada apenas propriedades de convergência local podem ser garantidas.

Desta forma, a idéia é combinar as duas técnicas de estimação consideradas preservando a estabilidade global e garantindo que o estado completo do erro  $z$  tenda assintoticamente para zero.

Para atingir esta finalidade o *RED* será utilizado como um elemento auxiliar responsável por sintetizar um sinal que será adicionado ao sistema com o objetivo de cancelar o erro de estimação cometido pelo filtro *lead*, possibilitando, assim, que o rastreamento seja assintoticamente exato.

Neste capítulo será apresentado o controlador **GRED/VS-MRAC** (Global Robust Exact Differentiator Variable Structure Model-Reference Adaptive Control), baseado no *VS-MRAC*, que utiliza um filtro *lead* linear em conjunto com um diferenciador exato e robusto *RED*, para a compensação do grau relativo excedente da planta.

Da mesma forma que o *VS-MRAC* o controlador *GRED/VS-MRAC* também é

baseado no *MRAC* convencional, usando apenas informações da entrada e da saída. A lei de adaptação é baseada em síntese de sinal, ao contrário do *MRAC* que utiliza uma lei de adaptação paramétrica.

Este capítulo apresenta a estrutura do controlador *GREED/VS-MRAC*, mostrando em detalhes o desenvolvimento teórico necessário não só para o entendimento do funcionamento do controlador, mas também para a demonstração das propriedades apresentadas pelo mesmo.

Além disso, serão apresentadas simulações numéricas com o objetivo de comprovar os resultados teóricos obtidos e de ilustrar as principais características do controlador proposto. Também serão apresentados resultados experimentais que comprovam a viabilidade da implementação prática do controlador *GREED/VS-MRAC*.

## 4.1 Definição do Problema

Da mesma forma que no capítulo 3, considera-se uma planta desconhecida (com incertezas), monovariável (*SISO*), linear e invariante no tempo (*LTI*), modelada por uma função de transferência racional e estritamente própria dada por:

$$G_p(p) = K_p \frac{N_p(p)}{D_p(p)} \quad (4.1)$$

com entrada  $u$  e saída  $y_p$ . O modelo de referência, com entrada  $r$  e saída  $y_m$ , é caracterizado por uma função de transferência estritamente própria, linear, invariante no tempo e assintoticamente estável dada por:

$$M(p) = \frac{K_m}{D_m(p)} \quad (4.2)$$

onde  $N_p, D_p, D_m$  são polinômios mônicos e  $r$  é uma função arbitrária do tempo, contínua por partes e uniformemente limitada.

O objetivo de controle pode ser definido da seguinte forma:

- Projetar uma lei de controle  $u(t)$ , tal que todos os sinais na malha fechada permaneçam limitados e o erro de saída  $e_0 := y_p - y_m$  tenda assintoticamente para zero, para condições iniciais e sinais de referência  $r$  (contínuos por partes e uni-

formemente limitados) arbitrários.

Na abordagem do *MRAC* o sinal de controle  $u$  é parametrizado por  $u(t) = \theta^T \omega(t)$ , onde  $\theta \in \mathbb{R}^{2n}$  é o vetor de parâmetros e  $\omega \in \mathbb{R}^{2n}$  é o vetor regressor obtido a partir dos filtros de entrada e de saída (Narendra & Annaswamy 1989).

A equação do erro de saída  $e_0$  do *MRAC* para uma planta com perturbação de entrada  $d_e$  é dada por:

$$\begin{aligned} \text{Espaço de Estados: } \dot{e} &= A_c e + k^* b_c [u + \bar{U}] \\ e_0 &= h_c^T e \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\text{Entrada e Saída: } e_0 = k^* M(p)[u + \bar{U}] \quad (4.4)$$

onde  $e$  é o estado de uma realização estável de  $M(p)$ , possivelmente não mínima,  $k^* = K_p/K_m$ ,  $\bar{U} = -u^* + W_d d_e$ ,  $u = u^* = \theta^{*T} \omega$  é o sinal controle ideal que assegura o casamento perfeito entre  $M(p)$  e o sistema em malha fechada (com  $d_e = 0$ ),  $W_d(p) = [k^* M(p)]^{-1} \bar{W}_d$  é uma função de transferência estável e própria (ver (Hsu et al. 1997) para detalhes) e  $\bar{W}_d(p) = h_c^T (pI - A_c)^{-1} b'_0$  é a função de transferência em malha fechada da perturbação  $d_e$  para  $e_0$  com  $u = u^*$ .

Serão adotadas as hipóteses (hipóteses 6-11 do capítulo 3) usuais de projeto do controle adaptativo por modelo de referência (*MRAC*) (Narendra & Annaswamy 1989, p.183) e as hipóteses (hipóteses 12 e 13 do capítulo 3) para a implementação da lei de controle.

De acordo com a parametrização do controle  $u(t) = \theta^T \omega(t)$ , para que não ocorra escape em tempo finito para os sinais do sistema, considere a seguinte restrição para a classe de sinais de controle admissíveis (está hipótese será verificada mais a frente nas demonstrações dos teoremas que asseguram estabilidade global).

**Hipótese 14** *A lei de controle satisfaz a seguinte desigualdade:*

$$\sup_{0 \leq t_s \leq t} |u(t_s)| \leq K_\omega \sup_{0 \leq t_s \leq t} \|\omega(t_s)\| + K_\delta; \quad \forall t \quad (4.5)$$

onde  $K_\omega, K_\delta$  são constantes positivas.

## 4.2 Esquema de Controle do GRED/VS-MRAC

O esquema de controle adotado no *GRED/VS-MRAC* é praticamente o mesmo utilizado no *VS-MRAC* compensado. Para o caso de plantas com grau relativo  $n^* = 1$  a estratégia de controle utilizada por ambos consiste, apenas, em fechar a malha do erro com um relé que possua uma modulação apropriada. No caso de plantas com grau relativo  $n^* > 1$  pode-se utilizar um operador  $L(p)$  para compensar o grau relativo excedente da planta, conforme pode ser visto na figura 4.1.

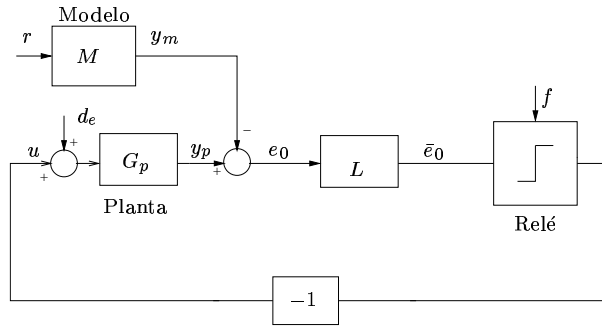


FIGURA 4.1: VS-MRAC usando um operador  $L(p)$  para compensação de grau relativo.

O operador  $L(p)$  é representado pela seguinte função de transferência:

$$L(p) = \gamma_0 p^{(n^*-1)} + \gamma_1 p^{(n^*-2)} + \dots + \gamma_{n^*-2} p + \gamma_{n^*-1}$$

Neste caso o erro auxiliar  $\bar{e}_0$ , indicado na figura 4.1, é dado por:

$$\begin{aligned} \bar{e}_0 &= L(p)e_0 \\ &= \left[ \gamma_0 p^{(n^*-1)} + \gamma_1 p^{(n^*-2)} + \dots + \gamma_{n^*-2} p + \gamma_{n^*-1} \right] e_0 \\ &= \gamma_0 e_0^{(n^*-1)} + \gamma_1 e_0^{(n^*-2)} + \dots + \gamma_{n^*-2} \dot{e}_0 + \gamma_{n^*-1} e_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Como a função de transferência  $L(p)$  não é causal, ela não pode ser implementada na prática. No *LF/VS-MRAC* este operador é realizado através de um filtro *lead* linear (ver figura 4.2) com a seguinte função de transferência:

$$L_a(p) = \frac{L(p)}{F(\tau p)}$$

onde  $F(\tau p)$  é um polinômio Hurwitz em  $\tau p$ , ou seja,  $F(\tau p) = (\tau p + 1)^l$ , onde  $l \geq n^* - 1$  é o grau de  $F(\tau p)$  e  $F(0) = 1$ .

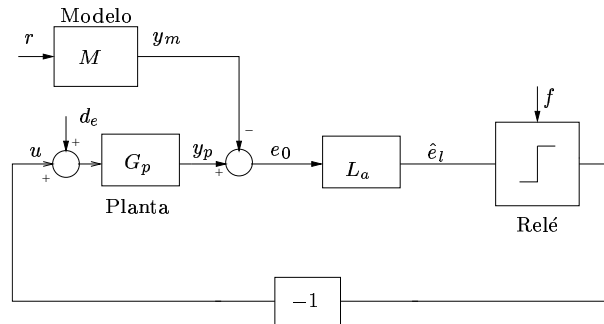


FIGURA 4.2: VS-MRAC usando um filtro *lead* para compensação de grau relativo (*LF/VS-MRAC*).

A função de transferência  $L_a(p)$  pode ser obtida de forma equivalente, utilizando o esquema apresentado na figura 4.3.

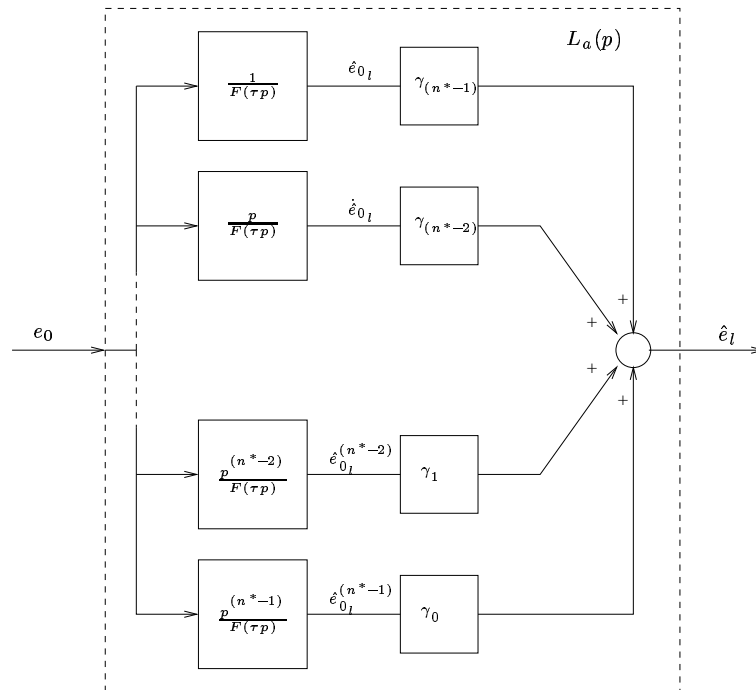


FIGURA 4.3: Implementação equivalente para o filtro *lead* utilizado no *LF/VS-MRAC*.

A vantagem desta implementação é a possibilidade de se ter acesso às estimativas das derivadas obtidas pelo filtro *lead*.



Desta forma, o sinal de erro auxiliar  $\hat{e}_l$  apresentado na figura 4.2 pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\hat{e}_l &= [\gamma_0 p^{(n^*-1)} + \gamma_1 p^{(n^*-2)} + \dots + \gamma_{n^*-2} p + \gamma_{n^*-1}] \hat{e}_{0_l} \\ &= \gamma_0 \hat{e}_{0_l}^{(n^*-1)} + \gamma_1 \hat{e}_{0_l}^{(n^*-2)} + \dots + \gamma_{n^*-2} \dot{\hat{e}}_{0_l} + \gamma_{n^*-1} \hat{e}_{0_l}\end{aligned}\quad (4.7)$$

A estimativa dada pelo filtro *lead* pode ser vista de forma equivalente por:

$$\hat{e}_l(t) = \bar{e}_0(t) + \epsilon_l(t) \quad (4.8)$$

onde  $\epsilon_l(t)$  é o erro de estimação cometido pelo filtro *lead*.

Substituindo os resultados obtidos em (4.6) e em (4.7) na equação (4.8), pode-se reescrever o erro de estimação  $\epsilon_l$  do seguinte modo:

$$\epsilon_l = \sum_{i=1}^{n^*} \gamma_{n^*-i} \epsilon_{0_l}^{(i-1)} \quad (4.9)$$

onde  $\epsilon_{0_l}^{(i)} = \hat{e}_{0_l}^{(i)} - e_0^{(i)}$ ,  $i = 0, \dots, n^* - 1$ .

Observando a equação (4.9) pode ser verificado que o erro de estimação cometido pelo filtro *lead* para aproximar o polinômio  $L(p)$  é dado por uma combinação linear dos erros de estimação do sinal  $e_0$  e de suas derivadas.

De forma análoga, se no lugar de um filtro *lead* fosse utilizado um *RED*, poderia-se desenvolver um raciocínio similar ao apresentado no caso em que um filtro *lead* é utilizado para compensação de grau relativo.

Na seção 2.5.4 foi apresentado um diferenciador de ordem arbitrária, denominado de *RED*, que é robusto a presença de ruído, sendo exato na sua ausência. O *RED* de ordem  $n$  é capaz de fornecer estimativas de  $e_0, \dot{e}_0, \dots, e_0^{(n)}$  para qualquer sinal de entrada  $e_0$ , para o qual  $e_0^{(n)}$  possua constante de *Lipschitz*  $C_{n+1} > 0$ .

Definindo  $e_{0_r}^{(i)}$  como sendo a estimativa do sinal  $e_0^{(i)}$ , para compensar o grau relativo excedente, o sinal  $\bar{e}_0$  pode ser aproximado por:

$$\hat{e}_r = \gamma_0 \hat{e}_{0_r}^{(n^*-1)} + \gamma_1 \hat{e}_{0_r}^{(n^*-2)} + \dots + \gamma_{n^*-2} \dot{\hat{e}}_{0_r} + \gamma_{n^*-1} \hat{e}_{0_r} \quad (4.10)$$

A estimativa dada pelo *RED* pode ser vista de forma equivalente por:

$$\hat{e}_r(t) = \bar{e}_0(t) + \epsilon_r(t) \quad (4.11)$$

onde  $\epsilon_r(t)$  é o erro de estimação cometido pelo *RED*.

Substituindo os resultados obtidos em (4.6) e em (4.10) na equação (4.11), pode-se reescrever o erro de estimação  $\epsilon_r$  do seguinte modo:

$$\epsilon_r = \sum_{i=1}^{n^*} \gamma_{n^*-i} \epsilon_{0_r}^{(i-1)} \quad (4.12)$$

onde  $\epsilon_{0_r}^{(i)} = \hat{e}_{0_r}^{(i)} - e_0^{(i)}$ ,  $i = 0, \dots, n^* - 1$ .

Como foi mencionado anteriormente o atraso introduzido pelo filtro *lead* impossibilita que o estado  $z$  convirja para zero e o uso de um diferenciador *RED* não permite garantir estabilidade global para o sistema. Para solucionar estes problemas é proposto um controlador baseado num esquema de chaveamento suave entre um filtro *lead* e um *RED*, denominado de *GREED/VS-MRAC*.

Neste controlador, o filtro *lead* que era usado para a compensação de grau relativo no *LF/VS-MRAC* é substituído por um *GREED*, que é composto por um filtro *lead* e por um *RED*. Embora seja constituído por dois estimadores o *GREED* pode ser visto como um único estimador com entrada  $e_0$  e saída  $\hat{e}_g$  dada pela seguinte combinação convexa:

$$\hat{e}_g = \alpha(\tilde{e}_{rl})\hat{e}_l(t) + [1 - \alpha(\tilde{e}_{rl})]\hat{e}_r(t) \quad (4.13)$$

onde  $\hat{e}_l$  e  $\hat{e}_r$  são as estimativas de  $\bar{e}_0$  dadas pelo filtro *lead* e pelo *RED*, respectivamente. A função de chaveamento  $\alpha(\tilde{e}_{rl})$  é uma modulação contínua e dependente do estado que permite ao controlador trocar suavemente entre os dois estimadores. Esta função pode assumir valores no intervalo  $[0, 1]$  e será definida posteriormente. O esquema completo do *GREED/VS-MRAC* pode ser visto na figura 4.4.

Deve-se destacar que através desta função de chaveamento a estimação pode ser realizada de três modos: usando apenas o filtro *lead* ( $\alpha(\tilde{e}_{rl}) = 1$ ), utilizando apenas o *RED* ( $\alpha(\tilde{e}_{rl}) = 0$ ) e através de um combinação convexa das estimativas fornecidas pelo filtro *lead* e pelo *RED* ( $0 < \alpha(\tilde{e}_{rl}) < 1$ ).

Do mesmo modo que nos casos anteriores, a estimativa fornecida pelo *GREED* pode

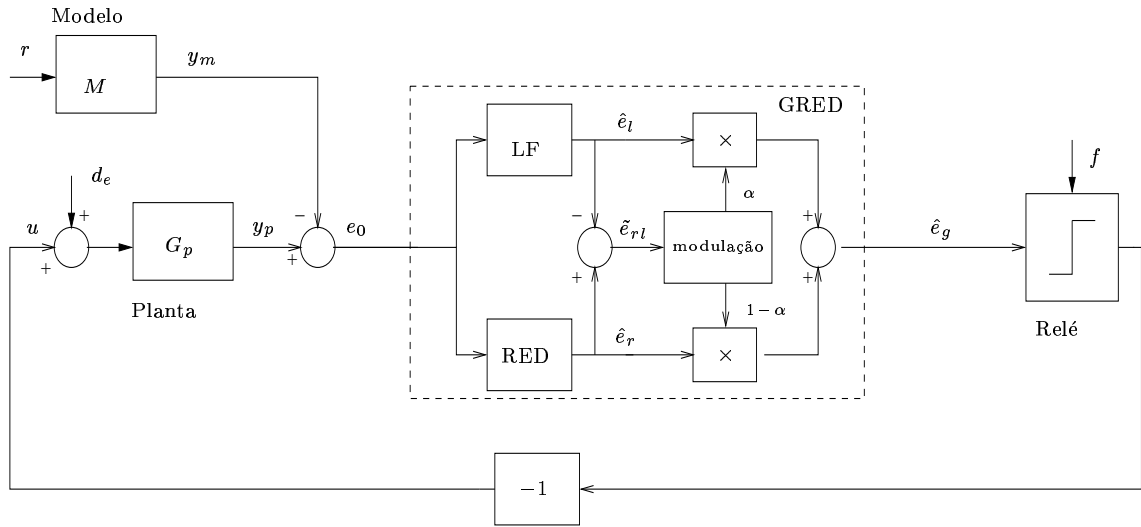


FIGURA 4.4: Esquema do controlador *GRED/VS-MRAC*

ser vista de forma equivalente por:

$$\hat{e}_g(t) = \bar{e}_0(t) + \epsilon(t) \quad (4.14)$$

onde

$$\epsilon(t) = \alpha(\tilde{e}_{rl})\epsilon_l(t) + [1 - \alpha(\tilde{e}_{rl})]\epsilon_r(t) \quad (4.15)$$

O erro de estimação  $\epsilon(t)$  pode ser considerado como sendo um ruído de medição de saída. Desta forma, o sistema pode ser visto como sendo o sistema ideal, perturbado por um ruído de medição de saída (ver figura 4.5).

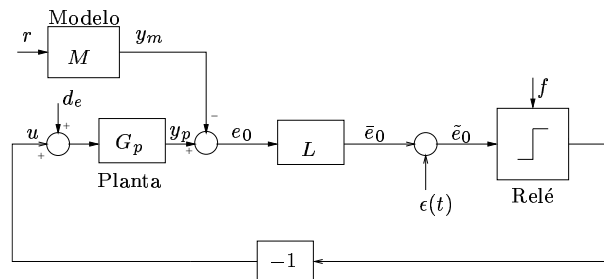


FIGURA 4.5: Representação equivalente do controlador *GRED/VS-MRAC*.

