

EQUALIZAÇÃO EM BLOCOS BASEADA EM UM DFE COM RESTRIÇÕES

Ingrid Sammyne Gadelha Figueiredo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. Ricardo Merched, Ph.D.

Prof. Eduardo Antônio Barros da Silva, Ph.D.

Prof. José Antonio Apolinário, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2005

FIGUEIREDO, INGRID S. GADELHA
EQUALIZAÇÃO EM BLOCOS BASEADA EM
UM DFE COM RESTRIÇÕES [Rio de Janeiro]
2005

X, 65 pp 29,7 cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia Elétrica, 2005)

Tese - Universidade Federal do Rio
de Janeiro, COPPE

1.DFE (*Decision Feedback Equalizer*)

2.Transmissão em Blocos 3.Cálculo

Rápido de Filtros

I.COPPE/UFRJ II.Título (série)

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu maravilhoso marido Maurício, pelo imensurável apoio durante todo o processo de realização deste trabalho, pela sua paciência, por seus conselhos, sua ajuda, e claro, por todo seu amor. E à minha amada filha Thaís, por sua compreensão e paciência, meio que inconscientemente, nas horas em que lhe faltei.

Aos meus adorados pais Mara e Adalberto, por todo apoio e incentivo em minha vida acadêmica, pelo amor e carinho que sempre me deram, e principalmente, pelos valores que me foram passados que foram decisivos na formação de meu caráter.

Agradeço muito ao professor Ricardo Merched, por toda sua paciência e compreensão durante esses dois anos, por todas suas explicações e orientações, que permitiram a realização deste trabalho.

À Universidade Federal do Amazonas e à Universidade Federal do Rio de Janeiro pela iniciativa de realizar o mestrado em telecomunicações voltado para o público de Manaus. E a SUFRAMA (Superintendência da Zona Franca de Manaus) que tornou possível a realização do mesmo, através dos recursos alocados.

A todos os professores do mestrado, pela dedicação, e pela oportunidade de aquisição de novos conhecimentos que nos foram dadas. Em especial, aos coordenadores do mestrado, Prof^ª. Marly Costa e Prof. Eduardo.

Aos amigos Leonardo Baltar e Vilar Neto, por suas ajudas e explicações sempre esclarecedoras. E a todos os meus colegas de curso, principalmente, aos amigos Karlo Homero, Celso, Rhand e Lúcio Neto.

Agradeço a todos que me apoiaram de alguma forma para que eu pudesse concluir este mestrado. Em especial, a D. Diva, por sua hospitalidade, e por todo carinho com que cuidou da minha filha (sua bisneta) em minhas idas ao Rio de Janeiro, aos meus sogros Carlos e Suely, a minha irmã querida Ellen e a toda minha família.

Por fim, gostaria de dedicar este trabalho a todos citados, e principalmente, as duas pessoas mais importantes da minha vida, que eu amo infinitamente, e que sempre estão ao meu lado pra tudo, meu querido marido e minha linda filhinha.

Ingrid Sammyne Gadelha Figueiredo

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

EQUALIZAÇÃO EM BLOCOS BASEADA EM UM DFE COM RESTRIÇÕES

Ingrid Sammyne Gadelha Figueiredo

Abril/2005

Orientador: Ricardo Merched

Programa: Engenharia Elétrica

Neste trabalho, aplicamos o conceito da transmissão em blocos, ao DFE (*Decision Feedback Equalizer*), implementado através de uma modelagem de bancos de filtros. Usualmente, no DFE em blocos, a seqüência de símbolos de um bloco recebido é detectada sucessivamente pelo dispositivo de decisão do equalizador. Assim, avaliamos os efeitos de implementar uma forma diferente de detecção do bloco de símbolos recebidos, em termos do erro médio quadrático-MSE e da taxa de erro de bit-BER. Implementamos também uma restrição a este equalizador, ao projetarmos os filtros que o compõe, considerando que o dispositivo de decisão nem sempre realiza a detecção corretamente, o que gera normalmente um efeito de propagação de erro no bloco de realimentação deste equalizador. Além disso, mostramos uma maneira de realizar o cálculo rápido dos filtros do DFE em blocos, aplicando transformações elementares aos fatores de *Cholesky* utilizados no cálculo destes filtros. Por fim, estendemos tais cálculos ao projeto do DFE com restrição.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

BLOCK EQUALIZATION WITH CONSTRAINED DFE

Ingrid Sammyne Gadelha Figueiredo

Abril/2005

Advisor: Ricardo Merched

Department: Electrical Engineering

In this work, we apply the concept of block transmission on DFE (Decision Feedback Equalizer) based precoders. Generally, the Block DFE performs successive detection within a block of received symbols at the output of the decision device. We evaluate the effects of using a different form of implementation of this detection, considering the MSE (Mean Square Error) and the BER (Bit Error Rate) criteria. We also propose a constrained formulation of the DFE, in order to reduce the effects of its inherent error propagation, due to wrong decisions. This formulation poses appropriate constraints on the feedback filter. Moreover, we show that simpler computations for the block DFE matrix coefficients can be obtained. These efficient methods are also applied to the constrained block DFE obtained.

Sumário

1	Introdução	1
2	Fundamentos	5
2.1	Estimação Linear	5
2.1.1	Critério do Erro Médio Quadrático	6
2.1.2	Modelo Linear	6
2.1.3	Critério MVUE (<i>Minimum Variance Unbiased Estimate</i>)	8
2.2	Decision Feedback Equalizer (DFE)	8
2.2.1	Formulação do DFE	10
2.2.2	Minimização em relação a $\{g,b\}$	12
3	DFE em Blocos	17
3.1	Transmissão em Blocos	17
3.1.1	Descrição do Modelo	18
3.2	Receptores Ótimos sem IBI	21
3.2.1	Método <i>Overlap-and-add</i> ou <i>Trailing Zeros</i>	22
3.2.2	Receptor TZ Ótimo	23
3.2.3	Método <i>Overlap-and-save</i> ou <i>Leading Zeros</i>	23

3.2.4	Receptor LZ ótimo	24
3.3	DFE em Blocos baseado no esquema TZ	25
3.3.1	Relação entre a ordem de detecção e um pré-codificador $\mathbf{T} = \mathbf{J}$	31
3.3.2	DFE em Blocos \times escalar	32
3.4	Conclusões	34
4	DFE em Blocos com Restrição	36
4.1	Formulação do Problema	36
4.2	Minimização em relação a $\{\mathbf{G}, \mathbf{B}\}$	38
4.3	MMSE resultante	41
4.4	Simulações	42
4.5	Conclusões	43
5	Cálculo Rápido dos Filtros do DFE em Blocos	46
5.1	Cálculo do DFE em Blocos sem restrição	46
5.1.1	Transformações Unitárias	48
5.1.1.1	Rotações de <i>Givens</i>	48
5.2	Cálculo do DFE em Blocos com restrição	52
5.2.1	Transformações J -Unitárias	54
5.3	Conclusões	59
6	Conclusão	61
6.1	Trabalhos Futuros	62
	Referências Bibliográficas	63

Lista de Figuras

2.1	Modelo Discreto do DFE Escalar.	9
2.2	Particionamento da matriz do canal.	13
3.1	Modelo discreto banco de filtros-canal	18
3.2	Sistema pré-codificador/canal equivalente	20
3.3	Equalização linear baseada em pré-codificador – caso TZ.	23
3.4	Equalização linear baseada em pré-codificador – caso LZ.	24
3.5	DFE em blocos baseado em pré-codificador.	25
3.6	Comparação entre a utilização da detecção arbitrária ($\mathbf{J}^* \mathbf{B} \mathbf{J} = \mathbf{B}_{\text{opt}}$) e a utilização de um pré-codificador \mathbf{J} , para BPSK (a) e para QPSK (b)	33
3.7	Comparação entre uma detecção arbitrária ($\mathbf{J}^* \mathbf{B} \mathbf{J}$) e a detecção na forma direta (<i>Successive Cancellation</i>), utilizando o mesmo pré-codificador \mathbf{T} , para o caso QPSK.	34
3.8	Comparação entre DFE escalar e DFE em blocos para BPSK (a) e para QPSK (b).	35
4.1	DFE em blocos com restrição.	37
4.2	Resposta ao impulso do canal utilizado nas simulações.	43

4.3	Comparação entre desempenho do DFE em blocos com restrição (<i>constraint</i>) e sem restrição para valores da variância do ruído aditivo (α) iguais a 0.1 a 0.5 (a) e 0.6 a 1.0 (b) para o BPSK.	44
4.4	Comparação entre desempenho do DFE em blocos com restrição (<i>constraint</i>) e sem restrição para valores da variância do ruído aditivo (α) iguais a 0.1 a 0.5 (a) e 0.6 a 1.0 (b) para o QPSK.	45

Capítulo 1

Introdução

Sistemas de comunicações são compostos, basicamente, pelo transmissor, receptor e pelo canal de comunicação. A função básica do transmissor é preparar o sinal de entrada que desejamos transmitir, de forma a possibilitar que este seja recuperado com uma adequada precisão pelo receptor. Este sinal transmitido é corrompido pelo meio físico no qual se propaga, o canal. O canal de comunicação insere distorções no sinal transmitido, tornando mais difícil a função do receptor em recuperar os dados transmitidos.

Neste contexto, a teoria de equalização exerce um papel fundamental. O Equalizador [1] tem a função de compensar as distorções em frequência do sinal transmitido. Dentre as distorções produzidas pelo canal destaca-se a interferência entre símbolos (*Intersymbol Interference-ISI*) [1].

O equalizador utilizado neste trabalho é o equalizador com decisão realimentada, denominado de *Decision Feedback Equalizer* (DFE), que é conhecido por ser um eficiente esquema de equalização de canais seletivos na frequência. Este equalizador é composto por dois filtros, o filtro *feedforward* e o filtro de *feedback*; estes podem ser calculados assumindo-se que a resposta ao impulso do canal e a variância dos sinais de entrada e do ruído são conhecidas.

Originalmente, a transmissão e recepção dos sinais é feita de forma serial, isto é, símbolo a símbolo. Entretanto, com a evolução das pesquisas em comu-

nicações e a demanda por altas taxas de transmissão, novos conceitos de transmissão e recepção bloco-a-bloco foram introduzidos. Neste caso, a seqüência a ser transmitida é dividida em blocos de tamanhos iguais, que são armazenados e depois processados para minimizar os efeitos negativos do canal (ver [2] e referências relacionadas).

Sistemas que utilizam transmissão em blocos, permitem uma equalização mais simples de canais com resposta ao impulso finita (*Finite Impulse Response-FIR*), pelo fato de introduzirem redundância no sinal transmitido [3]. Na transmissão é utilizado um pré-codificador, responsável pela introdução dessa redundância. A redundância adicionada em cada bloco é explorada de forma a remover a interferência entre blocos (*InterBlock Interference-IBI*) [4], além de permitir a utilização de esquemas mais simples e eficazes para a eliminação da própria ISI. Na recepção, podem ser utilizados dois tipos de equalizadores, os equalizadores do tipo linear ou com decisão realimentada [5], [6].

Dentre os exemplos de aplicações das transmissões em blocos, destacam-se os sistemas móveis que utilizam as seguintes técnicas de múltiplo acesso: CDMA (*Code Division Multiple Access*), TDMA (*Time Division Multiple Access*), FDMA (*Frequency Division Multiple Access*). Ou ainda os esquemas de modulação multiportadora como OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) e DMT (*Discrete Multitone Modulation*) [7].

Neste trabalho, vamos nos limitar à equalização em blocos sem memória. Os pré-codificadores utilizados podem atuar de duas formas para eliminar a IBI. Uma das maneiras consiste em inserir um intervalo de guarda em cada bloco de símbolos transmitidos, através da adição de zeros aos blocos (*TZ-Trailing Zeros*). A outra forma utilizada para a eliminação da IBI, descarta parte das entradas do bloco recebido (*LZ-Leading Zeros*). Estes dois procedimentos estão descritos no Capítulo 3.

Com a eliminação da IBI, nota-se que uma das vantagens do DFE em blocos em comparação com o DFE escalar, está no fato de que os possíveis erros na saída do detector não serão propagados através dos blocos subseqüentes, mas apenas dentro

de cada bloco. Entretanto, no DFE escalar não há introdução de redundância, o que permite que este sistema possua uma eficiência maior que o DFE em blocos, no que diz respeito à transmissão de informação útil.

A principal desvantagem do DFE está no inerente efeito de propagação de erro, que ocorre quando os símbolos são detectados incorretamente. Estes, ao serem realimentados através do filtro de *feedback*, continuarão prejudicando as decisões posteriores. A propagação do erro causa erros de decisão em rajada (*bursts*), e um conseqüente aumento na probabilidade de erro de bit ou de símbolo, que pode tornar o equalizador não confiável. Uma forma de diminuir os efeitos das decisões incorretas é introduzir determinadas restrições ao filtro de *feedback*. Essas restrições visam obter uma melhora no desempenho do sistema, e podem ser implementadas pela limitação da energia ou magnitude deste filtro. Tais formulações são conhecidas para DFE's escalares [8], [9]. No Capítulo 4, será feita a extensão deste procedimento para o DFE em blocos e discutidos seus efeitos.

Com o aumento na demanda por comunicações em banda larga, há uma grande necessidade de se encontrar e viabilizar métodos menos complexos para obtenção dos coeficientes ótimos do DFE. A implementação de métodos eficientes para o cálculo dos filtros do equalizador recai sobre a utilização de métodos rápidos para se obter os filtros ótimos. No caso do DFE escalar, isto é efetuado através do algoritmo de *Levinson* ou de algoritmos adaptativos rápidos [4]. Neste trabalho, vamos estender este cálculo rápido para o DFE em blocos com restrição, a partir do DFE em blocos sem restrição, utilizando-se as técnicas mencionadas em [10].

Esta dissertação está dividida em 6 capítulos da seguinte forma: no Capítulo 2, serão apresentados os fundamentos utilizados neste trabalho, apresentando os conceitos básicos da teoria de estimação linear, do modelo linear adotado e o projeto do DFE escalar (serial).

No Capítulo 3, serão apresentados os conceitos relativos às transmissões em blocos utilizando pré-codificadores, bem como a derivação do DFE em blocos. Neste capítulo será também descrita a análise efetuada para um esquema de detecção diferente do usualmente encontrado na literatura, apresentando resultados

de simulações. Também será realizada uma comparação entre o desempenho do DFE escalar e o DFE em blocos.

No Capítulo 4, discutiremos o tema principal deste trabalho, que consiste na nova formulação do DFE em blocos com restrição, onde além de discutirmos seus efeitos, serão mostrados os resultados práticos obtidos através de simulações.

Por fim, no Capítulo 5, apresentaremos técnicas eficientes para o cálculo rápido do DFE em blocos com e sem restrição. E no capítulo 6, são mostradas as conclusões do trabalho realizado, sugerindo também, outros trabalhos relacionados que podem ser desenvolvidos.

Capítulo 2

Fundamentos

Este capítulo apresentará uma breve descrição dos conceitos relevantes para este trabalho. Serão apresentados os conceitos de estimação linear, dado um modelo linear de canal e as relações matemáticas usadas para a obtenção da solução ótima. O equalizador utilizado como base neste trabalho é o DFE (*Decision Feedback Equalizer*), e este também será descrito neste capítulo.

2.1 Estimação Linear

O problema central da estimação é recuperar os dados corrompidos com uma adequada precisão. Um dos critérios mais importantes usado para a estimação linear é o critério dos mínimos quadrados [4]. Este critério possui aplicações em diversas áreas, pelo fato de apresentar interessantes características do ponto de vista computacional. A principal delas é a possibilidade de expressar soluções ótimas através de fórmulas fechadas, além de facilitar seu cálculo recursivo através de técnicas de processamento de sinais.

Notação: Neste trabalho, denotaremos por $(\cdot)^*$ o transposto conjugado complexo de uma matriz. E representaremos uma matriz A positiva definida, como $A > 0$.

2.1. ESTIMAÇÃO LINEAR

2.1.1 Critério do Erro Médio Quadrático

O critério do erro médio quadrático (*Mean-Square-Error-MSE*) é baseado no sinal de erro, dado por $\tilde{x} = x - \hat{x}$, onde x é uma variável aleatória com média e variância conhecidas, e \hat{x} é a estimativa de x , a ser determinada. Para isso, buscamos solucionar

$$\min_K \mathbf{E} \tilde{x}^* \tilde{x} = \min_K \text{Tr}(\mathbf{E} \tilde{x} \tilde{x}^*) \quad (2.1)$$

Por este critério, tem-se que a estimativa ótima é a que resulta no menor valor da função custo, definida pela equação acima.

Sejam duas variáveis aleatórias de média zero x e y , o estimador ótimo de x dado y é:

$$\hat{x} = K_0 y \quad (2.2)$$

onde K_0 é uma solução para o sistema de equações linear dado por $K_0 R_y = R_{xy}$, onde R_y é a matriz de autocorrelação de y e R_{xy} é a matriz de correlação cruzada de x e y .

Na prática, assume-se que $R_y > 0$, de forma que $K_0 = R_{xy} R_y^{-1}$ é solução única [11], [4].

2.1.2 Modelo Linear

Para exemplificar a aplicação da teoria da estimação linear vista anteriormente, sejam $\{x, y\}$ dois vetores aleatórios de média zero, onde x representa o sinal de entrada e y é a saída de um sistema de comunicações, definidos através do seguinte modelo linear:

$$y = Hx + v \quad (2.3)$$

onde H representa, por exemplo, o efeito do canal, e v é um vetor aleatório de média zero, e matriz de covariância $R_v = \mathbf{E} v v^*$. Assume-se também, que a matriz de covariância de x é conhecida, dada por $R_x = \mathbf{E} x x^*$. Considera-se ainda, que $R_x > 0$ e $R_v > 0$.

2.1. ESTIMAÇÃO LINEAR

Conforme estabelecido anteriormente, pela equação (2.2), tem-se que a estimativa ótima de x dado y é:

$$\hat{x} = R_{xy}R_y^{-1}y \quad (2.4)$$

Esta solução é também conhecida como a solução *smoothing*.