Para encontrar uma representação de estados para o sistema apresentado de forma equivalente nas figuras 4.4 e 4.5 a seguinte Proposição será utilizada.

**Proposição 3** Para o sistema (4.3) as  $n^* - 1$  derivadas de  $e_0$  ( $e_0^{(i)}, i = 1, \dots, n^* - 1$ ) podem ser representadas por  $e_0^{(i)} = h_i^T e$ .

*Prova:* ver apêndice D ■

Usando a Proposição 3 e a equação (4.6) o sistema apresentado nas figuras 4.4 e 4.5 pode ser descrito da seguinte forma:

$$\text{Espaço de Estados: } \dot{e} = A_c e + k^* b_c (u + \bar{U}) \quad (4.16)$$

$$\bar{e}_0 = \bar{h}^T e$$

$$\text{Entrada e Saída: } \bar{e}_0 = k^* M(p)L(p)[u + \bar{U}] \quad (4.17)$$

$$\text{Sinal de Controle: } u = -f(t)\text{sign}(\bar{e}_0 + \epsilon) \quad (4.18)$$

Novamente, como o modelo de referência é conhecido, o operador  $L(p)$  pode ser escolhido de forma que  $M(p)L(p) = K_m/(p + a_m)$ . Deste modo, o sistema  $\{A_c, b_c, \bar{h}^T\}$  será *SPR*.

### 4.3 Função de Chaveamento Ponderada

A função de chaveamento deve atender a dois requisitos simultaneamente para que o objetivo de controle possa ser atingido. Ela deve preservar as características de estabilidade global apresentadas pelo filtro *lead*, além de possibilitar que o estado completo do erro  $z$  convirja para zero.

A idéia é utilizar uma função de chaveamento que torne a estrutura de controle do sistema similar a estrutura de um sistema controlado por um *LF/VS-MRAC*. Na realidade, a estrutura do sistema será equivalente exceto pela presença de uma perturbação de saída uniformemente limitada, que não deve interferir nas propriedades globais apresentadas quando o filtro *lead* é utilizado.

**Hipótese 15** Para uma determinada função de chaveamento o sistema apresentado na figura 4.4 pode ser representado de forma equivalente pelo sistema apresentado na figura 4.6, sendo descrito por:

$$\text{Espaço de Estados: } \dot{e} = A_c e + k^* b_c (u + \bar{U}) \quad (4.19)$$

$$e_0 = h_c^T e$$

$$\text{Entrada e Saída: } e_0 = k^* M(p)[u + \bar{U}] \quad (4.20)$$

$$\hat{e}_l = L_a(p)e_0 \quad (4.21)$$

$$\tilde{e}_l = \hat{e}_l + \beta_\alpha \quad (4.22)$$

onde

$$|\beta_\alpha| \leq \tau K_r \quad (K_r \text{ é uma constante positiva genérica}) \quad (4.23)$$

$$u = -f(t) \text{sign}(\tilde{e}_l) \quad (4.24)$$

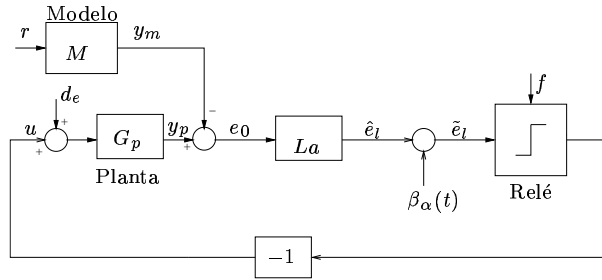


FIGURA 4.6: VS-MRAC usando um filtro *lead* para a compensação de grau relativo, com uma perturbação de saída uniformemente limitada.

Antes de propor uma função de chaveamento capaz de atender a hipótese 15, será demonstrado que o sistema (4.19)-(4.24) apresenta as mesmas propriedades de estabilidade do sistema analisado na seção 3.2.3.

Substituindo (4.20) em (4.21), após alguma manipulação algébrica, o erro auxiliar  $\hat{e}_l$  pode ser reescrito por:

$$\hat{e}_l = k^* ML[u + \bar{U}] + \beta_{\bar{U}} + \beta_u \quad (4.25)$$

onde:

$$\beta_{\bar{U}} = - \left[ k^* ML \left( \frac{F-1}{F} \right) \right] \bar{U} \quad (4.26)$$

$$\beta_u = - \left[ k^* ML \left( \frac{F-1}{F} \right) \right] u \quad (4.27)$$

É importante lembrar que a função de transferência  $M(p)L(p) \left[ \frac{F(\tau p)-1}{F(\tau p)} \right]$  é estável e estritamente própria.

**Proposição 4** *Considere a equação do erro auxiliar (4.25), com sinal de controle dado por (4.24). Se a função de modulação do relé satisfaz a restrição (3.22) e a função de transferência  $ML(p)$  é da forma  $ML(p) = K_m/(p + a_m)$  ( $K_m, a_m > 0$ ) então,*

$$|\hat{e}_i(t)| \leq \tau K_{\hat{e}_i} C(t) + EXP, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.28)$$

onde  $K_{\hat{e}_i}$  é uma constante positiva,  $\tau$  é a constante de tempo de  $F^{-1}$  e  $C(t)$  é definido em (3.30).

*Prova: ver apêndice D* ■

O resultado de estabilidade global é enunciado no Teorema a seguir.

**Teorema 4.1** *Considere o sistema (4.20)-(4.24). Assuma que a condição (3.22) é satisfeita e  $ML(p) = K_m/(p + a_m)$  ( $K_m, a_m > 0$ ). Então, para  $\tau$  suficientemente pequeno, o sistema completo do erro, com estado  $z$ , é globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual de ordem  $\tau$  independentemente das condições iniciais, isto é, existem constantes positivas  $K_z$  e  $a$  tais que  $\forall z(0), \forall t \geq 0, \|z(t)\| \leq K_z e^{-at} \|z(0)\| + O(\tau)$ .*

*Prova: A prova deste teorema é praticamente idêntica à prova do teorema 3.2, não sendo assim apresentada.* ■

**Corolário 4.1.1** *Para todo  $R > 0, \exists \tau > 0$  suficientemente pequeno tal que para algum tempo finito  $T$ ,*

$$\|z(t)\| < R, \quad \forall t \geq T \quad (4.29)$$

**Corolário 4.1.2** *As  $n^*$  derivadas do sinal  $e_0(t)$  ( $e_0^{(i)}(t), i = 1, \dots, n^*$ ) são limitadas, i.e., existem constantes positivas tais que*

$$|e_0^{(i)}(t)| \leq K_i, \quad i = 1, \dots, n^* \quad \forall t \geq 0$$

*Prova: ver apêndice D* ■

Observando os resultados apresentados no Teorema 4.1 pode ser verificado que o sistema considerado na hipótese 15 possui as mesmas propriedades de estabilidade de um sistema controlado por um *LF/VS-MRAC*, apresentado na seção 3.2.3.

Desta forma, para garantir que as propriedades globais de estabilidade sejam preservadas basta propor uma função de chaveamento que satisfaça a hipótese 15.

Para alcançar esta finalidade e também garantir que o estado completo do erro  $z$  convirja para zero a seguinte função de chaveamento ponderada é proposta:

$$\alpha(\tilde{e}_{rl}) = \begin{cases} 0, & \text{para } |\tilde{e}_{rl}| < \epsilon_M - c \\ \frac{|\tilde{e}_{rl}| - \epsilon_M + c}{c}, & \text{para } \epsilon_M - c \leq |\tilde{e}_{rl}| < \epsilon_M \\ 1, & \text{para } |\tilde{e}_{rl}| \geq \epsilon_M \end{cases} \quad (4.30)$$

onde:

$$\tilde{e}_{rl} = \hat{e}_r - \hat{e}_l = \epsilon_r - \epsilon_l \quad (4.31)$$

$$0 < c < \epsilon_M \quad (4.32)$$

$$\epsilon_M = \tau K_R \quad (4.33)$$

onde  $K_R$  é uma constante positiva apropriada.

Esta função de chaveamento possui uma estrutura similar a função considerada em (Goodwin, Graebe & Salgado 2001). Como esta função é contínua, ela garante que o chaveamento entre os dois estimadores seja suave, evitando, assim, descontinuidades em cascata que não estão previstas na Teoria de Filippov para equações diferenciais descontínuas.

No Lema a seguir será demonstrado que a função de chaveamento escolhida satisfaz a hipótese 15. Além disso, será provado que todos os sinais do sistema pertencem a  $L_{\infty}$ .

**Lema 4.1** *Considere o sistema (4.16)(4.18)(4.15). Se a função de chaveamento  $\alpha(\tilde{e}_{rl})$  for definida por (4.30), então este sistema pode ser representado, equivalentemente, por (4.19)-(4.24). Além disso, todos os sinais do sistema serão limitados para todo  $t$  finito.*

*Prova: ver apêndice D* ■

Até agora foi provado que para a função de chaveamento (4.30) o sistema completo do erro com estado  $z$  é globalmente exponencialmente estável com respeito a um

conjunto residual de ordem  $\tau$ .

Para concluir falta mostrar que a função de chaveamento (4.30) também assegura que o estado  $z$  converge para zero. Para isto, primeiramente, será analisada a convergência do *RED*. Em seguida será demonstrado que se a constante  $K_R$  for escolhida de forma apropriada o objetivo de controle é atingido.

O teorema 2.4, apresentado no capítulo 2.5.4, mostra que se a derivada  $e_0^{(n^*)}$  for uniformemente limitada o *RED* converge independentemente de suas condições iniciais.

De acordo com o Corolário 4.1.1 o estado completo do erro é conduzido para um conjunto compacto e invariante  $D_R := \{z : \|z(t)\| < R\}$  em um tempo finito  $T_1 > 0$ . Após o estado do erro entrar no conjunto  $D_R$  os sinais  $e_0^{(i)}(t)$ ,  $i = 0, \dots, n^*$  podem ser limitados de acordo com a seguinte Proposição:

**Proposição 5** *Considere o esquema de controle apresentado na figura 4.4, representado por (4.16)(4.18)(4.15), com  $\alpha(\tilde{e}_{r_l})$  definido em (4.30). A função de modulação é definida em (3.23). Como  $\|e(t)\| < R$ ,  $\forall t \geq T_1$ , então:*

$$\sup_{t \geq T_1} |e_0^{(i)}(t)| \leq C_i, \quad i = 0, \dots, n^*$$

*Prova: ver apêndice D* ■

Para aplicar o Teorema 2.4 é necessário que a derivada  $e_0^{(n^*)}$  seja uniformemente limitada por uma constante  $C_{n^*}$  positiva. A partir da Proposição 5 é possível encontrar este limitante para  $t \geq T_1$ . Como o *RED* é um sistema invariante no tempo suas condições iniciais podem ser consideradas em  $t = T_1$ . Do Lema 2.1 sabe-se que estas condições iniciais serão finitas. Desta forma, as condições do Teorema 2.4 são satisfeitas.

Portanto, se os parâmetros  $\lambda_i$  forem ajustados de forma correta o erro de estimação  $\epsilon_r(t)$  converge para zero em um tempo finito  $T_2$ . Este resultado de convergência está formalizado no Lema 4.2.

**Lema 4.2** *Considere o sistema (4.16)(4.18)(4.15). A função de chaveamento  $\alpha(\tilde{e}_{r_l})$  é definida por (4.30) e a função de modulação  $f(t)$  é definida em (3.23). Se os parâmetros  $\lambda_i$  forem ajustados de forma apropriada, então  $\hat{e}_r(t) = \bar{e}_0(t)$ ,  $\forall t \geq T_2$ .*

De acordo com o Lema 4.2 o erro de estimação  $\epsilon_r(t)$  se torna zero em um tempo finito  $T_2$ . Desta forma, se a partir deste instante apenas o *RED* for utilizado para



estimação de  $\bar{e}_0$  o operador  $L(p)$  pode ser realizado perfeitamente e o sistema completo do erro passa a ser *SPR*.

Para que o *RED* permanece ativo após este instante de tempo a constante  $K_R$  deve ser escolhida de forma que o limiar  $\epsilon_M$  seja maior do que o limitante superior do resíduo para o qual o erro de estimação do filtro *lead* converge.

Uma maneira viável para fazer isto é escolher  $\epsilon_M$  tal que  $\epsilon_M > \bar{e}_l + c$ , onde  $\bar{e}_l$  é o limitante superior para o erro de estimação do filtro *lead*  $\epsilon_l(t)$  quando o estado completo do erro se encontra dentro do conjunto compacto e invariante  $D_R$ . Este limitante superior é caracterizado na Proposição 6.

**Proposição 6** *Considere o esquema de controle apresentado na figura 4.4, representado por (4.16)(4.18)(4.15), com  $\alpha(\tilde{e}_{rl})$  definido em (4.30). A função de modulação é definida em (3.23). O erro de estimação do filtro *lead*  $\epsilon_l(t)$ , pode ser limitado para  $t \geq T_1$  por*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{ts \geq t} |\epsilon_l(ts)| < \bar{e}_l \quad (4.34)$$

onde:

$$\bar{e}_l = \tau K_l \quad (K_l \text{ é uma constante positiva})$$

*Prova: ver apêndice D* ■

Se a constante  $K_R$  for escolhida tal que  $\epsilon_M = \tau K_R$  satisfaz

$$\epsilon_M > \bar{e}_l + c$$

então  $\alpha(\tilde{e}_{rl}) = 0, \forall t \geq T_2$ , o que implica pelo Lema 4.2 que o erro de estimação  $\epsilon(t) = 0, \forall t \geq T_2$ . Neste caso um deslizamento ideal será formado para o sistema (4.16)(4.18).

Para o sistema equivalente apresentado na figura 4.6 o mesmo resultado pode ser obtido. Neste caso a estimativa obtida através do *RED* pode ser vista como um sinal adicional  $\beta_\alpha$  introduzido no sistema com a finalidade de cancelar o erro de estimação cometido pelo filtro *lead*, permitindo assim que o operador  $L(p)$  possa ser realizado perfeitamente.

Os resultados de estabilidade e convergência são enunciados no Teorema 4.2.

**Teorema 4.2** *Considere o controlador  $GRED/VS-MRAC$ , apresentado na figura 4.4, representado por (4.16)(4.18)(4.15), com  $\alpha(\tilde{e}_{rl})$  definido em (4.30). A função de modulação é definida em (3.23). Se  $K_R$  é tal que  $\epsilon_M = \tau K_R$  satisfaz*

$$\epsilon_M > \bar{\epsilon}_l + c, \quad (4.35)$$

*então, para  $\tau$  suficientemente pequeno, o sistema completo do erro com estado  $z$  é globalmente exponencialmente estável com respeito a um conjunto residual de ordem  $\tau$ . Além disso, após algum tempo finito a realização do operador  $L(p)$  passa a ser exata, sendo feita exclusivamente pelo  $RED$  ( $\alpha(\tilde{e}_{rl}) = 0$ ), e o estado completo do erro  $z$ , bem como o erro de rastreamento  $e_0(t)$  tendem exponencialmente para zero.*

*Prova: ver apêndice D* ■

## 4.4 Resultados de Simulação

Nesta seção serão apresentados alguns exemplos ilustrativos que comprovam a eficácia do método proposto, destacando as principais características do esquema de controle considerado. A partir das simulações será possível ilustrar aspectos teóricos e estudar o efeito da variação de alguns parâmetros do controlador.

Além disso, nas simulações apresentadas serão feitas comparações entre os resultados obtidos utilizando o controlador  $GRED/VS-MRAC$  com os resultados obtidos pelo controlador  $LF/VS-MRAC$ .

É importante destacar que o  $LF/VS-MRAC$  é um caso particular do controlador  $GRED/VS-MRAC$ , já que a partir da estrutura de controle do  $GRED/VS-MRAC$  seria possível se obter a estrutura do  $LF/VS-MRAC$ , bastando para isto fazer  $\epsilon_M = c = 0$ , utilizando, deste modo, apenas o filtro *lead* para compensar o grau relativo excedente da planta ( $\alpha(\tilde{e}_{rl}) = 1$ ).

Para comprovar os resultados teóricos as simulações apresentadas são novamente realizadas com passo de integração fixo e pequeno (método de Euler), a fim de se obter resultados próximos dos resultados teóricos.

O principal problema gerado pelo passo de integração é o surgimento do *chattering* numérico, que faz com que o sinal de controle possua uma freqüência finita durante

o deslizamento, em vez de apresentar uma frequência infinita (resultado teórico). É importante distinguir este fenômeno do *chattering* natural que pode ocorrer em determinados sistemas devido a presença de dinâmicas não modeladas ou a existência de atrasos na malha de controle.

#### 4.4.1 Caso 1: Planta Desconhecida com Grau Relativo ( $n^* = 2$ )

A planta é considerada desconhecida sendo dada por:

$$G_p(p) = \frac{2}{(p+1)(p-2)}$$

O modelo de referência foi escolhido como sendo

$$M(p) = \frac{2}{(p+2)^2}$$

Para as simulações desta seção serão utilizados os parâmetros apresentados na tabela 4.1.

TABELA 4.1: Parâmetros utilizados na simulação do sistema cuja planta possui grau relativo  $n^* = 2$ .

Elemento	Valor
Perturbação de Entrada	$d_e(t) = sqw(5t)$
Sinal de Entrada	$r(t) = \sin(0.5t)$
Função de Modulação ( $f(t) = \bar{\theta}^T  \omega  + f_0$ )	$\bar{\theta}^T = [6 \ 10 \ 2 \ 2]^T$ ; $f_0 = 1.5$
Polinômio $L(p)$	$L(p) = p + 2$
<i>RED</i>	$\lambda_0 = 0.5C_2^{1/2}$ ; $\lambda_1 = 1.1C_2$ ; $C_2 = 30$
Filtro <i>lead</i> $F(\tau s) = (\tau s + 1)^l$	$l = 1$ ; $\tau = 0.02$
Filtros de Entrada e Saída	$\Lambda = -1$ ; $g = 1$

Nestas simulações são consideradas as seguintes condições iniciais:

- $y_p(0) = 10$ ;
- $\dot{y}_p(0) = 5$

Observando a figura 4.7 é possível perceber que para este caso os dois controladores apresentam um desempenho praticamente idêntico no seguimento do modelo de

referência.

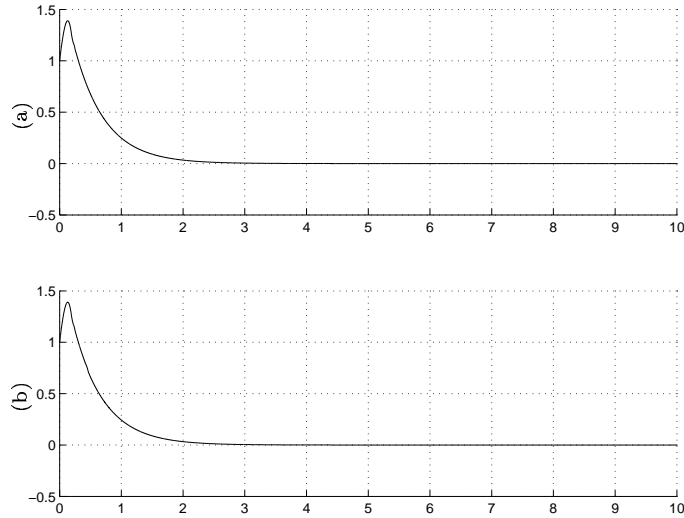


FIGURA 4.7: Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ): (a) Erro de rastreamento  $e_0(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Erro de rastreamento  $e_0(t)$  para  $\epsilon_M = 20\tau$  e  $c = 5\tau$  ( $\epsilon_M$  e  $c$  provenientes da equação (4.30)).

A figura 4.8 apresenta o gráfico da função de chaveamento. Deve-se destacar que após algum tempo apenas o *RED* é utilizado para estimar  $\bar{e}_0$  conforme previsto na teoria.

Além disso, é importante ressaltar que o tamanho da histerese (constante  $c$ ) influencia na forma como o chaveamento entre os dois estimadores ocorre. Quanto maior for a constante  $c$  mais suave será este chaveamento. Como neste caso a histerese é pequena ( $c = 5\tau$ ), o chaveamento entre os dois estimadores não é tão suave.

Para as condições e parâmetros considerados acima, se apenas o *RED* for utilizado para a estimação de  $\bar{e}_0$  ( $\alpha(\tilde{e}_{rl}) = 0$ ) o sistema se torna instável, conforme pode ser visto na figura 4.9.

Como a planta considerada possui grau relativo  $n^* = 2$  uma possível representação para o vetor de estado do erro é dada por  $e^T = [e_0 \quad \dot{e}_0]^T$ . Pode ser observado na figura 4.10 que no sistema controlado pelo *GRED/VS-MRAC* o sinal  $\dot{e}_0(t)$  também converge para zero. Já no caso do controlador *LF/VS-MRAC* o sinal  $\dot{e}_0(t)$  converge apenas para um conjunto residual de ordem  $\tau$ .

Embora os dois controladores apresentem um bom desempenho no rastreamento do modelo de referência, o controlador *LF/VS-MRAC* apresenta problema de *chattering*,

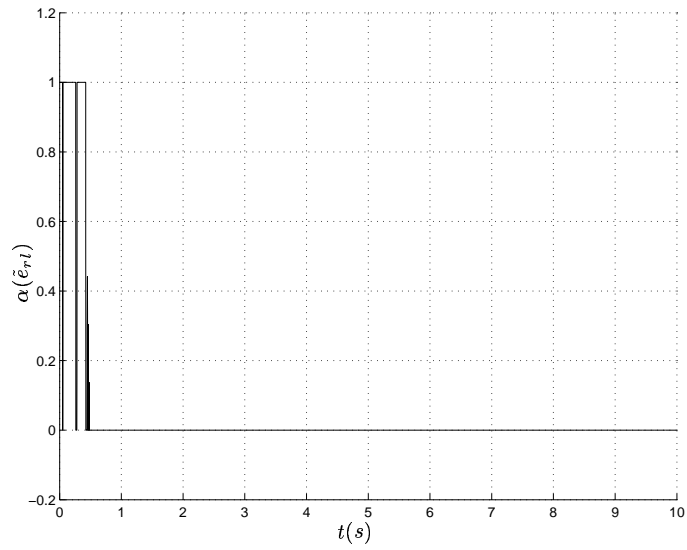


FIGURA 4.8: Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ): Comportamento no tempo da função de chaveamento ponderada  $\alpha(\tilde{e}_{ri})$  para  $\epsilon_M = 20\tau$  e  $c = 5\tau$  (ver figura 4.7 (b) ).

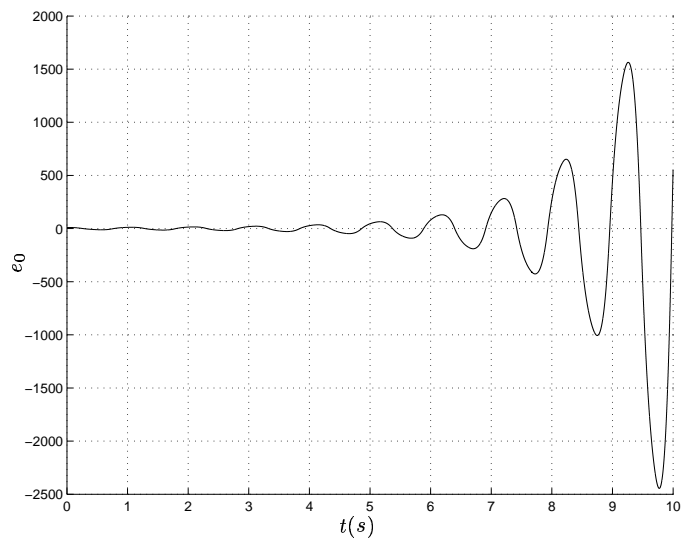


FIGURA 4.9: Sistema Instável quando somente o *RED* é usado para estimar  $\bar{e}_0$ .

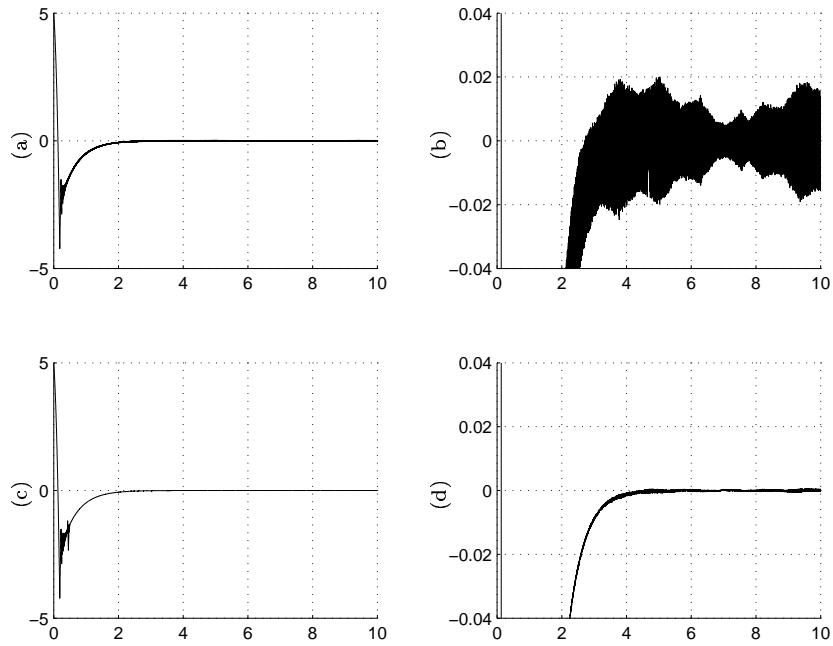


FIGURA 4.10: Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ): (a) Sinal  $\dot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Trecho ampliado do sinal  $\dot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (c) Sinal  $\dot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 20\tau$  e  $c = 5\tau$ ; (d) Trecho ampliado do sinal  $\dot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 20\tau$  e  $c = 5\tau$ .

enquanto o *GRED/VS-MRAC* não possui este problema, conforme pode ser visto na figura 4.11. Por este motivo o controlador *LF/VS-MRAC* deve ser mais sensível a existência de atrasos na malha de controle, provenientes, por exemplo, de dinâmicas não modeladas da planta. Este fato ficará mais evidente na seção 4.4.2, que analisará o efeito de dinâmicas não modeladas no sistema.

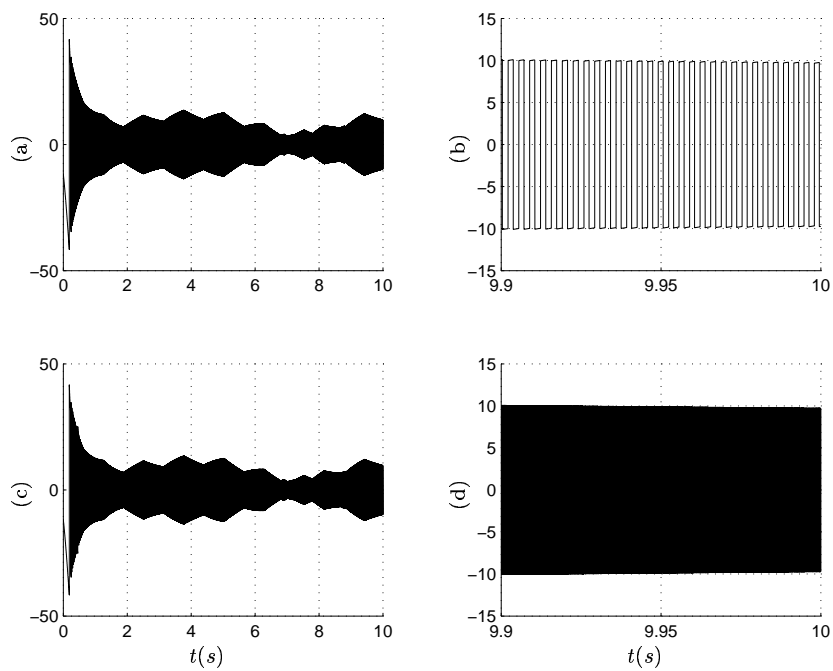


FIGURA 4.11: Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ): (a) Sinal de controle  $u(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Trecho ampliado do sinal  $u(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$ ; (c) Sinal de controle  $u(t)$  para  $\epsilon_M = 20\tau$  e  $c = 5\tau$ ; (d) Trecho ampliado do sinal  $u(t)$  para  $\epsilon_M = 20\tau$  e  $c = 5\tau$ .

#### 4.4.2 Caso 2: Planta Desconhecida ( $n^* = 2$ ) com Dinâmica Não Modelada

Neste caso é considerado o mesmo exemplo do caso 1, exceto pela planta que é dada por:

$$G_p(p) = \frac{1}{(\mu p + 1)} \left[ \frac{2}{(p + 1)(p - 2)} \right]$$

onde  $\mu = 0.1$  foi escolhido apenas para propósitos de simulação.

Para as simulações apresentadas nesta seção são utilizados os mesmos parâmetros considerados na tabela 4.1. As condições iniciais da planta são escolhidas como sendo :

- $y_p(0) = 1$ ;
- $\dot{y}_p(0) = 5$ .

Como pode ser visto na figura 4.12, a performance obtida para o rastreamento do modelo pelo esquema de controle usando o *GREED* para estimação é claramente superior à performance obtida usando-se apenas o filtro *lead*, fato que demonstra a robustez do esquema proposto.

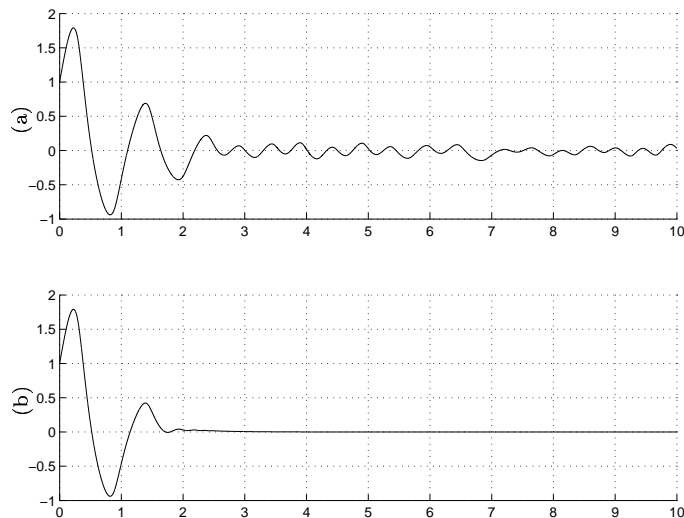


FIGURA 4.12: Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ) com dinâmica não modelada; (a) Erro de rastreamento  $e_0(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Erro de rastreamento  $e_0(t)$  para  $\epsilon_M = 60\tau$  e  $c = 40\tau$ .



A figura 4.13 apresenta a função de chaveamento para este caso. Como foi escolhido um tamanho de histerese maior o chaveamento entre os dois estimadores é mais suave neste caso. Deve ser enfatizado que quanto mais próximo de zero for o valor de  $\alpha(\tilde{e}_{rl})$  maior será o peso dado à estimativa obtida através do *RED*.

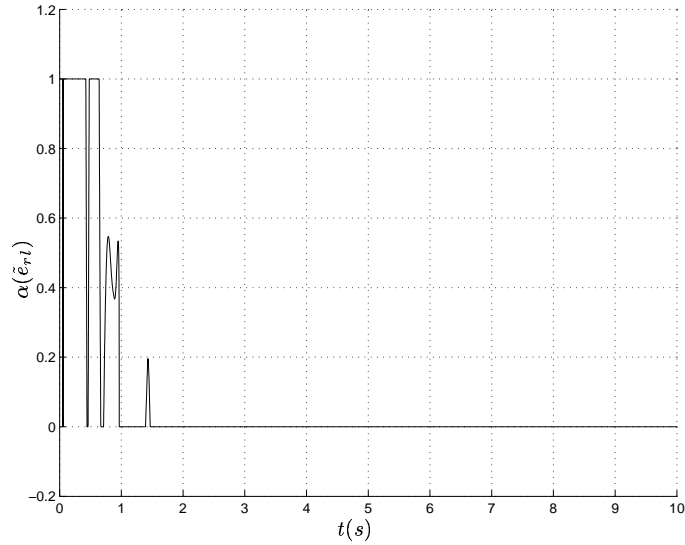


FIGURA 4.13: Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ) com dinâmica não modelada: Comportamento no tempo da função de chaveamento ponderada  $\alpha(\tilde{e}_{rl})$  para  $\epsilon_M = 60\tau$  e  $c = 40\tau$  (ver figura 4.12 (b) ).

Através da figura 4.14 pode ser observado que mesmo na presença da dinâmica não modelada considerada o controlador *GRED/VS-MRAC* continua conduzindo o estado completo do erro  $z$  para muito próximo de zero. Não é necessário apresentar o vetor de estado  $\bar{e}$  do filtro *lead*, porque como foi visto na figura 4.12 o sinal  $e_0(t)$  converge para zero e o filtro *lead* considerado é estável. O desempenho obtido pelo controlador *LF/VS-MRAC* não é satisfatório para este caso analisado.

Como era esperado o problema de *chattering* apresentado pelo *LF/VS-MRAC* se torna muito mais intenso, prejudicando seriamente o desempenho deste controlador para esta situação, conforme pode ser visto na figura 4.15.

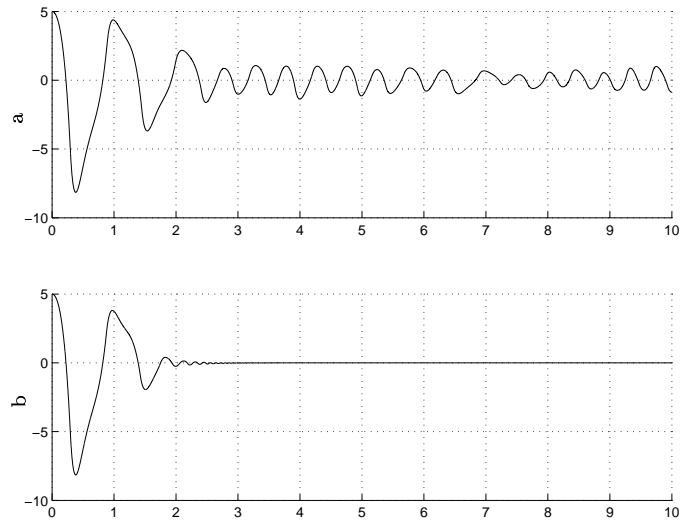


FIGURA 4.14: Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ) com dinâmica não modelada: (a) Sinal  $\dot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Sinal  $\dot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 60\tau$  e  $c = 40\tau$

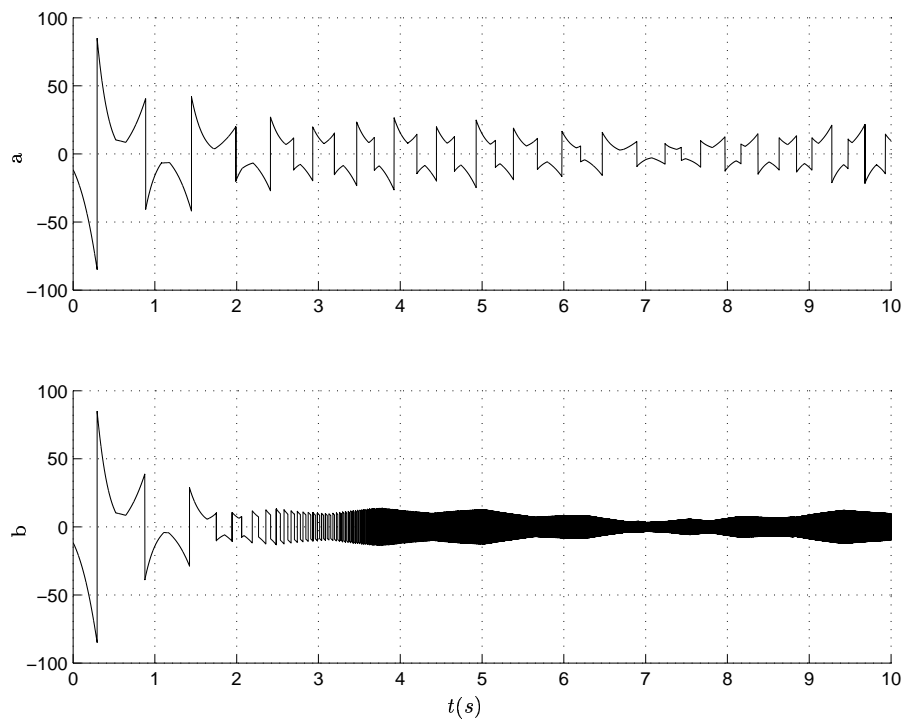


FIGURA 4.15: Planta desconhecida ( $n^* = 2$ ) com dinâmica não modelada: (a) Sinal de controle  $u(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Sinal de controle  $u(t)$  para  $\epsilon_M = 60\tau$  e  $c = 40\tau$ .

### 4.4.3 Caso 3: Planta Desconhecida com Grau Relativo ( $n^* = 3$ )

A planta é considerada desconhecida sendo dada por:

$$G_p(s) = \frac{1}{(p+2)(p+1)(p-1)}$$

O modelo de referência foi escolhido como sendo

$$M(s) = \frac{4}{(p+2)^3}$$

Para as simulações desta seção serão utilizados os parâmetros apresentados na tabela 4.2.

TABELA 4.2: Parâmetros utilizados na simulação do sistema cuja planta possui grau relativo  $n^* = 3$ .

Elemento	Valor
Perturbação de Entrada	$d_e(t) = sqw(5t)$
Sinal de Entrada	$r(t) = \sin(0.5t)$
Função de Modulação ( $f(t) = \bar{\theta}^T  \omega  + f_0$ )	$\bar{\theta}^T = [2 \ 2 \ 30 \ 15 \ 10 \ 5]^T$ ; $f_0 = 1$
Polinômio $L(p)$	$L(p) = (p+2)^2$
<i>RED</i>	$\lambda_0 = 25$ ; $\lambda_1 = 30$ ; $\lambda_2 = 10$
Filtro <i>lead</i> $F(\tau s) = (\tau s + 1)^l$	$l = 2$ ; $\tau = 0.001$
Filtros de Entrada e Saída	$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ; $g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nestas simulações são consideradas as seguintes condições iniciais:

- $y_p(0) = 0$ ;
- $\dot{y}_p(0) = 3$
- $\ddot{y}_p(0) = 0$

Na figura 4.16 pode ser visto que para este caso os dois controladores apresentam um desempenho muito similar no seguimento do modelo de referência.