Com base na equação (2.4), definimos o valor do MSE mínimo por [4]:

$$MSE = R_x^{-1} - R_{xy}R_y^{-1}R_{yx} \quad (2.5)$$

As matrizes de covariância $\{R_{xy}, R_y\}$ da solução acima, podem ser expressas em função das matrizes $\{H, R_x, R_v\}$:

$$\begin{aligned} R_y &= E yy^* = E (Hx + v)(Hx + v)^* = HR_xH^* + R_v \\ R_{xy} &= E xy^* = E x(Hx + v)^* = R_xH^* \end{aligned}$$

Resultando na seguinte expressão para \hat{x} :

$$\hat{x} = R_xH^*(R_v + HR_xH^*)^{-1}y \quad (2.6)$$

Esta expressão pode ser reescrita de forma equivalente utilizando o Lema de Inversão de Matrizes [11]. Este Lema estabelece que para matrizes arbitrárias $\{A, B, C, D\}$ de dimensões compatíveis, onde A e C são inversíveis, tem-se:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (2.7)$$

Aplicando este Lema ao termo $(R_v + HR_xH^*)^{-1}$ da equação (2.6), com as devidas correspondências [4], esta pode ser escrita como:

$$\hat{x} = (R_x^{-1} + H^*R_vH)^{-1}H^*R_v^{-1}y \quad (2.8)$$

Esta forma alternativa fornece uma expressão mais simples para o estimador ótimo \hat{x} . Por exemplo, para o caso em que H seja um vetor coluna, o termo $(R_v + HR_xH^*)^{-1}$ em (2.6) é uma matriz, enquanto que $(R_x^{-1} + H^*R_vH)^{-1}$ em (2.8)

2.2. DECISION FEEDBACK EQUALIZER (DFE)

é um valor escalar. Dessa forma, a escolha pelas expressões (2.6) ou (2.8) depende da conveniência da situação.

Por conseqüência, usando (2.8), o custo mínimo é dado por:

$$MMSE = (R_x^{-1} + H^* R_v H)^{-1} \text{ ou } \text{Tr}(R_x^{-1} + H^* R_v H)^{-1} \quad (2.9)$$

2.1.3 Critério MVUE (*Minimum Variance Unbiased Estimate*)

O modelo linear apresentado na seção anterior considera que x é um vetor aleatório. No critério MVUE [11], x é dado por um vetor constante desconhecido, e erro é dado por $\tilde{x} = -Kv$. Assim, o estimador ótimo é obtido resolvendo o seguinte problema:

$$\min_K KR_v K^* \quad \text{sujeito a } KH = I \quad (2.10)$$

onde o valor de K deve satisfazer a condição $KH = I$, pois $E[Ky] = E[x]$.

Neste caso, a expressão do estimador ótimo é dada por:

$$\hat{x} = (H^* R_v H)^{-1} H^* R_v^{-1} y \quad (2.11)$$

Isto resulta em um custo mínimo igual a $(H^* R_v H)^{-1}$. Este resultado é conhecido como Teorema de *Gauss-Markov* [4].

No jargão de comunicações, este método é conhecido como MMSE *Zero Forcing Criterion* [1].

2.2 Decision Feedback Equalizer (DFE)

Este tipo de equalização é crucial em aplicações de transmissão em banda larga, onde a interferência intersimbólica-ISI é um problema crítico. Em muitos destes sistemas, os dados são transmitidos em pacotes, onde cada pacote é formado

2.2. DECISION FEEDBACK EQUALIZER (DFE)

por uma seqüência de treinamento, seguida por uma seqüência de dados desconhecidos. Neste contexto, uma das técnicas de equalização mais eficientes baseia-se em um equalizador não linear, denominado de *Decision Feedback Equalizer* (DFE). O DFE é bastante conhecido por sua estrutura simples [1],[4], e por sua eficiência na equalização de canais que produzem elevada ISI. A Figura 2.1 mostra o modelo discreto do referido equalizador.

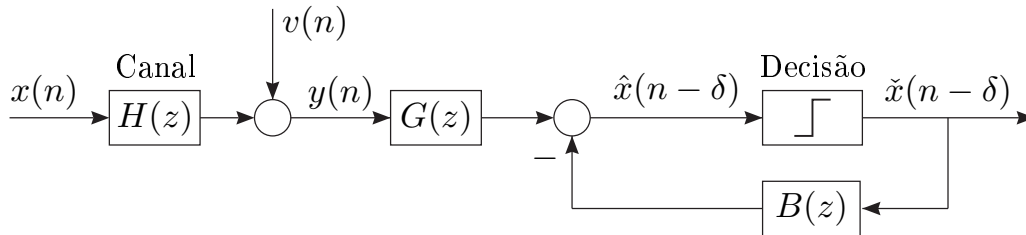


Figura 2.1: Modelo Discreto do DFE Escalar.

As técnicas baseadas na estimação do canal representam um poderoso método de equalização. O princípio básico é primeiro estimar o canal entre o transmissor e o receptor usando uma seqüência de treinamento, e então usar esta estimativa para calcular os coeficientes ótimos do equalizador para o respectivo canal. Os coeficientes ótimos são então carregados para os *taps* do equalizador.

O processo de otimização do DFE pode também continuar após o cálculo dos coeficientes, através de métodos de equalização adaptativa “cega” (*adaptive blind equalization*) [6] e [12], realizada diretamente através da seqüência de dados. Em aplicações onde o canal sofre rápidas variações, este procedimento deve ser repetido freqüentemente. Além disso, a seqüência de dados recebidos é normalmente armazenada durante o período entre a estimação do canal e o cálculo do equalizador ótimo.

Além do próprio desempenho, um fator determinante para o sucesso do processo de equalização consiste na eficiência do método utilizado para o cálculo dos coeficientes do equalizador. Reduzindo tal complexidade tem-se as seguintes vantagens:

2.2. DECISION FEEDBACK EQUALIZER (DFE)

- 1) A redução do tamanho da memória requerida para o armazenamento da seqüência recebida durante o tempo necessário para a computação destes coeficientes;
- 2) A atualização com mais freqüência dos novos coeficientes do equalizador, possibilitando que o equalizador acompanhe variações rápidas do canal;
- 3) Um método mais eficiente de cálculo simplifica o *hardware* e portanto, a área útil no *chip* para a implementação do algoritmo, especialmente quando este é realizado através de estruturas recursivas.

As técnicas utilizadas para o cálculo dos coeficientes ótimos de um DFE são baseadas no método bastante conhecido, denominado de fatorização de *Cholesky*, primeiramente derivado em [13].

A fatorização de *Cholesky* é utilizada para decompor uma determinada matriz S , positiva definida, através das seguintes formas:

$$S = \bar{L}\bar{L}^* = \bar{U}\bar{U}^* \quad (2.12)$$

onde as matrizes \bar{L} e \bar{U} são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, cujos elementos de suas diagonais principais são positivos.

Uma outra forma equivalente de representar a fatorização de *Cholesky*, é através de sua forma não normalizada:

$$S = \bar{L}\bar{L}^* = LDL^* \quad (2.13)$$

onde $\bar{L} = LD^{1/2}$. A matriz D é uma matriz diagonal com elementos positivos. Estas duas representações da fatorização de *Cholesky* serão utilizadas nos capítulos posteriores.

2.2.1 Formulação do DFE

Considere o modelo discreto do DFE da Figura 2.1, onde vamos fazer as seguintes considerações:

2.2. DECISION FEEDBACK EQUALIZER (DFE)

- A entrada do sistema $x(n)$ é uma seqüência complexa, de média zero, independente e identicamente distribuída com potência unitária, ou seja, a matriz de autocorrelação de $x(n)$ é $R_x = I_P$;
- O ruído aditivo é Gaussiano, denotado pelo vetor $v(n)$, com matriz de autocorrelação igual a $R_v^{(L)}$, de tamanho $L \times L$;
- Assume-se que as decisões do detector, dadas por $\check{x}(n - \delta)$, são corretas e iguais a $x(n - \delta)$, onde δ é o atraso de grupo do sistema. Isto torna o projeto dos coeficientes dos filtros de *feedback* e *feedforward* mais simples, porém, à custa de introduzir o efeito de propagação de erro devido a possibilidade de decisões incorretas. Mais adiante vamos mostrar como este efeito pode ser atenuado.
- O filtro *feedforward* é denotado por $G(z)$ e tem comprimento L (normalmente igual ao tamanho do canal N), e o filtro de *feedback*, é dado por $B(z)$ e comprimento igual a M .

Pelo critério do MMSE definido anteriormente, o objetivo aqui é minimizar a seguinte função custo:

$$\xi = \mathbb{E}|x(n - \delta) - \hat{x}(n - \delta)|^2 \quad (2.14)$$

onde $\hat{x}(n - \delta)$ é a estimativa do sinal de entrada atrasada, antes da decisão. Assim, reunindo os coeficientes de $G(z)$ e $B(z)$ nos vetores $\{g^*, b^*\}$, respectivamente, pode-se escrever o sinal recebido $\hat{x}(n - \delta)$ como sendo:

$$\hat{x}(n - \delta) = g^* y_n - b^* \check{x}_n \quad (2.15)$$

onde

$$y_n = H x_n + v_n \quad (2.16)$$

A matriz H é a matriz de convolução do canal, associada aos coeficientes do canal $\{h(0), h(1), \dots, h(N - 1)\}$, de estrutura *Toeplitz* [14], e tamanho $L \times (N +$

2.2. DECISION FEEDBACK EQUALIZER (DFE)

$L - 1$), dada por:

$$H = \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & \dots & h(N-1) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h(0) & \dots & h(N-2) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & h(0) & \dots & h(N-1) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

As estruturas dos vetores do sistema são mostradas abaixo, onde o vetor dos dados da entrada é dado por $x(n)$ de tamanho $(N + L - 1) \times 1$, o vetor da entrada do filtro $G(z)$ é dado por $y(n)$ de tamanho $(L \times 1)$, e o vetor da entrada do filtro $B(z)$ é dado por $\tilde{x}(n)$ de tamanho $(M \times 1)$:

$$x_n \triangleq \left[x(n) \quad x(n-1) \quad \dots \quad x(n-N-L+2) \right]^T \quad (2.18)$$

$$y_n \triangleq \left[y(n) \quad y(n-1) \quad \dots \quad y(n-L+1) \right]^T \quad (2.19)$$

$$\tilde{x}_n \triangleq \left[\tilde{x}(n-\delta-1) \quad \tilde{x}(n-\delta-2) \quad \dots \quad \tilde{x}(n-\delta-M) \right]^T \quad (2.20)$$

2.2.2 Minimização em relação a $\{g, b\}$

Concatenando g^* e b^* em um vetor linha k , a minimização da equação (2.14) pode ser escrita como

$$\min_k \mathbf{E} \left| x(n-\delta) - \underbrace{\begin{bmatrix} g^* & b^* \end{bmatrix}}_k \underbrace{\begin{bmatrix} y_n \\ -\tilde{x}_n \end{bmatrix}}_u \right|^2 \quad (2.21)$$

Definindo R_u como a matriz de covariância do vetor u , e $R_{ux(n-\delta)}$ a matriz de covariância cruzada, tem-se que a solução ótima deste problema, de acordo com (2.4), é dada por [11]:

$$k_{\text{opt}} = R_{x(n-\delta)u} R_u^{-1} \quad (2.22)$$

onde

$$R_u \triangleq \begin{bmatrix} R_y & -R_{y\tilde{x}} \\ -R_{\tilde{x}y} & R_{\tilde{x}} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

2.2. DECISION FEEDBACK EQUALIZER (DFE)

e

$$R_{x(n-\delta)u} = \begin{bmatrix} R_{x(n-\delta)y} & -R_{x(n-\delta)\tilde{x}} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Usando o modelo de saída do canal definido em (2.16) e o fato de que $x(n)$ é i.i.d., obtém-se as seguintes fórmulas fechadas para $\{R_y, R_{y\tilde{x}}, R_{\tilde{x}}, R_{x(n-\delta)y}, R_{x(n-\delta)\tilde{x}}\}$:

$$R_y = \mathbf{E}y_n y_n^* = HH^* + R_v^{(L)} \quad (2.25)$$

$$R_{y\tilde{x}} = H \begin{bmatrix} 0_{(\delta+1) \times M} \\ I_M \\ 0_{(N+L-M-\delta-2) \times M} \end{bmatrix} \triangleq \bar{H} \quad (2.26)$$

$$R_{\tilde{x}} = I_M \quad (2.27)$$

$$R_{x(n-\delta)y} = \begin{bmatrix} 0_{(1 \times \delta)} & 1 & 0_{1 \times (N+L-M-\delta-2)} \end{bmatrix} H^* \triangleq h_\delta^* \quad (2.28)$$

$$R_{x(n-\delta)\tilde{x}} = 0_{1 \times M} \quad (2.29)$$

Nas definições acima, a matriz \bar{H} é uma sub-matriz de H , particionada como

$$H = \begin{bmatrix} H_\delta & \bar{H} & \tilde{H} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

onde define-se também a matriz H_δ como uma sub-matriz de tamanho $L \times (\delta + 1)$ de H , e h_δ corresponde a δ -ésima coluna, conforme a Figura 2.2.

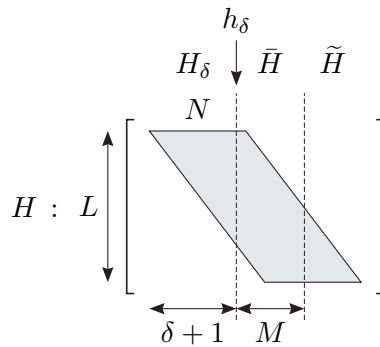


Figura 2.2: Particionamento da matriz do canal.

Assim, utilizando-se as expressões acima, podemos reescrever a equação (2.22) como:

$$k_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} h_\delta^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} HH^* + R_v^{(L)} & -\bar{H} \\ -\bar{H}^* & I_M \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.31)$$

2.2. DECISION FEEDBACK EQUALIZER (DFE)

Usando uma conhecida fórmula para a inversa de matrizes subdivididas em blocos [11], tem-se:

$$k_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} h_{\delta}^* & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ \tilde{H}^* \end{bmatrix} (R_v + HH^* - \tilde{H}\tilde{H}^*)^{-1} \begin{bmatrix} I & \tilde{H} \end{bmatrix} \right)$$

$$k_{\text{opt}} = h_{\delta}^* (R_v^{(L)} + H_{\delta}H_{\delta}^* + \tilde{H}\tilde{H}^*)^{-1} \begin{bmatrix} I & \tilde{H} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Dessa forma, obtém-se as seguintes expressões para os coeficientes ótimos $\{g, b\}$:

$$g_{\text{opt}} = (R_v^{(L)} + H_{\delta}H_{\delta}^* + \tilde{H}\tilde{H}^*)^{-1} h_{\delta} \quad (2.33)$$

$$b_{\text{opt}} = \tilde{H}^* g_{\text{opt}} \quad (2.34)$$

Esta é a solução geral do problema de estimação linear, onde as expressões obtidas são válidas para qualquer escolha dos parâmetros $\{\delta, M, N, L\}$, desde que estes satisfaçam a seguinte condição:

$$\delta + M \leq N + L - 2 \quad (2.35)$$

A seguir, serão examinados dois casos especiais para a condição acima:

- (a) $\delta \leq L - 1$ e $N - 1 \leq M \leq N + L - \delta - 2$. Neste caso, observa-se que $\{H_{\delta}, \tilde{H}, h_{\delta}\}$ apresentam a seguinte estrutura:

$$\begin{bmatrix} H_{\delta} & \tilde{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_{\delta} & 0 \\ 0 & \times \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad h_{\delta} = \begin{bmatrix} h'_{\delta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

onde a entrada \times é um valor que não será de interesse.

Quando $R_v^{(L)}$ é uma matriz diagonal, temos que a matriz inversa da equação (2.32) pode ser escrita como

$$(R_v^{(L)} + H_{\delta}H_{\delta}^* + \tilde{H}\tilde{H}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} R_v^{(\delta)} + H'_{\delta}H'^*_{\delta} & 0 \\ 0 & \times \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.37)$$

que também tem estrutura diagonal. Neste caso, o filtro *feedforward*, é dado por:

$$g_{\text{opt}} = (R_v^{(\delta)} + H'_{\delta}H'^*_{\delta})^{-1} h'_{\delta} \quad (2.38)$$

2.2. DECISION FEEDBACK EQUALIZER (DFE)

- (b) $\delta > L - 1$ e $M = N + L - \delta - 2$. Neste caso, verifica-se que $\tilde{H} = 0$. A matriz inversa da equação (2.32) torna-se então $(R_v^{(L)} + H_\delta H_\delta^*)^{-1}$, e a expressão para g_{opt} é dada por:

$$g_{\text{opt}} = (R_v^{(L)} + H_\delta H_\delta^*)^{-1} h_\delta \quad (2.39)$$

Observa-se que as equações (2.38) e (2.39) são idênticas a não ser pelos tamanhos das matrizes H'_δ e H_δ .

O método alternativo para otimizar a equação (2.14), que foi utilizado em [15], consiste em definir a função custo do DFE como um problema de estimação linear com restrição. Isto resulta nas seguintes expressões para $\{g, b\}$:

$$g_{\text{opt}} = (R_v^{(N+L-1)} + H^* H)^{-1} H^* \begin{bmatrix} 0 \\ b'_{\text{opt}} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

onde o vetor $\begin{bmatrix} 0 \\ b'_{\text{opt}} \end{bmatrix}$ é obtido através da fatorização de *Cholesky*:

$$(I + H R_v^{-1} H^*) = \mathcal{L} \mathcal{D} \mathcal{L}^* \quad (2.41)$$

Os procedimentos mais eficientes atualmente para se achar os coeficientes ótimos do DFE de acordo com as equações (2.40) e (2.41) envolvem dois passos:

- (i) Realizar a fatorização de *Cholesky* da equação (2.41) usando o algoritmo de *Schur* generalizado [11];
- (ii) Calcular o filtro *feedforward* através da famosa recursão de *Levinson* [4] ou pelo método de *backsubstitution* [16].

Foi mostrado em [17], entretanto, que a formulação por estimação linear resulta em um método mais eficiente do que o proposto em [18], no que diz respeito a complexidade de obtenção dos filtros do DFE.

De forma mais específica, as equações (2.33) e (2.39) representam expressões muito mais compactas, principalmente em relação ao tamanho das matrizes envolvidas. Observa-se que a fatorização em (2.41) é em relação a matriz de convolução

2.2. DECISION FEEDBACK EQUALIZER (DFE)

completa H , enquanto que a equação (2.39) é expressa através de H_δ , que só depende do atraso de decisão δ e não dos comprimentos do canal e do filtro $G(z)$, que podem ser maiores que δ . Para sistemas com alta taxa de transmissão, esta diferença se torna considerável uma vez que o modelo equivalente discreto do canal se torna um filtro de comprimento N longo. Isto significa que o cálculo do equalizador pode ser realizado de forma mais eficiente utilizando (2.33) e (2.39). Além disso, o filtro b_{opt} é obtido através da equação (2.34), simplesmente pela convolução, sem a necessidade de inversão de matrizes ou fatorização [19].

Nos capítulos que se seguem, vamos argumentar que expressões menos complexas também são possíveis no cálculo de DFEs em blocos.

Capítulo 3

DFE em Blocos

Neste capítulo será apresentada a extensão do DFE escalar para um sistema por transmissão em blocos. Serão descritos os conceitos básicos dos sistemas por transmissão em blocos, que utilizam pré-codificadores baseados em banco de filtros, e do respectivo DFE em blocos.