Observando a figura 4.17 é possível perceber que na fase transitória o chaveamento entre os dois estimadores é bastante intenso. Como os parâmetros foram ajustados de

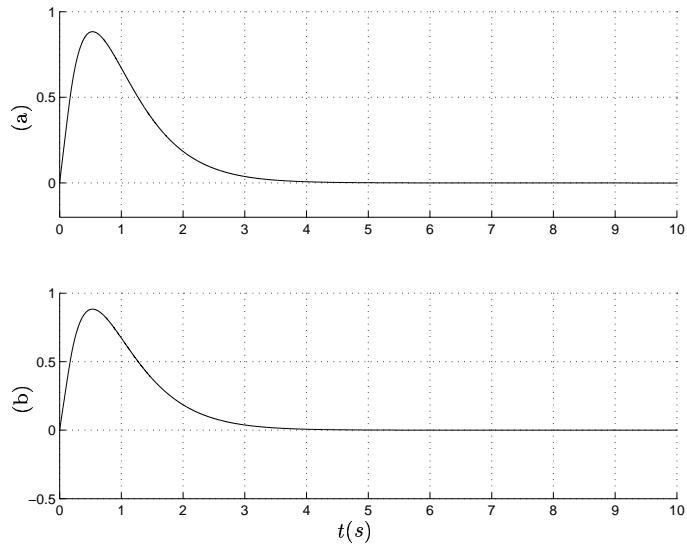


FIGURA 4.16: Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ); (a) Erro de rastreamento  $e_0(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Erro de rastreamento  $e_0(t)$  para  $\epsilon_M = 150\tau$  e  $c = 75\tau$ .

forma a satisfazer as condições do teorema 4.2, este fato não acarreta nenhum problema para o controle do sistema.

As figuras 4.18 e 4.19 apresentam os sinais  $\dot{e}_0(t)$  e  $\ddot{e}_0(t)$ , respectivamente. Os dois controladores apresentam um desempenho satisfatório, embora o desempenho do controlador *GRED/VS-MRAC* seja melhor. Deve ser destacado que para o controlador *GRED/VS-MRAC* o sinal  $\ddot{e}_0$  não converge para zero devido a problemas numéricos.

Na figura 4.20 pode ser visto que o sistema controlado pelo *LF/VS-MRAC* apresenta problema de *chattering*. Neste caso o controlador *GRED/VS-MRAC* apresenta problema de *chattering* numérico, fato que dificulta a comprovação dos resultados teóricos.

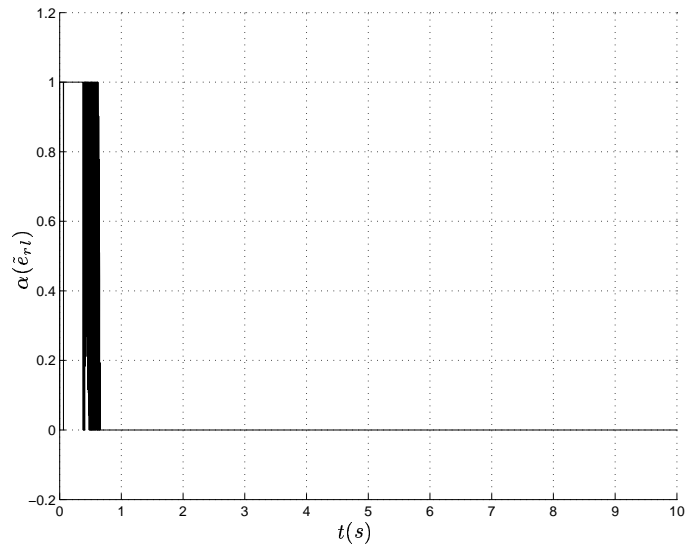


FIGURA 4.17: Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ): Comportamento no tempo da função de chaveamento ponderada  $\alpha(\tilde{e}_{rl})$  para  $\epsilon_M = 150\tau$  e  $c = 75\tau$  (ver figura 4.16 (b) ).

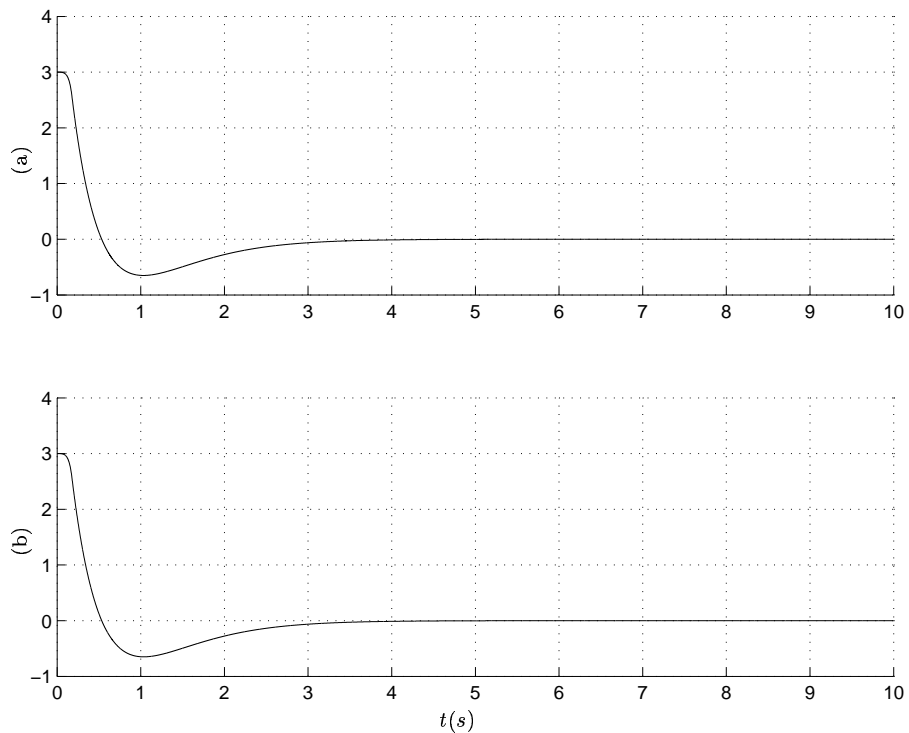


FIGURA 4.18: Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ): (a) Sinal  $\dot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Sinal  $\dot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 150\tau$  e  $c = 75\tau$ .

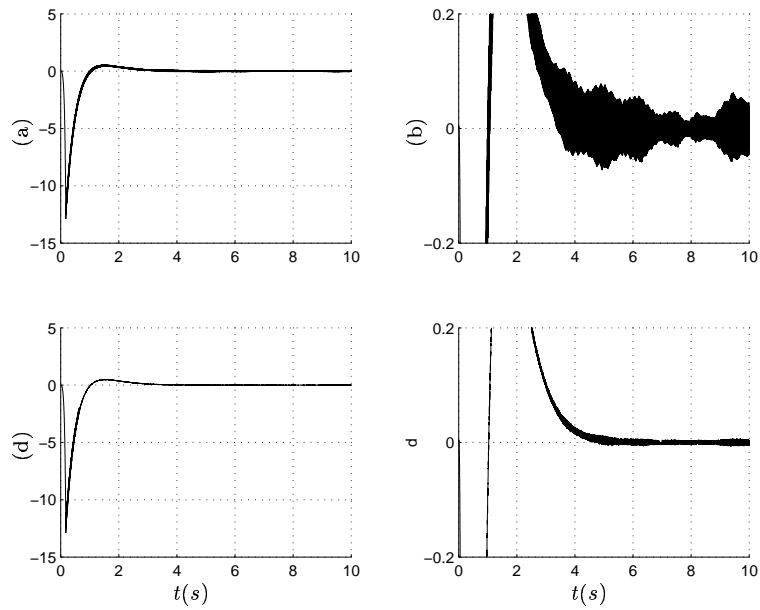


FIGURA 4.19: Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ): (a) Sinal  $\ddot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Sinal  $\ddot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 150\tau$  e  $c = 75\tau$ .

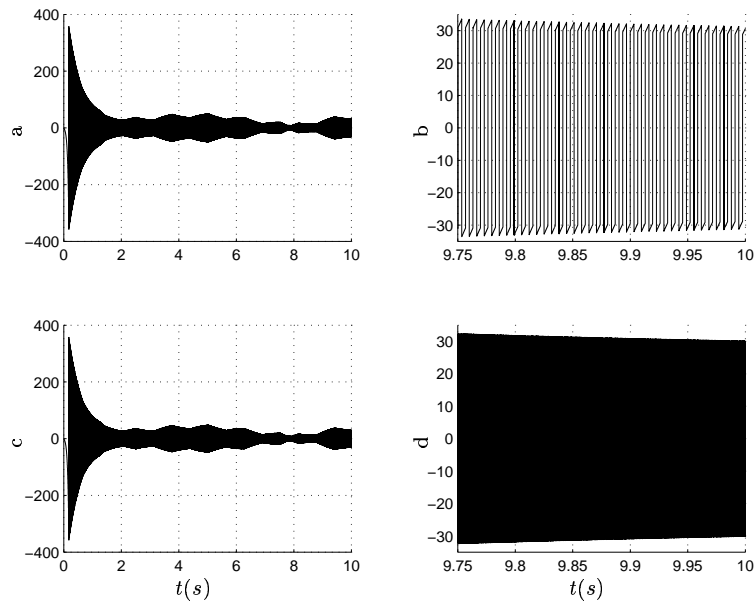


FIGURA 4.20: Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ): (a) Sinal de controle  $u(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Trecho ampliado do sinal  $u(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$ ; (c) Sinal de controle  $u(t)$  para  $\epsilon_M = 150\tau$  e  $c = 75\tau$ ; (d) Trecho ampliado do sinal  $u(t)$  para  $\epsilon_M = 150\tau$  e  $c = 75\tau$ .

#### 4.4.4 Caso 4: Planta Desconhecida ( $n^* = 3$ ) com Dinâmica Não Modelada

A planta é considerada desconhecida sendo dada por:

$$G_p(s) = \frac{1}{(\mu p + 1)} \left[ \frac{1}{(p + 2)(p + 1)(p - 1)} \right]$$

onde  $\mu = 0.2$  foi escolhido apenas para propósitos de simulação.

O modelo de referência foi escolhido como sendo

$$M(s) = \frac{4}{(p + 2)^3}$$

Para as simulações desta seção serão utilizados os parâmetros apresentados na tabela 4.2, com a exceção dos parâmetros do *RED* que foram escolhidos da seguinte forma:

- $\lambda_0 = 8$
- $\lambda_1 = 10$
- $\lambda_2 = 6$

Nestas simulações são consideradas as seguintes condições iniciais:

- $y_p(0) = 0$ ;
- $\dot{y}_p(0) = 0$
- $\ddot{y}_p(0) = 2$

Na figura 4.21 pode ser visto que os dois controladores apresentam um desempenho satisfatório no seguimento do modelo de referência, mesmo na presença de uma dinâmica não modelada significativa.

Nas figuras 4.23 e 4.24 são apresentados os sinais  $\dot{e}_0(t)$  e  $\ddot{e}_0(t)$  respectivamente, que completam o vetor de estado do erro  $e^T = [e_0 \ \dot{e}_0 \ \ddot{e}_0]^T$  de uma possível representação de estados. Nestas figuras pode ser visto que o controlador *LF/VS-MRAC* não é capaz de conduzir o estado para zero, e nesse caso nem sequer levar para um conjunto

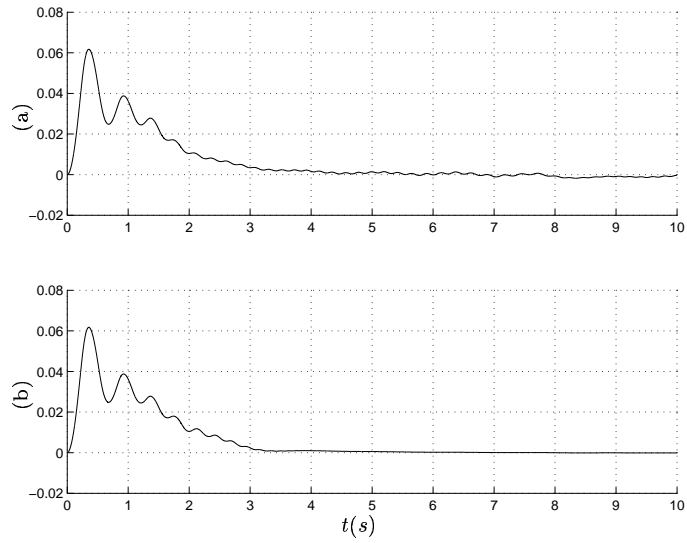


FIGURA 4.21: Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ) com dinâmica não modelada: (a) Erro de rastreamento  $e_0(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Erro de rastreamento  $e_0(t)$  para  $\epsilon_M = 50\tau$  e  $c = 20\tau$ .

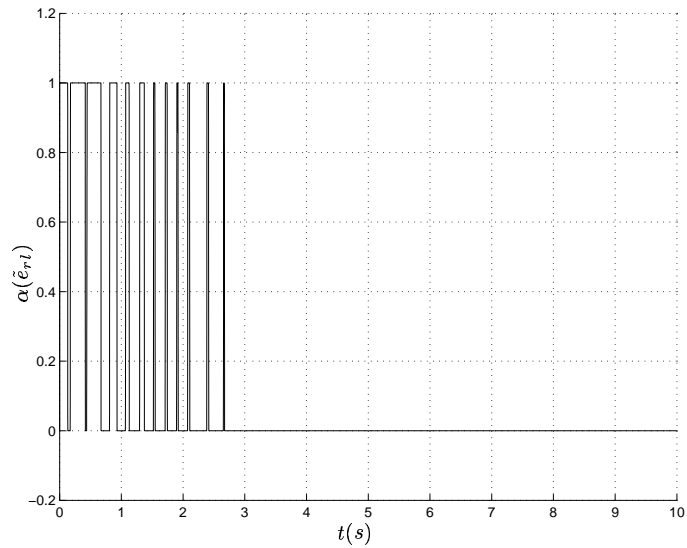


FIGURA 4.22: Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ) com dinâmica não modelada: Comportamento no tempo da função de chaveamento ponderada  $\alpha(\tilde{e}_{rl})$  para  $\epsilon_M = 50\tau$  e  $c = 20\tau$  (ver figura 4.21 (b)).



residual de ordem  $\tau$ . Já o controlador *GRED/VS-MRAC* obtém um desempenho muito bom, conseguindo levar o estado do erro  $e$  muito próximo de zero. Além disso, deve ser destacado que é visível a melhora de performance do sistema após o chaveamento definitivo para o *RED*.

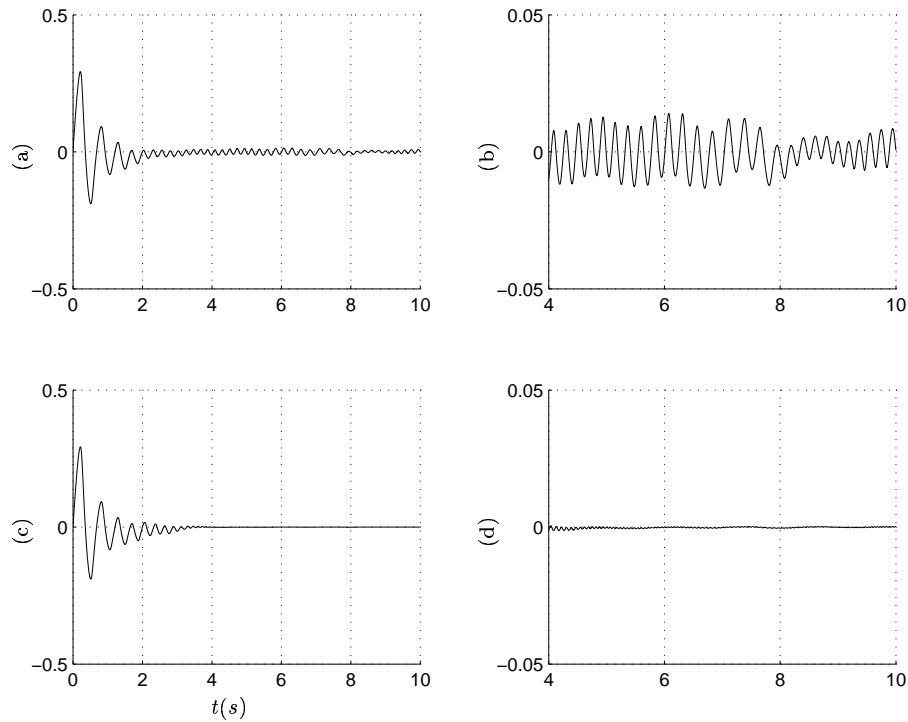


FIGURA 4.23: Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ) com dinâmica não modelada: (a) Sinal  $\dot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Trecho ampliado do sinal  $\dot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$ ; (c) Sinal  $\dot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 50\tau$  e  $c = 20\tau$ ; (d) Trecho ampliado do sinal  $\dot{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 50\tau$  e  $c = 20\tau$ .

Observando a figura 4.25 é possível verificar que os dois controladores apresentam problema de *chattering* para este caso. Entretanto este problema é muito mais intenso para o controlador *LF/VS-MRAC*, fato que justifica a diferença de performance dos dois controladores.

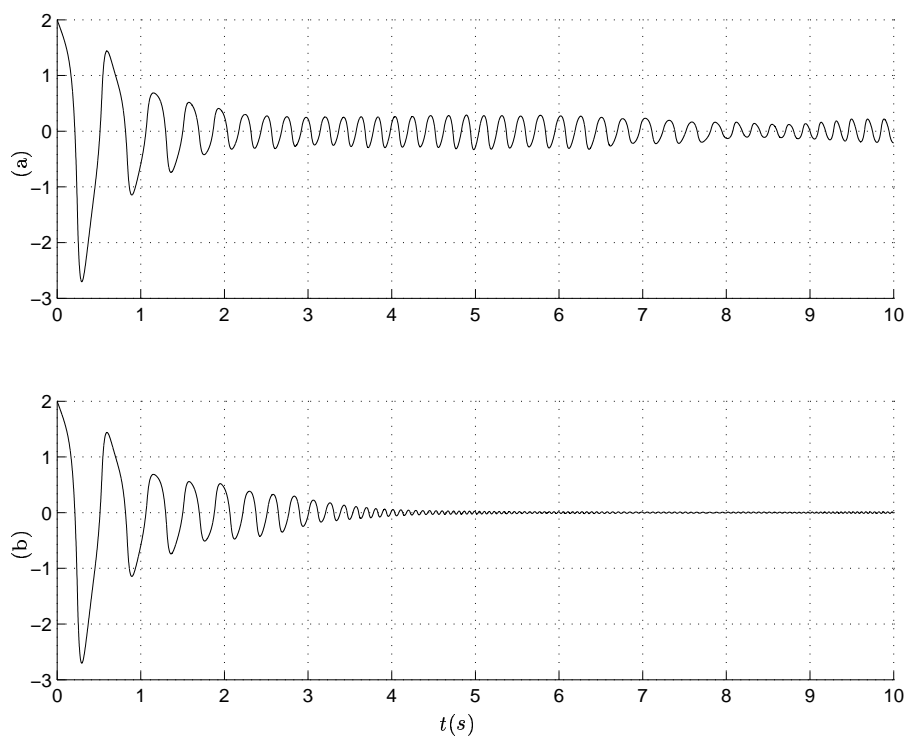


FIGURA 4.24: Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ) com dinâmica não modelada: (a) Sinal  $\tilde{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Sinal  $\tilde{e}_0(t)$  para  $\epsilon_M = 50\tau$  e  $c = 20\tau$ .

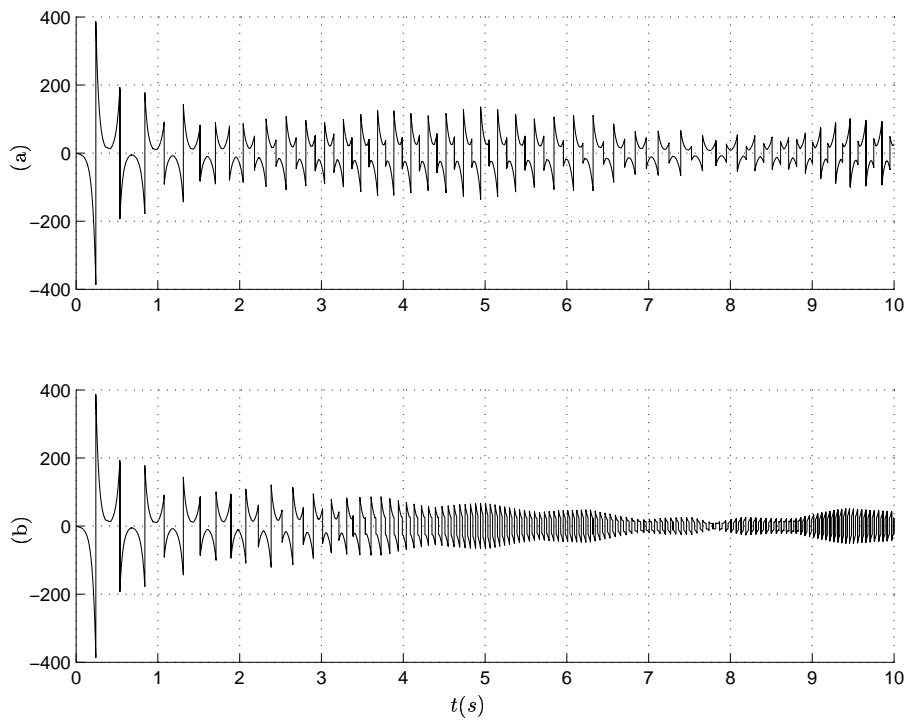


FIGURA 4.25: Planta desconhecida ( $n^* = 3$ ) com dinâmica não modelada: (a) Sinal de controle  $u(t)$  para  $\epsilon_M = 0$  e  $c = 0$  (somente filtro *lead*); (b) Sinal de controle  $u(t)$  para  $\epsilon_M = 50\tau$  e  $c = 20\tau$ .

## 4.5 Exemplo de Aplicação a um Servomecanismo

Para ilustrar a viabilidade da implementação prática do controlador *GREED/VS-MRAC*, considera-se um servomecanismo em que se controla a posição de um manipulador através de um motor DC e um conjunto de engrenagens. Trata-se de um sistema em que a dinâmica governante é de segunda ordem e o grau relativo é dois.

O objetivo desta experiência é fazer com que o manipulador seja capaz de rastrear o comportamento de um modelo de referência, além de conseguir evitar o problema de *chattering*. Para isto, será introduzida uma zona linear de largura  $\Delta$  no relé utilizado para gerar o sinal de controle.

### 4.5.1 Descrição e Modelagem do Servomecanismo

Utilizou-se o servomecanismo (SRV-02) de posicionamento angular fabricado pela Quanser Consulting (ver figura 4.26) descrito no manual (Apkarian 1995, Seções 2.1 e 5.1.1) e disponível no Laboratório de Controle da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. O diagrama deste servomecanismo é apresentado na figura 4.27.

A posição do manipulador ( $y_p$ ) é medida por *encoders* ópticos incrementais do tipo (*HEDS*, *HP Inc.*) com resolução de 1024 pulsos por volta ( $\theta_m = 360/4096 = 0.09$  graus,  $4\times$  decodificação).

Os controladores são implementados em uma placa de controle equipada com um processador de sinais digitais (*DSP*) fabricada pela *Arcs Inc.*. Esta placa (padrão *PC-ISA*) é baseada no processador *TMS320C31* e possui entradas para *encoders* assim como conversores digitais-analógicos (*D/A*) para acionar os amplificadores de potência dos motores. É utilizada a plataforma *Linux*, e a transferência de dados é realizada através de dispositivos de baixo nível (*drivers*) e de uma interface desenvolvida em *Java*.

O algoritmo do controlador *GREED/VS-MRAC* é codificado num diagrama de blocos através do *software* Simulink/MatLab 6.1 para gerar um programa executável que é carregado para a placa de controle (*DSP*) através da interface em *Java*. As variáveis são amostradas periodicamente com um intervalo de amostragem de  $1ms$  e o algoritmo de controle é implementado através de integração numérica pelo método de Euler.

A função de transferência do servomecanismo obtida através da modelagem de sua

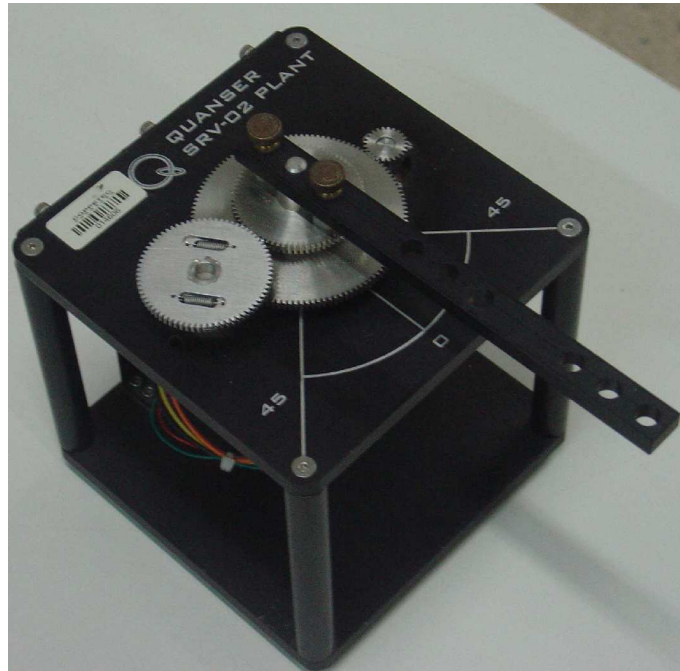


FIGURA 4.26: Servomecanismo para posicionamento angular (SRV-02) fabricado pela Quanser Consulting

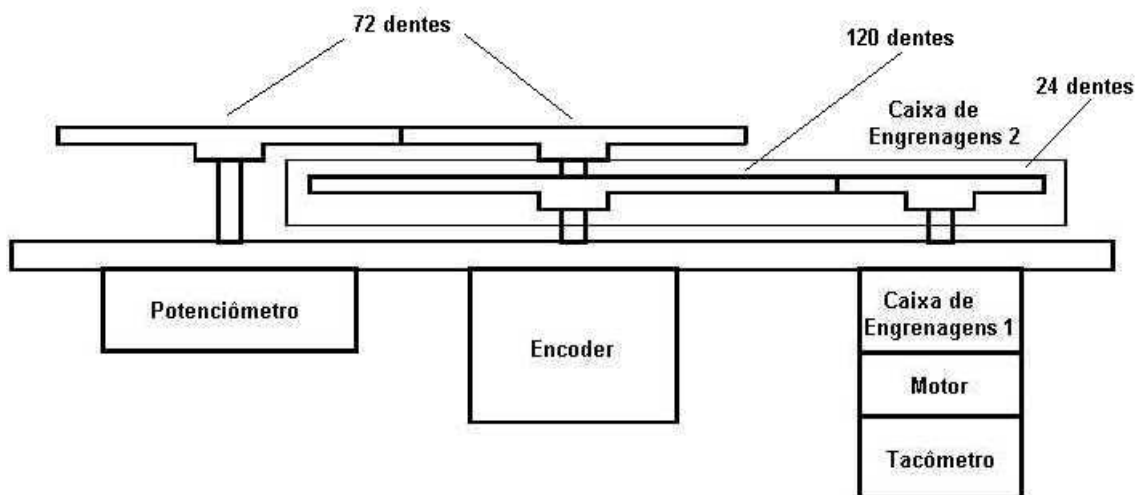


FIGURA 4.27: Diagrama do servomecanismo (SRV-02)

dinâmica é dada por:

$$G_p(p) = \frac{y_p}{V_{in}(p)} = \frac{1}{p \left( p \frac{R_m J_{eq}}{k_m k_g} + k_m k_g \right) \left( \frac{L_m p}{R_m} + 1 \right)} \quad (4.36)$$

onde  $J_{eq} = J_l + 2J_{72} + J_{120} + k_{ge}^2 J_{24} + k_g^2 J_m$  é a inércia equivalente.

Os parâmetros do servomecanismo são descritos na tabela 4.3. Utilizando estes valores e desprezando o pólo referente à dinâmica elétrica ( $p = 14444$ ) o seguinte resultado pode ser obtido:

$$G_p(p) = \frac{80}{p \left( \frac{1}{38} p + 1 \right)} \quad (4.37)$$

TABELA 4.3: Parâmetros do servomecanismo SRV-02

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Constante de Torque do Motor	$k_m$	0.00767	$Nm/A$
Resistência da Armadura	$R_m$	2.6	$\Omega$
Indutância da Armadura	$L_m$	0.18	$mH$
Relação de Engrenagem Interna	$k_{gi}$	14 : 1	
Relação de Engrenagem Externa	$k_{ge}$	5 : 1	
Relação de Engrenagem	$k_g$	70 : 1	
Inércia da Carga	$J_l$	0.000275	$K gm^2$
Inércia da Engrenagem (120 dentes)	$J_{120}$	$2.27e^{-5}$	$K gm^2$
Inércia da Engrenagem (72 dentes)	$J_{72}$	$1.4e^{-6}$	$K gm^2$
Inércia da Engrenagem (24 dentes)	$J_{24}$	$1.0e^{-7}$	$K gm^2$
Inércia da Armadura	$J_m$	$3.87e^{-7}$	$K gm^2$

## 4.5.2 Resultados Experimentais

Para ilustrar o funcionamento do controlador *GRED/VS-MRAC* foram feitas duas experiências. Na primeira experiência o sistema é afastado da região próxima à origem do plano  $e_0-\dot{e}_0$  através da introdução de um nível DC no sinal de referência. Nesta experiência o objetivo principal é verificar se o desempenho do controlador *GRED/VS-MRAC* é satisfatório e se o comportamento da função de chaveamento na prática é condizente com o comportamento teórico. Na segunda experiência é feita uma comparação entre o desempenho do sistema quando a derivada do erro de saída  $\dot{e}_0$  é estimada através de um filtro *lead* e através de um *RED*.

Nas duas experiências a função de modulação do relé é dada por uma constante, devido à existência de uma saturação no atuador do servomecanismo considerado. Além disso, para tentar evitar o problema de *chattering* é introduzida uma zona linear. Note que modos deslizantes de ordem superior também poderiam ser usados para suavizar o sinal de controle como foi apresentado na observação 3. No entanto, a utilização desta técnica requer um estudo mais detalhado a ser realizado em trabalhos futuros. Numa análise preliminar pode ser observado a dificuldade da rejeição de perturbações do tipo degrau; devido ao fato de que para sintetizar um degrau, é necessário a geração de um impulso ideal por parte do controlador na entrada do filtro suavizador, fato que é impossível de ser realizado na prática.

Desta forma, o sinal de controle é dado por:

$$u(t) = \begin{cases} f(t), & \bar{e}_0 > \Delta \\ \frac{f(t)\bar{e}_0}{\Delta}, & -\Delta \leq \bar{e}_0 \leq \Delta \\ -f(t), & \bar{e}_0 < -\Delta \end{cases} \quad (4.38)$$

onde:  $\bar{e}_0 = L(p)e_0$ ,  $f(t) = 5$  e  $\Delta$  é a largura da zona linear.

**Exemplo 4.1 (Controlador *GREED/VS-MRAC* ( $n^* = 2$ ))**

Para simular uma situação na qual o sistema se encontre afastado do equilíbrio, será utilizado o seguinte procedimento. Inicialmente o sinal de referência é dado apenas por  $r(t) = A\sin(\omega t)$ . Em seguida é introduzido um sinal DC no sinal de referência com o objetivo de aumentar o erro de rastreamento apresentado pelo sistema. Neste caso o sinal de referência passa a ser dado por  $r(t) = A_c + A\sin(\omega t)$ .

O modelo de referência é escolhido como sendo

$$M(p) = \frac{2}{(p+2)^2}$$

Os parâmetros do controlador utilizados nesta experiência são apresentados na tabela 4.4

Na figura 4.28 pode ser visto que o controlador *GREED/VS-MRAC* é capaz de conduzir o erro de rastreamento para próximo de zero, mesmo quando o sistema se encontra muito afastado da origem do plano  $e_0-\dot{e}_0$ .

TABELA 4.4: Parâmetros utilizados na experiência para verificar o comportamento do controlador *GREED/VS-MRAC*.

Elemento	Valor
Sinal de Entrada Inicial	$r(t) = 720\sin(5t)$
Sinal de Entrada Final	$r(t) = 3000 + 720\sin(5t)$
Polinômio $L(p)$	$L(p) = (p + 2)^2$
<i>RED</i>	$\lambda_0 = 6.7 ; \lambda_1 = 22$
Filtro <i>lead</i> $F(\tau s) = (\tau s + 1)^l$	$l = 1 ; \tau = 0.04$
Zona Linear	$\Delta = 30$
Função de Chaveamento (4.30)	$\epsilon_M = 30 \quad c = 15$

Na figura 4.29 pode ser observado que inicialmente a função de chaveamento assume o valor 1 (somente filtro *lead*). Este fato já era esperado, já que neste momento o sistema se encontra muito afastado da origem. À medida que o sistema converge o erro de estimação cometido pelo RED se aproxima do erro cometido pelo filtro *lead*, desta forma, a estimação pode ser dada por uma combinação convexa entre as estimativas fornecidas pelo *lead* e pelo *RED*, ou seja, a função de chaveamento pode assumir valores no intervalo  $[0, 1]$ . Finalmente quando o sistema converge para um conjunto residual, no qual a diferença entre as estimativas fornecidas pelo filtro *lead* e pelo *RED* é menor que  $\epsilon_M - c$ , a estimativa de  $\hat{e}_0$  passa a ser dada apenas pelo *RED*, como era esperado.

A figura 4.30 apresenta o sinal de controle  $u(t)$  obtido neste experimento. Nesta figura pode ser visto que o sinal de controle apresenta um comportamento mais suave quando a estimação de  $\hat{e}_0$  é feita utilizando-se apenas o *RED*.

#### Exemplo 4.2 (Comparação de desempenho entre o filtro *lead* e o RED)

Nesta experiência é feita uma comparação entre os resultados obtidos utilizando-se apenas um filtro *lead* para a estimação de  $\hat{e}_0$  com os resultados obtidos utilizando-se apenas um *RED*.

Para fazer esta comparação se adotou dois critérios. Primeiramente, é feita uma comparação entre os resultados obtidos pelos dois estimadores utilizando-se os mesmos parâmetros de controle. Em seguida, a zona linear utilizada quando a estimação é dada pelo filtro *lead* é ajustada para tentar obter o mesmo nível de ruído no sinal de controle nas duas situações.



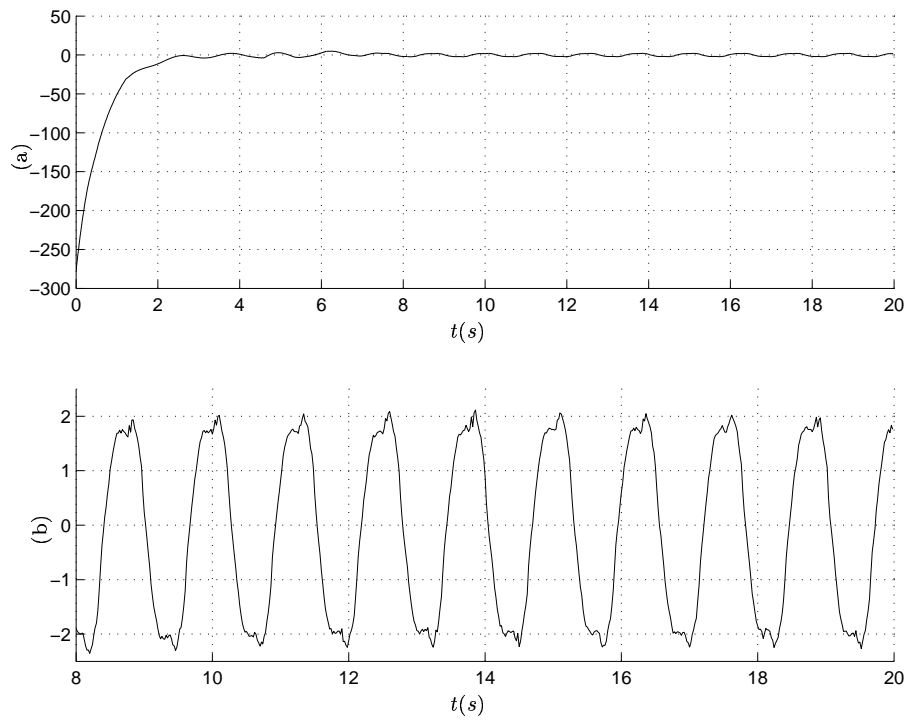


FIGURA 4.28: Resultados Experimentais: Controlador *GRED/VS-MRAC*: (a) Erro de rastreamento  $e_0(t)$  em graus; (b) Trecho ampliado do sinal  $e_0(t)$ .

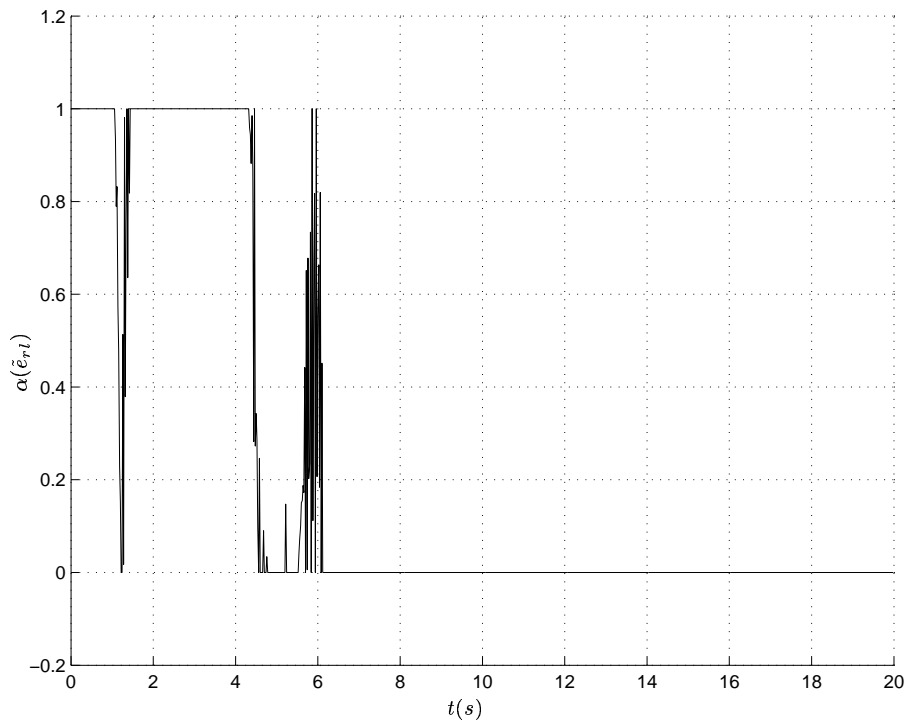


FIGURA 4.29: Resultados Experimentais: Controlador *GRED/VS-MRAC*: Comportamento no tempo da função de chaveamento ponderada  $\alpha(\tilde{e}_{r1})$ .