3.1 Transmissão em Blocos

Em um sistema típico por transmissão em blocos, os símbolos recebidos são agrupados em blocos de tamanhos iguais e processados com o objetivo de diminuir os efeitos do canal, ou eliminar a interferência inter-simbólica [3]. Dentre exemplos de transmissões em blocos estão o OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) e DMT (*Discrete Multitone*) [20], [7].

Em sistemas por transmissão em blocos, a redundância introduzida em cada bloco representa uma poderosa ferramenta para remover a correspondente interferência entre blocos de símbolos (*Interblock Interference-IBI*) [5].

3.1.1 Descrição do Modelo

A Figura 3.1 ilustra o modelo discreto em banda base de um sistema por transmissão em blocos baseado em um pré-codificador. O pré-codificador é representado por um banco de filtros, definido por M filtros com resposta ao impulso finita (*Finite Impulse Response-FIR*) $\{f_m(n)\}$, de comprimento Q . O sinal de entrada é paralelizado em blocos de M símbolos, dados por $\{x_m(i)\}$, que são então processados pelo banco de filtros de síntese. Este sinal de entrada $x(n)$ pode representar vários usuários em um sistema multi-canal ou um único usuário em um sistema de processamento em blocos mono-canal.

O canal $h(n)$ é representado por um filtro linear invariante no tempo (LTI) FIR de comprimento N . A razão P/M , assumindo $P \geq M$, mede o grau de redundância introduzida por cada bloco transmitido através do canal $h(n)$. No receptor, o bloco recebido é filtrado através de um banco de filtros de análise, e a taxa de amostragem original é restaurada através da interpolação de cada bloco por um fator M .

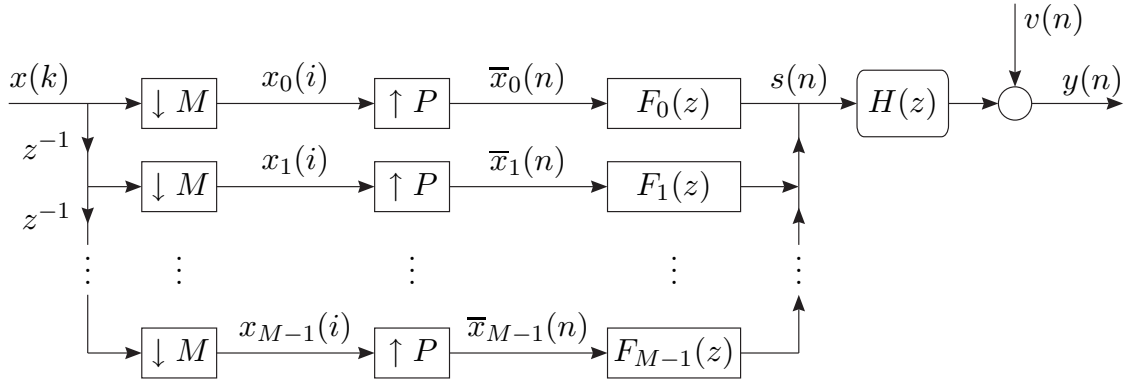


Figura 3.1: Modelo discreto banco de filtros-canal

Sabe-se que a transmissão de redundância de informação, quando o sinal $s(n)$ é proveniente de um corpo finito, pode aumentar o desempenho do sistema quando o sinal recebido é ruidoso. Isto originou os chamados Códigos Convolucionais (*Block Convolutional Coders*)[1]. Estes códigos exploram a redundância em uma determinada seqüência de bits recebida. Isto também se aplica ao caso de um sinal proveniente de uma constelação de símbolos, de forma que a complexidade do

3.1. TRANSMISSÃO EM BLOCOS

receptor pode ser então reduzida para a detecção, ou seja, a redundância devido aos símbolos adicionais pode ser usada para melhorar o desempenho em termos da taxa de erro de bit (*Bit Error Rate*-BER). Este é o caso dos sistemas OFDM, onde a interferência entre blocos (IBI) de símbolos pode ser eliminada através de uma escolha apropriada dos filtros de transmissão, além de forçar que o receptor ótimo a ter uma estrutura diagonal.

Da Figura 3.1, podemos obter uma expressão para o sinal recebido $y(n)$ em termos de $x(n)$, através da filtragem direta dos correspondentes sinais decimados e interpolados (*downsampled/upsampled*) $\{\bar{x}_m(i)\}$. Isto é feito através da convolução das saídas combinadas com o canal. Entretanto, a Figura 3.1 pode ser reconfigurada de forma equivalente utilizando propriedades conhecidas de sistemas multi-taxa, resultando em uma descrição mais compacta. Isto é realizado em duas etapas:

a) Expressando o canal $h(n)$ em termos de sua função de transferência equivalente em blocos. Esta é conhecida por ter sua estrutura pseudo-circulante dada por:

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) & \cdots & H_{P-1}(z) \\ z^{-1}H_{P-1}(z) & H_0(z) & \cdots & H_{P-2}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{-1}H_1(z) & z^{-1}H_{P-1}(z) & \cdots & H_0(z) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

onde $\{H_k(z)\}$, $k = 0, \dots, P - 1$ são as componentes polifásicas do canal $\mathbf{H}(z)$;

b) Expressando os filtros transmissores em termos de suas componentes polifásicas (tipo 2) [21]:

$$\begin{bmatrix} F_0(z) \\ \vdots \\ F_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{00}(z^P) & T_{10}(z^P) & \cdots & T_{P-1,0}(z^P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{0,M-1}(z^P) & T_{1,M-1}(z^P) & \cdots & T_{P-1,M-1}(z^P) \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}(z^P)} \begin{bmatrix} z^{P-1} \\ z^{P-2} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

e trocando a ordem da matriz polifásica resultante $\mathbf{T}(z^P)$ com os interpoladores (*upsamplers*).

3.1. TRANSMISSÃO EM BLOCOS

Desta forma, pode-se escrever a seqüência transmitida como

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{T}(z)\mathbf{x}(z) \quad (3.3)$$

onde $\{\mathbf{u}(z), \mathbf{x}(z)\}$ são as transformadas z dos i -ésimos vetores de blocos de dados $\{\mathbf{u}(i), \mathbf{x}(i)\}$, de tamanhos $(M \times 1)$ e $(P \times 1)$, respectivamente, definidos por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(i) &\triangleq \begin{bmatrix} x(iM) & x(iM-1) & \cdots & x(iM-M+1) \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{u}(i) &\triangleq \begin{bmatrix} u(iP) & u(iP-1) & \cdots & u(iP-P+1) \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

A Figura 3.2 mostra o equivalente sistema pré-codificador/canal em blocos, onde também definimos os correspondentes vetores de ruído e de saída:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(i) &\triangleq \begin{bmatrix} v(iP) & v(iP-1) & \cdots & v(iP-P+1) \end{bmatrix}^T; \\ \mathbf{y}(i) &\triangleq \begin{bmatrix} y(iP) & y(iP-1) & \cdots & y(iP-P+1) \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

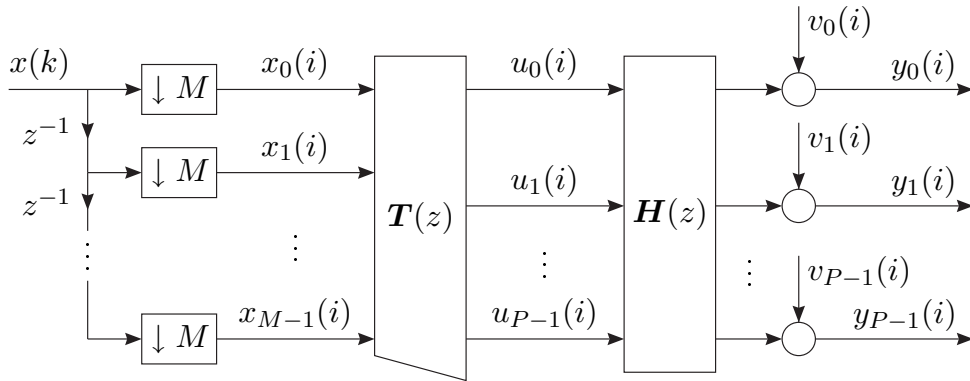


Figura 3.2: Sistema pré-codificador/canal equivalente

Observa-se que a memória das funções de transferências resultantes do pré-codificador e do canal, $\{\mathbf{T}(z), \mathbf{H}(z)\}$ depende do comprimento P do bloco transmitido. Isto é, as componentes polifásicas que determinam $\{\mathbf{T}(z), \mathbf{H}(z)\}$ são tais que seus comprimentos são dados por Q/P e N/P , respectivamente (se estas frações não forem inteiras, basta aumentar Q e N , completando com zeros as correspondentes respostas ao impulso). Dessa forma, escolhendo $Q = P$ e $P \geq N$, tem-se que $\mathbf{T}(z)$ não possui memória, ou seja, $\mathbf{T}(z) = \mathbf{T}$, e $\mathbf{H}(z)$ possui somente dois

3.2. RECEPTORES ÓTIMOS SEM IBI

coeficientes matriciais:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(z) &= \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & \cdots & h(N-1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h(0) & \cdots & h(N-2) & h(N-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & h(N-1) \\ z^{-1}h(N-1) & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & h(N-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ z^{-1}h(1) & \cdots & z^{-1}h(N-1) & 0 & \cdots & 0 & h(0) \end{bmatrix} \\
 &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 z^{-1}, \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

Portanto, a saída $y(i)$ pode ser escrita no domínio do tempo como:

$$\mathbf{y}(i) = \mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{x}(i) + \mathbf{H}_1 \mathbf{T} \mathbf{x}(i-1) + \mathbf{v}(i) \tag{3.5}$$

Em outras palavras, a matriz \mathbf{H}_0 modela a ISI dentro de um bloco, enquanto que a matriz \mathbf{H}_1 modela a IBI entre dois blocos consecutivos de dados.

A seguir, serão mostradas expressões para o equalizador MMSE-DFE ótimo, considerando que a IBI é eliminada primeiramente, através de uma escolha apropriada da matriz \mathbf{T} .

3.2 Receptores Ótimos sem IBI

Nas transmissões em blocos, deve-se primeiro eliminar a IBI e posteriormente a ISI dentro dos símbolos do bloco transmitido. Observa-se pela equação (3.5) que para eliminar a IBI, basta eliminar o termo de \mathbf{H}_1 na referida equação. Isto pode ser realizado através de duas formas alternativas, baseadas em técnicas de convolução do tipo *overlap-and-save* e *overlap-and-add*. Estes métodos também são conhecidos, no jargão das comunicações, como *Leading Zeros* e *Trailing Zeros*, respectivamente.

3.2.1 Método *Overlap-and-add* ou *Trailing Zeros*

Observando mais especificamente a matriz \mathbf{H}_1 em (3.5), vemos que esta possui todas entradas iguais a zero, a não ser pela sub-matriz triangular do canto inferior esquerdo de dimensões $(N - 1) \times (N - 1)$. A matriz do pré-codificador, de tamanho $P \times M$, é escolhida da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(N-1) \times M} \\ \bar{\mathbf{T}}_{(P-N+1) \times M} \end{bmatrix} \quad (\text{zero-padding}) \quad (3.6)$$

onde a sub-matriz nula representa o intervalo de guarda entre os símbolos em cada bloco. Logo, temos que $\mathbf{H}_1 \mathbf{T} = \mathbf{0}$, e a equação (3.5) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(i) &= \mathbf{H}_0 \mathbf{T} \mathbf{x}(i) + \mathbf{v}(i) \\ &= \bar{\mathbf{H}}_0 \bar{\mathbf{T}} \mathbf{x}(i) + \mathbf{v}(i) \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde a matriz $\bar{\mathbf{H}}_0$ é uma matriz de tamanho $P \times (P - N + 1)$ dada por

$$\bar{\mathbf{H}}_0 = \begin{bmatrix} h(N-1) & 0 & \cdots & 0 \\ h(N-2) & h(N-1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ h(0) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & h(N-1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h(0) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

O método *Trailing Zeros-TZ* é também conhecido como método *Zero Padding*, de acordo com [5], [20]. Observa-se na equação (3.7) que para não haver perda de informação na transmissão, é necessário selecionar o tamanho do bloco P tal que $P - N + 1 \geq M$. Isto é, se pretendemos transmitir M símbolos de entrada, devemos selecionar $P = N + M - 1$ como o tamanho mínimo do bloco de forma a eliminar IBI. A partir de agora, assume-se que este é o comprimento do bloco P , e portanto, a matriz $\bar{\mathbf{H}}_0$ passa a ter o tamanho $(N + M - 1) \times M$.

3.2.2 Receptor TZ Ótimo

Dado o modelo da equação (3.7), com uma determinada matriz do pré-codificador $\bar{\mathbf{T}}$, a solução ótima para o seguinte problema de estimação linear:

$$\min_{\mathbf{K}} E \|\mathbf{x}(i) - \mathbf{K}\mathbf{y}(i)\|^2 \quad (3.9)$$

é dada por $\mathbf{K}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{xy}\mathbf{R}_y^{-1}$. Sendo $\mathcal{H} = \bar{\mathbf{H}}_0\bar{\mathbf{T}}$, então $\mathbf{y}(i) = \mathcal{H}\mathbf{x}(i) + \mathbf{v}(i)$. Assim, a solução ótima em termos deste modelo é:

$$\mathbf{K}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_x\mathcal{H}^*(\mathbf{R}_v + \mathcal{H}\mathbf{R}_x\mathcal{H}^*)^{-1} \quad (3.10)$$

$$= (\mathbf{R}_x^{-1} + \mathcal{H}^*\mathbf{R}_v^{-1}\mathcal{H})^{-1}\mathcal{H}^*\mathbf{R}_v^{-1} \quad (3.11)$$

A Figura 3.3 mostra o esquema TZ, onde os tamanhos das correspondentes matrizes são ilustradas através das formas dos blocos (alto ou largo).

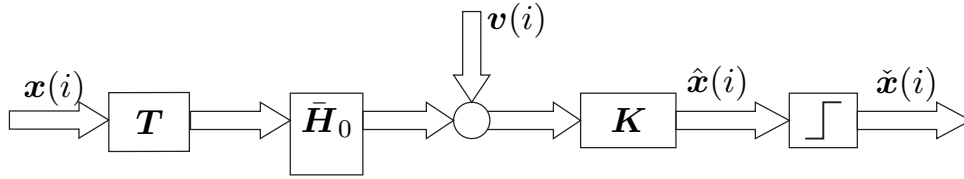


Figura 3.3: Equalização linear baseada em pré-codificador – caso TZ.

3.2.3 Método *Overlap-and-save* ou *Leading Zeros*

Na recepção, uma forma alternativa para eliminar a IBI consiste em reter uma parte do vetor transmitido $\mathbf{y}(i)$. Para isso, define-se a matriz do pós-codificador (*poscoder*) \mathbf{V} , de tamanho $M \times P$, da seguinte forma:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M & \mathbf{0}_{M,N-1} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Aplicando (3.12) em (3.5), temos que $\mathbf{V}\mathbf{H}_1 = \mathbf{0}$. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(i) &= \mathbf{V}\mathbf{y}(i) \quad (\textit{overlap-and-save}) \\ &= \mathbf{V}\mathbf{H}_0\mathbf{T}\mathbf{x}(i) + \mathbf{v}'(i) \\ &= \bar{\mathbf{H}}_0\bar{\mathbf{T}}\mathbf{x}(i) + \mathbf{v}'(i) \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2. RECEPTORES ÓTIMOS SEM IBI

onde a matriz $\bar{\mathbf{H}}_0$ neste caso é dada por :

$$\bar{\mathbf{H}}_0 = \begin{bmatrix} h(0) & h(1) & \cdots & h(N-1) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h(0) & \cdots & h(N-2) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & h(0) & \cdots & h(N-1) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Este procedimento é também conhecido como método *Leading Zeros-LZ*, e pode ser visto em [5], [20].

3.2.4 Receptor LZ ótimo

No caso LZ, dado o modelo em (3.13), a solução ótima para o problema de estimação linear abaixo,

$$\min_{\mathbf{K}} \mathbb{E} \|\mathbf{x}(i) - \mathbf{K}\mathbf{y}'(i)\|^2 \quad (3.15)$$

é dada por $\mathbf{K}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{xy'} \mathbf{R}_{y'}^{-1}$. Sendo $\mathcal{H} = \bar{\mathbf{H}}_0 \bar{\mathbf{T}}$, então $\mathbf{y}'(i) = \mathcal{H}\mathbf{x}(i) + \mathbf{v}'(i)$. Assim, a solução ótima em termos deste modelo é

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{opt}} &= \mathbf{R}_x \mathcal{H}^* (\mathbf{R}_{v'} + \mathcal{H} \mathbf{R}_x \mathcal{H}^*)^{-1} \\ &= (\mathbf{R}_x^{-1} + \mathcal{H}^* \mathbf{R}_{v'}^{-1} \mathcal{H})^{-1} \mathcal{H}^* \mathbf{R}_{v'}^{-1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

A Figura 3.4 mostra o esquema LZ, ilustrando os tamanhos das correspondentes matrizes, como no caso TZ.

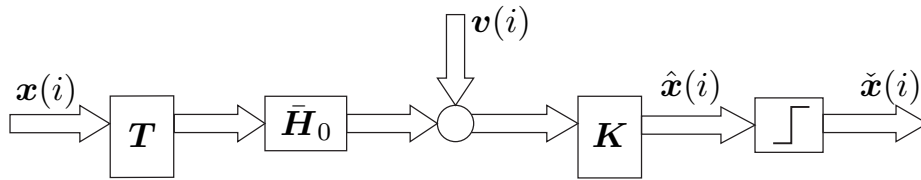


Figura 3.4: Equalização linear baseada em pré-codificador – caso LZ.

Deve-se ressaltar que nos dois esquemas TZ e LZ, foi assumido um pré-codificador fixo, onde o objetivo era a eliminação da IBI. Em ambos os casos, o MMSE resultante é dado por

$$\boxed{\text{MMSE} = (\mathbf{R}_x^{-1} + \mathcal{H}^* \mathbf{R}_{v'}^{-1} \mathcal{H})^{-1}} \quad (3.17)$$

3.3. DFE EM BLOCOS BASEADO NO ESQUEMA TZ

Existem ainda maneiras de otimizar o pré-codificador \mathbf{T} , tal que resultem em um MMSE menor, como apresentado em [5]. No entanto, isto não será abordado neste trabalho.