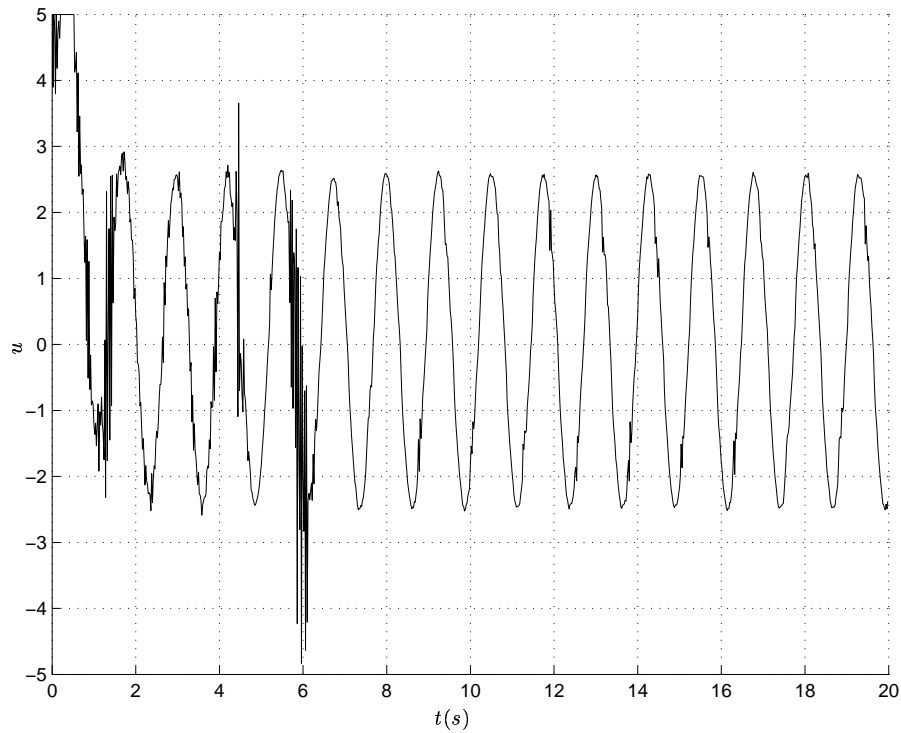


FIGURA 4.30: Resultados Experimentais: Controlador *GREDD/VS-MRAC*: Sinal de controle  $u(t)$ .

O modelo de referência é escolhido como sendo

$$M(p) = \frac{2}{(p + 2)^2}$$

Os parâmetros do controlador utilizados nesta experiência são apresentados na tabela 4.5

TABELA 4.5: Parâmetros utilizados na experiência para comparar o desempenho obtido utilizando-se um filtro *lead* com o desempenho obtido utilizando-se um *RED*.

Elemento	Valor
Sinal de Entrada	$r(t) = 2000\sin(8t)$
Polinômio $L(p)$	$L(p) = (p + 2)^2$
<i>RED</i>	$\lambda_0 = 5 ; \lambda_1 = 60$
Filtro <i>lead</i> $F(\tau s) = (\tau s + 1)^l$	$l = 1 ; \tau = 0.04$
Zona Linear	$\Delta = 15$
Zona Linear Ajustada ( <i>lead</i> )	$\Delta = 25$

Nas figuras 4.31 e 4.32 pode ser visto que o desempenho no rastreamento do modelo de referência obtido pelo *RED* é ligeiramente superior ao desempenho obtido pelo filtro *lead*. Além disso, pode se observar que o desempenho obtido pelo filtro *lead* sofre uma pequena degradação a partir do instante  $t = 10s$ , quando a zona linear  $\Delta$  é aumentada.

Na figura 4.33 pode ser observado que para os mesmos parâmetros do controlador o sinal de controle obtido utilizando-se o filtro *lead* é muito mais ruidoso do que o sinal de controle obtido utilizando-se o *RED*. Para tentar manter o mesmo nível de ruído nas duas situação o valor da zona linear utilizado quando a estimativa de  $\dot{e}_0$  é fornecida pelo filtro *lead* é aumentado para  $\Delta = 25$  a partir do instante  $t = 10s$ . Observando a figura 4.33 pode ser constatado que após o ajuste da zona linear os dois sinais de controle passam a apresentar um nível de ruído semelhante.

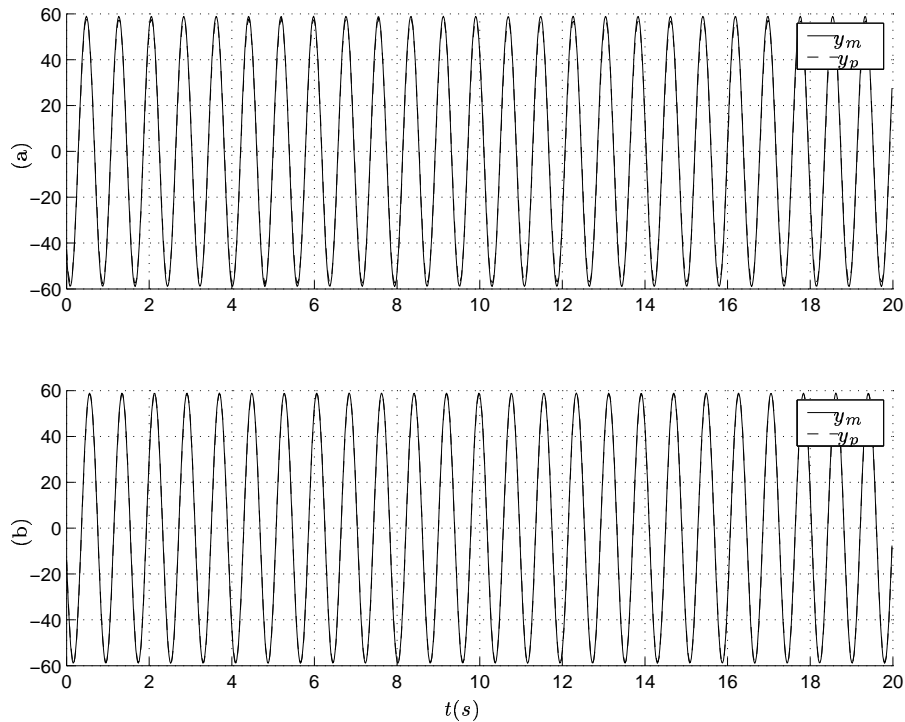


FIGURA 4.31: Resultados Experimentais: *RED*  $\times$  filtro *lead*: Sinais  $y_m(t)$  e  $y_p(t)$  (a) filtro *lead* ( $t \in [0, 10] \rightarrow \Delta = 15$ ,  $t \in (10, 20] \rightarrow \Delta = 25$ ); (b) *RED* ( $\Delta = 15$ ).

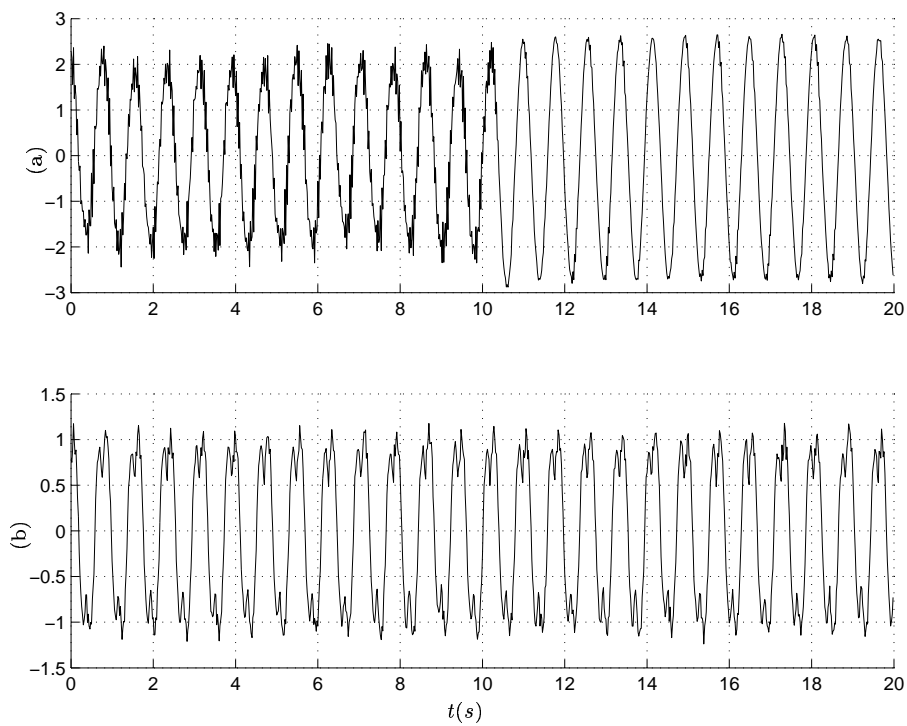


FIGURA 4.32: Resultados Experimentais:  $RED \times$  filtro *lead*: (a) Erro de rastreamento  $e_0(t)$ : (a) filtro *lead* ( $t \in [0, 10] \rightarrow \Delta = 15$ ,  $t \in (10, 20] \rightarrow \Delta = 25$ ); (b)  $RED$  ( $\Delta = 15$ ).

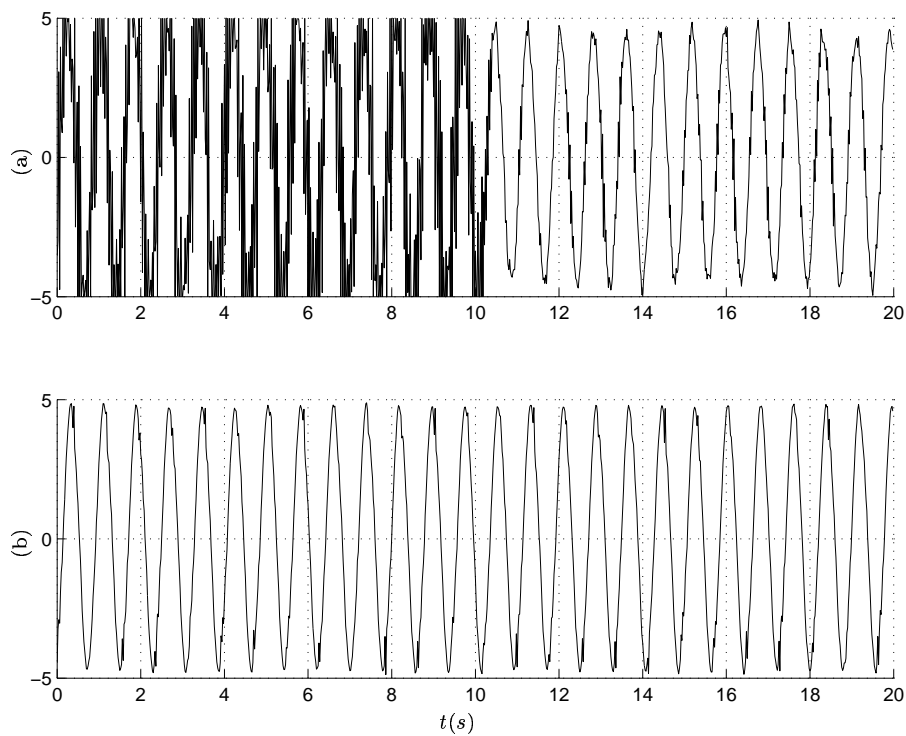


FIGURA 4.33: Resultados Experimentais:  $RED \times$  filtro  $lead$ : (a) Sinal de Controle  $u(t)$ : (a) filtro  $lead$  ( $t \in [0, 10] \rightarrow \Delta = 15$ ,  $t \in (10, 20] \rightarrow \Delta = 25$ ); (b)  $RED$  ( $\Delta = 15$ ).

# Capítulo 5

## Discussão e Conclusões Gerais

Neste trabalho foi proposto o controlador *GREED/VS-MRAC* para plantas incertas, lineares, monovariáveis e invariantes no tempo com grau relativo arbitrário. Este controlador, baseado no *VS-MRAC* (ver (Hsu & Costa 1989)), utiliza uma compensação linear, baseada numa combinação convexa de um filtro *lead* com um *RED*, para reduzir o grau relativo excedente da planta.

Neste trabalho foi apresentada uma análise teórica completa sobre a estabilidade do sistema considerado. Neste estudo foi demonstrado que o sistema completo do erro é globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual, que é independente das condições iniciais. Além disso, após algum tempo finito o estado completo do erro converge assintoticamente para zero e o sistema entra em um deslizamento ideal.

Através dos resultados de simulação é possível verificar que o controlador *GREED/VS-MRAC* não só consegue preservar a estabilidade global garantida por um esquema de compensação que utiliza apenas um filtro *lead*, como também garante a convergência do estado completo do erro para zero, devido à presença do *RED* no esquema de controle. Além disso, as simulações apresentadas comprovam a robustez do controlador proposto, mesmo na presença de perturbações externas de grande intensidade.

Outro aspecto que deve ser destacado é o bom desempenho do controlador à dinâmicas não modeladas. Nas simulações realizadas o controlador *GREED/VS-MRAC* apresentou um desempenho muito superior quando comparado a um controlador *VS-MRAC* que utiliza apenas um filtro *lead* para compensação do grau relativo.

Através dos resultados experimentais obtidos é possível comprovar a viabilidade da implementação prática do controlador *GREED/VS-MRAC*. Além disso, é possível verificar que o desempenho obtido utilizando-se um *RED* para estimar a derivada do erro de rastreamento  $\dot{e}_0$  é ligeiramente superior ao obtido utilizando-se um filtro *lead*.

A contribuição principal deste trabalho foi propor um diferenciador robusto e exato que consegue preservar as características de estabilidade global de um sistema quando utilizado na malha de controle. Até este momento, pelo conhecimento do autor, os diferenciadores existentes que são exatos possuem apenas propriedades de convergência locais quando usados na realimentação de um sistema de controle.

Seguem algumas sugestões para trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.

1. Fazer um estudo teórico sobre a robustez do sistema à dinâmicas não modeladas e à ruídos de medição.
2. Extensão do GREED VS-MRAC para sistemas não lineares e/ou multivariáveis.
3. Estudar a viabilidade de se utilizar uma compensação não linear para tornar o rastreamento exato.
4. Fazer um estudo sobre o desempenho do controlador para diferentes técnicas de suavização do sinal de controle

# Apêndice A

## Noções Básicas de Geometria Diferencial

O conceito de variedades é um dos conceitos mais importantes em Geometria Diferencial. Falando de modo grosseiro, as variedades podem ser entendidas “localmente” como espaços vetoriais, embora sejam globalmente superfícies curvas. Dentre os exemplos de variedades presentes no nosso cotidiano, pode-se destacar a superfície da Terra que é “localmente plana”, mas globalmente curva.

A noção intuitiva de que as variedades são “localmente planas”, pode ser entendida da seguinte forma: estes espaços “localmente planos” podem ser gentilmente planificados, de forma a se tornarem espaços vetoriais. Através deste entendimento, pode-se verificar que um cone não pode ser classificado como uma variedade suave, já que nenhuma vizinhança do vértice do cone pode ser vista como um plano.

Neste capítulo serão apresentados conceitos e definições formais para tratar esta noção intuitiva de maneira rigorosa do ponto de vista matemático.

### A.1 Variedades Suaves e Mapas Suaves

Sejam  $U \subset \mathbb{R}^k$  e  $V \subset \mathbb{R}^l$  conjuntos abertos. Um mapeamento  $f : U \mapsto V$  é chamado de suave, se todas as derivadas parciais de qualquer ordem existem e são contínuas. De forma mais genérica, se  $X \subset \mathbb{R}^k$  e  $Y \subset \mathbb{R}^l$  são subconjuntos arbitrários de espaços euclidianos (não necessariamente abertos), então a função  $f : X \mapsto Y$  é chamada de



suave ou diferenciável se existe um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^k$  que contém  $X$  e um mapeamento suave  $F : U \mapsto \mathbb{R}^l$  que coincide com  $f$  em  $U \cap X$ . Se  $f : X \mapsto Y$  e  $g : Y \mapsto Z$  são suaves, então a função composta  $h = g \circ f : X \mapsto Z$  também será suave.

**Definição 5** *Homeomorfismo:* Uma função  $f : X \mapsto Y$  é dita como sendo um homeomorfismo se  $f$  é uma função contínua e injetiva com inversa  $f^{-1}$  contínua.

**Definição 6** *Difeomorfismo:* Uma função  $f : X \mapsto Y$  é dita como sendo um difeomorfismo se  $f$  é um homeomorfismo e tanto  $f$  quanto  $f^{-1}$  são funções suaves.

**Definição 7** *Varietade Suave de Dimensão  $m$ :* Um subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^k$  é chamado de variedade suave de dimensão  $m$  se para cada  $x \in M$  existe uma vizinhança  $W \cap M$  ( $W \subset \mathbb{R}^k$ ), que é difeomórfica a um subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$  (Sastry 1999).

Um difeomorfismo  $\psi$  de  $U$  em  $W \cap M$  é chamado de parametrização e sua inversa  $\psi^{-1}$  é chamada de sistema de coordenadas em  $W \cap M$ . Estas definições estão ilustradas na figura A.1.

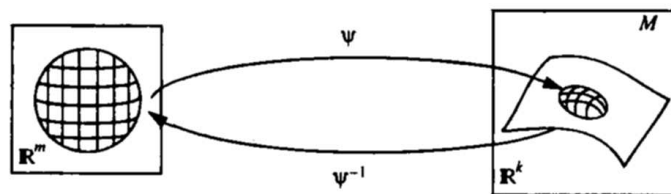


FIGURA A.1: Ilustração da Definição de Variedade.

### Exemplos:

1. O círculo unitário  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  definido por  $\{(cos\theta, sin\theta), \theta \in [0, 2\pi]\}$ .
2. O plano  $M \subset \mathbb{R}^3$  definido por  $\{(x, y, z) : ax + by + cz = 0, c \neq 0\}$  é uma variedade suave. De fato, o difeomorfismo  $\psi : U \mapsto W \cap M$  ( $U = \mathbb{R}^2$  e  $W = \mathbb{R}^3$ ), definido por

$$(u, v) \mapsto \left(u, v, \frac{au - bv}{c}\right)$$

é uma parametrização para todo ponto  $p \in M$ .

3. A esfera unitária  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  definida por  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma variedade suave de dimensão 2. De fato, o difeomorfismo

$$\psi_1 : (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$$

para  $u^2 + v^2 < 1$  parametriza a região  $\{S^2 \cap (z > 0)\}$ . Intercambiando os papéis de  $x, y, z$  e o sinal da raiz é possível cobrir toda a esfera  $S^2$ , conforme pode ser visto na figura A.2

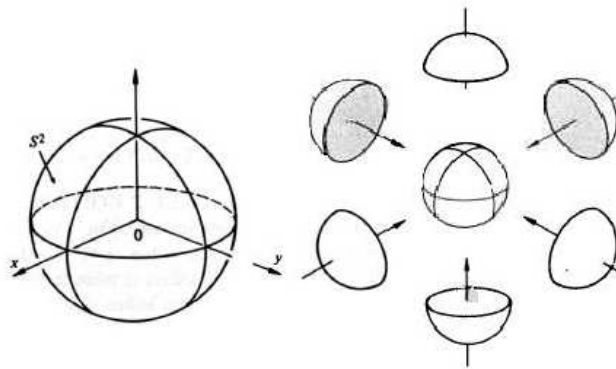


FIGURA A.2: Parametrização da esfera unitária  $S^2$ .

4. Diversas variedades suaves são geradas da seguinte forma:

**Teorema A.1** *Sejam  $f_1, \dots, f_m$ ,  $m \leq n$ , funções suaves no  $\mathbb{R}^n$  (ou em um conjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ ). Defina  $N = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = \dots = f_m(x) = 0\}$  e assumamos que o posto da Matriz Jacobiana  $f = (f_1, \dots, f_m)^T$*

$$\frac{\partial f(x^*)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x^*)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

*é  $m$  para cada  $x^* \in N$ . Então  $N$  é uma variedade suave de dimensão  $n - m$ .*

*Prova:* A prova deste Teorema é baseada no Teorema da Função Implícita e pode ser encontrada em (Nijmeijer & van der Schaft 1990)

## A.2 Mudança de Coordenadas

Seja  $M$  uma variedade suave. Considere  $\psi : U \mapsto M$  e  $\phi : V \mapsto M$  duas parametrizações locais de  $M$ , conforme pode ser visto na figura A.3. Seja  $W = \psi(U) \cap \phi(V) \neq \emptyset$ . Então a função de transição em mudança de parâmetros  $h = \phi^{-1} \circ \psi : U_1 \mapsto V_1$ ,  $U_1 = \psi^{-1}(W)$  e  $V_1 = \phi^{-1}(W)$  é um difeomorfismo.

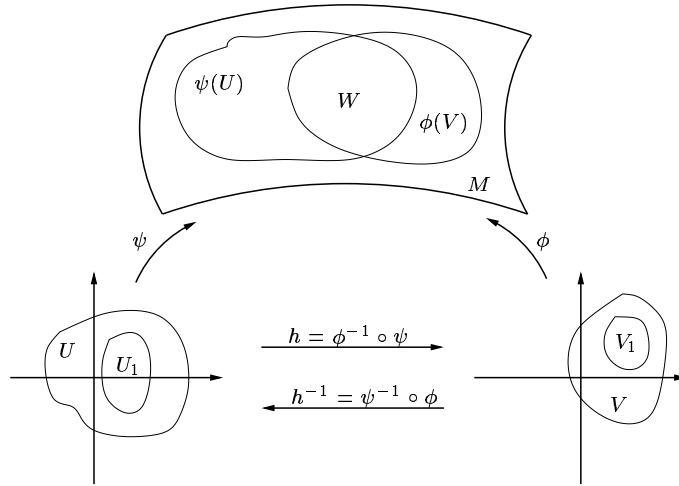


FIGURA A.3: Mudança de coordenadas.

## A.3 Espaço Tangente

Seja  $M$  uma variedade suave. Um mapa diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto M$  é chamado de curva diferenciável sobre  $M$ . Assuma que  $\alpha(0) = p$  e seja  $D$  o conjunto de funções sobre  $M$  que são diferenciáveis em  $p \in M$ . O vetor tangente a curva  $\alpha$  em  $t = 0$  é a função  $\alpha'(0) : D \mapsto \mathbb{R}$  dada por

$$\alpha'(0)(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in D$$

Um vetor tangente em um ponto  $p \in M$  é o vetor tangente em  $t = 0$  de alguma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto M$  com  $\alpha(0) = p$  (Carmo 1976)

Considere uma variedade suave  $M$  de dimensão 2. Escolhendo uma parametrização  $x : U \mapsto M$  numa vizinhança de  $p = x(0, 0)$ , a função  $f$  e a curva  $\alpha$  podem ser expressas

por  $f(u, v)$  e  $(u(t), v(t))$ , respectivamente. Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha'(0)(f) &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f(u(t), v(t)))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= u'(0) \left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_0 + v'(0) \left( \frac{\partial f}{\partial v} \right)_0 = \left\{ u'(0) \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_0 + v'(0) \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_0 \right\} (f) \end{aligned}$$

Isto sugere que, dadas as coordenadas  $(u, v)$  em torno de  $p$ , o vetor tangente em  $p$  que mapeia a função  $f$  em  $\left( \frac{\partial f}{\partial u} \right)_0$  é denotado por  $\left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_0$ . Um significado similar é conferido para o símbolo  $\left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_0$ . Deve ser ressaltado que  $\left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_0$ ,  $\left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_0$  podem ser interpretados como os vetores tangentes em  $p$  das “curvas coordenadas”

$$u \rightarrow x(u, 0), \quad v \rightarrow x(0, v)$$

respectivamente, conforme pode ser visto na figura A.4.

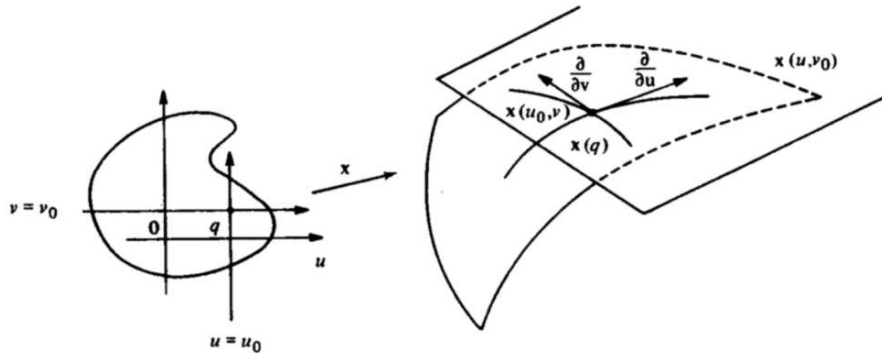


FIGURA A.4: Espaço Tangente de uma variedade suave de dimensão 2.

Da discussão acima, segue que o conjunto de vetores tangentes em  $p$ , com as operações usuais para funções, formam um espaço vetorial de dimensão 2, chamado de espaço tangente  $T_p M$  à variedade  $M$  em  $p$ .

Se  $x : U \mapsto M$  é uma parametrização local de  $M$  em  $p$ , com  $x(q) = p$ ,  $q \in U$ , então  $\left\{ \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)_q, \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_q \right\}$  é uma base de  $T_p M$  para qualquer  $p \in x(U)$ . Esta base é chamada de base associada a parametrização  $x$ . No caso de variedades de dimensão  $m$  o espaço tangente  $T_p M$  será um espaço vetorial de dimensão  $m$  (Carmo 1976).

Para ilustrar este conceito considere a esfera unitária  $S^2$ . Utilizando a parame-

trização  $\psi_1 : (u, v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ ,  $u^2 + v^2 < 1$ , apresentada na seção A.1, pode se obter a seguinte base para o espaço tangente  $T_p S^2$

$$\left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{array} \right\}$$

onde:  $p \in \{S^2 \cap (z > 0)\}$ .

Observando que o vetor normal à esfera  $S^2$  em um ponto  $p$  é dado por  $N(p) = p$ , pode se verificar, facilmente, que os dois vetores da base associada a parametrização  $\psi_1$  são ortogonais à  $N(p)$ . Logo, são tangentes a esfera  $S^2$  no ponto  $p$ .

# Apêndice B

## Sistemas a Estrutura Variável

### B.1 Demonstração do Lema 2.1

Considere a forma não recursiva equivalente do diferenciador (2.43). Usando a seguinte mudança de variáveis:

$$\sigma_i = z_i - f^{(i)}(t), \quad i = 0, \dots, n$$

o esquema não recursivo (2.44) pode ser reescrito como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_0 = -\kappa_0 |\sigma_0|^{n/(n+1)} \text{sign}(\sigma_0) + \sigma_1 \\ \dot{\sigma}_1 = -\kappa_1 |\sigma_0|^{(n-1)/(n+1)} \text{sign}(\sigma_0) + \sigma_2 \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_i = -\kappa_i |\sigma_0|^{(n-i)/(n+1)} \text{sign}(\sigma_0) + \sigma_{i+1} \\ \vdots \\ \dot{\sigma}_n = -\kappa_n \text{sign}(\sigma_0) - f^{(n+1)}(t) \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

As equações  $\dot{\sigma}_i = -\kappa_i |\sigma_0|^{(n-i)/(n+1)} \text{sign}(\sigma_0) + \sigma_{i+1}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\dot{\sigma}_i = -a_i(\sigma_0)\sigma_0 - b_i(\sigma_0) + \sigma_{i+1}$$

onde:

$$a_i(\sigma_0) = \begin{cases} \kappa_i & , \quad |\sigma_0| \leq 1 \\ \frac{\kappa_i}{|\sigma_0|^{(i+1)/(n+1)}} & , \quad |\sigma_0| > 1 \end{cases}$$

$$b_i(\sigma_0) = \begin{cases} \kappa_i |\sigma_0|^{\frac{n-i}{n+1}} \text{sign}(\sigma_0) - \kappa_i \sigma_0 & , \quad |\sigma_0| \leq 1 \\ 0 & , \quad |\sigma_0| > 1 \end{cases}$$

Note que  $|a_i(\sigma_0)| < K_i$  e  $|b_i(\sigma_0)| < c_i$ , onde  $c_i$  são constantes positivas.

A equação  $\dot{\sigma}_n = -\kappa_n \text{sign}(\sigma_0) - f^{(n+1)}(t)$  pode ser reescrita do seguinte modo:

$$\dot{\sigma}_n = -a_n(\sigma_0) - b_n$$

onde:

$$a_n(\sigma_0) = \kappa_n \text{sign}(\sigma_0)$$

$$b_n = f^{(n+1)}(t)$$

Note que  $|a_n(\sigma_0)| < K_n$  e  $|b_n| < K_{n+1}$ .

Definindo o vetor de estados completo como sendo  $\Sigma = [\sigma_0 \ \sigma_1 \ \dots \ \sigma_n]^T$ , o sistema (B.1) pode ser reescrito como:

$$\dot{\Sigma} = A(\Sigma)\Sigma + b(\Sigma) \tag{B.2}$$

onde:

$$A(\Sigma) = \begin{bmatrix} -a_0(\sigma_0) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1(\sigma_0) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1}(\sigma_0) & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(\sigma_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$b(\Sigma) = \begin{bmatrix} -b_0(\sigma_0) \\ -b_1(\sigma_0) \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Deve se destacar que  $\|A(\Sigma)\| < c_1$  e  $\|b(\Sigma)\| < c_2$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são duas constantes positivas.

Considere a seguinte função de Lyapunov:

$$V(\Sigma) = \Sigma^T \Sigma \tag{B.3}$$

De (B.2) a função de Lyapunov (B.3) tem a seguinte derivada temporal:

$$\dot{V}(\Sigma) = \Sigma^T [A(\Sigma) + A^T(\Sigma)] \Sigma + 2\Sigma^T b(\Sigma) \quad (\text{B.4})$$

De (B.4), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\Sigma) &\leq c_3 \|\Sigma\|^2 + c_4 \|\Sigma\| \\ \dot{V}(\Sigma) &\leq c_3 \|\Sigma\|^2 \\ \dot{V}(\Sigma) &\leq c_3 V(\Sigma) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

onde:  $c_3$  e  $c_4$  são constantes positivas.

Usando a equação de comparação:

$$\dot{V}_c(\Sigma) = c_3 V_c(\Sigma)$$

sabe-se que se  $V_c(0) = V(0)$ , então:

$$V(t) \leq V_c(t), \quad \forall t \geq 0$$

Como  $V_c(t) = e^{c_3 t} V_c(0)$ , então:

$$V(t) \leq e^{c_3 t} V(0)$$

Logo,  $V(t)$  não escapa em tempo finito para qualquer constante  $K_{n+1}$  finita.



# Apêndice C

## Controle Adaptativo por Modelo de Referência a Estrutura Variável *VS-MRAC*

### C.1 Demonstração da Proposição 2

De acordo com a hipótese 3.20, é sempre possível escolher constantes  $K_\theta, K_\beta$  tais que

$$\sup_t |\bar{U}(t)| \leq C(t)$$

Então, de (3.27), tem-se

$$\sup_t |\beta_{\bar{U}}(t) - \beta_{\bar{U}}^0(t)| \leq \underbrace{\left\| \left[ k^* ML \left( \frac{F-1}{F} \right) \right] \right\|}_{O(\tau)} C(t) = \tau K_{\beta_{\bar{U}}} C(t) \quad (\text{C.1})$$

De (3.28) e (3.20) tem-se

$$\sup_t |\beta_u(t) - \beta_u^0(t)| \leq \underbrace{\left\| \left[ k^* ML \left( \frac{F-1}{F} \right) \right] \right\|}_{O(\tau)} C(t) = \tau K_{\beta_u} C(t) \quad (\text{C.2})$$

Através destes resultados pode-se concluir que:

$$\sup_t |\beta_{\bar{U}}(t)| \leq \tau K_{\beta_{\bar{U}}} C(t) + EXP^0 \quad (\text{C.3})$$

$$\sup_t |\beta_u(t)| \leq \tau K_{\beta_u} C(t) + EXP^0 \quad (\text{C.4})$$

Usando os resultados obtidos em (C.3) e (C.4), se  $f(t) \geq |\bar{U}|$ , aplicando o Lemma 3.2 na equação (3.26), o seguinte resultado pode ser obtido:

$$|\bar{e}_0| \leq \tau K_{\bar{e}_0} C(t) + EXP \quad (\text{C.5})$$

Deve-se destacar que o termo  $EXP$  aparece na equação (C.5) no lugar de  $EXP^0$ , devido a presença do termo de decaimento exponencial dependente da condição inicial de  $\bar{e}_0$ . ■

## C.2 Demonstração do Teorema 3.2

Da equação (3.26) e de  $ML(s) = K_m/(s + a_m)$  ( $K_m, a_m > 0$ ), pode-se concluir que

$$u + \bar{U} = [\dot{\hat{\varepsilon}} + a_m \hat{\varepsilon}] / K_m k^* \quad (\text{C.6})$$

onde  $\hat{\varepsilon} := \bar{e}_0 - \beta_{\bar{U}} - \beta_u + EXP^0$ , onde o termo  $EXP^0$  leva em conta todos os termos transientes de  $\bar{e}_0, \beta_{\bar{U}}$  and  $\beta_u$ .

Substituindo (C.6) em (3.18), tem-se

$$\dot{e} = A_c e + b_c [\dot{\hat{\varepsilon}} + a_m \hat{\varepsilon}] / K_m \quad (\text{C.7})$$

Então, para eliminar o termo derivativo  $\dot{\hat{\varepsilon}}$ , será realizada a transformação de variável  $\hat{e} := e - [b_c \hat{\varepsilon}] / K_m$  que resulta em:

$$\dot{\hat{e}} = A_c \hat{e} + (A_c + I a_m) \frac{b_c}{K_m} \hat{\varepsilon} \quad (\text{C.8})$$

Note que (3.25) está imerso em (3.26), logo o limitante (3.29) também é válido para (3.25). Deste modo, como  $A_c$  é *Hurwitz*, pode-se concluir que  $\hat{e}(t)$  é limitado por  $\|\hat{e}(t)\| \leq \tau \bar{K} C(t) + EXP$ . Além disso,

$$\|e(t)\| \leq \tau K_e C(t) + EXP \quad (\text{C.9})$$

$$C_1(t) \leq \tau K_1 C(t) + K_2 \|z(0)\| + K_{\omega_m} \quad (\text{C.10})$$

$$C(t) \leq \frac{K'_{rd} + K_4 \|z(0)\|}{1 - \tau K_3} \quad (\text{C.11})$$

De fato, a desigualdade (C.9) é verificada a partir de  $\hat{e} = e - b_e \hat{e} / K_m$ . Da relação  $\omega = \omega_m + \Omega e$ , onde  $\omega_m^T = [v_{m1}^T \ y_m \ v_{m2}^T \ r]$  é o vetor regressor correspondente ao modelo de referência e  $\Omega$ , é uma matriz constante, segue que  $\|\omega\| \leq K_{\omega_m} + K_{\Omega} \|e\|$  e, como  $C_1(t) = \sup_t \|\omega(t)\|$ , então de (C.9) obtém-se (C.10), onde  $K_2 \|z(0)\|$  resulta do valor inicial do termo EXP que aparece no limitante (C.9) de  $\|e\|$ . Agora, de (3.30) e (C.10),  $C(t)$  pode, também, ser limitado por  $C(t) \leq \tau K_3 C(t) + K_4 \|z(0)\| + K'_{rd}$ , através do que, após uma simples manipulação algébrica obtém-se (C.11), que é válida para  $\tau < K_3^{-1}$ . Também pode-se escrever que:

$$\|z^0(t)\| \leq K_z e^{-a_z t} \|z^0(0)\| \quad (\text{C.12})$$

$$\|z_e(t)\| \leq \tau K_5 \left( \|z_e(0)\| + \|z^0(0)\| \right) + O(\tau) + \text{EXP} \quad (\text{C.13})$$

De fato,  $z^0$  é limitado por  $\text{EXP}^0$ , onde somente as condições iniciais de  $z^0$  aparecem. Agora, de (3.30), (C.9) e (C.11) segue (C.13), onde  $O(\tau)$  é independente das condições iniciais.

Percebendo que o tempo inicial é irrelevante no desenvolvimento da expressões acima, pode-se escrever que, para  $t \geq t_0 \geq 0$  arbitrário, algum  $T_1 > 0$  e  $\lambda < 1$ ,

$$\|z_e(t)\| \leq \left[ \tau K_5 + K_6 e^{-a_z(t-t_0)} \right] \left[ \|z_e(t_0)\| + \|z^0(t_0)\| \right] + O(\tau) \quad (\text{C.14})$$

$$\|z^0(t)\| \leq K_z e^{-a_z(t-t_0)} \|z^0(t_0)\| \quad (\text{C.15})$$

$$\|z_e(t_0 + T_1)\| \leq \lambda \left( \|z_e(t_0)\| + \|z^0(t_0)\| \right) + O(\tau) \quad (\text{C.16})$$

$$\|z^0(t_0 + T_1)\| \leq \lambda \|z^0(t_0)\| \quad (\text{C.17})$$

Equações (C.16) e (C.17) são obtidas de (C.14) e (C.15) da seguinte maneira: para  $\tau < K_5^{-1}$ , existe  $T_1 > 0$  tal que  $\lambda = \max[\tau K_5 + K_6 e^{-a_z T_1}, K_z e^{-a_z T_1}] < 1$ . Então, as simples desigualdades recursivas (C.16) e (C.17) são satisfeitas e facilmente levam a conclusão que, para  $\tau$  pequeno o suficiente, o sistema do erro é globalmente exponencialmente

estável com respeito a um pequeno conjunto residual de ordem  $\tau$ . Além disso, este conjunto residual é independente das condições iniciais.



# Apêndice D

## *GRED/VS-MRAC*

### D.1 Demonstração da Proposição 3

De (4.3), tem-se:

$$\begin{aligned}\dot{e}_0 &= h_c^T A_c e + \underbrace{k^* h_c^T b_c [u - \bar{U}]}_0 = h_1^T e \\ \ddot{e}_0 &= h_c^T A_c^2 e + \underbrace{k^* h_c^T A_c b_c [u - \bar{U}]}_0 = h_2^T e \\ &\vdots \\ e^{(n^*-1)} &= h_c^T A_c^{n^*-1} e + \underbrace{k^* h_c^T A_c^{n^*-2} b_c [u - \bar{U}]}_0 = h_{n^*-1}^T e \\ e^{(n^*)} &= h_c^T A_c^{n^*} e + k^* h_c^T A_c^{n^*-1} b_c [u - \bar{U}]\end{aligned}\tag{D.1}$$

■

### D.2 Demonstração da Proposição 4

Substituindo (4.25) em (4.22), o erro auxiliar  $\tilde{e}_l$  pode ser reescrito por

$$\tilde{e}_l = k^* ML[u + \bar{U}] + \beta_{\bar{U}} + \beta_u + \beta_\alpha\tag{D.2}$$

onde  $\beta_{\bar{U}}$  e  $\beta_u$  são definidos em (4.26) e (4.27) respectivamente.