3.3 DFE em Blocos baseado no esquema TZ

O esquema geral do DFE em blocos baseado em pré-codificador é mostrado na Figura 3.5. O DFE é composto pelo filtro *feedforward*, representado pela matriz \mathbf{G} de tamanho $M \times P$, pelo dispositivo de decisão e pelo filtro de *feedback*, representado pela matriz \mathbf{B} de tamanho $M \times M$. O filtro *feedforward* é responsável pela eliminação da ISI entre os símbolos posteriores (futuros) dentro do mesmo bloco, enquanto que o filtro de *feedback* por eliminar a ISI entre os símbolos anteriores (passados). Primeiramente, vamos assumir que a matriz do pré-codificador é igual a identidade, $\mathbf{T} = \mathbf{I}$, e que $\bar{\mathbf{H}}_0$ é dado pela equação (3.8) para o esquema TZ.

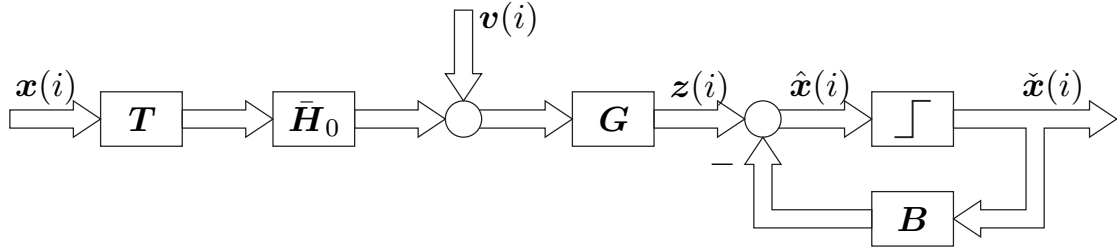


Figura 3.5: DFE em blocos baseado em pré-codificador.

Vamos definir os seguintes vetores de tamanho $M \times 1$: o vetor de saída do filtro *feedforward* $\mathbf{z}(i)$, o vetor de entrada do dispositivo de decisão $\hat{\mathbf{x}}(i)$, e o vetor da saída do dispositivo de decisão $\tilde{\mathbf{x}}(i)$, como sendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(i) &\triangleq \begin{bmatrix} z(iM) & z(iM-1) & \cdots & z(iM-M+1) \end{bmatrix}^T \\ \hat{\mathbf{x}}(i) &\triangleq \begin{bmatrix} \hat{x}(iM) & \hat{x}(iM-1) & \cdots & \hat{x}(iM-M+1) \end{bmatrix}^T \\ \tilde{\mathbf{x}}(i) &\triangleq \begin{bmatrix} x(iM) & x(iM-1) & \cdots & x(iM-M+1) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

A fim de simplificar o projeto do DFE em blocos, assume-se que as decisões na saída do detector são corretas, ou seja, $\tilde{\mathbf{x}}(i) = \hat{\mathbf{x}}(i)$. No próximo capítulo,

3.3. DFE EM BLOCOS BASEADO NO ESQUEMA TZ

será assumido que estas decisões podem ser incorretas, resultando na propagação dos erros de decisão através da realimentação. Neste caso, será realizado um novo projeto para o DFE em blocos, considerando tal condição.

Uma vez que o filtro de *feedback* $\mathbf{B}(z)$ possui apenas um coeficiente matricial, ou seja, $\mathbf{B}(z) = \mathbf{B}$. Nota-se que os possíveis erros na saída do dispositivo de decisão não serão propagados através dos blocos subseqüentes, mas apenas dentro de cada bloco. Além disso, a estrutura de \mathbf{B} deve ser tal que o caminho de realimentação possa ser realizável, o que significa que os símbolos devem ser estimados através de uma detecção sucessiva de símbolos (*successive cancellation*) [22], [6]. Para isso, impõe-se uma restrição na estrutura da matriz \mathbf{B} , onde esta deve ser estritamente triangular inferior. Este é o caso em que os símbolos do vetor $\tilde{\mathbf{x}}(i)$ são detectados seqüencialmente.

Neste método de detecção, o último símbolo do i -ésimo bloco, ou seja, $x(iM)$ é recuperado primeiro. Assim, a estimativa $\hat{x}(iM)$ é obtida através da primeira linha de \mathbf{B} e é removida de $\mathbf{z}(i)$, para que os símbolos restantes possam ser recuperados. Em seguida, o próximo símbolo a ser recuperado é o símbolo $x(iM - 1)$, onde a correspondente estimativa $\hat{x}(iM - 1)$ é removida de $\mathbf{z}(i)$. Este procedimento é repetido até que todos os símbolos do i -ésimo bloco sejam estimados.

Considerando-se o fato de que a ordem da detecção pode ser arbitrária, assume-se que o filtro de *feedback* ótimo é dado por:

$$\mathbf{B}_{\text{opt}} = \mathbf{J}^* \mathbf{B} \mathbf{J} \quad (3.18)$$

onde \mathbf{J} é uma matriz de permutação que possibilita uma ordem diferente de detecção em relação a detecção sucessiva (*successive cancellation*).

O sinal a ser estimado $\hat{\mathbf{x}}(i)$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(i) &= \mathbf{G} \mathbf{y}(i) - \mathbf{B}_{\text{opt}} \tilde{\mathbf{x}}(i) \\ &= \mathbf{G} \mathbf{y}(i) - \mathbf{J}^* \mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{x}(i) \\ &= \mathbf{G} \mathbf{y}(i) - \mathbf{J}^* \mathbf{B} \mathbf{x}'(i) \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde $\mathbf{x}'(i) = \mathbf{J} \mathbf{x}(i)$.

3.3. DFE EM BLOCOS BASEADO NO ESQUEMA TZ

Assim, concatenando as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{B} em uma única matriz \mathbf{K} , a minimização da função custo pode ser escrita como

$$\min_{\mathbf{K}} \mathbb{E} \left\| \mathbf{x}(i) - \underbrace{[\mathbf{G} \ \mathbf{J}^* \mathbf{B}]}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}(i) \\ -\mathbf{x}'(i) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \right\|^2. \quad (3.20)$$

Nota-se que, se multiplicarmos a equação acima por \mathbf{J} pela esquerda, a norma do erro não é alterada. Portanto, a equação acima pode ser expressa como

$$\min_{\mathbf{K}} \mathbb{E} \left\| \mathbf{J}\mathbf{x}(i) - \underbrace{[\mathbf{G}' \ \mathbf{B}]}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}(i) \\ -\mathbf{x}'(i) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \right\|^2. \quad (3.21)$$

onde $\mathbf{G}' = \mathbf{J}\mathbf{G}$.

Desta forma, observa-se que a solução ótima para este problema não possui mais a forma da solução *smoothing* dada pela equação (3.10), uma vez que a matriz \mathbf{B} é limitada a ter uma estrutura estritamente triangular inferior. Definindo $\mathbf{R}_{\mathbf{u}}$ como a matriz de covariância do vetor \mathbf{u} definido em (3.21), e $\mathbf{R}_{\mathbf{x}'\mathbf{u}}$ ($\mathbf{R}_{(\mathbf{J}\mathbf{x})\mathbf{u}}$) como a matriz de covariância cruzada do vetor \mathbf{u} e do vetor dos dados da entrada \mathbf{x}' , a solução desejada é a solução de *Wiener* para a seguinte equação [11]:

$$\{\mathbf{R}_{(\mathbf{J}\mathbf{x})\mathbf{u}} - \mathbf{K}_{\text{opt}}\mathbf{R}_{\mathbf{u}}\}_{\text{strict. lower}} = 0 \quad (3.22)$$

onde

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}} \triangleq \mathbb{E} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(i) \\ -\mathbf{J}\mathbf{x}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}^*(i) & -\mathbf{x}^*(i)\mathbf{J}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{y}} & -\mathbf{R}_{\mathbf{y}\mathbf{x}}\mathbf{J}^* \\ -\mathbf{J}\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{y}} & \mathbf{J}\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{J}^* \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

e

$$\mathbf{R}_{(\mathbf{J}\mathbf{x})\mathbf{u}} = \mathbb{E} \begin{bmatrix} \mathbf{J}\mathbf{x}(i)\mathbf{y}^*(i) & -\mathbf{J}\mathbf{x}(i)\mathbf{x}^*(i)\mathbf{J}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}\mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{y}} & -\mathbf{J}\mathbf{R}_{\mathbf{x}}\mathbf{J}^* \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

O operador $\{\cdot\}_{\text{strict. lower}}$ é tal que retém as equações normais correspondentes as entradas diferentes de zero de \mathbf{K} . Para resolver o problema acima, podemos

3.3. DFE EM BLOCOS BASEADO NO ESQUEMA TZ

recorrer ao procedimento algébrico semelhante ao usado por *Wiener* em sua famosa solução.

Usando o modelo da saída do canal da equação (3.7), onde $\mathcal{H} = \bar{\mathbf{H}}_0 \bar{\mathbf{T}}$, e assumindo que $\{\mathbf{x}(i)\}$ é i.i.d, pode-se obter as seguintes expressões para $\{\mathbf{R}_y, \mathbf{R}_{yx}\}$:

$$\mathbf{R}_y = \mathbb{E} \mathbf{y}(i) \mathbf{y}^*(i) = \mathbf{R}_v^{(P)} + \mathcal{H} \mathcal{H}^* \quad (3.25)$$

$$\mathbf{R}_{yx} = \mathcal{H} \mathbf{x}(i) \mathbf{x}^*(i) = \mathcal{H} \quad (3.26)$$

A seguir, define-se uma matriz triangular superior \mathbf{A} , tal que, usando a equação (3.22), podemos escrever

$$\mathbf{K}_{\text{opt}} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_v^{(P)} + \mathcal{H} \mathcal{H}^* & -\mathcal{H} \mathbf{J}^* \\ -\mathbf{J} \mathcal{H}^* & \mathbf{J} \mathbf{J}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{J} \mathcal{H}^* & -\mathbf{J} \mathbf{J}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

onde nota-se que $\mathbf{J} \mathbf{J}^* = \mathbf{J}^* \mathbf{J} = \mathbf{I}$.

Considere a fatorização de *Cholesky* da seguinte forma $\mathbf{R}_u = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^*$. Além disso, vamos definir $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \mathbf{J}^*$. A equação (3.27) pode então ser escrita como:

$$\mathbf{K}_{\text{opt}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathcal{H}' \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_v^{(P)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathcal{H}'^* & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}^*} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{H}'^* & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Substituindo $\mathbf{K} = [\mathbf{G}' \mathbf{B}]$ em (3.28), e multiplicando a mesma por \mathbf{U}^{-*} pela direita, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}' \mathbf{R}_v & (\mathbf{B} - \mathbf{G}' \mathcal{H}') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathcal{H}'^* & \mathbf{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

onde retiramos o índice (P) da matriz \mathbf{R}_v por simplicidade de notação

Desta forma, obtemos as seguintes relações para os filtros \mathbf{G}' e \mathbf{B} :

$$\begin{cases} \mathbf{G}' = \mathbf{A} \mathcal{H}'^* \mathbf{R}_v^{-1} \\ \mathbf{B} = \mathbf{G}' \mathcal{H}' + \mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{A} (\mathbf{I} + \mathcal{H}'^* \mathbf{R}_v^{-1} \mathcal{H}') - \mathbf{I} \end{cases} \quad (3.30)$$

Definindo

$$\mathbf{P}' \triangleq (\mathbf{J} \mathbf{J}^* + \mathbf{J} \mathcal{H}^* \mathbf{R}_v^{-1} \mathcal{H} \mathbf{J}^*)^{-1} = \mathbf{J} \mathbf{P} \mathbf{J}^* \quad (3.31)$$

3.3. DFE EM BLOCOS BASEADO NO ESQUEMA TZ

onde \mathbf{P} é definido como $\mathbf{P} = (\mathbf{I} + \mathcal{H}'^* \mathbf{R}_v^{-1} \mathcal{H}')^{-1}$, podemos obter facilmente a expressão para \mathbf{G}' . Para isso, achamos o valor de \mathbf{A} pela expressão de \mathbf{B} , e substituindo na expressão (3.30). Portanto,

$$\mathbf{G}' = (\mathbf{B} + \mathbf{I}) \mathbf{P}' \mathcal{H}'^* \mathbf{R}_v^{-1}. \quad (3.32)$$

Considere a fatorização de *Cholesky* da seguinte forma:

$$\mathbf{P}' \triangleq \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{L}}^* = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^* \quad (3.33)$$

onde $\bar{\mathbf{L}}$ é triangular inferior, e \mathbf{D} é diagonal. Substituindo (3.33) em (3.30), temos

$$\mathbf{B} + \mathbf{I} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{L}}^{-*} \bar{\mathbf{L}}^{-1}. \quad (3.34)$$

Assim, multiplicando os dois lados da expressão acima por $\bar{\mathbf{L}}$ pela direita, obtém-se

$$\underbrace{\mathbf{B} \bar{\mathbf{L}}}_{\text{strict. lower}} + \underbrace{\bar{\mathbf{L}}}_{\text{lower}} = \underbrace{\mathbf{A} \bar{\mathbf{L}}^{-*}}_{\text{upper}} \quad (3.35)$$

Uma vez que o produto $\mathbf{B} \bar{\mathbf{L}}$ é uma matriz estritamente triangular inferior, e que $\mathbf{A} \bar{\mathbf{L}}^{-*}$ é triangular superior, aplicando-se o operador $\{\cdot\}_{\text{upper}}$ na expressão acima, temos

$$\mathbf{A} \bar{\mathbf{L}}^{-*} = \{\bar{\mathbf{L}}\}_{\text{upper}} = \mathbf{D}^{1/2} \quad (3.36)$$

Logo,

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}^{1/2} \bar{\mathbf{L}}^* = \mathbf{D} \mathbf{L}^* \quad (3.37)$$

o que resulta em

$$\mathbf{G}' = \mathbf{D} \mathbf{L}^* \mathcal{H}'^* \mathbf{R}_v^{-1}. \quad (3.38)$$

Portanto, a matriz do filtro *feedforward* ótimo é dada por:

$$\boxed{\mathbf{G}_{\text{opt}} = \mathbf{J}^* \mathbf{D} \mathbf{L}^* \mathcal{H}'^* \mathbf{R}_v^{-1}} \quad (3.39)$$

Com o valor de \mathbf{A} em (3.37), podemos obter uma expressão para \mathbf{B} , através de (3.30), envolvendo a matriz \mathbf{P} . No entanto, observa-se que existe uma expressão

3.3. DFE EM BLOCOS BASEADO NO ESQUEMA TZ

mais adequada para \mathbf{B} em termos do fator de *Cholesky* definido anteriormente. Esta expressão pode ser obtida substituindo (3.37) em (3.35), resultando em

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{L}^{-1} - \mathbf{I}} \quad (3.40)$$

ou

$$\boxed{\mathbf{B}_{\text{opt}} = \mathbf{J}^* \mathbf{L}^{-1} \mathbf{J} - \mathbf{I}} \quad (3.41)$$

Além disso, dado o filtro ótimo \mathbf{B}_{opt} , a função custo definida em (3.21) pode ser escrita como:

$$\min_{\mathbf{K}} E \left\| (\mathbf{I} + \mathbf{B}) \mathbf{J} \mathbf{x}(i) - \mathbf{G}' \mathbf{y}(i) \right\|^2. \quad (3.42)$$

O MSE mínimo obtido através da minimização de (3.42) em relação a \mathbf{G}' , é dado por:

$$\begin{aligned} \text{MMSE} &= \text{tr} \left\{ \mathbf{R}_{(\mathbf{I}+\mathbf{B})\mathbf{J}\mathbf{x}(i)} - \mathbf{G}'_{\text{opt}} \mathbf{R}_{\mathbf{y}(i),(\mathbf{I}+\mathbf{B})\mathbf{J}\mathbf{x}(i)} \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ (\mathbf{I} + \mathbf{B})(\mathbf{I} + \mathbf{B})^* - (\mathbf{B} + \mathbf{I}) \mathbf{P}' \mathcal{H}'^* \mathbf{R}_v^{-1} \mathcal{H}' (\mathbf{I} + \mathbf{B})^* \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ (\mathbf{I} + \mathbf{B}) \mathbf{P}' (\mathbf{I} + \mathbf{B})^* \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \mathbf{D} \right\} \end{aligned} \quad (3.43)$$

As matrizes $\{\mathbf{L}, \mathbf{D}\}$ possuem uma importante interpretação para seu cálculo rápido. Mais especificamente, podemos escrever \mathbf{L} como:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{w}_{M-1}^f & \mathbf{w}_{M-2}^f & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

onde o i -ésimo vetor $\{\mathbf{w}_i^f\}$, para $i = 0, \dots, M-1$, corresponde a predição ótima dos mínimos quadrados da i -ésima coluna da matriz \mathcal{H} , baseada nas colunas de ordem inferiores restantes [4]. Os correspondentes custos mínimos $\{\xi_i^f\}$ dessas predições são representados em termos da matriz diagonal abaixo:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1/\xi_{M-1}^f & & & \\ & 1/\xi_{M-2}^f & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\xi_0^f \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

3.3. DFE EM BLOCOS BASEADO NO ESQUEMA TZ

Dessa forma, a equação (3.43) para o MMSE pode ser escrita da seguinte forma:

$$\text{MMSE} = \sum_{i=0}^{M-1} 1/\xi_i^f \quad (3.46)$$

Da expressão acima para o MMSE, observa-se que estes valores mudam de acordo com a ordem de detecção assumida no dispositivo de decisão. Cada nova ordem de detecção pode ser interpretada como uma nova reorganização das colunas da matriz \mathbf{H}_0 , resultando assim em diferentes conjuntos de custos mínimos, dados por ξ_i^f . Portanto, realizando a soma de tais custos mínimos através da equação (3.46) pode-se chegar ao menor valor do MSE do que o obtido através ordem de detecção sucessiva (*successive cancellation*), que é executada escolhendo $\mathbf{J} = \mathbf{I}$.

Vamos nos referir a ordem sucessiva de detecção dos símbolos do primeiro ao último elemento do vetor, como sendo a ordem “direta” de detecção.

3.3.1 Relação entre a ordem de detecção e um pré-codificador $\mathbf{T} = \mathbf{J}$

Vamos assumir agora, que não será utilizada uma ordem de detecção arbitrária, mas sim a detecção direta dos elementos do vetor de saída. Dessa forma, nas equações (3.39) e (3.41), substituímos $\mathbf{J} = \mathbf{I}$.

Além disso, vamos assumir que o pré-codificador \mathbf{T} pode ser escolhido arbitrariamente. Neste caso, o MMSE é dado por

$$\begin{aligned} \text{MMSE} &= \text{tr} \left\{ \mathbf{R}_{(\mathbf{I}+\mathbf{B})\mathbf{x}(i)} - \mathbf{G}_{\text{opt}} \mathbf{R}_{\mathbf{y}(i),(\mathbf{I}+\mathbf{B})\mathbf{x}(i)} \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ (\mathbf{I} + \mathbf{B})(\mathbf{I} + \mathbf{B})^* - (\mathbf{I} + \mathbf{B})\mathbf{P}\mathbf{T}^* \mathcal{H}_0^* \mathbf{R}_v^{-1} \mathcal{H}_0 \mathbf{T}(\mathbf{I} + \mathbf{B})^* \right\} \end{aligned}$$

Escolhendo-se $\mathbf{T} = \mathbf{J}$, podemos observar que recaímos na mesma expressão obtida quando da ordem de detecção arbitrária da equação (3.43), ou seja,

$$\begin{aligned} \text{MMSE} &= \text{tr} \left\{ (\mathbf{I} + \mathbf{B})\mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{B})^* \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ \mathbf{D} \right\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.3. DFE EM BLOCOS BASEADO NO ESQUEMA TZ

Comparando as equações (3.43) e (3.47), observa-se que o MMSE nos dois casos são iguais. Ou seja, segundo o critério MSE, o fato de se utilizar um pré-codificador $\mathbf{T} = \mathbf{J}$ é equivalente a se realizar a detecção arbitrária, assumindo-se que as decisões são corretas.

Na Figura 3.6 realizamos uma comparação entre as duas situações acima, assumindo-se uma ordem de detecção arbitrária com $\mathbf{T} = \mathbf{I}$, e outra assumindo-se uma detecção direta com $\mathbf{T} = \mathbf{J}$. Esta comparação foi feita utilizando-se os esquemas de modulação BPSK e QPSK.

O canal utilizado possui a seguinte função de transferência:

$$C(z) = (1 - 0.8z^{-1})(1 - 1.0z^{-1})(1 - 0.9e^{j9\pi/20}z^{-1})(1 - 1.1e^{j9\pi/20}z^{-1}) \quad (3.48)$$

Em todas as simulações realizadas neste trabalho, a BER foi calculada através de 30 simulações de Monte Carlo.

Podemos observar que as curvas da BER nos dois casos são similares. A Figura 3.7 ilustra a comparação entre a detecção direta e a detecção arbitrária, usando o mesmo pré-codificador $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ nos dois casos. Esta comparação foi feita utilizando-se a modulação QPSK.

Portanto, observamos que com o aumento da SNR, a melhora de desempenho para o caso da detecção arbitrária fica mais evidente.

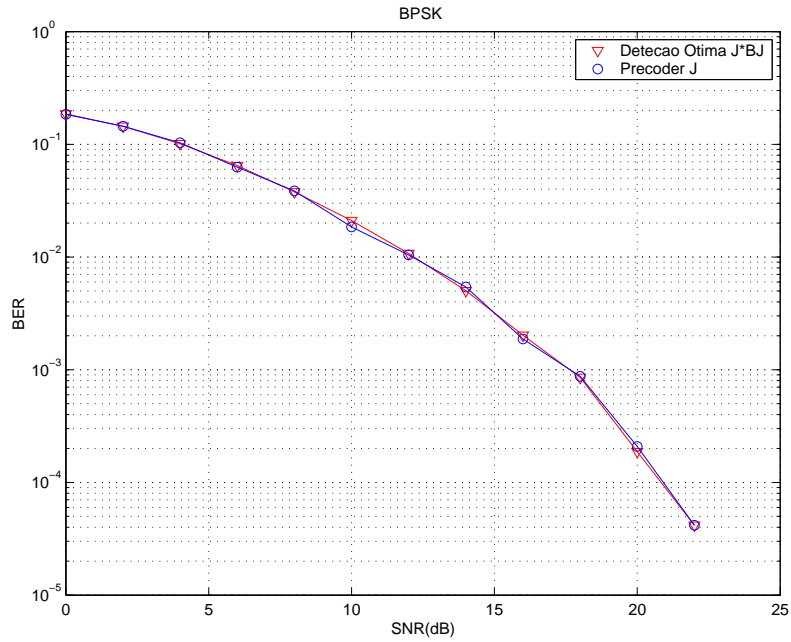
3.3.2 DFE em Blocos \times escalar

Nesta seção vamos fazer uma comparação entre o desempenho do DFE escalar e o DFE em blocos, considerando a mesma quantidade de símbolos transmitidos.

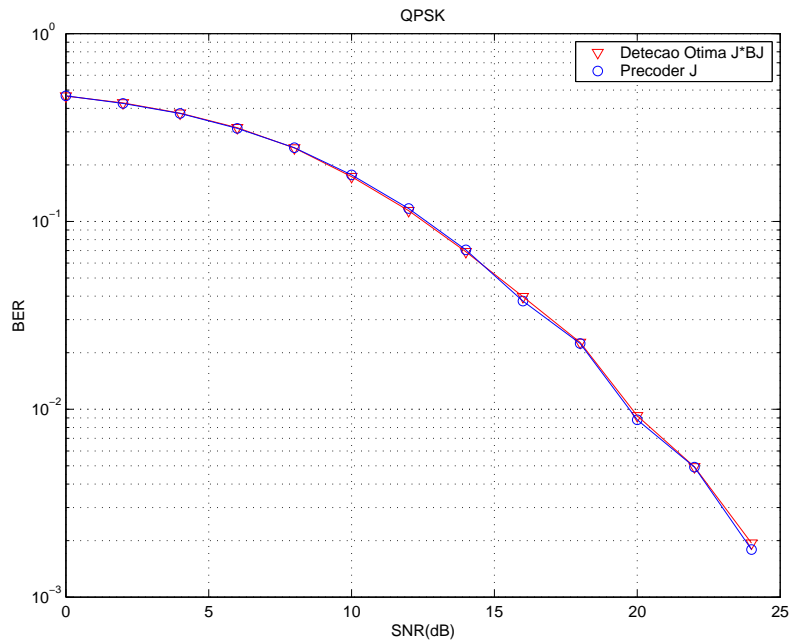
Daqui por diante, vamos assumir que a detecção será na forma direta, ou seja, o \mathbf{J} na detecção arbitrária será considerado $\mathbf{J} = \mathbf{I}$.

A Figura 3.8 apresenta os resultados obtidos em termos da BER \times SNR. Na equalização em blocos, foi utilizado o pré-codificador $\mathbf{T} = \mathbf{I}$, sendo o tamanho do bloco transmitido M igual a 32, para os esquemas de modulação BPSK e QPSK.

3.3. DFE EM BLOCOS BASEADO NO ESQUEMA TZ



(a)



(b)

Figura 3.6: Comparação entre a utilização da detecção arbitrária ($\mathbf{J}^* \mathbf{B} \mathbf{J} = \mathbf{B}_{\text{opt}}$) e a utilização de um pré-codificador \mathbf{J} , para BPSK (a) e para QPSK (b)

O canal utilizado nestas simulações, possui a seguinte função de transferência:

$$C(z) = (1 - 0.9z^{-1})(1 - 0.7e^{j2\pi 0.256} z^{-1})(1 - 0.4e^{j2\pi 0.141} z^{-1}) \quad (3.49)$$

3.4. CONCLUSÕES

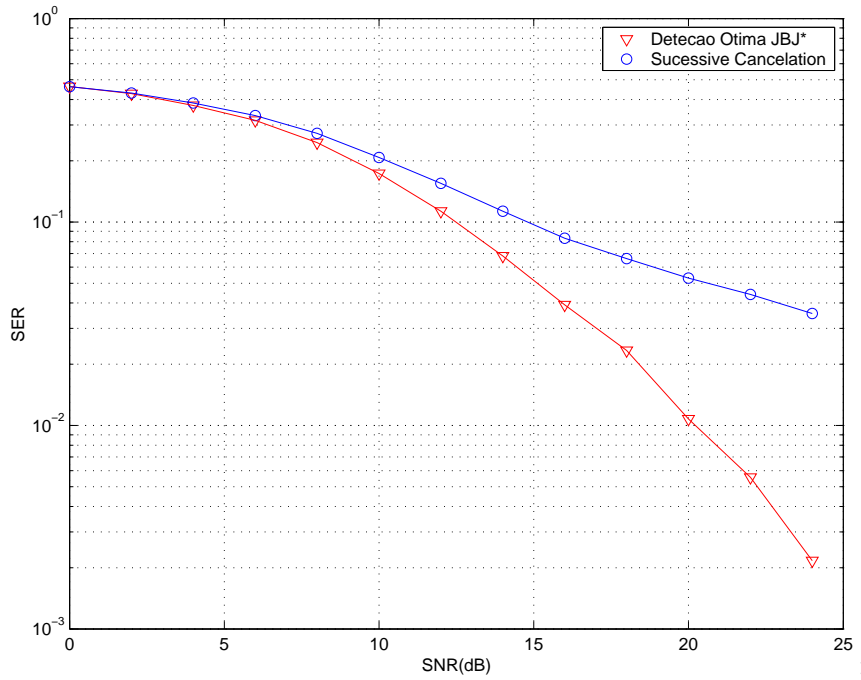


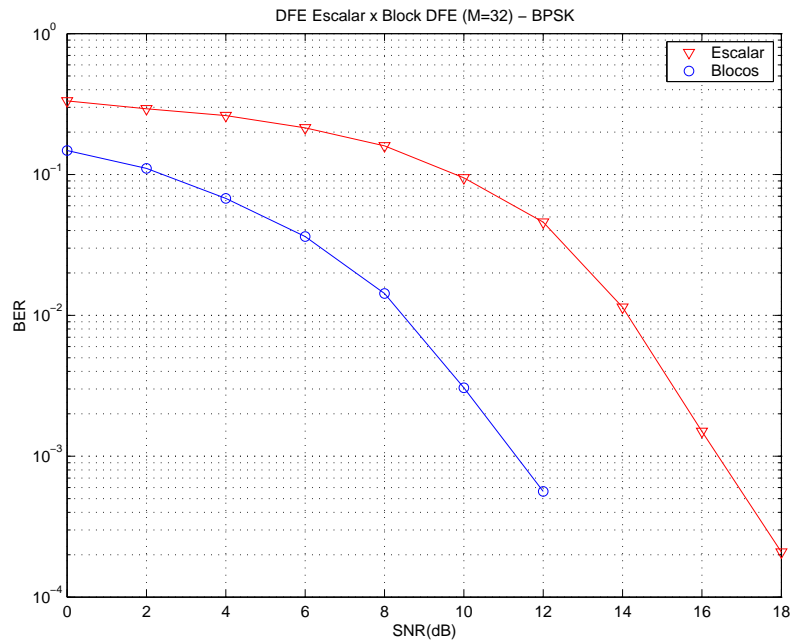
Figura 3.7: Comparação entre uma detecção arbitrária ($\mathbf{J}^* \mathbf{B} \mathbf{J}$) e a detecção na forma direta (*Successive Cancellation*), utilizando o mesmo pré-codificador \mathbf{T} , para o caso QPSK.

Portanto, podemos observar que o DFE em blocos apresenta um desempenho superior ao DFE escalar. Note, entretanto, que no segundo caso não há introdução de redundância, o que significa uma eficiência maior em termos de transmissão de informação útil.

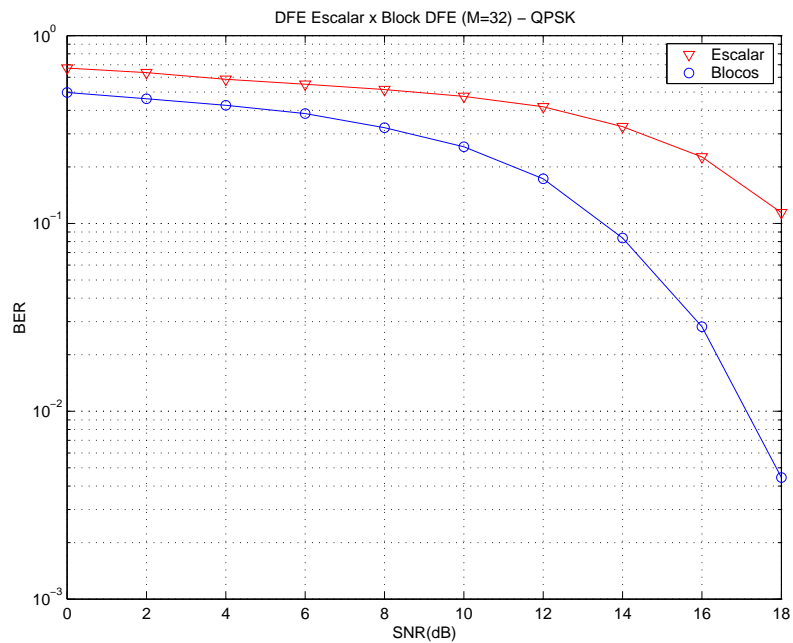
3.4 Conclusões

A formulação para o DFE em blocos foi apresentada neste capítulo. Observamos que a utilização de uma forma de detecção arbitrária, utilizando um pré-codificador $\mathbf{T} = \mathbf{I}$, é equivalente a utilizarmos um pré-codificador $\mathbf{T} = \mathbf{J}$, escolhido arbitrariamente, assumindo-se uma detecção direta. Além disso, também comparamos a utilização da detecção arbitrária e da detecção sucessiva, para um mesmo pré-codificador \mathbf{T} . Neste caso, observamos que com o aumento da SNR, a detecção arbitrária apresenta melhor desempenho que a detecção sucessiva. Por

3.4. CONCLUSÕES



(a)



(b)

Figura 3.8: Comparação entre DFE escalar e DFE em blocos para BPSK (a) e para QPSK (b).

fim, avaliamos o desempenho do DFE em blocos em comparação ao DFE escalar, onde observamos que DFE em blocos apresenta um melhor desempenho em relação ao escalar.

Capítulo 4

DFE em Blocos com Restrição

Neste capítulo vamos estender o conceito de regularização, normalmente utilizado no DFE escalar, ao DFE em blocos estudado no Capítulo 3.

4.1 Formulação do Problema

O DFE utiliza as decisões dos símbolos anteriores para encontrar uma estimativa da decisão do símbolo atual, e então subtraí-la do sinal recebido. Caso haja algum erro na identificação de um símbolo pelo detector, isto causará uma série de decisões incorretas nos símbolos subseqüentes, isto é, haverá a propagação do erro.

Uma forma de reduzir o efeito da propagação do erro, é introduzir apropriadas restrições ao filtro de *feedback*, tais como a limitação da energia ou da magnitude deste filtro. Isto foi feito para o DFE escalar em [8] e [9].

O DFE escalar com restrição na energia do filtro de *feedback* modela o erro na decisão através da introdução de uma fonte de ruído aditivo na saída do detector. Neste caso, a função custo a ser minimizada é dada por [8], [9]:

$$\xi = \mathbf{E} |x(n - \delta) - \hat{x}(n - \delta)|^2 + b^* A b \quad (4.1)$$

onde A é uma matriz diagonal, que representa uma restrição à energia do filtro de *feedback*. Esta restrição é dada por $A = \text{diag}\{l_0, l_1, \dots, l_{L-1}\}$, onde os elementos

4.1. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

$\{l_0, l_1, \dots, l_{L-1}\}$ representam uma restrição de magnitude para cada *tap* do filtro. Normalmente, assume-se que os valores destas restrições são iguais para todos os *taps*.

Por conseqüência, temos que o desempenho do DFE escalar com restrição apresenta um compromisso entre a propagação de erro e a otimização das restrições. Isto porque estas restrições devem ser ponderadas adequadamente, uma vez que minimizando corretamente a energia de B , garantimos que o erro não será amplificado por este filtro.

Neste trabalho, vamos estender o conceito de regularização para o caso do DFE em blocos estudado anteriormente [4]. As decisões erradas na saída do detector podem ser modeladas por um vetor $\mathbf{r}(i)$, representando uma fonte de ruído adicionada ao vetor de saída do dispositivo $\hat{\mathbf{x}}(i)$. Isto é ilustrado na Figura 4.1. Seja a potência deste ruído dada por $\mathbf{R}_r = \Gamma$. Assim, o ruído na saída do filtro B , denominado por $\mathbf{r}'(i)$, tem potência igual a

$$\mathbf{R}_{r'} = \mathbb{E}(\mathbf{r}'\mathbf{r}'^*) = \mathbf{B}\Gamma\mathbf{B}^* \quad (4.2)$$

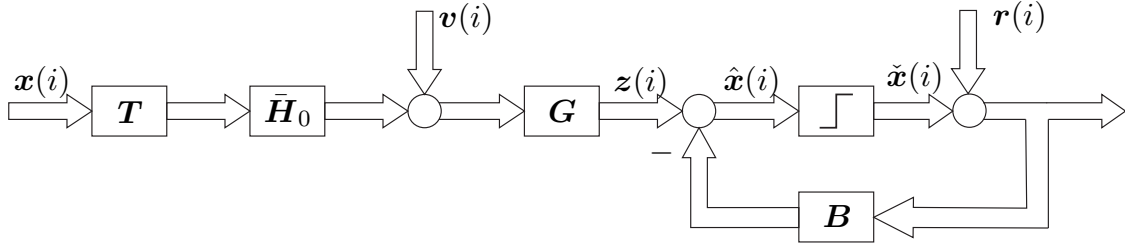


Figura 4.1: DFE em blocos com restrição.

Dessa forma, para este modelo, a função custo em (3.20), considerando $\mathbf{J} = \mathbf{I}$, é dada por:

$$\min_{\mathbf{K}} \mathbb{E} \left\| \mathbf{x}(i) - [\mathbf{G} \ \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{y}(i) \\ -\mathbf{x}(i) \end{bmatrix} + \mathbf{r}'(i) \right\|^2 \quad (4.3)$$

Assumindo que as fontes de ruído são descorrelacionadas, a função custo

4.2. MINIMIZAÇÃO EM RELAÇÃO A $\{G, B\}$

acima pode ser escrita como

$$\min_{\mathbf{K}} E \left\| \mathbf{x}(i) - [\mathbf{G} \ \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{y}(i) \\ -\mathbf{x}(i) \end{bmatrix} \right\|^2 + \text{tr}(\mathbf{B}\Gamma\mathbf{B}^*) \quad (4.4)$$

Vamos introduzir a norma de *Frobenius* [14], que é definida como:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} |a_{ij}|^2 = \text{tr}(A^*A) \quad (4.5)$$

onde $A = [a_{ij}]$ é uma determinada matriz de tamanho $n \times m$.

Aplicando este conceito a expressão (4.4), tem-se que $\text{tr}(\mathbf{B}\Gamma\mathbf{B}^*) = \|\Gamma^{1/2}\mathbf{B}^*\|_F^2$. Portanto, a função custo pode ser escrita de forma equivalente como

$$\min_{\mathbf{K}} E \left\| \mathbf{x}(i) - [\mathbf{G} \ \mathbf{B}] \begin{bmatrix} \mathbf{y}(i) \\ -\mathbf{x}(i) \end{bmatrix} \right\|^2 + \|\Gamma^{1/2}\mathbf{B}^*\|^2 \quad (4.6)$$

ou

$$\min_{\mathbf{K}} E \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}(i) & 0 \end{bmatrix} - \underbrace{[\mathbf{G} \ \mathbf{B}]}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}(i) & 0 \\ -\mathbf{x}(i) & \Gamma^{1/2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \right\|^2 \quad (4.7)$$

4.2 Minimização em relação a $\{G, B\}$

Nosso objetivo é encontrar a solução para o problema de estimação linear regularizado dado pela equação acima (4.7). Para isso, podemos proceder de forma análoga ao caso de estimação linear não-regularizado, descrito no capítulo anterior. Definindo a matriz \mathbf{A} como na Seção 3.3, obtemos a expressão para \mathbf{K}_{opt} , tal que

$$\mathbf{K}_{\text{opt}} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_v^{(P)} + \mathcal{H}\mathcal{H}^* & -\mathcal{H} \\ -\mathcal{H}^* & \mathbf{Q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{H}^* & -\mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

onde definimos a matriz \mathbf{Q} da expressão acima, como sendo $\mathbf{Q} \triangleq \mathbf{I} + \Gamma$.

4.2. MINIMIZAÇÃO EM RELAÇÃO A $\{G, B\}$

Utilizando a mesma fatorização de matrizes em blocos do capítulo anterior, a equação (4.8) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{opt}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathcal{H}\mathbf{Q}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R}_v^{(P)} + \mathcal{H}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1})\mathcal{H}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q}^{-1}\mathcal{H}^* & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}^*} \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{H}^* & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Multiplicando os dois lados de (4.9) por \mathbf{U}^{-*} , e substituindo $\mathbf{K} = [\mathbf{G} \ \mathbf{B}]$ nesta, temos que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{R}_v + \mathcal{H}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1})\mathcal{H}^*) & \mathbf{B}\mathbf{Q} - \mathbf{G}\mathcal{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1}\mathcal{H}^* & \mathbf{A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1})\mathcal{H}^* & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

onde, como antes, retiramos o índice (P) de \mathbf{R}_v por simplicidade de notação.

Obtemos então as seguintes relações para os filtros \mathbf{G} e \mathbf{B} :

$$\begin{cases} \mathbf{G} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1})\mathcal{H}^* [\mathbf{R}_v + \mathcal{H}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1})\mathcal{H}^*]^{-1} \\ \mathbf{B} = (\mathbf{G}\mathcal{H} + \mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{Q}^{-1} \end{cases} \quad (4.11)$$

Verifica-se que para tornar a implementação mais eficiente, deve-se encontrar uma solução mais simples para estes filtros. Para isso, é preciso fazermos algumas manipulações nestas expressões, procedendo de forma similar a Seção 3.3. Antes disso, vamos adotar uma notação mais compacta para as expressões acima, definindo as seguintes matrizes:

$$\mathbf{X} \triangleq (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1})^{-1} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{A}' \triangleq \mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{X}^{-1} + \mathbf{A}\mathbf{Q}^{-1} \quad (4.13)$$

Com isso as expressões da equação (4.11), podem ser escritas como

$$\begin{cases} \mathbf{G} = \mathbf{A}'\mathcal{H}^* [\mathbf{R}_v + \mathcal{H}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{-1})\mathcal{H}^*]^{-1} \\ \mathbf{B} = \mathbf{G}\mathcal{H}\mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{A}' - \mathbf{I} \end{cases} \quad (4.14)$$

Nota-se que de forma análoga a derivação da Seção 3.3, a matriz \mathbf{A}' é triangular superior. Assim, observamos que a matriz \mathbf{G} pode ser escrita de forma

4.2. MINIMIZAÇÃO EM RELAÇÃO A $\{G, B\}$

equivalente como

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}' \mathbf{X} \mathbf{X}^{-1} \mathcal{H}^* (\mathbf{R}_v + \mathcal{H} \mathbf{X}^{-1} \mathcal{H}^*)^{-1} \quad (4.15)$$

$$= \mathbf{A}' \mathbf{X} (\mathbf{X} + \mathcal{H}^* \mathbf{R}_v^{-1} \mathcal{H})^{-1} \mathcal{H}^* \mathbf{R}_v^{-1} \quad (4.16)$$

onde a equação (4.16) é obtida pelo Lema de inversão de matrizes aplicada a equação (4.15) [11]. Dessa forma, definindo

$$\mathbf{P} \triangleq (\mathbf{X} + \mathcal{H}^* \mathbf{R}_v^{-1} \mathcal{H})^{-1} \quad (4.17)$$

temos a seguinte expressão para \mathbf{G} :

$$\boxed{\mathbf{G} = \mathbf{A}' \mathbf{X} \mathbf{P} \mathcal{H}^* \mathbf{R}_v^{-1}} \quad (4.18)$$

Substituindo a equação (4.18) na expressão de \mathbf{B} em (4.14), temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{A}' \mathbf{X} \underbrace{\mathbf{P} \mathcal{H}^* \mathbf{R}_v^{-1} \mathcal{H}}_{\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{X}} \mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{A}' - \mathbf{I} \\ &= \mathbf{A}' [\mathbf{X} \mathbf{P} (\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{X}) \mathbf{Q}^{-1} + \mathbf{I}] - \mathbf{I} \\ &= \mathbf{A}' [\mathbf{X} + \mathbf{Q} - \mathbf{X} \mathbf{P} \mathbf{X}] \mathbf{Q}^{-1} - \mathbf{I} \\ &= \mathbf{A}' [\mathbf{S} - \mathbf{X} \mathbf{P} \mathbf{X}] \mathbf{Q}^{-1} - \mathbf{I} \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde definimos ainda por simplicidade, a matriz $\mathbf{S} \triangleq \mathbf{X} + \mathbf{Q}$. Assim, a equação (4.19) pode ser escrita da seguinte forma:

$$(\mathbf{B} + \mathbf{I}) \mathbf{Q} = \mathbf{A}' [\mathbf{S} - \mathbf{X} \mathbf{P} \mathbf{X}] \quad (4.20)$$

Como no caso sem restrição, queremos encontrar uma fatorização a qual resulte em um método rápido para se calcular os filtros \mathbf{G} e \mathbf{B} . Uma possível solução pode ser obtida utilizando-se a seguinte fatorização de *Cholesky*:

$$\mathbf{P}_x \triangleq [\mathbf{S} - \mathbf{X} \mathbf{P} \mathbf{X}] = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^* = \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^* \quad (4.21)$$

onde \mathbf{U} é triangular superior, e \mathbf{D} diagonal. Logo, podemos escrever (4.20) como

$$\underbrace{\mathbf{B} \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{U}}^{-*}}_{\text{strict. lower}} + \underbrace{\mathbf{Q} \bar{\mathbf{U}}^{-*}}_{\text{lower}} = \underbrace{\mathbf{A}' \bar{\mathbf{U}}}_{\text{upper}} \quad (4.22)$$

4.3. MMSE RESULTANTE

Pela relação acima tem-se que o produto $BQ\bar{U}^{-*}$ é uma matriz estritamente triangular inferior, o produto $Q\bar{U}^{-*}$ é triangular inferior e que $A'\bar{U}$ é triangular superior. Assim, aplicando o operador $\{\cdot\}_{\text{upper}}$, na expressão acima, temos que

$$A'\bar{U} = \left\{ Q\bar{U}^{-*} \right\}_{\text{upper}} = QD^{-1/2} \quad (4.23)$$

de forma que A' é dada por

$$A' = QD^{-1/2}\bar{U}^{-1} = QD^{-1}U^{-1} \quad (4.24)$$

Substituindo A' em (4.18), temos

$$\begin{aligned} G &= QD^{-1}U^{-1}XP\mathcal{H}^*R_v^{-1} \\ &= QD^{-1}U^{-1}XPXX^{-1}\mathcal{H}^*R_v^{-1} \\ &= QD^{-1}U^{-1}(S - UDU^*)X^{-1}\mathcal{H}^*R_v^{-1} \\ &= Q[D^{-1}U^{-1}SX^{-1} - U^*X^{-1}]\mathcal{H}^*R_v^{-1} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Reescrevendo (4.25) em função de $X = (I - Q)^{-1}$, verificamos que a matriz do filtro *feedforward* é dada por:

$$\boxed{G_{\text{opt}} = Q[D^{-1}U^{-1}Q - U^*(I - Q^{-1})]\mathcal{H}^*R_v^{-1}} \quad (4.26)$$

De forma similar, substituindo (4.24) em (4.22), temos que a matriz do filtro de *feedback* ótimo B , é dada por:

$$\boxed{B_{\text{opt}} = QU^*Q^{-1} - I} \quad (4.27)$$

4.3 MMSE resultante

O MMSE resultante pode ser calculado, fixando-se o valor ótimo de B em (4.27), e calculando-se o MSE mínimo em relação ao filtro G . Neste caso, o custo

4.4. SIMULAÇÕES

é escrito como

$$\begin{aligned}
\text{MMSE} &= \text{tr} \left\{ \mathbf{R}_{[(\mathbf{I}+\mathbf{B})\mathbf{x}^{(i)} \ -\mathbf{B}\Gamma^{1/2}]} - \mathbf{G}_{\text{opt}} \mathbf{R}_{[y^{(i)} \ 0],[(\mathbf{I}+\mathbf{B})\mathbf{x}^{(i)} \ -\mathbf{B}\Gamma^{1/2}]} \right\} \\
&= \text{tr} \left\{ (\mathbf{I} + \mathbf{B})(\mathbf{I} + \mathbf{B})^* + \mathbf{B}\Gamma\mathbf{B}^* - (\mathbf{B} + \mathbf{I})\mathbf{Q}\mathbf{P}_x^{-1}\mathbf{X}\mathbf{P}\mathcal{H}^*\mathbf{R}_v^{-1}\mathcal{H}(\mathbf{I} + \mathbf{B})^* \right\} \\
&= \text{tr} \left\{ (\mathbf{I} + \mathbf{B}) \left[\mathbf{I} - \mathbf{Q}\mathbf{P}_x^{-1}\mathbf{X}\mathbf{P} \underbrace{\mathcal{H}^*\mathbf{R}_v^{-1}\mathcal{H}}_{\mathbf{P}^{-1}-\mathbf{X}} \right] (\mathbf{I} + \mathbf{B})^* + \mathbf{B}\Gamma\mathbf{B}^* \right\} \\
&= \text{tr} \left\{ (\mathbf{I} + \mathbf{B}) \left[\underbrace{\mathbf{I} - \mathbf{Q}}_{-\Gamma} + \mathbf{Q}\mathbf{P}_x^{-1}\mathbf{Q} \right] (\mathbf{I} + \mathbf{B})^* + \mathbf{B}\Gamma\mathbf{B}^* \right\} \tag{4.28}
\end{aligned}$$

onde o MSE mínimo é dado por (vide equação (3.43)).

Da equação (4.27), temos que $(\mathbf{B} + \mathbf{I})\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{U}^*$, além disso, utilizando-se a fatorização de *Cholesky* (4.21), e expandindo (4.28), obtemos:

$$\text{MMSE} = \text{tr}\{\mathbf{B}\Gamma\mathbf{B}^*\} - \text{tr}\{\Gamma\} - \text{tr}\{\Gamma\mathbf{B}^*\} - \text{tr}\{\mathbf{B}\Gamma\} - \text{tr}\{\mathbf{B}\Gamma\mathbf{B}^*\} + \text{tr}\{(\mathbf{I}+\Gamma)\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{I}+\Gamma)\} \tag{4.29}$$

Note que como \mathbf{B} é triangular inferior, o terceiro e o quarto termo do lado direito da expressão acima desaparecem, resultando em

$$\text{MMSE} = \text{tr}\{(\mathbf{I} + \Gamma)\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{I} + \Gamma) - \Gamma\} \tag{4.30}$$

4.4 Simulações

Nesta seção será realizada uma comparação em termos de BER, entre o DFE em blocos sem restrição e o DFE em blocos com restrição apresentado. Serão mostrados os resultados das simulações realizadas utilizando vários valores para o parâmetro de regularização, ou seja, para a variância do ruído $\mathbf{r}'(i)$ na saída do filtro \mathbf{B} .

As simulações foram realizadas para um canal longo de 200 *taps* cuja resposta ao impulso é ilustrada na Figura 4.2.

Nas Figuras 4.3 e 4.4, são mostrados os gráficos da BER em função da SNR, para valores do parâmetro de regularização α , variando entre 0.1 e 1, onde $\Gamma = \alpha I$. Utilizamos constelações do tipo BPSK e QPSK.

4.5. CONCLUSÕES

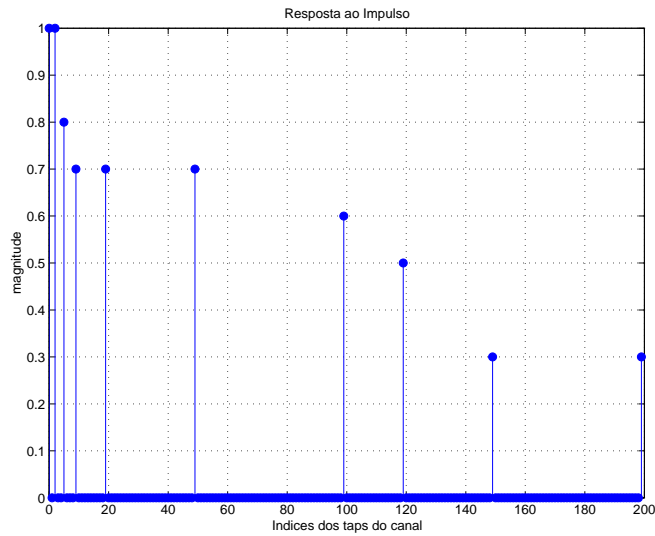


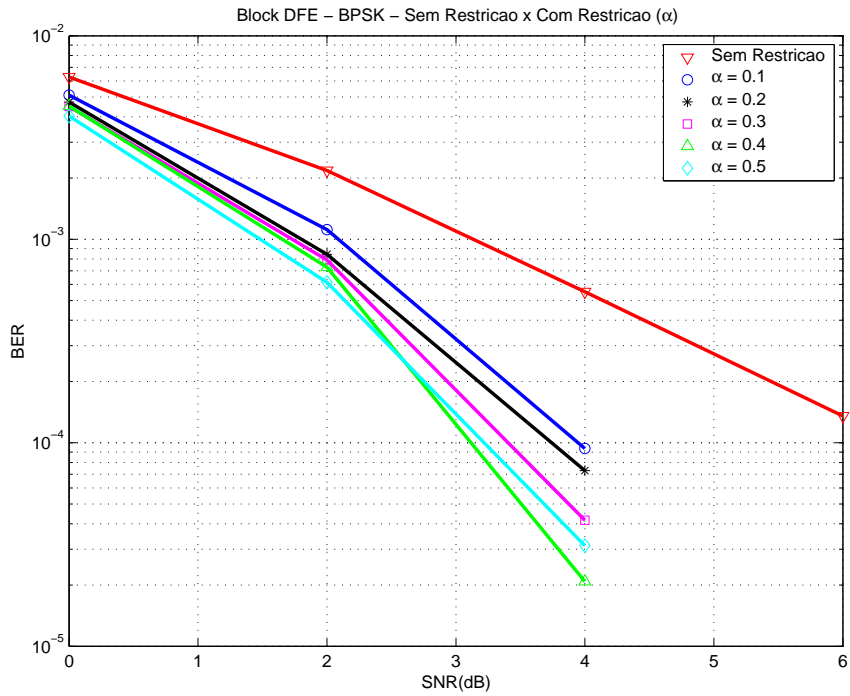
Figura 4.2: Resposta ao impulso do canal utilizado nas simulações.

Portanto, podemos observar que o DFE em blocos com restrição apresenta um desempenho melhor que o DFE em blocos sem restrição. Esta melhora de desempenho é mais evidente em canais longos, com mais de 100 *taps*.

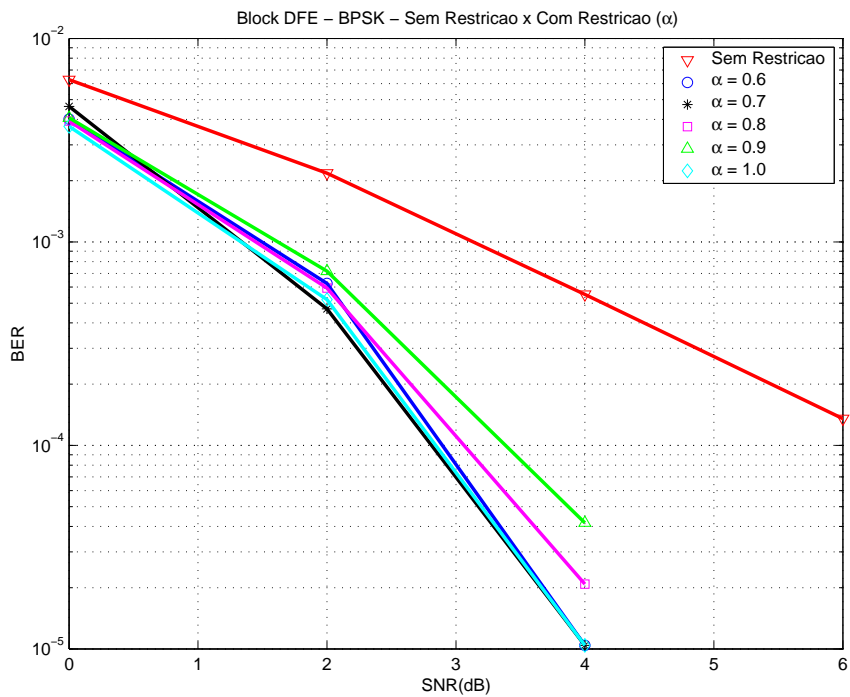
4.5 Conclusões

Neste capítulo, avaliamos o DFE considerando a possibilidade de decisões incorretas pelo detector, o que resulta na propagação de erro na realimentação. Para evitar esta propagação, introduzimos uma restrição na energia do filtro de *feedback* deste equalizador, e calculamos os respectivos filtros ótimos com base na consideração acima. Esta formulação já existente para o DFE escalar, foi estendida para o DFE em blocos. Dessa forma, observamos que, para canais longos, bastante utilizados em aplicações em banda larga, o DFE em blocos com restrição apresentou um desempenho melhor que o DFE em blocos sem restrição.

4.5. CONCLUSÕES



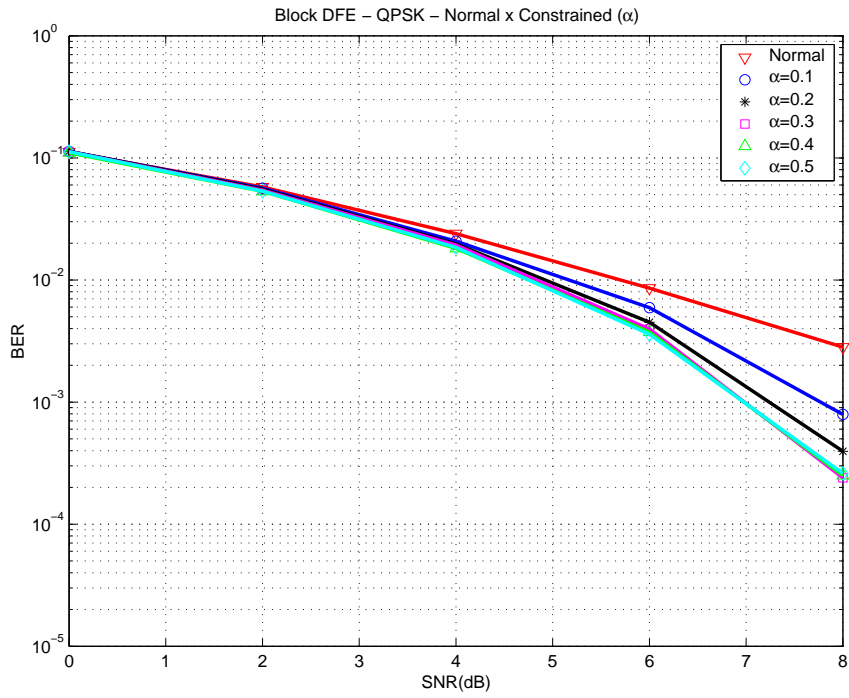
(a)



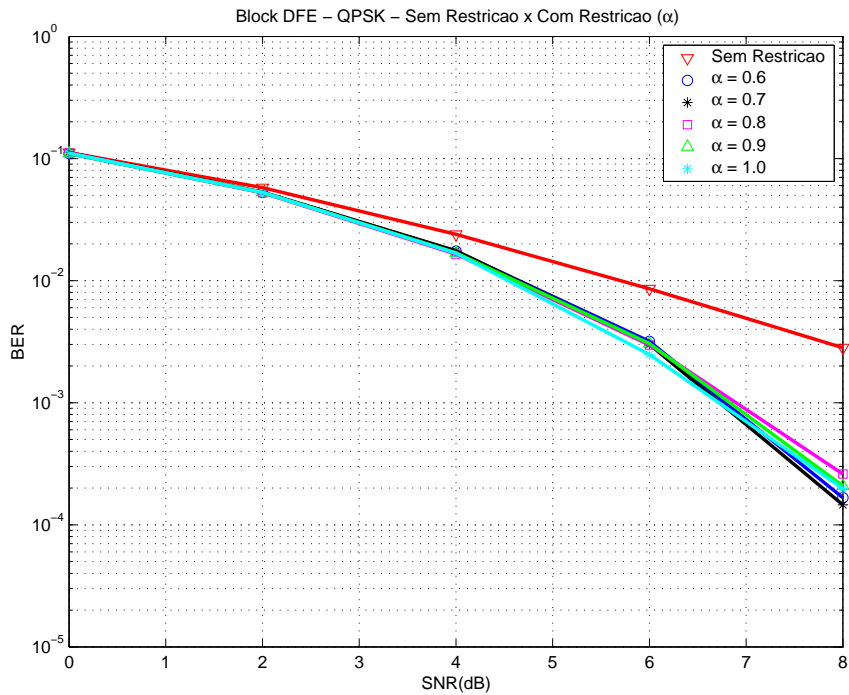
(b)

Figura 4.3: Comparação entre desempenho do DFE em blocos com restrição (*constraint*) e sem restrição para valores da variância do ruído aditivo (α) iguais a 0.1 a 0.5 (a) e 0.6 a 1.0 (b) para o BPSK.

4.5. CONCLUSÕES



(a)



(b)

Figura 4.4: Comparação entre desempenho do DFE em blocos com restrição (*constraint*) e sem restrição para valores da variância do ruído aditivo (α) iguais a 0.1 a 0.5 (a) e 0.6 a 1.0 (b) para o QPSK.

Capítulo 5

Cálculo Rápido dos Filtros do DFE em Blocos

Este capítulo apresenta formas alternativas e matematicamente mais simples para obtenção dos fatores de *Cholesky* envolvidos no cálculo dos filtros do DFE em Blocos para o caso sem restrição (*unconstrained*) e para o caso com restrição (*constrained*). Tais formas consistem na utilização de algoritmos rápidos existentes na literatura, e que podem ser implementados diretamente, com base na interpretação dos fatores de *Cholesky*.

5.1 Cálculo do DFE em Blocos sem restrição

Nas expressões (3.39) e (3.41), a interpretação dos fatores de *Cholesky* $\{\mathbf{L}, \mathbf{D}\}$ exercem grande impacto no cálculo eficiente dos correspondentes filtros deste equalizador.

Esses fatores são definidos pelas equações (3.44) e (3.45), e podem ser obtidos de forma rápida quando a matriz \mathcal{H} possui estrutura *Toeplitz*. Neste caso, tanto os algoritmos de *Levinson* quanto estruturas *Lattice* adaptativas [4], podem ser utilizadas na obtenção dos fatores de *Cholesky* definidos em (3.33).

5.1. CÁLCULO DO DFE EM BLOCOS SEM RESTRIÇÃO

Note que no método TZ apresentado na Seção 3.2.1, a matriz $\mathcal{H} = \bar{\mathbf{H}}_0 \bar{\mathbf{T}}$ só é *Toeplitz* quando $\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{I}$. Isto implica que \mathbf{P}' definido em (3.31) é igual a \mathbf{P} , dado por:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{H}}_0^* \mathbf{R}_v^{-1} \bar{\mathbf{H}}_0)^{-1} = \bar{\mathbf{L}}_0 \bar{\mathbf{L}}_0^* = \mathbf{L}_0 \mathbf{D}_0 \mathbf{L}_0^* \quad (5.1)$$

Entretanto, observa-se que, quando utilizamos um pré-codificador genérico $\bar{\mathbf{T}}$, a expressão (5.1) é substituída por

$$\mathbf{P}' = (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{T}}^* \bar{\mathbf{H}}_0^* \mathbf{R}_v^{-1} \bar{\mathbf{H}}_0 \bar{\mathbf{T}})^{-1} = \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{L}}^* = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{L}^* \quad (5.2)$$

Em geral, esses fatores não podem ser obtidos diretamente através dos algoritmos de *Levinson* ou por outro algoritmo adaptativo rápido [4].

Note que, quando $\bar{\mathbf{T}}$ é uma matriz unitária, pelas expressões acima, é possível relacionar os dois fatores de *Cholesky* $\{\bar{\mathbf{L}}, \bar{\mathbf{L}}_0\}$, escrevendo-se \mathbf{P}' da seguinte forma:

$$\mathbf{P}' = \bar{\mathbf{L}} \bar{\mathbf{L}}^* = (\bar{\mathbf{T}}^* \bar{\mathbf{T}} + \bar{\mathbf{T}}^* \bar{\mathbf{H}}_0^* \mathbf{R}_v^{-1} \bar{\mathbf{H}}_0 \bar{\mathbf{T}})^{-1} \quad (5.3)$$

$$= \bar{\mathbf{T}}^* \mathbf{P} \bar{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{T}}^* \bar{\mathbf{L}}_0 \bar{\mathbf{L}}_0^* \bar{\mathbf{T}} \quad (5.4)$$

Objetivando encontrar uma relação entre os fatores $\{\bar{\mathbf{L}}, \bar{\mathbf{L}}_0\}$, introduzimos o seguinte Lema [11]:

Lema 1 (Rotações Unitárias) *Sejam duas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} de tamanho $n \times M$ ($n \leq M$). Então $\mathbf{A} \mathbf{A}^* = \mathbf{B} \mathbf{B}^*$ se, e somente se, existir uma matriz unitária Θ ($M \times M$), tal que, $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Theta$.*

Isto implica que, nas expressões acima, os fatores $\{\bar{\mathbf{L}}, \bar{\mathbf{L}}_0\}$ são relacionados através de uma transformação unitária Θ , tal que

$$\boxed{\bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{T}}^* \bar{\mathbf{L}}_0 \Theta} \quad (5.5)$$

Esta transformação pode ser implementada através de uma sequência de rotações circulares que triangulariza a matriz resultante de $\bar{\mathbf{T}}^* \bar{\mathbf{L}}_0$.

5.1. CÁLCULO DO DFE EM BLOCOS SEM RESTRIÇÃO

Além disso, a matriz \mathbf{B} do filtro de *feedback* ótimo pode ser calculada simplesmente resolvendo-se o sistema linear

$$\mathbf{L}(\mathbf{B} + \mathbf{I}) = \mathbf{I} \quad (5.6)$$

pelo método de *backsubstitution* [16].

5.1.1 Transformações Unitárias

As transformações unitárias são utilizadas para eliminar determinados elementos de uma matriz, reduzindo sua estrutura a uma com padrão de zeros arbitrários:

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Na equação (5.7), Θ é uma matriz unitária que triangulariza a matriz à esquerda, denominada de *pre-array*.

Uma das maneiras de realizar essa transformação unitária é implementar a matriz Θ a partir de uma seqüência de transformações elementares, também conhecidas como Rotações de *Givens* [14].

5.1.1.1 Rotações de *Givens*

As rotações de *Givens*, também conhecidas como rotações circulares, são bastante interessantes do ponto de vista computacional, devido à sua facilidade de construção, além de poderem introduzir zeros de forma seletiva, pela escolha apropriada do ângulo de rotação [14].

Para o caso de vetores linha com 2 entradas, a rotação elementar é dada por:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

5.1. CÁLCULO DO DFE EM BLOCOS SEM RESTRIÇÃO

onde Θ é uma matriz unitária, tal que:

$$\Theta\Theta^* = \Theta^*\Theta = I \quad (5.9)$$

A expressão de Θ que realiza a transformação (5.8) é dada por:

$$\Theta = \begin{bmatrix} c & -s \\ s^* & c^* \end{bmatrix}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}, \quad s = \frac{\rho}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}, \quad \rho = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0 \quad (5.10)$$

onde c e s são tais que $|c|^2 + |s|^2 = 1$. Além disso, se $a = 0$, então $c = 0$ e $s = 1$, ou seja, $[0 \ b] \Theta = [b \ 0]$.

A razão pela qual estas rotações também são chamadas de rotações circulares pode ser vista interpretando-se Θ em termos de parâmetros seno e cosseno ($c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$). Geometricamente, significa que a matriz Θ gira qualquer ponto (x, y) do espaço Euclidiano bi-dimensional através do círculo de equação $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

Nas fórmulas apresentadas para o cálculo das rotações de *Givens*, foi considerada a hipótese de valores complexos para os elementos do *pre-array* e do *post-array*, onde $a = |a| e^{j\phi_a}$ é a representação polar do elemento a do *pre-array*.

Entretanto, existem casos em que as entradas do *post-array* devem ser reais e positivas, mesmo para o caso em que as entradas do *pre-array* sejam complexas. Isto acontece quando os coeficientes do canal são valores complexos e, por consequência, transformam os elementos da matriz \mathbf{P} , que se deseja decompor através da fatorização de *Cholesky*, também em valores complexos. Note que o fator de *Cholesky* $\bar{\mathbf{L}}$ da equação (5.5) possui elementos reais e positivos em sua diagonal principal. Neste caso, os parâmetros c e s da matriz Θ devem ser modificados da seguinte forma [4]:

$$c = \frac{e^{-j\phi_a}}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}, \quad s = \frac{\rho(e^{-j\phi_a})}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}, \quad \rho = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0 \quad (5.11)$$

Nota-se claramente que, caso a entrada do *post-array* já seja um valor real, então $\phi_a = 0$, e a matriz Θ pode ser calculada como na equação (5.10). Caso $a = 0$, Θ

5.1. CÁLCULO DO DFE EM BLOCOS SEM RESTRIÇÃO

deve ser escolhido em termos da fase de b ,

$$c = 0, \quad s = e^{-j\phi_b} \quad (5.12)$$

Na prática, existem várias possibilidades para se realizar a seqüência de rotações de *Givens* em uma determinada matriz, objetivando sua triangularização.

Uma seqüência das rotações de *Givens* consiste em selecionar dois a dois os elementos da matriz correspondente ao *pre-array*. Estes elementos são usados no cálculo dos parâmetros c e s da equação (5.11), que são utilizados na construção das matrizes Θ_i das rotações de *Givens*, dadas da seguinte forma:

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & -s & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & s^* & \dots & c^* & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

De forma geral, para se realizar a triangularização de uma matriz A de tamanho $n \times n$, primeiramente aplica-se uma seqüência de $n - 1$ transformações unitárias de forma a zerar todos os elementos da primeira linha de A , exceto seu primeiro elemento. Para isso, as matrizes das rotações, dadas por Θ_i , são obtidas através da seleção dos elementos da primeira linha, combinados dois a dois. A seguir, repete-se este procedimento a segunda linha da matriz A transformada, e aplica-se uma seqüência de $n - 2$ transformações para zerar todos os elementos posteriores ao segundo desta linha.

Este procedimento é repetido para todas as linhas da matriz A , exceto a última, o que transforma esta matriz em uma estrutura triangular inferior.

Nota-se que a matriz Θ total das transformações unitárias, definida pelo Lema 1, é obtida através do produto de todas as matrizes Θ_i da seqüência de

5.1. CÁLCULO DO DFE EM BLOCOS SEM RESTRIÇÃO

rotações de *Givens*, ou seja,

$$\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2 \dots \Theta_N \quad (5.14)$$

A seguir, apresentamos um exemplo para ilustrar este procedimento.

Exemplo 1:

Seja uma matriz A de tamanho 2×3 , dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.45 \\ 0.8 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

onde desejamos realizar uma triangularização da seguinte forma:

$$A\Theta = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Para isso, primeiramente anulamos o elemento (1,3) da matriz A , utilizando o elemento (1,1). Pela equação (5.10), obtemos:

$$\Theta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + |\rho_1|^2}} \begin{bmatrix} 1 & -\rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho_1 = 0.45/0.6 = 0.75 \quad (5.17)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Temos então que:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{0.6} & 0.3 & \boxed{0.45} \\ 0.8 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 0.8 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}}_{\Theta_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} .75 & 0.3 & 0 \\ 0.79 & 0.5 & -0.28 \end{bmatrix}}_{A_1} \quad (5.19)$$

A seguir, anulamos o elemento (1,2) da matriz resultante A_1 utilizando como base o elemento (1,1) desta matriz:

$$\Theta_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + |\rho_2|^2}} \begin{bmatrix} 1 & -\rho_2 \\ \rho_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho_2 = \frac{0.3}{0.75} = 0.4 \quad (5.20)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9285 & -0.3714 \\ 0.3714 & 0.9285 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

5.2. CÁLCULO DO DFE EM BLOCOS COM RESTRIÇÃO

Aplicando Θ_2 em A_1 , obtemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{0.75} & \boxed{0.3} & 0 \\ 0.79 & 0.5 & -0.28 \end{bmatrix}}_{A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.9285 & -0.3714 & 0 \\ 0.3714 & 0.9285 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Theta_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.8078 & 0 & 0 \\ 0.9192 & 0.1708 & -0.28 \end{bmatrix}}_{A_2} \quad (5.22)$$

Por fim, anulamos o elemento (2,3) de A_2 , utilizando o elemento (2,2):

$$\Theta_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + |\rho_3|^2}} \begin{bmatrix} 1 & -\rho_3 \\ \rho_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho_3 = \frac{0.1708}{-0.28} = -0.6101 \quad (5.23)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5208 & 0.8536 \\ -0.8536 & 0.5208 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

E finalmente::

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.8078 & 0 & 0 \\ 0.9192 & \boxed{0.1708} & \boxed{-0.28} \end{bmatrix}}_{A_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5208 & 0.8536 \\ 0 & -0.8536 & 0.5208 \end{bmatrix}}_{\Theta_3} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.8078 & 0 & 0 \\ 0.9192 & 0.328 & 0 \end{bmatrix}}_{A_3} \quad (5.25)$$

Portanto, a matriz A_3 é o resultado da triangularização da matriz inicial A , realizada através de três transformações elementares.

5.2 Cálculo do DFE em Blocos com restrição

Como no caso do DFE sem restrição, queremos encontrar um método rápido para calcular os fatores de *Cholesky* $\{\mathbf{U}, \mathbf{D}\}$, necessários para o cálculo dos filtros $\{\mathbf{G}, \mathbf{B}\}$, dados pelas equações (4.26) e (4.27). Estes fatores são definidos por:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{w}_1^b & \cdots & \mathbf{w}_{M-1}^b \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

5.2. CÁLCULO DO DFE EM BLOCOS COM RESTRIÇÃO

onde o i -ésimo vetor \mathbf{w}_i^b é a predição ótima dos mínimos quadrados da i -ésima coluna da matriz \mathbf{H}_0 , baseada nas colunas de ordem inferiores restantes. Os correspondentes custos mínimos ξ_i^b dessas predições são expressos através da matriz diagonal abaixo:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1/\xi_0^b & & & \\ & 1/\xi_1^b & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\xi_{M-1}^b \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Seja a fatorização de *Cholesky* da matriz \mathbf{P} , definida em (4.17), dada por $\mathbf{P} = \mathbf{U}_0 \mathbf{D} \mathbf{U}_0^* = \bar{\mathbf{U}}_0 \bar{\mathbf{U}}_0^*$. Uma vez que estes fatores admitem recursões eficientes (*Levinson* e algoritmos *Lattice*), nosso objetivo é obter uma relação entre $\{\bar{\mathbf{U}}_0, \bar{\mathbf{U}}\}$ de forma similar ao DFE sem restrições. Para isso, observe que a equação (4.21) pode ser escrita como:

$$\mathbf{S} - \mathbf{X} \mathbf{P} \mathbf{X} = \mathbf{S} - \mathbf{X} \bar{\mathbf{U}}_0 \bar{\mathbf{U}}_0^* \mathbf{X} = \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{U}}^* \quad (5.28)$$

A relação entre $\{\bar{\mathbf{U}}_0, \bar{\mathbf{U}}\}$, pode ser obtida através do seguinte Lema [11]:

Lema 2 (Rotações Hiperbólicas) *Considere duas matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} de tamanho $n \times m$, com $n \leq m$, ou seja, as matrizes possuem mais linhas do que colunas. Seja $\mathbf{J}_s = (\mathbf{I}_p \oplus -\mathbf{I}_q)$, e assume-se que $\mathbf{A} \mathbf{J}_s \mathbf{A}^*$ possui posto completo. Se $\mathbf{A} \mathbf{J}_s \mathbf{A}^* = \mathbf{B} \mathbf{J}_s \mathbf{B}^*$, então existe uma matriz J -unitária Θ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B} \Theta$.*

Notação: O operador \oplus , apresentado no Lema acima, é definido como: $a \oplus b = \text{diag}\{a, b\}$.

Note que podemos escrever (5.28) de forma equivalente a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}^{1/2} & \mathbf{X} \bar{\mathbf{U}}_0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_s} \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{1/2} \\ \bar{\mathbf{U}}_0^* \mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_s} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Definindo a matriz $\mathbf{J}_s \triangleq (\mathbf{I}_M \oplus -\mathbf{I}_M)$, concluímos que existe uma transformação J -unitária Θ , tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}^{1/2} & \mathbf{X} \bar{\mathbf{U}}_0 \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

5.2. CÁLCULO DO DFE EM BLOCOS COM RESTRIÇÃO

onde $\Theta \mathbf{J}_s \Theta^* = \Theta^* \mathbf{J}_s \Theta = \mathbf{J}_s$.

Esta transformação pode ser implementada a partir de uma seqüência de rotações hiperbólicas, que resultam na triangularização do *pre-array* em (5.30).

Além disso, nas equações (4.26) e (4.27), observa-se que o filtro de *feedback* \mathbf{B} pode ser obtido diretamente através do fator de *Cholesky*. No entanto, o filtro *feedforward* \mathbf{G} , depende do inverso do fator \mathbf{U} dado por \mathbf{U}^{-1} . Logo, após o cálculo de \mathbf{B} , a equação (4.26) pode ser escrita como:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{Q} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{Q} - (\mathbf{B} + \mathbf{I}) \Gamma] \mathcal{H}^* \mathbf{R}_v^{-1} \quad (5.31)$$

ou ainda

$$\mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{G} + (\mathbf{B} + \mathbf{I}) \Gamma \mathcal{H}^* \mathbf{R}_v^{-1}) = \mathbf{Q} \mathcal{H}^* \mathbf{R}_v^{-1} \quad (5.32)$$

Na verdade, trata-se de um sistema triangular de equações que pode ser resolvido através do método de *backsubstitution* [16].

5.2.1 Transformações J -Unitárias

As transformações J -unitárias, também conhecidas como rotações hiperbólicas, também são utilizadas quando se deseja obter um padrão qualquer de zeros em uma determinada matriz, onde agora Θ satisfaz

$$\Theta \mathbf{J}_s \Theta^* = \Theta^* \mathbf{J}_s \Theta = \mathbf{J}_s \quad (5.33)$$

Aqui \mathbf{J}_s é uma matriz diagonal com entradas ± 1 's. O caso especial em que $\mathbf{J}_s = \mathbf{I}$ corresponde as transformações unitárias descritas na Seção anterior.

A rotação hiperbólica elementar é tal que:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix}, \text{ onde } \mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

e, ao contrário das rotações circulares, agora temos:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \underbrace{\Theta \mathbf{J}_s \Theta^*}_{\mathbf{J}_s} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix} \mathbf{J}_s \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

5.2. CÁLCULO DO DFE EM BLOCOS COM RESTRIÇÃO

ou seja, $a^2 - b^2 = \alpha^2$. A transformação (5.34) só é possível se $|a| > |b|$, independente do valor de α . Caso contrário, se $|b| > |a|$, a transformação hiperbólica deverá ser da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Neste caso, a transformação acima será coerente com o fato de que $a^2 - b^2 < 0$, pois garantirá que $a^2 - b^2 = -\alpha^2$. Assim, para a obtenção dos parâmetros c e s envolvidos no cálculo da matriz Θ , devemos considerar os valores absolutos de a e b . As fórmulas abaixo são válidas tanto para valores reais como complexos:

Se $|a| > |b|$

$$\Theta = \begin{bmatrix} c & -s \\ -s^* & c \end{bmatrix}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}, \quad s = \frac{\rho}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}, \quad \rho = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0 \quad (5.37)$$

Se $|a| < |b|$

$$\Theta = \begin{bmatrix} c & -s \\ -s^* & c \end{bmatrix}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}, \quad s = \frac{\rho}{\sqrt{1 + |\rho|^2}}, \quad \rho = \frac{a^*}{b^*}, \quad b \neq 0 \quad (5.38)$$

Como no caso das rotações circulares, existem várias possibilidades para se realizar a seqüência de rotações hiperbólicas em uma determinada matriz para se obter uma estrutura triangular. Uma vez que esta estrutura pode ser triangular superior ou inferior, devemos levar em conta a ordem para se iniciar a seqüência das rotações, que pode ser pela primeira ou pela última linha da matriz B .

De forma similar as rotações circulares, uma seqüência de rotações hiperbólicas consiste em selecionar dois a dois os elementos de cada linha de uma determinada matriz B . Assim, devemos selecionar os elementos de uma determinada linha desta matriz, que correspondem aos que desejamos zerar, de forma a obtermos a matriz A . Após a seleção destes elementos, calcula-se os parâmetros c e s conforme as equações (5.37) e (5.38), que serão utilizados na construção das

5.2. CÁLCULO DO DFE EM BLOCOS COM RESTRIÇÃO

matrizes Θ_i das rotações hiperbólicas, dadas pela expressão abaixo:

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & -s & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -s^* & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Estes elementos devem ser selecionados adequadamente de forma que resultem em matrizes Θ_i que sejam J -unitárias, ou seja, que satisfaçam (5.33).

Como no caso circular, estas matrizes serão multiplicadas de forma sucessiva pelas matrizes B resultantes, até obtermos a matriz A resultante da seqüência de rotações hiperbólicas.

Da mesma forma, a matriz Θ total das transformações J -unitárias, definida pelo Lema 2, é obtida através do produto de todas as matrizes Θ_i da seqüência de rotações hiperbólicas, ou seja,

$$\Theta = \Theta_1 \cdot \Theta_2 \dots \Theta_N \quad (5.40)$$

A seguir, apresentamos um exemplo para ilustrar este procedimento.

Exemplo 2:

Primeiramente, definimos as matrizes $M \triangleq \text{diag}(3)$, como uma matriz diagonal 3×3 , e a matriz $N \triangleq \text{upper}(3)$, como sendo triangular superior de tamanho 3×3 .

Seja uma matriz $B = [M | N]$ de tamanho 3×6 , dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 2.0319 & 0 & 0 & 1.4191 & -0.1484 & -0.0313 \\ 0 & 2.0319 & 0 & 0 & 1.4269 & -0.1452 \\ 0 & 0 & 2.0319 & 0 & 0 & 1.4272 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

5.2. CÁLCULO DO DFE EM BLOCOS COM RESTRIÇÃO

Queremos aplicar uma seqüência de rotações hiperbólicas, tal que:

$$\begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} U & 0 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Para isso, primeiramente devemos anular o elemento (3,6) da matriz B , utilizando os elementos (3,3) e (3,6). Pelas equações (5.37) e (5.38), obtemos:

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4049 & 0 & 0 & -0.9868 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9868 & 0 & 0 & 1.4049 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Multiplicando a matriz B em (5.41) por Θ_1 acima, obtemos:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} 2.0319 & 0 & 0 & 1.4191 & -0.1484 & -0.0313 \\ 0 & 2.0319 & 0 & 0 & 1.4269 & -0.1452 \\ 0 & 0 & \boxed{2.0319} & 0 & 0 & \boxed{1.4272} \end{bmatrix}}_B \Theta_1 \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 2.0319 & 0 & 0.0309 & 1.4191 & -0.1484 & -0.0440 \\ 0 & 2.0319 & 0.1433 & 0 & 1.4269 & -0.2040 \\ 0 & 0 & 1.4462 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_1} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Em seguida, anulamos o elemento (2,6) de B_1 utilizando o elemento (2,2) desta matriz. Assim:

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0051 & 0 & 0 & 0 & 0.1009 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1009 & 0 & 0 & 0 & 1.0051 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

5.2. CÁLCULO DO DFE EM BLOCOS COM RESTRIÇÃO

Multiplicando B_1 por Θ_2 , temos:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} 2.0319 & 0 & 0.0309 & 1.4191 & -0.1484 & -0.0440 \\ 0 & \boxed{2.0319} & 0.1433 & 0 & 1.4269 & \boxed{-0.2040} \\ 0 & 0 & 1.4462 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_1} \Theta_2 \\
 = & \underbrace{\begin{bmatrix} 2.0319 & -0.0044 & 0.0309 & 1.4191 & -0.1484 & -0.0442 \\ 0 & 2.0319 & 0.1433 & 0 & 1.4269 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4462 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_2} \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

Agora, anulamos o elemento (2,5) de B_2 utilizando como base o elemento (2,2) desta matriz:

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4116 & 0 & 0 & -0.9963 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.9963 & 0 & 0 & 1.4116 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Novamente, multiplicando B_2 por Θ_3 , obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} 2.0319 & -0.0044 & 0.0309 & 1.4191 & -0.1484 & -0.0442 \\ 0 & \boxed{2.0319} & 0.1433 & 0 & \boxed{1.4269} & 0 \\ 0 & 0 & 1.4462 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_2} \Theta_3 \\
 = & \underbrace{\begin{bmatrix} 2.0319 & 0.1416 & 0.0309 & 1.4191 & -0.2051 & -0.0442 \\ 0 & 1.4321 & 0.1433 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4462 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_3} \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

Utilizando este raciocínio para eliminar os elementos (1,6), (1,5) e (1,4) que

5.3. CONCLUSÕES

restam, chegamos a matriz B_6 , resultante da triangularização de B :

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{2.0210} & 0.1416 & 0.0309 & \boxed{1.4191} & 0 & 0 \\ 0 & 1.4321 & 0.1433 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4462 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_5} \Theta_6 \\
 &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1.4390 & 0.1416 & 0.0309 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4321 & 0.1433 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4462 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_6} \quad (5.49)
 \end{aligned}$$

Por fim, como dissemos anteriormente, existem várias formas de realizar a seqüência de rotações hiperbólicas. Dessa forma, ressaltamos que para se obter a transformação J -unitária definida pela equação (5.30), esta seqüência deve ser iniciada pela última linha da matriz $[\mathbf{S}^{1/2} \ \mathbf{X}\bar{\mathbf{U}}_0]$. Isto acontece devido ao fato de que os elementos da matriz $\mathbf{S}^{1/2}$ são maiores que os elementos de $\mathbf{X}\bar{\mathbf{U}}_0$, o que resulta em uma matriz triangular superior, $\bar{\mathbf{U}}$. Note que se começarmos pela primeira linha de $[\mathbf{S}^{1/2} \ \mathbf{X}\bar{\mathbf{U}}_0]$, eliminaremos primeiramente os elementos (1,4), (1,5) e (1,6), e obteremos como resultado uma matriz triangular inferior, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}^{1/2} & \mathbf{X}\bar{\mathbf{U}}_0 \end{bmatrix} \Theta = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

onde esta matriz triangular inferior corresponde a matriz $\bar{\mathbf{L}}$ da fatorização de *Cholesky*.

5.3 Conclusões

Neste capítulo apresentamos formas rápidas para obtenção dos fatores de *Cholesky* envolvidos no cálculos dos filtros do DFE com e sem restrição. Estas formas utilizam as transformações do tipo unitárias e J -unitárias para obter relações entre os fatores $\{\bar{\mathbf{L}}_0, \bar{\mathbf{L}}\}$ e $\{\bar{\mathbf{U}}_0, \bar{\mathbf{U}}\}$, respectivamente. As transformações unitárias são implementadas através de uma seqüência de rotações circulares, enquanto que as transformações J -unitárias através de uma seqüência de rotações hiperbólicas.

5.3. CONCLUSÕES

Além disso, verificamos que no caso das transformações J -unitárias, devemos considerar a ordem de se iniciar a seqüência de rotações hiperbólicas pela primeira ou pela última linha, de forma a obter uma estrutura triangular inferior ou superior.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, propomos a introdução de uma restrição ao DFE em blocos, com o objetivo de atenuar os efeitos de propagação de erro, inerentes a este esquema de equalização. Além disso, apresentamos um método rápido para o cálculo dos filtros do DFE em blocos com e sem restrição, através de transformações elementares que possibilitam encontrar de forma mais simples os fatores de *Cholesky* envolvidos neste cálculo.

No Capítulo 3, mostramos uma forma alternativa para realizar a detecção de um bloco de símbolos recebidos pelo dispositivo de decisão do DFE em blocos. Avaliamos esta forma de detecção, e comprovamos que esta apresenta um melhor desempenho em comparação a forma usualmente empregada na literatura, que é a detecção sucessiva. No entanto, em termos do MSE, verificamos que esta forma de detecção arbitrária é equivalente a utilização de um pré-codificador também arbitrário na transmissão. Além disso, fizemos uma comparação do desempenho do DFE em blocos em relação ao DFE escalar, de forma a verificar seu sobre-desempenho, justificando assim, sua grande utilização em aplicações de banda larga.

No Capítulo 4, introduzimos uma restrição na energia do filtro de *feedback* do DFE em blocos, considerando o fato de que o dispositivo de decisão (ou detector) nem sempre realiza a detecção de forma correta, ocasionando o fenômeno

6.1. TRABALHOS FUTUROS

de propagação de erro na realimentação. De forma a diminuir os efeitos desta propagação, inserimos uma fonte de ruído aditivo na saída do dispositivo de decisão, e assim modelamos o erro da saída do sistema. Com base nessa formulação, calculamos os filtros deste equalizador, e avaliamos o seu desempenho através de simulações para diferentes valores do parâmetro de regularização, variando entre 0.1 e 1.

No Capítulo 5, propusemos um método para realizar o cálculo rápido dos fatores de *Cholesky*, e assim, otimizar o cálculo dos filtros do DFE em blocos com e sem restrição. Para o DFE em blocos sem restrição, este método utiliza transformações unitárias, efetuadas através de uma seqüência de rotações circulares (rotações de *Givens*), de forma a encontrar o fator $\bar{\mathbf{L}}$ da referida fatorização. Descrevemos ainda, o procedimento para realização destas rotações, e apresentamos um exemplo numérico para ilustrar melhor este procedimento. Além disso, estendemos tal método para o cálculo dos filtros do DFE em blocos com restrição, onde são empregadas transformações do tipo *J*-unitárias, efetuadas através de uma seqüência de rotações hiperbólicas. Através destas rotações hiperbólicas, é possível encontrar o fator de *Cholesky* $\bar{\mathbf{U}}$ que é utilizado no cálculo dos filtros deste equalizador. Também descrevemos os conceitos relativos a este tipo de transformação, bem como o procedimento a ser seguido, ilustrando através de um exemplo numérico. Ressaltamos ainda, as possíveis formas para efetuar estas seqüências de rotações.

6.1 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, podemos estender a formulação do DFE em blocos, apresentado no Capítulo 3, para sistemas que possuam memória. Além disso, para o caso do DFE em blocos com restrição, discutido no Capítulo 4, podemos ainda otimizar a escolha do parâmetro de regularização, com base em algum critério. Um possível caminho é utilizar a expressão do MSE da equação (4.30).

Referências Bibliográficas

- [1] PROAKIS, J., *Digital Communications*. 4 ed. McGraw-Hill, 2001.
- [2] WILLIAMSON, D., KENNEDY, R. A., PULFORD, G. W., “Block Decision Feedback Equalization”, *IEEE Transactions on Communications*, v. 40, n. 02, pp. 255–264, Fevereiro 1992.
- [3] KALED, G. K., “Channel equalization for block transmission systems”, *IEEE Transactions Journal on Selected Areas in Communications*, v. 13, n. 1, pp. 110–121, Janeiro 1995.
- [4] SAYED, A. H., *Fundamental of Adaptive Filtering*. 1 ed. John Wiley & Sons, 2003.
- [5] SCAGLIONE, A., GIANNAKIS, G. B., BARBAROSSA, S., “Redundant filterbank precoders and equalizers — Part I: Unification and optimal designs”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 47, n. 7, pp. 1988–2006, Julho 1999.
- [6] STAMOULIS, A., GIANNAKIS, G. B., SCAGLIONE, A., “Block FIR decision-feedback equalizers for filterbank precoded transmissions with blind channel estimation capabilities”, *IEEE Transactions on Communications*, v. 49, n. 1, pp. 69–83, Janeiro 2001.
- [7] AKANSU, A. N., DUHAMEL, P., LIN, X., *et al.*, “Orthogonal Transmultiplexers in Communications: A Review”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 46, n. 04, pp. 979–995, Abril 1998.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [8] KOSUT, R. L., CHUNG, W., JOHNSON, C. R., *et al.*, “On achieving reduced error propagation sensitivity in DFE design via convex optimization”, *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, v. 05, pp. 4320–4323, Dezembro 2000.
- [9] ZHAO, F., MATHEW, G., FARHANG-BOROUJENY, B., “Techniques for Minimizing Error Propagation in Decision Feedback Detectors for Recording Channels”, *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 37, n. 01, pp. 592–602, Janeiro 2001.
- [10] MERCHED, R., “Efficient Computation of Block Equalizers”, (*to be submitted*), .
- [11] KAILATH, T., SAYED, A. H., HASSIBI, B., *Linear Estimation*. 1 ed. Prentice Hall, 2000.
- [12] TONG, L., LIU, D., ZENG, H., “On Blind Decision Feedback Equalization”, *Proceedings of the 30th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, v. 01, pp. 305–309, Novembro 1996.
- [13] AL-DHAHIR, N., CIOFFI, J. M., “MMSE Decision-Feedback Equalizers: Finite-Length Results”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 41, n. 4, pp. 961–975, Julho 1995.
- [14] GOLUB, G. H., LOAN, C. F. V., *Matrix Computations*. 1 ed. John Hopkins University Press, 1983.
- [15] AL-DHAHIR, N., CIOFFI, J. M., “The Finite-Length Multi-Input Multi-output MMSE-DFE”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 48, n. 10, pp. 2921–2936, Outubro 2000.
- [16] DINIZ, P. S. R., *Adaptive Filtering*. 2 ed. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [17] MERCHED, R., YOUSEF, N., “Fast Techniques for Computing Finite-Length MIMO MMSE Decision Feedback Equalizers”, (*to appear, 2005*), .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [18] AL-DHAHIR, N., CIOFFI, J. M., “Fast Computation of Channel-Estimate Based Equalizers in Packet Data Transmission”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 43, n. 11, pp. 2462–2473, Novembro 1995.
- [19] MERCHED, R., YOUSEF, N., “Fast Techniques for Computing Finite-Length MMSE Decision Feedback Equalizers”, *Proceedings of ICASSP*, v. 4, pp. 1005–1008, Maio 2004.
- [20] WANG, Z., GIANNAKIS, G. B., “Wireless Multicarrier Communications”, *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 47, n. 3, pp. 29–48, Maio 2000.
- [21] VAIDYANATHAN, P., *Multirate Systems and Signal Processing*. 1 ed. Prentice Hall, 1993.
- [22] VERDU, S., *Multiuser Detection*. 1 ed. Cambridge University Press, 1998.