Como  $|\beta_\alpha| \leq \tau K_R$ , para constantes  $K_\theta$  e  $K_\beta$  apropriadas, o sinal  $\beta_\alpha(t)$  pode ser limitado por:

$$\sup_t |\beta_\alpha(t)| \leq \tau K_{\beta_\alpha} C(t) \quad (\text{D.3})$$

Usando os resultados obtidos em (C.3), (C.4) e (D.3), se  $f(t) \geq |\bar{U}|$ , aplicando o Lema 3.2 na equação (D.2), o seguinte resultado pode ser obtido:

$$|\tilde{e}_l| \leq \tau K_{\tilde{e}_l} C(t) + EXP \quad (\text{D.4})$$

De (4.22), tem-se que  $|\hat{e}_l| \leq |\tilde{e}_l| + |\beta_\alpha|$ . Logo, utilizando os resultados obtidos em (D.3) e (D.4) o seguinte limitante superior para  $\hat{e}_l$  pode ser encontrado:

$$|\hat{e}_l| \leq \tau K_{\tilde{e}_l} C(t) + EXP + \tau K_{\beta_\alpha} C(t) \quad (\text{D.5})$$

A equação (D.5) pode ser reescrita como:

$$|\hat{e}_l| \leq \tau K_{\tilde{e}_l} C(t) + EXP \quad (\text{D.6})$$

■

### D.3 Demonstração da Corolário 4.1.2

De (4.19) segue que

$$e_0^{(i)} = h_c^T A_c^{(i)} e \quad , i = 1, \dots, n^* - 1$$

Como o vetor de estados  $e(t)$  é uniformemente limitado, então existem constantes  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, n^* - 1$  tais que:

$$|e_0^{(i)}| \leq K_i, \quad i = 1, \dots, n^* - 1 \quad \forall t \geq 0$$

A derivada  $n^*$  do sinal  $e_0$  é dada por

$$e_0^{n^*} = h_c^T A_c^{n^*} e + h_c^T A_c^{n^*-1} b_c [u + \bar{U}] / \theta_{2n}^*$$

Como os sinais  $u$  e  $\bar{U}$  também são uniformemente limitados, então existe uma constante positiva  $K_{n^*}$  tal que:

$$|e_0^{n^*}| \leq K_{n^*}, \quad \forall t \geq 0$$

■

## D.4 Demonstração do Lema 4.1

A primeira parte da demonstração consiste em mostrar que para esta função de chaveamento o erro de estimação  $\epsilon(t)$  pode ser reescrito por:

$$\epsilon(t) = \epsilon_l(t) + \beta_\alpha(\tilde{e}_{rl}) \quad (\text{D.7})$$

onde  $\beta_\alpha(\tilde{e}_{rl})$  é um sinal absolutamente contínuo e uniformemente limitado por

$$|\beta_\alpha(\tilde{e}_{rl})| < \epsilon_M \quad (\text{D.8})$$

Considerando a função de chaveamento proposta em (4.30) existem três casos possíveis:

Caso 1: ( $|\tilde{e}_{rl}| \geq \epsilon_M$ )

Neste caso  $\alpha(\tilde{e}_{rl}) = 1$ . De (4.15), tem-se

$$\epsilon(t) = \epsilon_l(t)$$

Para este caso  $\beta_\alpha(\tilde{e}_{rl}) = 0$ , satisfazendo, assim, a condição (D.8).

Caso 2: ( $\epsilon_M - c \leq |\tilde{e}_{rl}| < \epsilon_M$ )

Neste caso a seguinte afirmação pode ser feita

$$|\tilde{e}_{rl}| = \epsilon_M - \delta_1(\tilde{e}_{rl}) \quad (\text{D.9})$$

onde

$$0 < \delta_1(\tilde{e}_{rl}) \leq c \quad (\text{D.10})$$

De (D.9), segue que

$$\alpha(\tilde{\epsilon}_{rl}) = \frac{c - \delta_1(\tilde{\epsilon}_{rl})}{c} \quad (\text{D.11})$$

De (4.31) e (D.9), tem-se

$$\epsilon_r = \epsilon_l \pm [\epsilon_M - \delta_1(\tilde{\epsilon}_{rl})] \quad (\text{D.12})$$

Substituindo os resultados de (D.12) e (D.11) em (4.15), resulta que

$$\epsilon(t) = \epsilon_l \pm \frac{\delta_1(\tilde{\epsilon}_{rl})}{c} [\epsilon_M - \delta_1(\tilde{\epsilon}_{rl})] \quad (\text{D.13})$$

A equação (D.13) pode ser reescrita como

$$\epsilon(t) = \epsilon_l + \beta_\alpha(\tilde{\epsilon}_{rl}) \quad (\text{D.14})$$

onde:

$$\beta_\alpha(\tilde{\epsilon}_{rl}) = \pm \frac{\delta_1(\tilde{\epsilon}_{rl})}{c} [\epsilon_M - \delta_1(\tilde{\epsilon}_{rl})]$$

De (D.14) e (D.10), pode-se concluir que a condição (D.8) também é válida para este caso.

Caso 3: ( $|\tilde{\epsilon}_{rl}| < \epsilon_M - c$ )

Neste caso  $\alpha(\tilde{\epsilon}_{rl}) = 0$ . De (4.15), tem-se

$$\epsilon(t) = \epsilon_r(t) \quad (\text{D.15})$$

Para este caso a seguinte afirmação pode ser feita

$$|\tilde{\epsilon}_{rl}| = \epsilon_M - c - \delta_2(\tilde{\epsilon}_{rl}) \quad (\text{D.16})$$

onde

$$0 < \delta_2(\tilde{\epsilon}_{rl}) \leq \epsilon_M - c \quad (\text{D.17})$$

De (4.31) e (D.16), segue que

$$\epsilon_r = \epsilon_l \pm [\epsilon_M - c - \delta_2(\tilde{\epsilon}_{rl})] \quad (\text{D.18})$$



Usando o resultado obtido em (D.18) a equação (D.15) pode ser reescrita por

$$\epsilon(t) = \epsilon_l + \beta_\alpha(\tilde{e}_{rl}) \quad (\text{D.19})$$

onde  $\beta_\alpha(t) = \pm[\epsilon_M - c - \delta_2(\tilde{e}_{rl})]$

Novamente, a condição (D.8) é válida.

Finalmente, para concluir a primeira parte da prova basta mostrar que o sinal  $\beta_\alpha(\tilde{e}_{rl})$  é absolutamente contínuo. Para isto, basta observar que a função de chaveamento  $\alpha(\tilde{e}_{rl})$  é Lipschitz continua e que os sinais  $\hat{e}_r(t)$  e  $\hat{e}_l(t)$  são absolutamente contínuos, já que são Soluções de Filippov.

Agora, para encerrar a demonstração deve ser provado que o sistema original pode ser representado de forma equivalente pelo sistema apresentado na figura 4.6.

Substituindo (D.7) em (4.18), tem-se:

$$u = -f(t) \operatorname{sgn}(\bar{e}_0 + \epsilon_l + \beta_\alpha) \quad (\text{D.20})$$

Usando o resultado obtido em (4.8) a equação (D.20) pode ser reescrita por (4.24), onde  $\tilde{e}_l$  é dado por (4.22),  $\hat{e}_l$  é dado por (4.21) e  $e_0$  é dado por (4.20).

De acordo com estes resultados, para a função de chaveamento (4.30), a Hipótese 15 é satisfeita. Desta forma, o Teorema 4.1 é válido se todos os sinais do sistema forem limitados para todo  $t$  finito, ou seja, se eles pertencerem a  $L_\infty$ . Para provar que esta condição é verdadeira basta apenas mostrar que os sinais do RED pertencem a  $L_\infty$ . Um simples argumento por contradição é suficiente para provar este fato.

Suponha que o máximo intervalo para o qual os sinais do RED são definidos seja  $[0, T_M)$ . Durante este intervalo, todas as condições do Teorema 4.1 são satisfeitas. Logo todos os sinais restantes do sistema são limitados por uma constante, inclusive o sinal  $e_0^{(n^*)}(t)$ , pelo Corolário 4.1.2. Este fato gera uma contradição com o Lema 2.1. Desta forma, pode-se concluir que os sinais do RED não podem divergir ilimitadamente à medida que  $t \rightarrow T_M$ . Como consequência do Teorema da Continuidade para equações diferenciais descontínuas (na Teoria de Filippov),  $T_M$  deve ser  $\infty$ , o que implica que todos os sinais são definidos  $\forall t > 0$ .

## D.5 Demonstração da Proposição 5

Como foi visto anteriormente, para o sistema (4.16) os sinais  $e_0^{(i)}(t)$  podem ser representados por

$$e_0^{(i)} = h_i^T e(t), \quad i = 0, \dots, n^* - 1$$

Como  $\|e(t)\| < R, \forall t > T_1$ , pode-se concluir facilmente que

$$\sup_{t > T_1} |e_0^{(i)}(t)| \leq C_i, \quad i = 0, \dots, n^* - 1$$

O sinal  $e_0^{(n^*)}$  é dado por

$$e_0^{(n^*)} = h_c^T A_c^{n^*} e + k^* h_c^T A_c^{n^* - 1} b_c [u - \bar{U}]$$

Logo  $e_0^{(n^*)}$  pode ser limitado por

$$|e_0^{(n^*)}(t)| \leq \|h_c^T A_c^{n^*}\| \|e(t)\| + \|k^* h_c^T A_c^{n^* - 1} b_c\| 2f(t) \quad (\text{D.21})$$

De (3.23), a equação (D.21) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$|e_0^{(n^*)}| \leq K_1 \|e\| + K_2 \|\omega\| + K_3$$

Usando a relação  $\omega = \omega_m + \Omega e$  e o fato que  $\|e(t)\| < R, \forall t > T_1$ , tem-se:

$$\sup_{t > T_1} |e_0^{(n^*)}| \leq C_{n^*}$$

■

## D.6 Demonstração da Proposição 6

A estimativa de  $\bar{e}_0$  fornecida pelo filtro *lead* é dado por:

$$\hat{e}_l = F^{-1}(\tau p) \bar{e}_0 + \pi \quad (\text{D.22})$$

De (4.8) e (D.22), tem-se:

$$\epsilon_l = \left[ \frac{1 - F(\tau p)}{F(\tau p)} \right] \bar{e}_0 + \pi \quad (\text{D.23})$$

Substituindo (4.6) em (D.23) o seguinte resultado pode ser obtido:

$$\epsilon_l = \left[ \frac{1 - F(\tau p)}{F(\tau p)} \right] \left( \gamma_0 e_0^{(n^*-1)} + \gamma_1 e_0^{(n^*-2)} + \dots + \gamma_{n^*-2} \dot{e}_0 + \gamma_{n^*-1} e_0 \right) + \pi \quad (\text{D.24})$$

A equação (D.24) pode ser reescrita como se segue

$$\epsilon_l = -\tau \frac{Q(\tau p)}{F(\tau p)} \left( \gamma_0 e_0^{(n^*)} + \gamma_1 e_0^{(n^*-1)} + \dots + \gamma_{n^*-2} \ddot{e}_0 + \gamma_{n^*-1} \dot{e}_0 \right) + \pi \quad (\text{D.25})$$

onde  $Q(\tau p) = [F(\tau p) - 1] / \tau p$

Usando o resultado obtido na Proposição 5 o erro de estimação  $\epsilon_l$  pode ser limitado do seguinte modo:

$$\sup_{t \geq T_1} |\epsilon_l(t)| \leq \tau K_1 C_1 + \tau K_2 C_2 + \dots + \tau K_{n^*} C_{n^*} + \pi \quad (\text{D.26})$$

Finalmente pode-se concluir a partir de (D.26) que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{ts \geq t} |\epsilon_l(ts)| \leq \tau K_l \quad (\text{D.27})$$

onde  $K_l > K_1 C_1 + K_2 C_2 + \dots + K_{n^*} C_{n^*}$ .

■

## D.7 Demonstração do Teorema 4.2

De acordo com o Lema 4.1 o sistema satisfaz a Hipótese 15. Desta forma, pelo Teorema 4.1 o estado completo do erro  $z$  é globalmente exponencialmente estável com respeito a um conjunto residual de ordem  $\tau$ .

Através do Lema 4.2 sabe-se que o erro de estimação do *RED* é identicamente nulo

após um tempo finito  $T_2$ , i.e.  $\epsilon_r(t)=0, \forall t \geq T_2$ . Como  $\epsilon_M > \bar{\epsilon}_l + c$  e pela Proposição 6

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{ts \geq t} |\epsilon_l(ts)| < \bar{\epsilon}_l,$$

então:

$$|\tilde{\epsilon}_{rl}(t)| = |\epsilon_l(t)| < \epsilon_M - c, \quad \forall t \geq T_3 \quad (\text{D.28})$$

onde  $T_3 \geq T_2$  é finito.

De (4.30) e (D.28), tem-se:

$$\alpha(\tilde{\epsilon}_{rl}) = 0, \quad \forall t \geq T_3$$

A partir deste instante o polinômio  $L(p)$  é aproximado perfeitamente, ou seja, o erro de estimação  $\epsilon(t) = 0, \forall t \geq T_3$ . Aplicando o Lema 3.1 para o sistema (4.16)(4.18) pode-se concluir que a partir deste momento o estado do erro  $e$  e o erro de rastreamento  $e_0$  convergem para zero exponencialmente.

Finalmente, como  $F(\tau p)$  é um polinômio Hurwitz e o erro de rastreamento  $e_0$  converge exponencialmente para zero, pode-se concluir que o estado  $\bar{e}$  do filtro *lead* também irá convergir para zero. Desta forma, o estado  $z$  que é formado por

$$z^T = [(z^0)^T, z_e^T] \quad z_e^T = [e^T, \bar{e}^T]$$

também tende exponencialmente para zero após algum tempo finito. ■

# Referências Bibliográficas

- Ambrosino, G., Celentano, G. & Garofalo, F. (1984), 'Variable structure MRAC systems', *Int. J. Contr.* **39**(6), 1339–1349.
- Apkarian, J. (1995), *A Comprehensive and Modular Laboratory for Control Systems Design and Implementation*, Quanser Consulting.
- Atassi, N. A. & Khalil, H. K. (1999), 'A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **44**, 1672–1687.
- Bailey, E. & Arapostathis, A. (1987), 'Simple sliding mode control scheme applied to robot manipulator', *Int. J. Contr.* **45**(4), 1197–1209.
- Bartolini, G. & Zolezzi, T. (1988), 'The V.S. approach to the model reference control of nonminimal phase linear plants', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **33**(9), 859–863.
- Bartolini, G., Ferrara, A. & Usai, E. (1998), 'Chattering avoidance by second-order sliding mode control', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **43**, 241–246.
- Bartolini, G., Levant, A., Pisano, A. & Usai, E. (2002), Higher-order sliding modes for output-feedback control of nonlinear uncertain systems, in X. Yu & J.-X. Xu, eds, 'Variable Structure Systems: Towards the 21st Century', Springer-Verlag, chapter 4.
- Bartolini, G., Pisano, A. & Usai, E. (2001), 'Global stabilization for nonlinear uncertain systems with unmodeled actuator dynamics', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **46**, 1826–1832.
- Bondarev, A. G., Bondareva, S. A., Kostyleva, N. E. & Utkin, V. I. (1985), 'Sliding modes in systems with asymptotic state observers', *Autom. Remote Control* **46**(6), 679–684. Pt. 1.
- Carmo, M. P. (1976), *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall.
- Edwards, C. & Spurgeon, S. (1998), *Sliding Mode Control : Theory and Applications*, Systems and Control Book Series, Taylor & Francis.
- Emelyanov, S. V. (1970), *Theory of variable structure systems*, Nauka.
- Emelyanov, S. V., Korovin, S. K. & Levantovsky, L. V. (1986), 'Higher order sliding regimes in the binary control systems', *Soviet Physics, Doklady* **31**, 291–293.
- Filippov, A. F. (1964), 'Differential equations with discontinuous right-hand side', *American Math. Soc. Translations* **42**(2), 199–231.

- Fridman, L. & Levant, A. (2002), Higher order sliding modes, *in* Perruquetti & B. J. P., eds, 'Sliding Mode Control in Engineering', Marcel Dekker, New York, pp. 53–101.
- Glatzl, A., Murphy, S., Wen, J. & Kopacek, P. (1993), Discrete implementation and adaptation of sliding mode control for robot manipulators, *in* 'Proc. IEEE Conf. Robotics&Automation', Vol. 2, Atlanta, pp. 539–544.
- Goodwin, G. C., Graebe, S. F. & Salgado, M. E. (2001), *Control System Design*, Prentice Hall.
- Hsu, L. (1990), 'Variable structure model reference adaptive control using only I/O measurement: General case', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **35**(11), 1238–1243.
- Hsu, L. (1997), 'Smooth sliding control of uncertain systems based on a prediction error', *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control* **7**, 353–372.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1989), 'Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurement: Part I', *Int. J. Contr.* **49**(2), 399–416.
- Hsu, L., Lizarralde, F. & Araújo, A. (1997), 'New results on output feedback VS-MRAC: Design and stability analysis', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **42**(3), 386–393.
- Hung, J. Y., Gao, W. & Hung, J. C. (1993), 'Variable structure control: a survey', *IEEE Trans. on Ind. Electronics* **40**(1), 2–22.
- Ioannou, P. & Sun, K. (1996), *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall.
- Isidori, A. (1995), *Nonlinear Control Systems*, 3rd edn, Springer-Verlag.
- Itkis, U. (1976), *Control Systems of Variable Structure*, Wiley.
- Levant, A. (1993), 'Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control', *Int. J. Contr.* **58**(6), 1247–1263.
- Levant, A. (1998*a*), Arbitrary-order sliding modes with finite time convergence, *in* 'Proc. 6<sup>th</sup> IEEE Mediterranean Conference on Control and Systems', Alghero, Sardinia, Italy.
- Levant, A. (1998*b*), 'Robust exact differentiation via sliding mode technique', *Automatica* **34**(3), 379–384.
- Levant, A. (1999), Controlling output variables via higher order sliding modes, *in* 'Proc. of the European Control Conference', Karlsruhe, Germany.
- Levant, A. (2001*a*), Higher order sliding modes and arbitrary-order exact robust differentiation, *in* 'Proc. of the European Control Conference', Porto, Portugal, pp. 996–1001.
- Levant, A. (2001*b*), 'Universal SISO sliding-mode controllers with finite time convergence', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **46**, 1447–1451.
- Levant, A. (2002), Universal SISO output-feedback controller, *in* 'Proceedings of IFAC', Barcelona, Spain, pp. 21–26.

- Levant, A. (2003), 'Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control', *Int. J. Contr.* **76**(9), 924–941.
- Mareels, I. & Polderman, J. W. (1996), *Adaptive systems an introduction*, Birkhauser.
- Narendra, K. & Annaswamy, A. (1989), *Stable Adaptive Systems*, Prentice Hall.
- Narendra, K. & Valavani, L. (1978), 'Stable adaptive controller design-direct control', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **23**(8), 570–583.
- Narendra, K., Lin, S. & Valavani, L. (1980), 'Stable adaptive controller design: Part II', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **25**(3), 570–583.
- Nijmeijer, H. & van der Schaft, A. J. (1990), *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer Verlag.
- Nunes, E. V. L., Hsu, L. & Lizarralde, F. (2004), Globally stable output-feedback sliding mode control with asymptotic exact tracking, in 'Proc. American Contr. Conf.', Boston.
- Peixoto, A. J. (2002), Controle suave por modo deslizante em presença de ruído de quantização, Master's thesis, Programa de Eng. Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Rosier, L. (1992), 'Homogeneous lyapunov function for homogeneous continuous vector field', *Systems and Contr. Letters* **19**, 467–473.
- Sastry, S. (1999), *Nonlinear Systems: analysis, stability and control*, Springer Verlag.
- Sastry, S. S. (1984), 'Model-reference adaptive control: stability, parameter convergence and robustness', *IMA J. Math. Contr. Inform.* **1**, 27–66.
- Sastry, S. S. & Bodson, M. (1989), *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice Hall.
- Slotine, J. & Li, W. (1991), *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall.
- Utkin, V. I. (1977), 'Variable structure systems with sliding modes', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **22**, 212–222.
- Utkin, V. I. (1978), *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*, MIR.
- Utkin, V. I. (1992), *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag.