

CONTROLE POR TENSÃO DE VELOCIDADE EM MANCAIS MOTORES  
MAGNÉTICOS

Raimundo Nascimento Junior

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

---

Prof. Afonso Celso Del Nero Gomes, D.Sc.

---

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc.

---

Prof. José Andrés Santisteban Larrea, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2005

JUNIOR, RAIMUNDO NASCIMENTO

Controle por Tensão de Velocidade  
em Mancais Motores Magnéticos [Rio de  
Janeiro] 2005

IX, 95 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,  
Engenharia Elétrica, 2005)

Tese - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Mancais Motores Magnéticos
2. Controle de Velocidade
3. Acoplamento Eletromecânico
4. Modelo Matemático

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

# Agradecimentos

À Deus, seu filho Jesus Cristo e Nossa Senhora pela proteção e força nos momentos de alegria e de dificuldade;

Aos meus Pais, Raimundo e Olga, por todo incentivo, apoio e aconselhamentos que me ajudaram a vencer mais esta etapa de minha vida.

Ao meu avô, Sebastião Queiroz, pelo exemplo de vida demonstrado na sua passagem junto à mim e que hoje descansa junto à Deus Pai;

Aos meus irmãos, pelo apoio e ajuda quando precisei. Aos meus sobrinhos, Lucas, Carol, Paulo Cesar e Juliana pelos momentos de descontração e divertimento nas horas em que mais precisei;

À Greicy, pelo seu carinho e dedicação que sempre serviram de motivação para mim.

À minha irmã Regina, ao meu cunhado Jorginaldo e à D. Abgail pela receptividade e carinho demonstrados durante alguns meses no Rio de Janeiro.

Ao Prof. Afonso Celso Del Nero pelo esforço, dedicação, presteza e segurança à mim transmitidos e principalmente pela sua experiência técnica que foi de extrema importância na busca de novas soluções nos momentos mais difíceis deste trabalho;

À SUFRAMA, pela iniciativa pioneira de formar e qualificar para a Sociedade, profissionais nas mais diferentes áreas da Engenharia Elétrica.

Ao NUTELI, representado pela Prof. Marly Costa, que na coordenação do Mestrado soube gerir da melhor maneira possível as responsabilidades a ela conferida; Ao Prof. Ramon Costa pela coordenação na COPPE do Programa de Mestrado.

Ao Prof. Cícero Costa, Coordenador Geral do NUTELI, pela sua confiança e pelo seu apoio fundamentais para a conclusão deste trabalho.

À Secretaria do NUTELI, em especial, Ana, Renata e Giseli.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## CONTROLE POR TENSÃO DE VELOCIDADE EM MANCAIS MOTORES MAGNÉTICOS

Raimundo Nascimento Junior

Abril/2005

Orientador: Afonso Celso Del Nero

Programa: Engenharia Elétrica

A capacidade posicionadora dos mancais motores presentes no protótipo em estudo na COPPE/UFRJ foi conseguida pela modificação dos enrolamentos de um motor de indução convencional.

Os trabalhos realizados até o momento enfatizam o controle da posição radial do rotor feito por estes mancais motores. A necessidade de uma análise mais detalhada para o controle de velocidade visando posteriormente a aplicação simultânea com o controle de posição motivaram a realização desta tese.

Este trabalho tem como objetivo principal a elaboração de um modelo matemático para o controle de velocidade de um motor de indução modificado para funcionar como mancal-motor. O Presente trabalho segue uma linha de pesquisa já em estudos na COPPE. É visto com maior destaque o controle de velocidade onde um modelo matemático é proposto considerando como ponto importante o acoplamento eletromecânico da máquina.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## CONTROL FOR TENSION OF SPEED FOR MAGNETICS BEARINGS-MOTORS

Raimundo Nascimento Junior

April/2005

Advisor: Afonso Celso Del Nero

Department: Electrical Engineering

The capacity of position from the motor-bearings present at prototype in study at COPPE/UFRJ was acquired for modification of the windings of motor of conventional induction.

Works made this moment emphasize the control of radial position of rotor made for this bearings motors. The requirement of a analyse more containing details looking for a application simultaneous with the position control motivate the realization this Thesis.

This work has like objective to introduce a formulation of a mathematical model for the control of speed in transformed motor-bearings to work like bearing-motor. This work follow a research line yet in study at COPPE. It is seen with more emphasize the control of speed where a mathematical model is offer considering like central point the eletromechanical coupling of the machine.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Estado da Arte . . . . .	1
1.2 Descrição e Detalhamento . . . . .	3
1.3 Estrutura Organizacional da Tese . . . . .	5
<b>2 Mancais Magnéticos</b>	<b>6</b>
2.1 Introdução . . . . .	6
2.2 Funcionamento e Classificação . . . . .	6
2.3 Forças de Relutância . . . . .	8
2.4 Mancais Magnéticos Convencionais . . . . .	10
2.5 Comentários . . . . .	12
<b>3 Motores AC</b>	<b>13</b>
3.1 Introdução . . . . .	13
3.2 Conceitos Preliminares . . . . .	13
3.3 Máquinas de Indução . . . . .	14
3.3.1 Motores Elétricos e sua Importância . . . . .	15
3.3.2 Constituição do Motor de Indução . . . . .	15
3.3.3 Funcionamento de um Motor Assíncrono . . . . .	16
3.3.4 Aplicações . . . . .	17
3.3.5 Perdas num Motor . . . . .	18
3.3.6 Motores de Indução Monofásicos . . . . .	19
3.3.7 Motores Polifásicos . . . . .	19
3.3.7.1 Gaiola de Esquilo . . . . .	20
3.3.7.2 Motor de Rotor Bobinado . . . . .	21
3.4 Comentários . . . . .	22
<b>4 O Mancal Motor</b>	<b>23</b>
4.1 Introdução . . . . .	23
4.2 Desenvolvimento . . . . .	24
4.3 Controle por Tensão . . . . .	33
4.4 Comentários . . . . .	37

<b>5</b>	<b>Acoplamento Eletromecânico</b>	<b>38</b>
5.1	Introdução . . . . .	38
5.2	Modelo Geral do Acoplamento Eletromecânico . . . . .	38
5.3	Canais Elétricos . . . . .	40
5.4	Exemplo de Aplicação 1 . . . . .	44
5.5	Exemplo de Aplicação 2 . . . . .	48
5.6	Energia Interna . . . . .	52
5.7	Canais Mecânicos . . . . .	55
5.8	Comentários . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Controle de Velocidade em Motor de Indução</b>	<b>57</b>
6.1	Introdução . . . . .	57
6.2	Acoplamento Eletromecânico . . . . .	57
6.3	Restrições Externas . . . . .	60
6.4	Modelo Completo . . . . .	62
6.4.1	Inversa e derivada de $L$ . . . . .	66
6.5	Simulação . . . . .	66
6.5.1	Dados para a Simulação . . . . .	66
6.5.2	Caso 1 - Carga Simples: Motor operando com atrito viscoso (Br) e inércia da carga (Jr) . . . . .	66
6.5.3	Caso 2 - Carga Simples: Motor operando com carga que varia com o cubo da velocidade . . . . .	67
<b>7</b>	<b>Modelo Matemático do Motor Modificado</b>	<b>74</b>
7.1	Introdução . . . . .	74
7.2	Detalhes das subfases . . . . .	75
7.3	Acoplamento Eletromecânico: matriz $L^n$ . . . . .	76
7.4	Restrições Externas . . . . .	83
7.5	Torque Elétrico . . . . .	85
7.6	Comentários . . . . .	86
<b>8</b>	<b>Simulações do Modelo Matemático do Motor Modificado</b>	<b>87</b>
8.1	Simulações . . . . .	87
8.1.1	Caso 3: Controle de Velocidade Puro . . . . .	87
8.1.2	Comentários Caso 3 . . . . .	88
8.1.3	Caso 4: Controle de Velocidade + Controle de Posição Simulado . . . . .	89
8.1.4	Comentários Caso 5 . . . . .	89
<b>9</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>92</b>
9.1	Conclusões . . . . .	92
9.2	Trabalhos Futuros . . . . .	93
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>94</b>

# Lista de Figuras

1.1	Foto e esquema em corte longitudinal do protótipo . . . . .	3
2.1	Princípio do Mancal Ativo . . . . .	7
2.2	Força Gerada por um eletroímã . . . . .	9
3.1	Motores Elétricos . . . . .	15
3.2	Partes de um motor assíncrono . . . . .	16
3.3	Estatador de um motor assíncrono . . . . .	17
3.4	Aplicação de motores assíncronos . . . . .	17
3.5	Aplicação de motores assíncronos . . . . .	18
3.6	Motor gaiola de esquilo . . . . .	20
3.7	Rotor Bobinado . . . . .	21
4.1	Enrolamentos do mancal-motor de indução . . . . .	23
4.2	Representação física dos quatro pólos nas fases A e B . . . . .	24
4.3	Circuito equivalente por fase do motor . . . . .	25
4.4	Diagrama assintótico do ganho de amplitude . . . . .	26
4.5	Geração de fluxo no pólo direito . . . . .	28
5.1	Estrutura Geral do AE . . . . .	39
5.2	Atuador solenoidal como AE . . . . .	39
5.3	Atuador solenoidal como AE + restrições . . . . .	40
5.4	Esquema de canal elétrico . . . . .	41
5.5	Canal elétrico e restrições . . . . .	41
5.6	Ex.aplic.1 . . . . .	44
5.7	Ex.aplic.2 . . . . .	48
6.1	Canal elétrico e restrições . . . . .	61
6.2	Modelagem da equação do Torque . . . . .	64
6.3	Modelo com carga simples . . . . .	67
6.4	Vas e Vbs . . . . .	68
6.5	Las e Lbs . . . . .	68
6.6	Caso1: Te para $w_s = 300$ rad/s . . . . .	69
6.7	Caso1: $w_m$ para $w_s = 300$ rad/s . . . . .	69
6.8	Caso1: Te para $w_s = 377$ rad/s . . . . .	70
6.9	Caso1: $w_m$ para $w_s = 377$ rad/s . . . . .	70



6.10	Caso1: $T_e$ para $w_s = 450$ rad/s . . . . .	70
6.11	Caso1: $w_m$ para $w_s = 450$ rad/s . . . . .	70
6.12	Caso2: Modelagem da equação do Torque . . . . .	71
6.13	Modelo com carga que varia com o cubo da velocidade . . . . .	71
6.14	Caso2: $T_e$ para $w_s = 300$ rad/s . . . . .	72
6.15	Caso2: $w_m$ para $w_s = 300$ rad/s . . . . .	72
6.16	Caso2: $T_e$ para $w_s = 377$ rad/s . . . . .	72
6.17	Caso2: $w_m$ para $w_s = 377$ rad/s . . . . .	72
6.18	Caso2: $T_e$ para $w_s = 450$ rad/s . . . . .	73
6.19	Caso2: $w_m$ para $w_s = 450$ rad/s . . . . .	73
7.1	Enrolamentos do mancal-motor de indução . . . . .	75
7.2	Representação física dos quatro pólos nas fases A e B . . . . .	76
7.3	Subfases da fase A . . . . .	76
8.1	Modelo para controle de velocidade puro . . . . .	87
8.2	Caso 3: $T_e$ para $w_s = 300$ rad/s . . . . .	88
8.3	Caso 3: $w_m$ para $w_s = 300$ rad/s . . . . .	88
8.4	Caso 3: $T_e$ para $w_s = 377$ rad/s . . . . .	89
8.5	Caso 3: $w_m$ para $w_s = 377$ rad/s . . . . .	89
8.6	Caso 3: $T_e$ para $w_s = 450$ rad/s . . . . .	90
8.7	Caso 3: $w_m$ para $w_s = 450$ rad/s . . . . .	90
8.8	Modelo para controle de velocidade + posição . . . . .	90
8.9	Caso 4: $T_e$ para $w_s = 300$ rad/s . . . . .	91
8.10	Caso 4: $w_m$ para $w_s = 300$ rad/s . . . . .	91
8.11	Caso 4: $T_e$ para $w_s = 377$ rad/s . . . . .	91
8.12	Caso 4: $w_m$ para $w_s = 377$ rad/s . . . . .	91

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Estado da Arte

Rotores em movimento são normalmente mantidos na posição desejada por meio de mancais. Alguns destes, os mancais radiais, evitam movimentos em direções perpendiculares ao eixo, ao passo que os mancais axiais se encarregam dos movimentos na direção do eixo. As soluções tecnológicas mais comuns para este tipo de posicionamento empregam mancais mecânicos tradicionais, mas os últimos anos testemunharam a introdução e a disseminação do uso de dispositivos magnéticos para gerar as forças restauradoras. Estes dispositivos são chamados de **Mancais Magnéticos**. Pode-se dizer que este campo de aplicações atingiu um estágio maduro atualmente, como pode ser visto pelo vasto número de publicações (Knospe & Collins 1996), (D.F.B. David 2000), (G. Schweitzer & Traxler 1994), (R. Schob 1994), (A. Salazar 1993), (J. Young Beams 1942) e (A. Chiba 1994).

Nestes casos clássicos, eletromagnetos estrategicamente localizados geram as forças restauradoras, forças estas que dependem da corrente (ou da tensão) aplicadas a eles. Para obter estas variáveis de entrada devemos ter acesso a medidas de variáveis mecânicas do rotor, geralmente velocidades e posições, bem como as variáveis de natureza elétrica. Isto significa que um esquema de *controle ativo* é necessário para a operação satisfatória dos mancais magnéticos.

Nos mancais magnéticos ativos, sensores de posição medem o deslocamento de um motor, um controlador lê estas informações e gera os sinais de controle que são

amplificados e transformados em forças radiais capazes de reposicionar o rotor. A lei de controle utilizada será responsável pela estabilidade, rigidez e amortecimento, como pode ser visto com mais detalhes em (G. Schweitzer & Traxler 1994).

Há duas categorias de mancais magnéticos, conforme o tipo de força utilizada. O primeiro grupo utiliza a força de relutância e o segundo a força de Lorentz. Eles podem ainda ser chamados de mancais eletromagnéticos e mancais eletrodinâmicos, respectivamente, como pode ser visto em (G. Schweitzer & Traxler 1994), sendo os mancais eletromagnéticos muito mais comuns que os eletrodinâmicos. Mancais magnéticos ativos têm muitas aplicações na indústria, com a vantagem de ter uma melhor eficiência, maior velocidade de rotação e menor vibração fornecida por ele. Algumas importantes aplicações são os compressores e turbinas a gás.

As principais vantagens na utilização de mancais magnéticos ativos são:

1. Os mancais magnéticos ativos são completamente livres de contatos mecânicos, permitindo uma operação do rotor sem a necessidade de alto torque;
2. A rigidez e o amortecimento podem ser selecionados e modificados livremente com o objetivo de obter os melhores resultados de operação;
3. A posição do rotor pode ser controlada on-line independentemente da rigidez;
4. Controle ativo de vibrações causadas por desbalanceamentos do rotor e na passagem de frequências críticas;
5. Baixo consumo de energia.

Uma postura mais sofisticada começou a ser estudada na última década: ao invés de usar elementos distintos para acionar(girar) o rotor (um motor elétrico) e para posicioná-lo (mancais magnéticos) uma solução híbrida foi apresentada, onde múltiplas funções seriam executadas por um único componente, que passou a ser conhecido como **Mancal-Motor Magnético**.

Para conseguir isto, os enrolamentos de um motor elétrico são refeitos de modo a permitir a geração de torque e de forças de posicionamento radiais simultaneamente. Neste esquemas de mancal-motor, as forças de posicionamento axial são geradas por meios mecânicos ou magnéticos. O presente trabalho visa dar continuidade à linha de

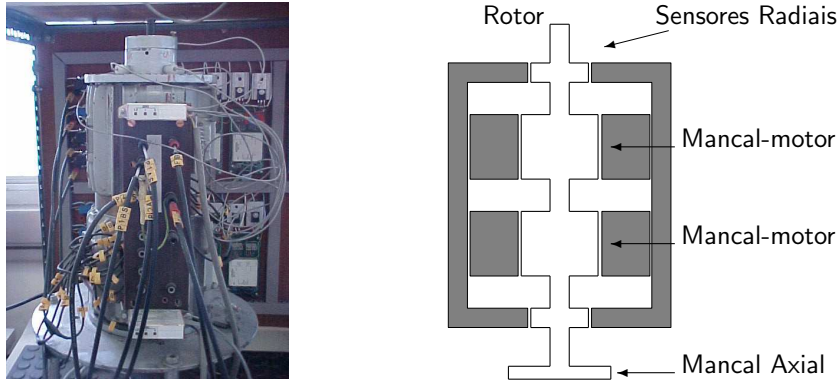


FIGURA 1.1: Foto e esquema em corte longitudinal do protótipo

pesquisa desenvolvida na COPPE/UFRJ, que ao longo dos últimos anos vem investindo na pesquisa aplicada aos mancais-motores magnéticos. Estes estudos encontram sua melhor representação em (Ortiz 1994), (David 2000) e (Santisteban 1999). Em todos estes trabalhos a ênfase quase única é no controle de posição pelo mancal-motor. Pouco foi visto sobre o outro aspecto do dispositivo. A meta principal a partir de agora é a resolução de problemas associados ao controle de velocidade, sempre pensando no objetivo final de um controle simultâneo de posição e velocidade.

## 1.2 Descrição e Detalhamento

O protótipo em estudo pode ser visto na figura (1.1). Trata-se de um rotor estabilizado verticalmente por um mancal axial e posicionado radialmente por dois mancais motores, que também o fazem girar. Maiores detalhes serão vistos nas seções seguintes.

Até a presente data, o controle do mancal motor tem sido feito de maneira fragmentada, ou seja, isolada.

Na primeira fase dos trabalhos era necessária a comparação prática de que o motor modificado era realmente capaz de posicionar o rotor, ou seja, o efeito mancal existia. Nas experiências de laboratório desta primeira fase o rotor era mantido em posição por meio de calços mecânicos enquanto era acelerado do repouso até uma velocidade angular constante. Atingida esta condição de regime, os calços mecânicos eram retirados e o controle de posição passava a ser avaliado.

Nas simulações desta primeira fase apenas o controle de posição era analisado. Para cada diferente valor de velocidade angular do rotor, os parâmetros da planta a

ser posicionada mudavam e isto complicava o controle.

Nesta primeira fase a aceleração até a velocidade de regime era conseguida por meio de uma “pilotagem” das variáveis de acionamento da máquina. Alterando, de maneira empírica, a amplitude e a frequência das tensões de alimentação das fases do estator se conseguia o efeito desejado.

As táticas de controle de posição testadas até essa época se mostravam razoáveis. Embora várias outras estratégias para posicionamento precisassem (ainda precisam!!) ser avaliadas, dois outros problemas apareciam: como acelerar o motor de modo mais racional e, a mais importante, como efetuar um enfoque integrado, onde a posição radial do rotor e a sua velocidade angular sejam controlados simultaneamente.

O primeiro destes problemas envolve o controle de velocidade de motores de indução. Em (Cardoso 2003) este problema foi resolvido por um controlador PI modificado para implementar um acionamento V/Hz constante do estator da máquina. Simulações e experiências foram feitas com sucesso.

Durante as experiências, o rotor era acelerado até diversas possíveis velocidades de regime. Variações nos parâmetros da carga e distúrbios constantes, do tipo freio, eram razoavelmente bem assimilados pelo controle. Em todos estes testes, o rotor estava calçado mecanicamente, ou seja, o controle de posição permanecia inativo. Exatamente por este motivo, as simulações prévias a estas experiências utilizavam um modelo matemático convencional para o motor de indução, sem qualquer modificação. Em outras palavras : as simulações supunham um motor de indução “puro” e não um mancal-motor.

O principal objetivo desta tese é a elaboração de um modelo matemático para o controle de velocidade de um motor de indução modificado para funcionar como mancal-motor. Pretende-se, posteriormente, testar este modelo através de simulação, na aceleração até velocidade de regimes constantes de um rotor calçado mecanicamente (controle de posição inativo).

O passo seguinte será o teste, por simulação, do funcionamento simultâneo dos controles de posição e de velocidade, acelerando o rotor até condições de regime e lá mantendo-o, sem qualquer tipo de calço.

Feitas as simulações, restará apenas a implementação real do controle simultâneo.

## 1.3 Estrutura Organizacional da Tese

O capítulo 2 inicia-se com uma revisão sobre os antecessores dos mancais motores, conhecidos como mancais magnéticos ou puro. São destacados os princípios de funcionamento, classificação e a geração de forças de relutância.

No capítulo 3 veremos alguns conceitos sobre máquinas AC, em especial as máquinas de indução.

O capítulo 4 discutirá sobre o Mancal Motor, como são geradas as forças radiais, o circuito equivalente, a geração de fluxo e etc.

No capítulo 5 será visto o acoplamento eletromecânico, onde o foco principal será o estabelecimento de modelos matemáticos para sistemas eletromecânicos.

O capítulo 6 mostrará simulações e resultados de um modelo matemático para o controle de velocidade, onde várias situações são impostas à máquina.

O capítulo 7 será dedicado ao estudo dos modelos matemáticos usados para descrever a dinâmica rotacional dos motores de indução modificados para funcionarem como mancal motor.

# Capítulo 2

## Mancais Magnéticos

### 2.1 Introdução

Antes de entender o funcionamento dos mancais motores é conveniente conhecer seus antecessores históricos, os mancais magnéticos puros ou tradicionais. Muitas das características destes últimos estão presentes naqueles.

Neste capítulo revisaremos os princípios básicos dos mancais ativos, veremos algumas possíveis classificações, recordaremos a geração de forças de relutância e o conceito de correntes diferenciais.

A literatura sobre mancais magnéticos é abundante. Embora o presente capítulo esteja baseado principalmente em (G. Schweitzer & Traxler 1994), podemos ainda citar (Knospe & Collins 1996), (D.F.B. David 2000), (R. Schob 1994), (A. Salazar 1993), (J. Young Beams 1942) e (A. Chiba 1994).

### 2.2 Funcionamento e Classificação

Podemos observar na figura (2.1) o princípio no qual se baseia a construção de mancais magnéticos ativos. Um sensor de deslocamento irá medir a posição de um rotor em relação a uma posição de referência. Um controlador irá ler os sinais gerados pelos sensores, processá-los e gerar sinais de controle para um amplificador de potências que irá, então, gerar correntes que serão capazes de levar o rotor para uma posição desejada. A Lei de controle utilizada deverá ser responsável pela estabilidade, rigidez

e amortecimento, como um sistema de suspensão, conforme visto em (G. Schweitzer & Traxler 1994).

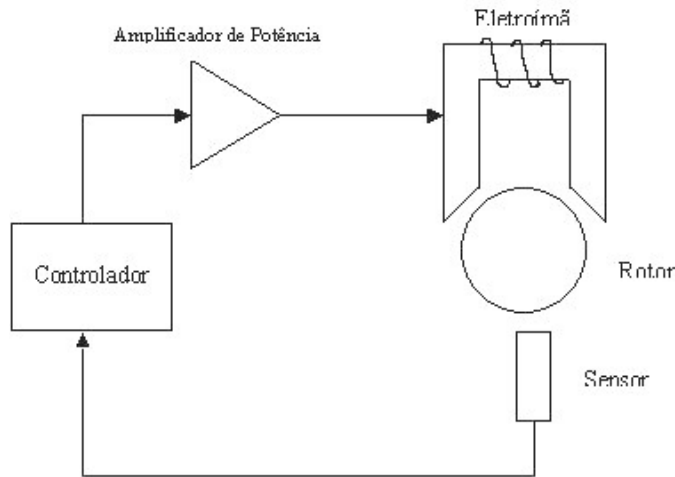


FIGURA 2.1: Princípio do Mancal Ativo

Um sistema de controle com apenas um canal seria necessário para realizar o modelo mostrado na figura anterior, entretanto, para modelos mais complexos serão necessários vários sensores de posicionamento e vários canais de controle.

Os mancais magnéticos estão divididos em dois grupos, conforme o tipo de força magnética utilizada. O primeiro grupo utiliza a força de relutância e o segundo a força de Lorentz. Eles podem ainda ser chamados de mancais eletromagnéticos e mancais eletrodinâmicos, respectivamente, sendo os mancais eletromagnéticos muito mais comuns que os eletrodinâmicos. É claro que os princípios físicos básicos, a causa dos efeitos magnéticos nas cargas elétricas em movimento, são os mesmos.

No primeiro grupo os materiais estão sujeitos a forças magnéticas de relutância, originadas da energia armazenada no campo magnético, que pode ser convertida em energia mecânica. Portanto, a força de relutância  $f$  é obtida do **princípio do trabalho virtual**.

$$f = \frac{\partial W}{\partial s}$$

onde  $\partial W$  é a energia de campo e  $\partial s$  o deslocamento virtual do corpo levitante. Maiores detalhes adiante.



O segundo grande grupo na classificação de forças magnéticas é chamado de **força de Lorentz**. Diferentemente da força elétrica existente entre duas cargas ou da intervenção gravitacional, que dependem, respectivamente, só da distância da separação entre as cargas e massas envolvidas, a força de Lorentz sobre uma carga elétrica depende da velocidade da carga e do campo magnético, de acordo com a equação abaixo

$$f = Q(E + v \times B)$$

onde  $E$  é o campo elétrico,  $Q$  a carga movendo-se a uma velocidade  $v$  numa densidade de fluxo magnético  $B$ .

Os mancais convencionais limitam-se a manter o rotor estável em uma posição central por imposição de forças magnéticas geradas por correntes elétricas que circulam nas bobinas do estator. Esta abordagem elimina contatos mecânicos e os consequentes desgastes causados por atrito.

Para o modelo mostrado na figura (2.1) verificamos que, somente um controle ativo será capaz de manter o rotor em uma condição de equilíbrio, igualando a força da gravidade com a força magnética gerada pelo eletroímã. Este equilíbrio será possível a partir da medida do deslocamento, feita pelo sensor de posição, e a equivalente compensação da corrente que circula no eletroímã.

## 2.3 Forças de Relutância

Para entendermos como as forças são gerada em um mancal magnético convencional e também em um mancal motor vamos considerar agora a geração de forças de relutância entre um eletroímã e um material ferromagnético, como mostrado na figura (2.2).

Os desenvolvimentos a seguir podem ser encontrados com maiores detalhes em (G. Schweitzer & Traxler 1994).

Quando uma corrente elétrica flui através das espiras de um eletroímã surge uma força magnetomotriz  $F_{mm}$  dada por:

$$F_{mm} = ni \tag{2.1}$$

onde  $n$  representa o número de espiras do eletroímã e  $i$  a corrente que está circulando.

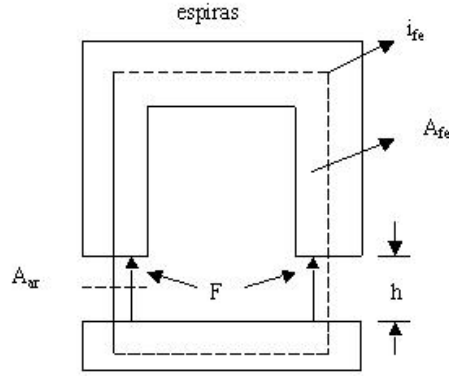


FIGURA 2.2: Força Gerada por um eletroímã

O fluxo magnético que surge em função da força magnetomotriz é uma função da relutância  $\mathcal{R}$  do circuito magnético, ou seja:

$$\phi = \frac{F_{mm}}{\mathcal{R}} \quad (2.2)$$

Podemos afirmar que a relutância total para o dispositivo da figura (2.2) é dada pela soma das relutâncias do material ferromagnético  $\mathcal{R}_{fe}$  com a relutância do par de entrefeitos  $\mathcal{R}_{ar}$  vistos na figura (2.2), isto é:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{fe} + \mathcal{R}_{ar} \quad (2.3)$$

Ainda podemos dizer que a relutância  $\mathcal{R}$  para as duas parcelas será dada por:

$$\mathcal{R}_{fe} = \frac{1}{\mu_0 \mu_{rfe}} \frac{l_{fe}}{A_{fe}} \quad (2.4)$$

$$\mathcal{R}_{ar} = \frac{1}{\mu_0 \mu_{rar}} \frac{l_h}{A_{ar}} \quad (2.5)$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade do vácuo,  $\mu_r$  a permeabilidade relativa do meio onde se estabelece o fluxo,  $l_{fe}$  o comprimento do material ferromagnético e  $A_{fe}$  a sua área de seção transversal. De forma análoga, o entrefeito tem comprimento  $h$  e área  $A_{ar}$ .

Sabendo que  $\mu_{rfe}$  varia de 2000 a 6000 e que  $\mu_{rar}$  é igual a 1, podemos aproximar  $\mathcal{R}$  como:

$$\mathcal{R} = 2\mathcal{R}_{ar} = \frac{2l_h}{\mu_0 A_{ar}} \quad (2.6)$$

Substituindo (2.1) e (2.6) em (2.2) chegamos a uma expressão final para o fluxo magnético dada por:

$$\phi = \frac{\mu_0 n i A_{ar}}{2h} \quad (2.7)$$

Conforme pode ser visto em (Hayt 1988) e (J.R. Reitz & R.W.Christy 1992), quando é estabelecido um fluxo magnético em um circuito com entreferro, aparece uma força de relutância entre os materiais ferromagnéticos que tende a diminuir a distância  $h$ . A intensidade desta força é dada pela seguinte equação:

$$f_{\mathcal{R}} = \frac{\phi^2}{2\mu_0 A_{ar}} \quad (2.8)$$

Desta equação podemos chegar à equação para a força total considerando os dois entreferros existentes no modelo da figura (2.2) que será dada por:

$$f_{\mathcal{R}\mathcal{R}} = 2f_{\mathcal{R}} = \frac{\mu_0 A_{ar} n^2 i^2}{4 h^2} \quad (2.9)$$

## 2.4 Mancais Magnéticos Convencionais

Os sistemas eletromagnéticos podem gerar somente forças de atração. Recorrendo novamente ao esquema da figura (2.2), as forças ocorrem sempre em direções opostas e desta forma a força resultante sobre a esfera poderá ser controlada em amplitude e direção. É óbvio, que há a necessidade de dois atuadores gerando forças em ambas as direções.

Se  $h$  denota o gap nominal, quando a esfera está na posição média, e  $x(t)$  é o deslocamento, então podemos afirmar que os atuadores são idênticos e as forças à esquerda e à direita são:

$$f_l(t) = -\frac{\mu_0 a n^2}{4} \left( \frac{i_l(t)}{h + x(t)} \right)^2 \quad (2.10)$$

$$f_r(t) = \frac{\mu_0 a n^2}{4} \left( \frac{i_r(t)}{h - x(t)} \right)^2 \quad (2.11)$$

A expressão para a força resultante  $f_x = f_l + f_r$  não é muito simples, trazendo complicações para a lei de controle devido ao fato de possuir duas variáveis de controle independente, as correntes  $i_r$  e  $i_l$  e também devido à sua estrutura não-linear. Uma possibilidade para a simplificação desta situação é a utilização de correntes diferenciais. Supondo que:

$$i_l(t) = i_b(t) - i_x(t) \quad (2.12)$$

$$i_r(t) = i_b(t) + i_x(t) \quad (2.13)$$

percebemos agora que existe somente uma variável de controle dada por  $i_x(t)$  que é uma corrente diferencial que será adicionada ou subtraída de uma corrente de base  $i_b(t)$ . Com isto, a força resultante será dada por:

$$f_x = f_l + f_r = \frac{\mu_0 a n^2}{4} \left[ \left( \frac{i_b + i_x}{h - x} \right)^2 - \left( \frac{i_b - i_x}{h + x} \right)^2 \right] \quad (2.14)$$

Mantendo-se a corrente de base  $i_b(t)$  fixa, a intensidade e o sinal da força resultante pode ser variada através da variável  $i_x(t)$ . Sabendo que esta variável e os deslocamentos são normalmente pequenos, o ponto de operação dado por  $x_0 = 0$  e  $i_{x0} = 0$  pode ser considerado, e a expressão linearizada será dada por:

$$f_x(t) = k_p x(t) + k_i i_x(t) \quad (2.15)$$

onde as constantes  $k_p$  e  $k_i$  são dadas por:

$$k_p = \left. \frac{\partial f_x}{\partial x} \right|_{0,0} = \frac{\mu_0 a n^2 i_b^2}{h^3} \quad (2.16)$$

$$k_i = \left. \frac{\partial f_x}{\partial i_x} \right|_{0,0} = \frac{\mu_0 a n^2 i_b}{h^3} \quad (2.17)$$

Se adicionarmos agora um novo par eletromagnético na direção perpendicular (direção

$y$ ) será possível gerar forças de posicionamento nesta direção. De forma análoga à direção  $x$  chegaremos à seguinte equação para a direção  $y$  no caso não-linear:

$$f_y = \frac{\mu_0 a n^2}{4} \left[ \left( \frac{i_b + i_y}{h - y} \right)^2 - \left( \frac{i_b - i_y}{h + y} \right)^2 \right] \quad (2.18)$$

cuja aproximação linear resulta em:

$$f_y(t) = k_p y(t) + k_i i_y(t) \quad (2.19)$$

onde as constantes  $k_p$  e  $k_i$  são as mesmas deduzidas anteriormente, desde que os elementos verticais sejam idênticos aos horizontais.

## 2.5 Comentários

Neste capítulo foram discutidos os princípios básicos de funcionamento dos mancais magnéticos; onde um sensor irá medir a posição de um rotor em relação a uma posição de referência, um controlador irá ler os sinais gerados pelos sensores e enviá-los para o amplificador de potência, que por sua vez irá gerar as correntes diferenciais que serão responsáveis pelo posicionamento do rotor numa posição desejada; classificação: os mancais eletromagnéticos e eletrodinâmicos. Foi visto como as forças são geradas em um mancal magnético.

No capítulo seguinte será abordado alguns conceitos sobre Motores AC, em especial as máquinas de indução, sua constituição e particularidades.

# Capítulo 3

## Motores AC

### 3.1 Introdução

O mancal motor existente no protótipo originou-se de um motor de indução trifásico convencional que teve os enrolamentos de seu estator modificados para que passasse a funcionar como motor de indução bifásico de 4 pólos.

Maiores detalhes sobre esta mudança serão vistos no próximo capítulo, neste, faremos uma breve recordação sobre os aspectos básicos de motores AC. Para maiores detalhes ver (A.E. Fitzgerald 1952).

### 3.2 Conceitos Preliminares

A lei de Faraday,  $e = d\lambda/dt$ , descreve quantitativamente a indução de tensões por parte de um campo magnético variável no tempo. A conversão eletromecânica de energia ocorre quando a variação do fluxo é associada ao movimento mecânico. Em máquinas rotativas, são geradas tensões em enrolamentos ou grupos de bobinas, pela rotação mecânica destes enrolamentos em um campo magnético, por um campo magnético girante que atravessa um enrolamento, ou fazendo com que a relutância do circuito magnético varie com a rotação do motor.

Por qualquer destes métodos, o fluxo concatenado com uma bobina específica varia ciclicamente, e gerando-se uma tensão. Um grupo de bobinas, interligadas de modo que todas as tensões nelas geradas contribuem positivamente ao resultado final, é chamado

de **enrolamento de armadura**. A armadura de uma máquina c.c é peça rotativa, ou **rotor**. A armadura de um gerador de c.a, alternador, ou gerador síncrono é a peça estacionária.

As bobinas são enroladas sobre núcleos de ferro, a fim de que o caminho de fluxo através delas possa ser tão eficiente quanto possível. Devido ao ferro da armadura ser submetido a um fluxo magnético variável, aparecem nele, correntes de Foucault; para minimizar as perdas por corrente de Foucault, o ferro da armadura é construído de lâminas, ou chapas finas. O circuito magnético é complementado através do ferro de outra peça da máquina, e as bobinas excitadoras, ou enrolamentos de campo, são colocadas sobre esta peça para agir como fontes primárias de fluxo. Em máquinas pequenas podem ser usados ímãs permanentes.

### 3.3 Máquinas de Indução

O motor de indução converteu-se no tipo de motor mais usado na indústria. Este fato deve-se à maioria dos sistemas atuais de distribuição de energia elétrica serem de corrente alternada. Comparando com o motor de corrente contínua, o motor de indução tem como vantagem a sua simplicidade, que se traduz em baixo custo e máxima eficácia com manutenção mínima. O rendimento é elevado para média e máxima carga, e pode-se assegurar um bom factor de potência com uma seleção correta.

Uma forma de excitar os enrolamentos do estator do rotor ocorre na **máquina de indução**, na qual há correntes alternadas nos dois enrolamentos, do estator e do rotor. O exemplo mais comum é o motor de indução, no qual a corrente alternada é fornecida diretamente ao estator e por indução (i.e, por ação de transformador) ao rotor. Embora o motor de indução seja o mais comum de todos os motores, a máquina de indução é raramente usada como gerador; suas características de desempenho como gerador não são satisfatórias para a maioria das aplicações.

No motor de indução, o enrolamento do estator é essencialmente o mesmo do motor síncrono. No rotor, o enrolamento é eletricamente fechado sobre si mesmo, e quase sempre não tem terminais externos; as correntes são induzidas nele pela ação de transformador do enrolamento do estator. A característica usual de velocidade-conjugado do motor de indução apresenta uma ligeira queda de velocidade ao aumentar a carga

no eixo.

### 3.3.1 Motores Elétricos e sua Importância

O acionamento de máquinas e equipamentos mecânicos por motores elétricos é um assunto de extraordinária importância econômica. No campo de acionamentos industriais, avalia-se que de 70 a 80 % da energia elétrica consumida pelo conjunto de todas as indústrias seja transformada em energia mecânica através de motores elétricos. A figura (3.1) mostra alguns motores elétricos.



FIGURA 3.1: Motores Elétricos

### 3.3.2 Constituição do Motor de Indução

O motor assíncrono é constituído basicamente pelos seguintes elementos:

- um circuito magnético estático, constituído por chapas ferromagnéticas empilhadas e isoladas entre si, ao qual se dá o nome de estator;
- por um rotor constituído por um núcleo ferromagnético, também laminado, sobre o qual se encontra um enrolamento ou um conjunto de condutores paralelos, nos quais são induzidas correntes provocadas pela corrente alternada das bobinas do estator.



- por bobinas (n. de grupos, consoante o motor monofásico ou polifásico) localizadas em cavas abertas no estator e alimentadas pela rede de corrente alternada;

O rotor é apoiado num veio, que por sua vez transmite à carga a energia mecânica produzida. O entreferro (distância entre o rotor e o estator) é bastante reduzido, de forma a reduzir a corrente em vazio e portanto as perdas, mas também para aumentar o fator de potência em vazio.

A figura (3.2) mostra os diversos elementos que constituem o motor assíncrono de rotor em gaiola de esquilo.

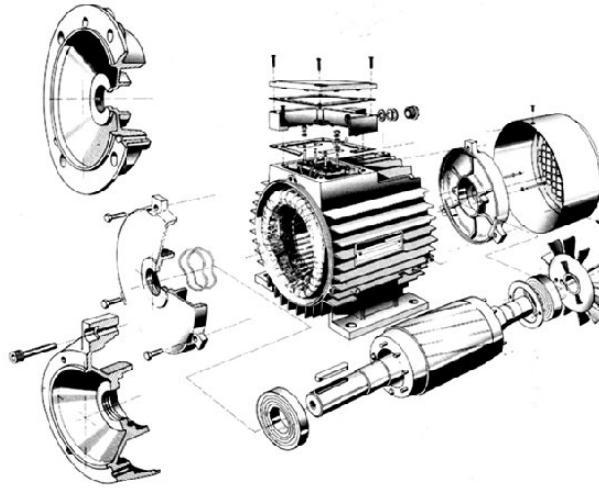


FIGURA 3.2: Partes de um motor assíncrono

### 3.3.3 Funcionamento de um Motor Assíncrono

A partir do momento que os enrolamentos localizados nas cavas do estator são sujeitos a uma corrente alternada, gera-se um campo magnético no estator, conseqüentemente, no rotor surge uma força eletromotriz induzida devido ao fluxo magnético variável que atravessa o rotor. A f.e.m. induzida dá origem a uma corrente induzida no rotor que tende a opor-se à causa que lhe deu origem, criando assim um movimento giratório no rotor.

Como podemos constatar o princípio de funcionamento do motor de indução baseia-se em duas leis do Eletromagnetismo, a Lei de Lenz e a Lei de Faraday

**Faraday:** “Sempre que através da superfície abraçada por um circuito tiver lugar uma variação de fluxo, gera-se nesse circuito uma força eletromotriz induzida. Se o circuito é fechado será percorrido por uma corrente induzida”.

**Lenz:** “O sentido da corrente induzida é tal que esta pelas suas ações magnéticas tende sempre a opor-se à causa que lhe deu origem”.

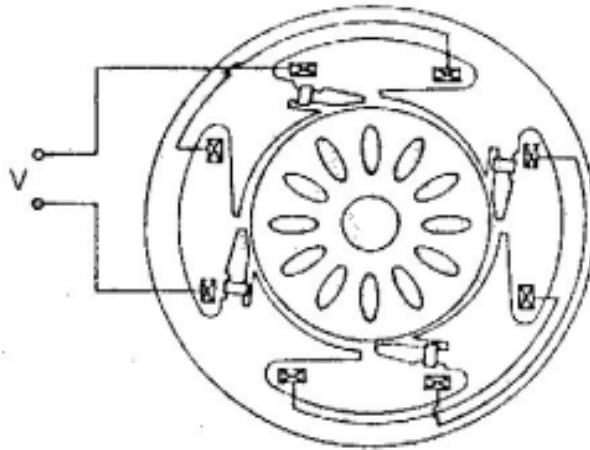


FIGURA 3.3: Estator de um motor assíncrono

### 3.3.4 Aplicações

O motor assíncrono tem atualmente uma aplicação muito grande tanto na indústria como em utilizações domésticas, dada a sua grande robustez, baixo preço, arranque fácil (pode mesmo ser direto, em motores de baixa potência). Não possui coletor (orgão delicado e caro) tratando-se de um gaiola de esquilos; não produz faíscas e tem portanto uma manutenção muito mais reduzida do que qualquer outro motor. É utilizado o motor monofásico para baixas potências (até 1 a 2 Kw) e o polifásico para potências superiores.



FIGURA 3.4: Aplicação de motores assíncronos

### 3.3.5 Perdas num Motor

As perdas que ocorrem num motor podem ser divididas em 4 tipos :

- **Perdas Eléctricas** - As perdas eléctricas são do tipo  $RI^2$ , aumentam acentuadamente com a carga aplicada ao motor. Estas perdas, por efeito de Joule podem ser reduzidas, aumentando a seção dos condutores;
- **Perdas Magnéticas** - ocorrem nas lâminas de ferro do estator e do rotor. Ocorrem devido ao efeito de histerese e às correntes induzidas (neste caso, correntes de Foucault), e variam com a densidade do fluxo e a frequência. Podem ser reduzidas através do aumento da seção do ferro no estator e rotor, através do uso de lâminas delgadas e do melhoramento dos materiais magnéticos;
- **Perdas Mecânicas** - são devido à fricção dos componentes, ventilação e perdas devido à oposição do ar. Podem ser reduzidas, usando componentes com baixa fricção e com o aperfeiçoamento do sistema de ventilação;
- **Perdas Parasitas** - são devidas a fugas do fluxo, distribuição de corrente não uniforme, imperfeições mecânicas nas aberturas para escoamento do ar, e irregularidades na densidade do fluxo do ar ao ser escoado pelas aberturas. Podem ser reduzidas através da otimização do projeto do motor e ainda de uma produção ou fabrico cuidadoso.



FIGURA 3.5: Aplicação de motores assíncronos

### 3.3.6 Motores de Indução Monofásicos

Os motores monofásicos são assim chamados porque os seus enrolamentos de campo são ligados diretamente a uma fonte monofásica . Os motores de indução monofásicos são a alternativa natural aos motores de indução polifásicos, nos locais onde não se dispõe de alimentação trifásica, como residências, escritórios, oficinas e em zonas rurais. Apenas se justifica a sua utilização para baixas potências (1 a 2 KW). Entre os vários tipos de motores elétricos monofásicos, os motores com rotor tipo gaiola destacam-se pela simplicidade de fabricação e, principalmente, pela robustez, confiabilidade e manutenção reduzida. Por terem somente uma fase de alimentação, não possuem um campo girante como os motores polifásicos, mas sim um campo magnético pulsante. Para solucionar o problema de arranque utilizam-se enrolamentos auxiliares, que são dimensionados e posicionados de forma a criar uma segunda fase fictícia, permitindo a formação do campo girante necessário para o arranque.

Tipos de motores monofásicos :

- Motor de Pólos Sombreados (ou shaded pole);
- Motor de Fase Dividida (ou split phase);
- Motor de Condensador de Partida (ou capacitor - start);
- Motor de Condensador Permanente (ou permanent - split capacitor);
- Motor com Dois Condensadores (ou two-value capacitor);

### 3.3.7 Motores Polifásicos

O motor de indução polifásico é o tipo mais utilizado, tanto na indústria como no ambiente doméstico, devido à maioria dos sistemas atuais de distribuição de energia elétrica serem trifásicos de corrente alternada. O motores de indução trifásicos, na prática constituem o grande leque dos motores de indução polifásicos e também porque o numero de fases varia o seu comportamento , nomeadamente com a variação do numero de pares de pólos que provoca alterações conhecidas. A utilização de motores de indução trifásicos é aconselhável a partir dos 2 KW , Para potências inferiores justifica-se o monofásico. O motor de indução trifásico apresenta vantagens em relação

ao monofásico, nomeadamente um arranque mais fácil, o ruído é menor e são mais baratos para potências superiores a 2Kw.

### 3.3.7.1 Gaiola de Esquilo

Este é o motor mais utilizado na indústria atualmente. Tem a vantagem de ser mais econômico em relação aos motores monofásicos tanto na sua construção como na sua utilização. Além disso, escolhendo o método de arranque ideal, tem um leque muito maior de aplicações. O rotor em gaiola de esquilo é constituído por um núcleo de chapas ferromagnéticas, isoladas entre si, sobre o qual são colocadas barras de alumínio (condutores), dispostos paralelamente entre si e unidas nas suas extremidades por dois anéis condutores, também em alumínio, que curto-circuitam os condutores, figura (3.6). O estator do motor é também constituído por um núcleo ferromagnético laminado, nas cavas do qual são colocados os enrolamentos alimentados pela rede de corrente alternada trifásica.

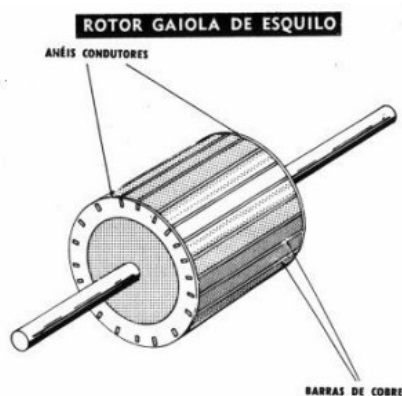


FIGURA 3.6: Motor gaiola de esquilo

A vantagem deste rotor relativamente ao de rotor bobinado é que resulta numa construção do induzido mais rápida, mais prática e mais barato. Trata-se de um motor robusto, barato, de rápida produção, não exigindo coletor (orgão sensível e caro) e de rápida ligação à rede.

### 3.3.7.2 Motor de Rotor Bobinado

A figura (3.7) mostra um rotor bobinado. O rotor é constituído por um núcleo ferromagnético laminado sobre o qual são alojadas as espiras que constituem o enrolamento trifásico, geralmente em estrela. Os três terminais livres de cada uma das bobinas do enrolamento trifásico são ligados a três anéis coletores. Estes três anéis ligam externamente a um reostato de arranque constituído por três resistências variáveis, ligadas também em estrela. Deste modo os enrolamentos do rotor também ficam em circuito fechado. A função do reostato de arranque, ligados aos enrolamentos do rotor, é a de reduzir as correntes de arranque elevadas, no caso de motores de elevada potência. À medida que o motor vai ganhando velocidade, as resistências vão sendo progressivamente retiradas do circuito até ficarem curto-circuitadas (retiradas), quando o motor passa a funcionar no seu regime nominal. Desta forma, o motor de rotor bobinado também funciona com os elementos do rotor em curto-circuito (tal como o motor de rotor em gaiola de esquilo), quando atinge o seu regime nominal. O motor de indução de rotor bobinado substitui o de rotor em gaiola de esquilo em potências muito elevadas devido ao abaixamento da corrente de arranque permitida pela configuração do rotor. Apesar de ser utilizados em casos com velocidades constantes de serviço, como referimos no ultimo parágrafo, aplica-se preferencialmente quando as velocidades de serviço são variáveis.

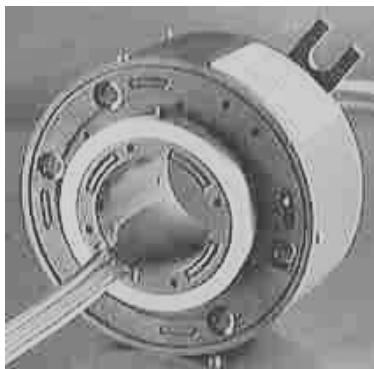


FIGURA 3.7: Rotor Bobinado

## 3.4 Comentários

Neste capítulo foram discutido os conceitos básicos de motores de indução, que servirão de fundamentação para os próximos capítulos, onde será visto que o protótipo em estudo na COPPE teve sua configuração rearranjada de um motor convencional para um motor bifásico de 4 pólos. Vimos o conceito de motor de indução, onde as correntes alternadas são injetadas diretamente no estator e por meio de indução no rotor.

Foram abordados ainda os principais elementos que constituem um motor de indução e o princípio de funcionamento de um motor assíncrono. Os motores monofásicos e polifásicos também foram vistos, em especial este último, onde foram vistos duas possíveis configurações: o gaiola de esquilo e o rotor bobinado.

No próximo capítulo veremos com mais detalhes o mancal motor, seus arranjos e características, a geração das correntes nas fases A e B no estator e no rotor, as forças radiais exercidas sobre o rotor como função das correntes diferenciais e finalmente veremos um controle por tensão, onde é possível determinar um parâmetro que relacione tensão e corrente como variáveis de controle.

# Capítulo 4

## O Mancal Motor

### 4.1 Introdução

Conforme mencionado anteriormente, cada um dos mancais motores do protótipo foi obtido a partir de um motor a indução convencional, trifásico, que teve seu arranjo de bobinas modificado para uma configuração bifásica com 4 pólos. As fase A e B estão defasadas de  $45^\circ$ . Um esquema pode ser visto na figura (4.1); a sequência dada por  $A_1 a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} a_{16} A_2$  indica o caminho físico percorrido pelo fio utilizado para construir a bobina  $A_1 A_2$ .

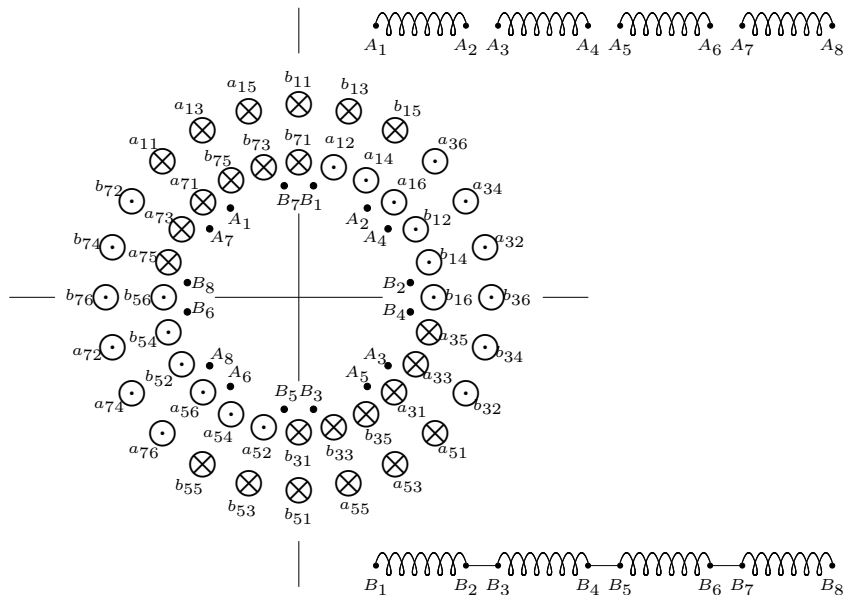


FIGURA 4.1: Enrolamentos do mancal-motor de indução

Percebe-se que na fase B as 4 bobinas são conectadas em série, pois a fase B não



será utilizada para fins de controle de posição. Quando as bobinas da fase A recebem a mesma corrente e mantemos uma defasagem de  $90^\circ$  entre as correntes aplicadas às fases A e B, o dispositivo irá gerar torque, operando como um motor convencional. Entretanto, se as amplitudes das correntes alternadas, em cada um dos 4 pólos da fase A forem controladas independentemente, mantendo-se a defasagem de  $90^\circ$  em relação à fase B o dispositivo poderá, além de gerar torque, posicionar o rotor na posição central no caso dos deslocamentos radiais. Para esta dupla capacidade dá-se o nome de *mancal-motor*.

Maiores detalhes sobre o material deste capítulo podem ser vistos em (David 2000).

## 4.2 Desenvolvimento

O esquema mostrado na figura (4.2) mostra uma melhor visualização de cada um dos 4 pólos em cada uma das fases do motor.

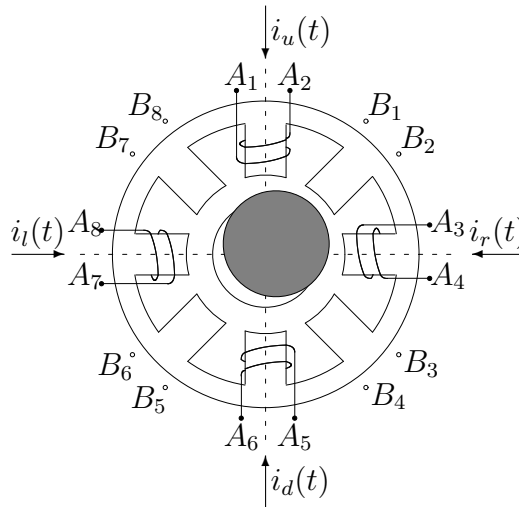


FIGURA 4.2: Representação física dos quatro pólos nas fases A e B

Impondo correntes independentes a cada um dos pólos da fase A o efeito mancal irá aparecer. Se estas correntes forem alternadas, com a mesma frequência, e com  $90^\circ$  de defasagem em relação à fase B estaremos forçando o aparecimento de torque e de forças de restauração. A idéia usada no mancal tradicional que utiliza correntes diferenciais para posicionar um rotor, pode ser adaptada neste caso, ou seja, teremos uma corrente de base  $i_A(t) = I_A \sin \omega t$  e correntes diferenciais nas duas direções  $x$  e  $y$  dadas por

$i_x(t) = I_x \text{sen } \omega t$  e  $i_y(t) = I_y \text{sen } \omega t$ . Desta forma podemos escrever que as correntes totais na fase A serão dadas por:

$$i_l(t) = i_A(t) - i_x(t) = I_A \text{sen } \omega t - I_x \text{sen } \omega t = (I_A - I_x) \text{sen } \omega t \quad (4.1)$$

$$i_r(t) = i_A(t) + i_x(t) = I_A \text{sen } \omega t + I_x \text{sen } \omega t = (I_A + I_x) \text{sen } \omega t \quad (4.2)$$

$$i_u(t) = i_A(t) - i_y(t) = I_A \text{sen } \omega t - I_y \text{sen } \omega t = (I_A - I_y) \text{sen } \omega t \quad (4.3)$$

$$i_d(t) = i_A(t) + i_y(t) = I_A \text{sen } \omega t + I_y \text{sen } \omega t = (I_A + I_y) \text{sen } \omega t \quad (4.4)$$

onde  $I_x$  e  $I_y$  são as amplitudes diferenciais, ou seja, sinais constantes ou de variação lenta que serão gerados pelo sistema de controle para posicionamento do rotor. A amplitude de corrente de base é usualmente igual para todas as fases, ou seja:  $I_A = I_B = I_0$ . É importante destacar que as correntes precisam ficar limitadas em valores suficientemente baixos para evitar a saturação do circuito magnético do motor.

O circuito da figura (4.3), mostra o modelo considerado para cada uma das fases em regime permanente do protótipo (David 2000), (Woodson & Melcher 1968):

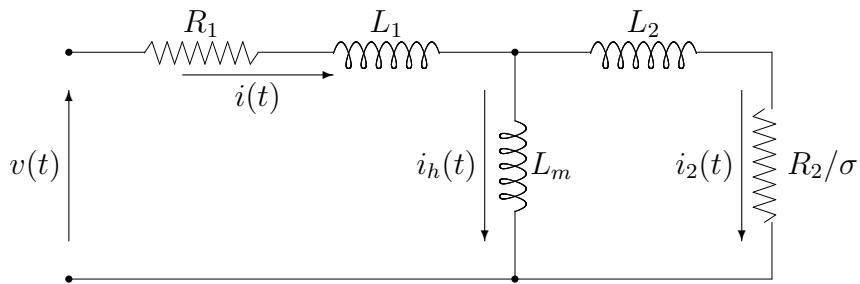


FIGURA 4.3: Circuito equivalente por fase do motor

onde  $R_1$  e  $L_1$  são, respectivamente, a resistência e a indutância do estator,  $R_2$  e  $L_2$  são os parâmetros do rotor refletidos no estator,  $L_m$  a indutância de magnetização e  $\sigma$  é o escorregamento.

As forças radiais geradas pelo mancal-motor dependem do fluxo magnético do entreferro que, por sua vez, depende da corrente de magnetização  $i_h(t)$ . Uma rápida análise do circuito da figura (4.3) mostra que a relação entre a corrente de entrada  $i(t)$  e a corrente de magnetização  $i_h(t)$  será dada por:

$$i_h(s) = H(s)i(s) = \frac{1 + \sigma\tau_2 s}{1 + \sigma(\tau_2 + \tau_m)s} i(s) \quad (4.5)$$

onde  $\tau_2 = L_2/R_2$  e  $\tau_m = L_m/R_2$ . Quando impomos uma corrente de entrada dada por  $i(t) = I \text{sen } \omega t$  é possível demonstrar pelo teorema fundamental da resposta em frequência que, em regime:

$$i_h(t) = I_h \text{sen}(\omega t + \beta) \quad (4.6)$$

onde  $I_h = \alpha(\omega)$  e  $\beta = \beta(\omega)$ .

Como  $\alpha(\omega) = |H(j\omega)|$  e  $\beta(\omega) = \angle H(j\omega)$  se fizermos em (4.5)  $s = j\omega$ , teremos:

$$\alpha(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \tau_2^2(\sigma\omega)^2}{1 + (\tau_2 + \tau_m)^2(\sigma\omega)^2}} \quad (4.7)$$

$$\beta(\omega) = \angle H(j\omega) = \arctan \frac{-(\sigma\omega)\tau_m}{1 + (\sigma\omega)^2\tau_2(\tau_2 + \tau_m)} \quad (4.8)$$

Para um valor fixo do escorregamento  $\sigma$  as equações anteriores dão origem a um diagrama de Bode bastante conhecido, conforme pode ser visto na figura (4.4).

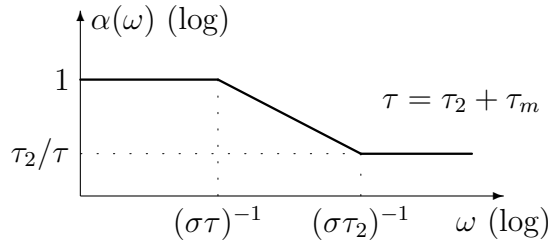


FIGURA 4.4: Diagrama assintótico do ganho de amplitude

As equações (4.7) e (4.8) mostram que  $\alpha$  e  $\beta$  dependem também do escorregamento  $\sigma$  além de  $\omega$ . Para cada um dos pólos da fase A, a corrente de base e as correntes diferenciais  $i_x$  e  $i_y$  irão gerar correntes de magnetização associadas, que por sua vez irão gerar fluxo conforme podemos observar nas equações abaixo:

$$i_A(t) = I_0 \text{sen } wt \quad \Rightarrow \quad i_{Ah}(t) = \alpha I_0 \text{sen}(wt + \beta) \quad (4.9)$$

$$i_x(t) = I_x \text{sen } wt \quad \Rightarrow \quad i_{xh}(t) = \alpha I_x \text{sen}(wt + \beta) \quad (4.10)$$

$$i_y(t) = I_y \text{sen } wt \quad \Rightarrow \quad i_{yh}(t) = \alpha I_y \text{sen}(wt + \beta) \quad (4.11)$$

De modo semelhante, a corrente imposta na fase B também irá gerar uma corrente de magnetização.

$$i_B(t) = I_0 \cos wt \quad \Rightarrow \quad i_{Bh}(t) = \alpha I_0 \cos(wt + \beta) \quad (4.12)$$

Conforme podemos ver nas equações (4.7) e (4.8) estas correntes de magnetização dependem da frequência das correntes impostas e do escorregamento  $\sigma$ .

Partindo da condição de que o conjunto não está saturado, a geração das forças na fase *A* pode ser dividida em quatro partes, cada uma associada a um dos pólos na fase *A* conforme pode ser visto na figura (4.2). Considerando o pólo do lado direito da figura citada podemos dizer que a que a corrente  $i_r(t)$  imposta naquele pólo irá gerar uma força magnemotriz dada por (Chapman 1999):

$$F_r = n_e i_{rh}(t) = n_e (i_{Ah}(t) + i_{xh}(t)) \quad (4.13)$$

onde as correntes de magnetização  $i_{Ah}$  e  $i_{xh}$  estão definidas nas equações (4.9) e (4.10) e  $n_e$  é o número de espiras.

Quando ocorre um deslocamento no rotor na direção vertical ou horizontal ( $x$  e  $y$ ) os gaps são dados por: do lado direito ( $h - x$ ); na parte superior ( $h - y$ ) e assim sucessivamente. Se  $\mathcal{R}_r$ ,  $\mathcal{R}_u$ ,  $\mathcal{R}_l$  e  $\mathcal{R}_d$  denotam as relutâncias para os quatro gaps, o diagrama da figura (4.5) mostra a ação da força magnemotriz  $F_r$ .

Aplicando-se a fórmula clássica da relutância (Chapman 1999) para um gap com área  $a$  teremos:

$$\mathcal{R}_r = \frac{h - x}{\mu_0 a}; \quad \mathcal{R}_u = \frac{h - y}{\mu_0 a}; \quad \mathcal{R}_l = \frac{h + x}{\mu_0 a}; \quad \mathcal{R}_d = \frac{h + y}{\mu_0 a} \quad (4.14)$$

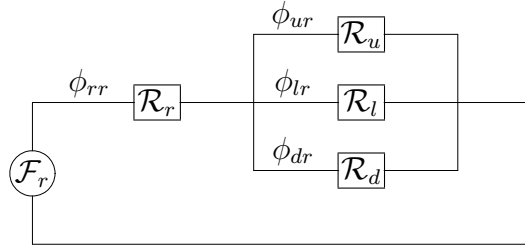


FIGURA 4.5: Geração de fluxo no pólo direito

E a relutância equivalente será:

$$\mathcal{R}_r^{eq} = \frac{\mathcal{R}_r \mathcal{R}_u \mathcal{R}_l + \mathcal{R}_r \mathcal{R}_u \mathcal{R}_d + \mathcal{R}_r \mathcal{R}_l \mathcal{R}_d + \mathcal{R}_u \mathcal{R}_l \mathcal{R}_d}{\mathcal{R}_u \mathcal{R}_l + \mathcal{R}_u \mathcal{R}_d + \mathcal{R}_l \mathcal{R}_d} \quad (4.15)$$

Fazendo as seguintes definições:

$$N = \mathcal{R}_r \mathcal{R}_u \mathcal{R}_l + \mathcal{R}_r \mathcal{R}_u \mathcal{R}_d + \mathcal{R}_r \mathcal{R}_l \mathcal{R}_d + \mathcal{R}_u \mathcal{R}_l \mathcal{R}_d \quad (4.16)$$

$$D_r = \mathcal{R}_u \mathcal{R}_l + \mathcal{R}_u \mathcal{R}_d + \mathcal{R}_l \mathcal{R}_d \quad (4.17)$$

$$D_u = \mathcal{R}_r \mathcal{R}_l + \mathcal{R}_r \mathcal{R}_d + \mathcal{R}_d \mathcal{R}_l \quad (4.18)$$

$$D_l = \mathcal{R}_u \mathcal{R}_r + \mathcal{R}_r \mathcal{R}_d + \mathcal{R}_u \mathcal{R}_d \quad (4.19)$$

$$D_d = \mathcal{R}_u \mathcal{R}_r + \mathcal{R}_r \mathcal{R}_l + \mathcal{R}_u \mathcal{R}_l \quad (4.20)$$

podemos concluir que  $\mathcal{R}_r^{eq} = N/D_r$  e que os fluxos podem ser obtidos por:  $F = \mathcal{R}\phi$ . Com isto podemos escrever as 4 equações geradas pelos fluxos parciais do pólo do lado direito.

$$\phi_{rr}(t) = \frac{F_r}{\mathcal{R}_r^{eq}} = \frac{D_r}{N} n_e (i_{Ah}(t) + i_{xh}(t)) \quad (4.21)$$

$$\phi_{ur}(t) = \frac{\mathcal{R}_l \mathcal{R}_d}{N} n_e (i_{Ah}(t) + i_{xh}(t)) \quad (4.22)$$

$$\phi_{lr}(t) = \frac{\mathcal{R}_u \mathcal{R}_d}{N} n_e (i_{Ah}(t) + i_{xh}(t)) \quad (4.23)$$

$$\phi_{dr}(t) = \frac{\mathcal{R}_u \mathcal{R}_l}{N} n_e(i_{Ah}(t) + i_{xh}(t)) \quad (4.24)$$

De maneira análoga podemos aplicar o mesmo desenvolvimento para os outros 3 pólos conformes será visto a seguir:

**Pólo Superior:**

$$\phi_{ru}(t) = \frac{\mathcal{R}_l \mathcal{R}_d}{N} n_e(i_{Ah}(t) + i_{yh}(t)) \quad (4.25)$$

$$\phi_{uu}(t) = \frac{D_u}{N} n_e(i_{Ah}(t) + i_{yh}(t)) \quad (4.26)$$

$$\phi_{lu}(t) = \frac{\mathcal{R}_r \mathcal{R}_d}{N} n_e(i_{Ah}(t) + i_{yh}(t)) \quad (4.27)$$

$$\phi_{du}(t) = \frac{\mathcal{R}_r \mathcal{R}_l}{N} n_e(i_{Ah}(t) + i_{yh}(t)) \quad (4.28)$$

**Pólo do lado esquerdo:**

$$\phi_{rl}(t) = \frac{\mathcal{R}_u \mathcal{R}_d}{N} n_e(i_{Ah}(t) - i_{xh}(t)) \quad (4.29)$$

$$\phi_{ul}(t) = \frac{\mathcal{R}_l \mathcal{R}_d}{N} n_e(i_{Ah}(t) - i_{xh}(t)) \quad (4.30)$$

$$\phi_{ll}(t) = \frac{D_l}{N} n_e(i_{Ah}(t) - i_{xh}(t)) \quad (4.31)$$

$$\phi_{dl}(t) = \frac{\mathcal{R}_u \mathcal{R}_r}{N} n_e(i_{Ah}(t) - i_{xh}(t)) \quad (4.32)$$

**Pólo Inferior:**

$$\phi_{rd}(t) = \frac{\mathcal{R}_u \mathcal{R}_l}{N} n_e(i_{Ah}(t) - i_{yh}(t)) \quad (4.33)$$

$$\phi_{ud}(t) = \frac{\mathcal{R}_r \mathcal{R}_l}{N} n_e(i_{Ah}(t) - i_{yh}(t)) \quad (4.34)$$

$$\phi_{ld}(t) = \frac{\mathcal{R}_r \mathcal{R}_u}{N} n_e (i_{Ah}(t) - i_{xh}(t)) \quad (4.35)$$

$$\phi_{dd}(t) = \frac{D_d}{N} n_e (i_{Ah}(t) - i_{xh}(t)) \quad (4.36)$$

Se considerarmos o fluxo que entra no rotor sempre positivo, teremos fluxos totais em cada pólo dados por:

$$\phi_{Tr} = \phi_r r + \phi_r u - \phi_r l + \phi_r d \quad (4.37)$$

$$\phi_{Tu} = -\phi_u r - \phi_u u - \phi_u l + \phi_u d \quad (4.38)$$

$$\phi_{Tl} = -\phi_l r + \phi_l u + \phi_l l + \phi_l d \quad (4.39)$$

$$\phi_{Td} = -\phi_d r + \phi_d u - \phi_d l - \phi_d d \quad (4.40)$$

As forças de relutância variam com o quadrado do fluxo total e conseqüentemente as forças radiais geradas pela fase  $A$  nas direções  $x$  e  $y$  serão dadas por:

$$f_{Ax} = \frac{1}{2\mu_0 a} (\phi_{Tr}^2 - \phi_{Tl}^2) \quad (4.41)$$

$$f_{Ay} = \frac{1}{2\mu_0 a} (\phi_{Tu}^2 - \phi_{Td}^2) \quad (4.42)$$

Os 16 fluxos parciais mostrados dependem das correntes de magnetização  $i_{Ah}$ ,  $i_h$  e  $i_{yh}$  que por sua vez dependem das correntes impostas na fase  $A$ , logo deveremos usar as equações (4.9), (4.10) e (4.11). Fazendo as substituições necessárias nas equações (4.37), (4.38), (4.39) e (4.40) e o desenvolvimento algébrico podemos chegar às equações que expressam as forças radiais nas direções  $x$  e  $y$ .

$$f_{Ax} = \frac{\mu_0 a}{2} n_e^2 \alpha^2 \sin^2(wt + \beta) q_x(x, y, I_0, I_x, I_y, h) \quad (4.43)$$

$$f_{Ay} = \frac{\mu_0 a}{2} n_e^2 \alpha^2 \sin^2(wt + \beta) q_y(x, y, I_0, I_x, I_y, h) \quad (4.44)$$

Os fatores  $q_x$  e  $q_y$  são expressões complicadas dadas por:

$$q_x(x, y, I_0, I_x, I_y, h) = \frac{\Delta_1^2 - \Delta_2^2}{H_0^2} \quad (4.45)$$

$$q_y(x, y, I_0, I_x, I_y, h) = \frac{\Delta_3^2 - \Delta_4^2}{H_0^2} \quad (4.46)$$

onde  $\Delta_i$  e  $H_j$  são:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (I_0 + I_x)H_1 + (I_0 + I_y)H_2 - (I_0 - I_x)H_3 + (I_0 - I_y)H_4 \\ \Delta_2 &= (I_0 - I_x)H_5 - (I_0 + I_x)H_3 + (I_0 + I_y)H_6 + (I_0 - I_y)H_7 \\ \Delta_3 &= -(I_0 + I_y)H_1 - (I_0 + I_x)H_3 - (I_0 - I_x)H_2 + (I_0 - I_y)H_8 \\ \Delta_4 &= -(I_0 - I_x)H_5 + (I_0 + I_x)H_3 + (I_0 + I_y)H_8 + (I_0 - I_x)H_7 \\ H_0 &= (h - x)(h - y)(h + x) + (h - x)(h - y)(h + y) + (h - x)(h + x)(h + y) \\ &\quad (h - y)(h + x)(h + y) \\ H_1 &= (h + x + (h - y) + (h + x)(h + y) + (h - y)(h + y) \\ H_2 &= (h + x)(h + y) \\ H_3 &= (h - y)(h + y) \\ H_4 &= (h - y)(h + x) \\ H_5 &= (h - x + (h - y) + (h - x)(h + y) + (h - y)(h + y) \\ H_6 &= (h - x)(h + y) \\ H_7 &= (h - x)(h - y) \\ H_8 &= (h - x)(h + x) \end{aligned}$$

Sabendo que  $I_0$  e  $h$  são constantes, os parâmetros  $q_x$  e  $q_y$  dependem somente das variações ocorridas em  $x$ ,  $y$ ,  $I_x$  e  $I_y$  e sabendo que estas variações são muito pequenas podemos fazer uma linearização em torno do ponto de operação  $P_0 = (0, 0, 0)$  usando computação simbólica. Com isto chegamos a:

$$q_x(x, y, I_x, I_y) = \frac{4I_0^2}{h^3}x + \frac{4I_0}{h^2}I_x \quad (4.47)$$

Podemos chegar a um resultado similar para a direção  $y$ . É necessário destacar que, apesar da grande complexidade do sistema mancal-motor, o sistema de posicionamento da direção  $x$  é desacoplado do sistema de direção  $y$ . Desta forma podemos caminhar para uma solução para as forças nas duas direções através das expressões abaixo:



$$f_{Ax}(x, I_x) = k_p[1 - \cos 2(\omega t + \beta)]x + k_i[1 - \cos 2(\omega t + \beta)]I_x \quad (4.48)$$

$$f_{Ay}(y, I_y) = k_p[1 - \cos 2(\omega t + \beta)]y + k_i[1 - \cos 2(\omega t + \beta)]I_y \quad (4.49)$$

onde os parâmetros  $k_p$  e  $k_i$  são dados por :

$$k_p = \frac{\mu_0 a \eta_e^2 I_0^2}{h^3} \alpha^2 \quad (4.50)$$

$$k_i = \frac{\mu_0 a \eta_e^2 I_0}{h^2} \alpha^2 \quad (4.51)$$

Podemos notar que, embora as fórmulas estejam sugerindo que  $k_p$  e  $k_i$  sejam constantes, sabemos que não é isto que ocorre pois  $\alpha$  depende da frequência e do escorregamento.

Temos ainda as forças geradas pela fase  $B$  que, apesar de não ter correntes diferenciais, irá exercer também um conjunto de forças sobre o rotor.

Assumindo que a corrente de base na fase  $A$  é a mesma na fase  $B$  e que se encontram defasadas de  $90^\circ$  podemos escrever que as forças geradas pela fase  $B$  serão dadas por:

$$f_{Bxb} = k_p[1 - \cos 2(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2})]x_B \quad (4.52)$$

$$f_{Byb} = k_p[1 - \cos 2(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2})]y_B \quad (4.53)$$

Geometricamente, a fase  $B$  está deslocada de  $45^\circ$  em relação à fase  $A$  e, consequentemente,  $x = x_B \cos 45^\circ + y_B \cos 135^\circ$  e  $y = x_B \sin 45^\circ + y_B \sin 135^\circ$  então:

$$f_{Bx} = f_{Bxb} \cos 45^\circ + f_{Byb} \cos 135^\circ$$

$$f_{Bx} = (f_{Bxb} - f_{Byb}) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f_{Bx} = k_p[1 - \cos 2(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2})] \frac{\sqrt{2}}{2} (x_B - y_B)$$

$$f_{Bx} = k_p[1 - \cos 2(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2})]x$$

De forma análoga podemos determinar:

$$\begin{aligned}
f_{By} &= f_{Bxb}\text{sen } 45^\circ + f_{Byb}\text{sen } 135^\circ \\
f_{By} &= (f_{Bxb} + f_{Byb})\frac{\sqrt{2}}{2} \\
f_{By} &= k_p[1 - \cos 2(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2})]\frac{\sqrt{2}}{2}(x_B + y_B) \\
f_{By} &= k_p[1 - \cos 2(\omega t + \beta + \frac{\pi}{2})]y
\end{aligned}$$

Se somarmos agora as forças geradas pela fase  $B$  com as forças geradas pela fase  $A$  teremos as forças radiais totais exercidas sobre o rotor da máquina. Estas forças são dadas por:

$$f_x = f_{Ax} + f_{Bx} = k_p[1 - \cos 2(\omega t + \beta)]x + k_i[1 - \cos 2(\omega t + \beta)]I_x + k_p[1 - \cos(2\omega t + 2\beta + \pi)]x$$

$$f_y = f_{Ay} + f_{By} = k_p[1 - \cos 2(\omega t + \beta)]y + k_i[1 - \cos 2(\omega t + \beta)]I_y + k_p[1 - \cos(2\omega t + 2\beta + \pi)]y$$

Como  $\cos(\phi + \pi) = -\cos \theta$  chegamos a uma expressão final para as forças de relutância que atuam sobre o rotor:

$$f_x = 2k_px + k_i[1 - \cos 2(\omega t + \beta)]I_x \quad (4.54)$$

$$f_y = 2k_py + k_i[1 - \cos 2(\omega t + \beta)]I_y \quad (4.55)$$

Todo o desenvolvimento visto até aqui pode ser visto com mais detalhe em (David 2000) e segue o conceito de variável de controle baseada na corrente.

### 4.3 Controle por Tensão

Podemos notar nas equações das forças, (4.54) e (4.55), que as mesmas dependem da amplitude  $I_x$  e  $I_y$  das correntes  $i_x$  e  $i_y$  impostas às fases. Dizemos então que se trata de um sistema de controle por corrente. Temos agora o propósito de analisar o comportamento do controle, agora tendo como variável de controle a tensão. Para isto, retornemos à análise da figura (4.3). Primeiro encontramos uma função de transferência  $G(s)$  tal

que  $i(s) = G(s)V(s)$ . Do circuito podemos verificar que:

$$\begin{aligned}
 v_{Lm}(t) &= L_m i_h(t) = L_2 i_2(t) + \frac{R_2}{\sigma} i_2(t) \\
 i(t) &= i_h(t) + i_2(t) \\
 v(t) &= R_1 i(t) + L_1 i(t) + V_{Lm} = R_1 i(t) + L_1 i(t) + L_m i_h(t)
 \end{aligned}
 \tag{4.56}$$

Da equação de  $v(t)$  podemos escrever:

$$V(s) = R_1 i(s) + L_1 s i(s) + L_m s i_h(s) \tag{4.57}$$

Para determinar a relação desejada podemos perceber na equação (4.57) que é necessário achar a relação entre  $i_h(s)$  e  $i(s)$ . Da equação de  $i(t)$  tem-se:

$$i_2(s) = i(s) - i_h(s) \tag{4.58}$$

Aplicando Transformada de Laplace em  $v_{Lm}(t)$  e substituindo  $i_2(s)$  por (4.58) tem-se:

$$\begin{aligned}
 L_m s i_h(s) &= L_2 s i_2(s) + \frac{R_2}{\sigma} i_2(s) \\
 L_m s i_h(s) &= L_2 s (i(s) - i_h(s)) + \frac{R_2}{\sigma} (i(s) - i_h(s)) \\
 \sigma L_m s i_h(s) &= \sigma L_2 s (i(s) - i_h(s)) + R_2 (i(s) - i_h(s)) \\
 \sigma L_m s i_h(s) + \sigma L_2 s i_h(s) + R_2 i_h(s) &= \sigma L_2 s i(s) + R_2 i(s) \\
 i_h(s) (\sigma L_m s + \sigma L_2 s + R_2) &= (\sigma L_2 s + R_2) i(s) \\
 i_h(s) &= \left[ \frac{\sigma L_2 s + R_2}{\sigma s (L_m + L_2) + R_2} \right] i(s) \\
 i_h(s) &= D(s) i(s)
 \end{aligned}$$

onde

$$D(s) = \left[ \frac{\sigma L_2 s + R_2}{\sigma s (L_m + L_2) + R_2} \right] \tag{4.59}$$

Substituindo (4.59) em (5.9) temos:

$$V(s) = R_1 i(s) + L_1 s i(s) + L_m s D(s) i(s)$$

$$\begin{aligned}
V(s) &= R_1 i(s) + L_1 s i(s) + L_m s \left[ \frac{\sigma L_2 s + R_2}{\sigma s(L_m + L_2) + R_2} \right] i(s) \\
V(s) &= \left[ R_1 + L_1 s + L_m s \left( \frac{\sigma L_2 s + R_2}{\sigma s(L_m + L_2) + R_2} \right) \right] i(s) \\
V(s) &= \left[ \frac{(\sigma s(L_m + L_2) + R_2)R_1 + (\sigma s(L_m + L_2) + R_2)L_1 s + L_m s(\sigma s L_2 + R_2)}{\sigma s(L_m + L_2) + R_2} \right] i(s) \\
V(s) &= \left[ \frac{\sigma R_1 s(L_m + L_2) + R_2 R_1 + \sigma s^2 L_1(L_m + L_2) + R_2 L_1 s + L_m \sigma L_2 s^2 + R_2 L_m s}{\sigma s(L_m + L_2) + R_2} \right] i(s) \\
V(s) &= \left[ \frac{s^2(\sigma L_1(L_m + L_2) + \sigma L_m L_2) + s(\sigma R_1(L_m + L_2) + R_2 L_1 + R_2 L_m) + R_1 R_2}{\sigma s(L_m + L_2) + R_2} \right] i(s) \\
i(s) &= \left[ \frac{\sigma s(L_m + L_2) + R_2}{s^2(\sigma L_1(L_m + L_2) + \sigma L_m L_2) + s(\sigma R_1(L_m + L_2) + R_2 L_1 + R_2 L_m) + R_1 R_2} \right] V(s) \\
i(s) &= \left[ \frac{[\sigma(L_m + L_2)s + R_2]}{[\sigma L_1(L_m + L_2) + L_m L_2]s^2 + [\sigma R_1(L_m + L_2) + R_2(L_1 + L_m)]s + R_1 R_2} \right] V(s)
\end{aligned}$$

fazendo:

$$\begin{aligned}
L_A &= \sigma(L_m + L_2) \\
l_B &= \sigma L_1(L_m + L_2) + L_m L_2 \\
T_1 &= \sigma R_1(L_m + L_2) + R_2(L_1 + L_m) \\
R &= R_1 R_2
\end{aligned}$$

tem-se:

$$i(s) = \left[ \frac{L_A s + R_2}{L_B s^2 + T_1 s + R} \right] V(s) = G(s)V(s) \quad (4.60)$$

Chega-se à equação de  $G(s)$  que irá relacionar a variável de controle por corrente com uma variável de controle por tensão que será dada por:

$$G(s) = \left[ \frac{L_A s + R_2}{L_B s^2 + T_1 s + R} \right] \quad (4.61)$$

Fazendo  $s = jw$  e calculando  $|G(jw)|$  podemos escrever uma relação entre corrente e tensão:

$$G(jw) = \frac{R_2[R - L_B w^2] - L_A T_1 w^2 + [(R - L_B w^2)L_A w - R_2 T_1 w]j}{(R - L_B w^2)^2 + (T_1 w)^2} \quad (4.62)$$

O parâmetro  $\gamma(w) = |G(jw)|$  irá relacionar tensão e corrente:

$$|G(jw)| = \gamma(w) = \frac{\sqrt{(R_2[R - L_B w^2] - L_A T_1 w^2)^2 + ((R - L_B w^2)L_A w - R_2 T_1 w)^2}}{(R - L_B w^2)^2 + (T_1 w)^2} \quad (4.63)$$

As equações (4.54) e (4.55) dependem das variáveis de controle  $I_x$  e  $I_y$  que dependem das correntes diferenciais  $i_x$  e  $i_y$ . Estas correntes diferenciais podem ser injetadas diretamente nas bobinas ou então elas podem ser consequências das tensões diferenciais  $v_x$  e  $v_y$  impostas às bobinas. As amplitudes destas tensões diferenciais  $v_x$  e  $v_y$  são  $V_x$  e  $V_y$ . Como  $i(s) = G(s)V(s)$  podemos dizer que:

$$I_x = |G(jw)| \text{ ou}$$

$$I_x = \gamma V_x$$

logo as equações (4.54) e (4.55) podem ser reescritas em termos de  $V_x$  e  $V_y$ :

$$f_x = 2k_p x + k_i [1 - \cos 2(\omega t + \beta)] \gamma V_x \quad (4.64)$$

$$f_y = 2k_p y + k_i [1 - \cos 2(\omega t + \beta)] \gamma V_y \quad (4.65)$$

As amplitudes  $V_x$  e  $V_y$  das tensões diferenciais  $v_x$  e  $v_y$  são as novas variáveis de controle. Como  $\gamma$  é uma constante, para valores de regime, podemos considerar que  $K_I = k_i \gamma$  logo, as novas equações para as forças radiais são:

$$f_x = 2k_p x + K_I [1 - \cos 2(\omega t + \beta)] V_x \quad (4.66)$$

$$f_y = 2k_p y + K_I [1 - \cos 2(\omega t + \beta)] V_y \quad (4.67)$$

## 4.4 Comentários

As seções anteriores mostraram os aspectos básicos do estabelecimento do modelo matemático do mancal motor. As forças de relutância  $f_x$  e  $f_y$  dependem dos deslocamentos angulares  $x$  e  $y$  e das variáveis de controle, as amplitudes das correntes, ou tensões diferenciais,  $I_x$ ,  $I_y$  ou  $V_x$  e  $V_y$ .

O posicionamento efetivo do rotor ainda depende de outros fatores, como por exemplo, o estabelecimento de um modelo matemático para o seu comportamento dinâmico. Além disto devemos apresentar estratégias de controle, ou seja, maneiras sistemáticas de encontrar  $I_x$ ,  $I_y$  ou  $V_x$  e  $V_y$  capazes efetivamente de gerar forças  $f_x$  e  $f_y$  que sejam restauradoras.

Estes importantes aspectos podem ser vistos com mais detalhes em (David 2000).

# Capítulo 5

## Acoplamento Eletromecânico

### 5.1 Introdução

Como visto nos capítulos anteriores, o efeito mancal dos protótipos em estudo é conseguido pela alteração dos enrolamentos de um motor de indução convencional. O resultado final é um novo motor de indução, bifásico, com 4 pólos e onde os enrolamentos da fase *A* do estator são divididos em 4 partes que passam a ter excitação autônoma.

O funcionamento deste motor modificado como mancal, ou seja, a sua capacidade de gerar forças radiais de posicionamento para o rotor, já foi visto e explicado no capítulo 4. O próximo objetivo é estudar como as modificações feitas alteram a capacidade de gerar torque do motor. Em outras palavras, desejamos obter o modelo matemático rotacional para o motor alterado. Isto será visto no capítulo 6.

Neste capítulo reveremos a teoria básica que permite estabelecer modelos matemáticos para sistemas eletromecânicos. O material é clássico e pode ser encontrado em várias fontes : (A.E. Fitzgerald 1952),(Chapman 1999), (Cad 2000) e outros. Seguiremos mais de perto (Woodson & Melcher 1968).

### 5.2 Modelo Geral do Acoplamento Eletromecânico

Os inúmeros equipamentos práticos onde há conversão de energia elétrica em mecânica, e vice-versa, podem exibir as mais variadas formas, tamanhos e estruturas. Apesar de

toda essa diversidade, esses importantes dispositivos podem ser estudados por meio de uma ferramenta teórica única que se pode chamar de **Acoplamento Eletromecânico (AE)**.

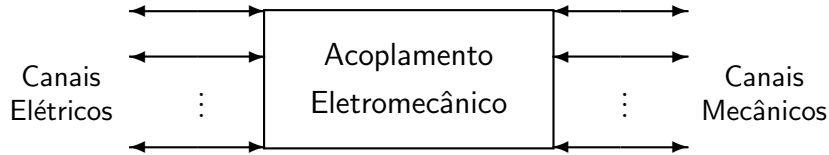


FIGURA 5.1: Estrutura Geral do AE

Por meio dos canais elétricos mostrados na figura (5.1) pode-se injetar, ou retirar, energia elétrica do acoplamento. Por meio dos canais mecânicos pode-se retirar, ou injetar, energia mecânica.

No miolo da estrutura vista acima reside o acoplamento eletromecânico propriamente dito, onde são feitas as conversões de energia. Na maioria das vezes, a energia que entra é armazenada em campos magnéticos antes de se converter e sair. Para modelar o funcionamento do AE, com todas as interações entre energias elétricas, magnéticas e mecânicas, será necessário o uso das equações de Maxwell.

Seguem alguns exemplos ilustrativos onde se pode observar como casos particulares se encaixam nesse esquema geral.

Seja um atuador mecânico solenoidal, um dispositivo capaz de gerar, por meio de um eletroímã, forças para acionar válvulas, relés ou outros equipamentos de dimensões modestas. Temos um único canal elétrico por onde se injeta no sistema uma corrente DC  $i$ , e um único canal mecânico que gera uma força  $f$ .

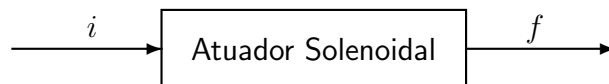


FIGURA 5.2: Atuador solenoidal como AE

Para descobrir como a força  $f$  (saída) é obtida a partir da corrente  $i$  (entrada) seria preciso analisar os meandros eletro-magneto-mecânicos internos.

É interessante notar que a figura (5.2) mostra o acoplamento eletromecânico, e isto é apenas parte do que interessa em um caso prático. Será necessário conhecer, por



exemplo, a posição  $y$  da carga onde a força atua. Um modelo puramente mecânico, envolvendo aplicação das leis de Newton, resolveria este passo.

Um outro aspecto: muitas vezes não há disponibilidade de um gerador de correntes, mas sim de um gerador de tensões. Como a corrente  $i$  é obtida a partir da tensão  $v$ ? Um modelo puramente elétrico envolvendo a aplicação das leis de Kirchhoff resolveria este passo. Um diagrama mais fiel para o atuador levando em conta estes comentários seria

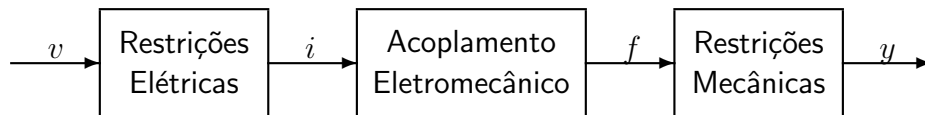


FIGURA 5.3: Atuador solenoidal como AE + restrições

Considere agora como exemplo um gerador síncrono trifásico. Teríamos um único canal mecânico de entrada por onde um torque é aplicado no AE, e três canais elétricos de saída, fornecendo correntes AC com amplitudes fixas e iguais entre si e defasadas de  $120^\circ$  entre si.

Em motores elétricos, de modo geral, há apenas um canal mecânico de saída, que fornece torque  $T_e$  à carga (ou uma força  $F_e$  no caso de motores lineares). O número de canais elétricos de entrada depende do tipo de motor (síncrono ou de indução ou DC, por exemplo) e do número de fases de alimentação.

## 5.3 Canais Elétricos

Para facilitar as aplicações futuras, a discussão será voltada para o caso de motores elétricos. Deste modo, os canais elétricos injetarão energia elétrica no AE e haverá um único canal mecânico por onde se retirará torque.

Passaremos a apresentar, de modo sucinto, as características básicas de um canal elétrico. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências do início deste capítulo e envolvem a aplicação criteriosa (e simples) das equações de Maxwell.

Cada canal (ou terminal) elétrico é um circuito por onde flui uma corrente  $i$ , que pode ser representado graficamente pela figura (5.4).

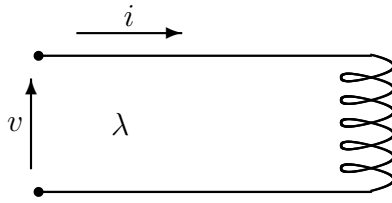


FIGURA 5.4: Esquema de canal elétrico

Em primeiro lugar, considera-se que o canal é um condutor ideal; qualquer resistência porventura existente será colocada fora do canal, nas restrições elétricas.

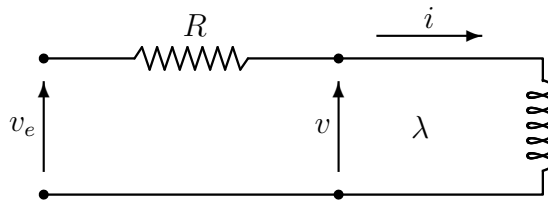


FIGURA 5.5: Canal elétrico e restrições

Na grande maioria dos casos o condutor de um canal é enrolado de maneira helicoidal, formando uma bobina composta por várias espiras. Este formato é escolhido porque correntes percorrendo bobinas dão origem a campos magnéticos concentrados, e com propriedades interessantes, no interior das espiras. Para reforçar esta tendência, coloca-se material ferromagnético no interior das espiras de uma bobina.

Assim, pode-se imaginar cada canal elétrico como algo que aprisiona e concentra campos eletromagnéticos no interior do AE, lembrando que campo magnético é toda região ao redor de um ímã ou de um condutor percorrido por corrente elétrica. Usando mais precisão na linguagem, um canal aprisiona, concentra e direciona um fluxo magnético  $\phi$ . Deste modo, a cada terminal se associa o seu enlace de fluxo  $\lambda$  que pode ser visto como o fluxo total aprisionado, ou seja, o fluxo concatenado é o produto do fluxo pelo número de espiras com ele concatenados, supondo-se que todo o fluxo se concatena com todas as espiras. À medida que a corrente e o fluxo aumentam, o fluxo concatenado cresce continuamente.

O cálculo dos enlaces de fluxo pode ser feito pela aplicação das leis de Maxwell. Dependendo da geometria do AE e do número de bobinas ou partes móveis no seu interior, este cálculo pode ter níveis variados de dificuldade. De modo geral pode-se

dizer que o enlace de fluxo em um canal depende da corrente nesse canal, das correntes nos outros canais, e das posições das partes móveis.

Seja  $\lambda_k(t)$  o enlace de fluxo do  $k$ -ésimo canal no instante  $t$  e  $i_k(t)$  a corrente instântanea nesse canal. Supondo  $m$  canais elétricos, podemos definir os vetores de enlace de fluxo e da corrente no AE:

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \vdots \\ \lambda_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad e \quad I(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_m(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad (5.1)$$

Nos motores que nos interessam há apenas uma parte móvel, o rotor, e sua posição em cada instante é perfeitamente determinada por um ângulo  $\theta(t)$ . No caso mais geral, de  $r$  partes ou bobinas móveis precisamos de  $r$  posições ou ângulos para definir a geometria em cada instante. Sendo  $y_k(t)$  a posição (ou ângulo) da  $k$ -ésima parte, o vetor de posição (ou de geometria) do AE é:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r \quad (5.2)$$

A aplicação das equações de Maxwell (lei de Ampère), levando em conta as hipóteses simplificadoras usuais levaria a

$$\Lambda(t) = f_\Lambda(I(t), Y(t)) \quad (5.3)$$

Esta equação mostra que os enlaces de fluxo dependem das correntes e das posições de modo estático ou instântaneo. Em muitos dispositivos práticos, o uso de hipótese de trabalho suaves e razoáveis faz com que a função  $f_\Lambda$  seja linear e simétrica com relação

a  $I$ :

$$\Lambda(t) = f_{\Lambda}(I(t), Y(t)) = L(Y)I(t) \quad (5.4)$$

onde  $L(Y)$  é uma matriz  $m \times m$  simétrica cujos elementos dependem da geometria no instante  $t$ , medida pelas posições  $Y$ . Cada enlace de fluxo é da forma:

$$\lambda_k(t) = L_{k1}i_1(t) + L_{k2}i_2(t) + \cdots + L_{kk}i_k(t) + \cdots + L_{km}i_m(t) \quad (5.5)$$

onde  $k = 1, 2, \dots, m$ . Os coeficientes  $L_{kj}$  são funções de geometria e são ainda simétricos:  $L_{kj} = L_{jk}$ . Os coeficientes  $L_{kk}$  são chamados de auto-indutâncias do canal  $k$ , e os coeficientes  $L_{kj}$ , para  $k \neq j$  são as indutâncias mútuas. A matriz  $L$ , compreensivelmente, é chamada de matriz das indutâncias. A chamada “linearidade elétrica” é tão importante e simplificadora que fabricantes de dispositivos tomam cuidados especiais em seus projetos para garantir a validade da equação (5.4).

A aplicação de outra equação de Maxwell, a lei de Faraday, com as simplificações usuais, levaria a:

$$\dot{\Lambda} = \frac{d}{dt}\Lambda(t) = V(t) \quad (5.6)$$

onde  $V(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor composto pelas tensões  $v_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  impostas a cada canal elétrico. Esta é uma relação dinâmica que deve ser usada quando os canais são excitados por tensões e não por correntes. Lembrando que  $\Lambda(t) = f_{\Lambda}(I(t), Y(t))$  temos

$$V(t) = \dot{\Lambda}(t) = \frac{\partial f_{\Lambda}}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial f_{\Lambda}}{\partial Y} \frac{dY}{dt} \quad (5.7)$$

A primeira parcela da equação acima é chamada de “efeito (ou tensão) transformador” do dispositivo, e a segunda parcela é o “efeito ou (tensão) de velocidade”. Se a linearidade elétrica é válida para um dado AE, então (5.7) se particulariza em

$$V(t) = \dot{\Lambda}(t) = L(Y)\dot{I}(t) + \frac{dL}{dY}\dot{Y}(t)I(t) \quad (5.8)$$

Se, em adição, a geometria é fixa, então  $\dot{Y}(t) = 0$  e  $L(Y) = L$  é uma constante e

$$V(t) = L \frac{d}{dt} I(t) \quad (5.9)$$

o que justifica o nome dado à matriz  $L$ , pois esta é a relação clássica dos indutores ideais.

## 5.4 Exemplo de Aplicação 1

Considere a estrutura abaixo, feita com material ferromagnético.

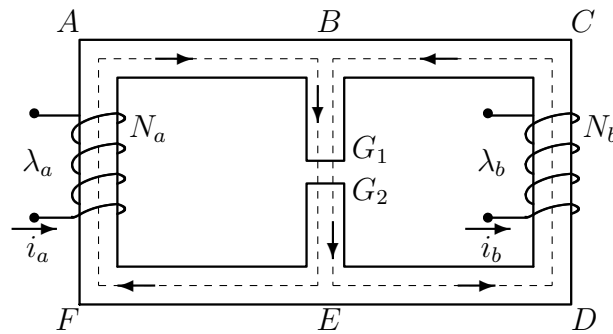


FIGURA 5.6: Exemplo de aplicação # 1

Embora a figura (5.6) lembre as usadas no estudo de transformadores (e possa ser usada para este fim!) consideraremos aqui os dois canais elétricos como sendo canais de entrada. Não há partes móveis ou geometrias variáveis e analisaremos apenas as relações entre correntes, enlaces de fluxo e tensões.

Se um contorno fechado  $C$  se desenvolve em uma região do espaço onde existe campo magnético, e se  $S$  é uma superfície delimitada por esse contorno, a equação de Ampère em sua forma integral é

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} da \quad (5.10)$$

onde  $\vec{H}$  é o campo magnético em um ponto,  $d\vec{l}$  é a tangente ao contorno desse ponto,  $\vec{J}$  é a densidade de corrente e  $\vec{n}$  a normal à superfície em um ponto.

As aproximações usualmente feitas para a aplicação das leis de Maxwell a dispositivos reais, como o do nosso exemplo, garantem que a atividade magnética é quase sempre confinada e direcionada pelo material ferromagnético existente. Considere então o contorno  $ABG_1G_2EFA$  acima, percorrido nesse sentido. No trecho  $EFAB$  o campo

pode ser considerado uniforme, com intensidade constante  $H_a$  e sempre tangente ao contorno. Nos trechos  $BG_1$  e  $G_2E$  a intensidade é  $H_r$  e a direção é “vertical”. O trecho  $G_1G_2$  configura uma fenda ou entreferro. Continuamos supondo uniformidades do campo; sua magnitude é  $H_g$ .

Sendo  $l_a$  o comprimento do trecho  $EFAB$ ,  $l_r$  o comprimento do trecho  $BG_1 + G_2E$  e  $l_g$  a espessura do entreferro, e lembrando que o lado direito da equação (5.10) significa a corrente total que atravessa a superfície, podemos escrever

$$H_a l_a + H_r l_r + H_g l_g = N_a i_a \quad (5.11)$$

O campo  $H_g$  atravessa o ar e podemos expressar a densidade de fluxo nessa região como sendo

$$B_g = \mu_0 H_g \quad (5.12)$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade do vácuo. Supondo desprezíveis os efeitos de histerese, podemos determinar a densidade de fluxo nos trechos  $EFAB$ ,  $BG$  e  $G_2E$ , lembrando que a densidade de fluxo magnético  $B$  é o número de linhas de fluxo por unidade de área que permeiam o campo magnético.

$$B_a = \mu H_a \quad \text{e} \quad B_r = \mu H_r \quad (5.13)$$

onde  $\mu$  é a permeabilidade magnética do material usado. Em geral,  $\mu \gg \mu_0$ .

Sendo  $A_a$  a área transversal no trecho  $EFAB$ , podemos calcular o fluxo magnético nesse trecho:  $\phi_a = B_a A_a = \mu H_a A_a$ . Para os trechos  $BG_1$  e  $G_2E$ :  $\phi_r = B_r A_r = \mu H_r A_r$ ; para a fenda:  $\phi_g A_g = \mu_0 H_g A_g$ . Entrando com estas expressões para os fluxos em (5.11):

$$\frac{l_a}{\mu A_a} \phi_a + \frac{l_r}{\mu A_r} \phi_r + \frac{l_g}{\mu_0 A_g} \phi_g = N_a i_a \quad (5.14)$$

A grandeza  $l_a/(\mu A_a) = \mathcal{R}_a$  é a relutância do trecho  $EFAB$ ;  $\mathcal{R}_r = l_r/(\mu A_r)$  é a relutância conjunta de  $BG_1$  e  $G_2E$ ;  $\mathcal{R}_g = l_g/(\mu_0 A_g)$  é a relutância do entreferro. Supondo que a passagem pelo ar é feita sem perda considerável de fluxo temos  $\phi_r = \phi_g$  e a lei de Ampère, em termos de fluxo, fica

$$\mathcal{R}_a \phi_a + (\mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g) \phi_g = N_a i_a \quad (5.15)$$

Como a geometria simples do circuito acima permite expressar facilmente as relutâncias em termos dos parâmetros físicos básicos, podemos analisar o contorno  $EDC$   $BG_1G_2E$  de modo análogo a concluir que

$$\mathcal{R}_b\phi_b + (\mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g)\phi_g = N_b i_b \quad (5.16)$$

onde  $\mathcal{R}_b = l_b/\mu A_b$  é a relutância do trecho à direita.

O ponto B é uma junção do fluxo. Considerando uma superfície fechada S que o envolva completamente uma das equações de Maxwell diz que

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} da = 0 \quad (5.17)$$

e isto garante a “conservação dos fluxos” que pode ser expressa por

$$\phi_a + \phi_b = \phi_g \quad (5.18)$$

agora é possível “resolver o sistema”, ou seja, encontrar expressões para os fluxos  $\phi_a$  e  $\phi_b$  em termos das correntes  $i_a$  e  $i_b$ . Entrando com (5.18) em (5.15) e (5.16) teremos

$$(\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g)\phi_a + (\mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g)\phi_b = N_a i_a \quad (5.19)$$

$$(\mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g)\phi_a + (\mathcal{R}_b + \mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g)\phi_b = N_b i_b \quad (5.20)$$

chamando

$$\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g = \mathcal{R}_{ta}$$

$$\mathcal{R}_b + \mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g = \mathcal{R}_{tb}$$

$$\mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g = \mathcal{R}_v$$

as relações (5.19) e (5.20) podem ser escritas em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_{ta} & \mathcal{R}_v \\ \mathcal{R}_v & \mathcal{R}_{tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_a i_a \\ N_b i_b \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

O determinante da matriz quadrada acima é

$$\Delta_R = \mathcal{R}_{ta}\mathcal{R}_{tb} - \mathcal{R}_v^2 = (\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_v)(\mathcal{R}_b + \mathcal{R}_v) - \mathcal{R}_v^2 = \mathcal{R}_a\mathcal{R}_b + (\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_b)\mathcal{R}_v \quad (5.22)$$

que é sempre não-nulo e positivo para valores positivos das relutâncias. Com isto a equação (5.21) pode ser invertida :

$$\begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_r} \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{tb} & -\mathcal{R}_v \\ -\mathcal{R}_v & \mathcal{R}_{ta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_a i_a \\ N_b i_b \end{bmatrix} = \mathcal{R}^{-1} \begin{bmatrix} N_a i_a \\ N_b i_b \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

O enlace de fluxo de um canal é o “fluxo total englobado” por esse canal e assim, para o caso das bobinas,

$$\lambda_a = N_a \phi_a \quad \text{e} \quad \lambda_b = N_b \phi_b \quad (5.24)$$

Uma aplicação cuidadosa da equação de Maxwell apropriada levaria de maneira menos simplista a estas mesmas relações. O resultado, em notação matricial fica

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_a & 0 \\ 0 & N_b \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta_r} \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{tb} & -\mathcal{R}_v \\ -\mathcal{R}_v & \mathcal{R}_{ta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_a & 0 \\ 0 & N_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

chamando  $diag\{N_a, N_b\} = N$  podemos escrever

$$\Lambda = N\mathcal{R}^{-1}NI = LI \quad (5.26)$$

onde a matriz das indutâncias L é simétrica.

Este exemplo mostra como a hipótese da linearidade elétrica, expressa em (5.26), aparece de modo natural, com hipóteses suaves, pelo menos neste caso simples.

O comportamento em regime do dispositivo pode ser bem estudado por relações instantâneas como (5.23) e (5.26). Para um conhecimento mais amplo, capaz de descrever também o transitório, precisaríamos do modelo matemático completo, descrito pela equação diferencial



$$V(t) = \dot{\Lambda} = L\dot{I}(t) \quad (5.27)$$

onde  $V$  é o vetor das tensões injetadas nos canais. A equação (5.26) pode ser detalhada

$$\lambda_a = L_{11}i_a + L_{12}i_b \quad (5.28)$$

$$\lambda_b = L_{21}i_a + L_{22}i_b \quad (5.29)$$

onde  $L_{11} = L_a$  e  $L_{22} = L_b$  são as auto-indutâncias e  $L_{12} = L_{21} = L_m$  é a indutância mútua. Para o caso em estudo:

$$L_a = \frac{Na^2\mathcal{R}_{tb}}{\Delta_r} = \frac{N_a^2(\mathcal{R}_b + \mathcal{R}_v)}{\mathcal{R}_a\mathcal{R}_b + (\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_b)\mathcal{R}_v} \quad (5.30)$$

$$L_b = \frac{Nb^2\mathcal{R}_{ta}}{\Delta_r} = \frac{N_b^2(\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_v)}{\mathcal{R}_a\mathcal{R}_b + (\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_b)\mathcal{R}_v} \quad (5.31)$$

$$L_m = -\frac{Na^2N_b\mathcal{R}_v}{\Delta_r} = -\frac{N_aN_b\mathcal{R}_v}{\mathcal{R}_a\mathcal{R}_b + (\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_b)\mathcal{R}_v} \quad (5.32)$$

## 5.5 Exemplo de Aplicação 2

É o mesmo dispositivo do exemplo anterior com a bobina da esquerda desmembrada em duas partes ( $N_1 + N_2 = N_a$ ) dando assim origem a dois canais elétricos, como mostrado na figura (5.7)

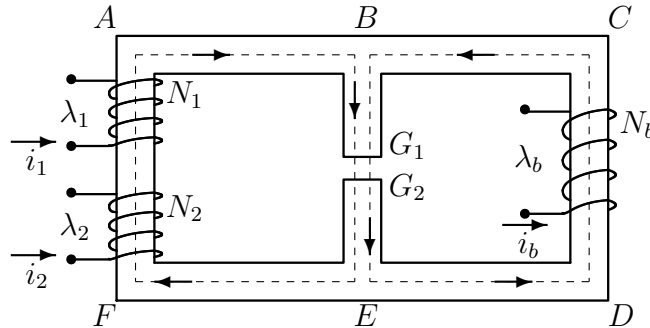


FIGURA 5.7: Exemplo de aplicação # 2

Seguindo a linha mostrada no exemplo anterior, chegaríamos com facilidade ao

equacionamento dos fluxos

$$\mathcal{R}_a\phi_a + (\mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g)\phi_g = N_1i_1 + N_2i_2 \quad (5.33)$$

$$\mathcal{R}_b\phi_b + (\mathcal{R}_r + \mathcal{R}_g)\phi_g = N_b i_b \quad (5.34)$$

$$\phi_a + \phi_b = \phi_g \quad (5.35)$$

A diferença principal é a existência de “excitações” distintas e independentes. Mas o fluxo que atravessa as duas novas bobinas é o mesmo, então continuaremos precisando eliminar  $\phi_g$  e trabalhar apenas com  $\phi_a$  e  $\phi_b$  para calcular agora 3 enlacs. A equação (5.21) fica

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_{ta} & \mathcal{R}_v \\ \mathcal{R}_v & \mathcal{R}_{tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1i_1 + N_2i_2 \\ N_b i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_b \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Invertendo a matriz das relutâncias vem:

$$\begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_r} \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{ta} & -\mathcal{R}_v \\ -\mathcal{R}_v & \mathcal{R}_{tb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_b \end{bmatrix} = L_0 N \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_b \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

onde  $L_0$  é a mesma matriz definida anteriormente em (5.23), mas  $N$  é agora a matriz  $2 \times 3$  indicada. O enlace de fluxo dos canais continua sendo obtido como antes

$$\lambda_1 = N_1\phi_a \quad \lambda_2 = N_2\phi_a \quad \lambda_b = N_b\phi_b \quad (5.38)$$

Notar que, embora as correntes dos canais 1 e 2 sejam independentes, os enlacs de

fluxo não serão. É fácil ver que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_b \end{bmatrix} \frac{1}{\Delta_r} \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{tb} & -\mathcal{R}_v \\ -\mathcal{R}_v & \mathcal{R}_{ta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Agora chegamos à expressão característica da linearidade elétrica

$$\Lambda = N^T L_0 N I = L^n I \quad (5.39)$$

A matriz das indutâncias  $L^n$  continua simétrica, mas agora ela é  $3 \times 3$  e seu posto é apenas 2. A equação (5.39) pode ser detalhada:

$$\lambda_1 = L_{11}^n i_1 + L_{12}^n i_2 + L_{1b}^n i_b \quad (5.40)$$

$$\lambda_2 = L_{21}^n i_1 + L_{22}^n i_2 + L_{2b}^n i_b \quad (5.41)$$

$$\lambda_b = L_{b1}^n i_1 + L_{b2}^n i_2 + L_{bb}^n i_b \quad (5.42)$$

onde  $L_{11}^n$ ,  $L_{22}^n$  e  $L_{bb}^n$  são as auto-indutâncias e  $L_{xy}^n$  para  $x \neq y$  são as indutâncias mútuas. Para o caso em estudo temos 3 auto-indutâncias e 3 indutâncias mútuas, ao passo que no caso antigo havia apenas  $L_a$ ,  $L_b$  e  $L_m$  dados por (5.30), (5.31) e (5.32). Uma questão muito importante surge neste ponto: qual a relação entre os parâmetros novos da matriz  $L^n$  e os antigos de  $L$ ? Entre outras palavras, seria possível determinar  $L^n$  de modo único conhecendo apenas  $L$ ?

Estas idéias serão muito importantes mais à frente, na determinação do modelo matemático do motor modificado. Para atacar o problema, basta ligar em série as

bobinas 1 e 2, o que acarreta  $i_1 = i_2 = i_a$ . As equações (5.40),(5.41) e (5.42) ficam

$$\lambda_1 = (L_{11}^n + L_{12}^n)i_a + L_{1b}^n i_b \quad (5.43)$$

$$\lambda_2 = (L_{21}^n + L_{22}^n)i_a + L_{2b}^n i_b \quad (5.44)$$

$$\lambda_b = (L_{b1}^n + L_{b2}^n)i_a + L_{bb}^n i_b \quad (5.45)$$

o enlace de fluxo da “nova” bobina será

$$\lambda_a = (N_1 + N_2)\phi_a = N_1\phi_a + N_2\phi_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (5.46)$$

logo a soma de (5.43) e (5.44) leva a

$$\lambda_a = (L_{11}^n + L_{12}^n + L_{21}^n + L_{22}^n)i_a + (L_{1b}^n + L_{2b}^n)i_b \quad (5.47)$$

$$\lambda_b = (L_{1b}^n + L_{2b}^n)i_a + L_{bb}^n i_b \quad (5.48)$$

Como  $N_1 + N_2 = N_a$ , a bobina original é refeita com a ligação em série, recaímos no caso inicial e podemos identificar os parâmetros de (5.47) e (5.48) com os parâmetros de (5.30),(5.31) e (5.32):

$$L_{11}^n + L_{12}^n + L_{21}^n + L_{22}^n = L_a$$

$$L_{1b}^n + L_{2b}^n = L_m$$

$$L_{bb}^n = L_b$$

Supondo finalmente que a divisão da bobina é perfeitamente simétrica teremos

$$L_{11}^n = L_{22}^n = L_{21}^n = L_{12}^n = \frac{1}{4}L_a$$

$$L_{1b}^n = L_{b1}^n = \frac{1}{2}L_m$$

$$L_{bb}^n = L_b$$

e os parâmetros “novos” podem ser obtidos a partir dos “antigos”, que se supõe conhecidos.

## 5.6 Energia Interna

Mais uma vez lembramos que maiores detalhes podem ser encontrados nas referências listadas no começo do capítulo. Seja um acoplamento eletromecânico (AE) com um único canal elétrico de entrada e um único canal mecânico de saída. A potência elétrica injetada no AE é dada por

$$P_e(t) = v(t)i(t) = i(t)\dot{\lambda}(t)$$

A potência mecânica extraída será

$$P_{mec}(t) = f^e(t)\dot{y}(t)$$

onde estamos supondo que a mudança de geometria pode ser medida por um deslocamento linear  $y$  e está associada a uma força  $f^e$ . No caso de motores elétricos teremos um deslocamento angular  $\theta$  e um torque  $T^e$ .

Supondo  $W_m(t)$  a energia total armazenada nos campos magnéticos internos do AE, a lei da conservação de potência permite escrever

$$\frac{dW_m(t)}{dt} = i(t)\frac{d\lambda(t)}{dt} - f^e(t)\frac{dy(t)}{dt}$$

ou então, em termos de energia:

$$dW_m = id\lambda - f^e dy \quad (5.49)$$

Isto mostra que a energia magnética total do AE pode ser expressa em função do enlace de fluxo e da posição:

$$W_m = W_m(\lambda, y) \quad (5.50)$$

Supondo que o sistema é conservativo pode-se mostrar que esta função  $W_m$  tem derivadas parciais de 2a. ordem finitas, e assim

$$dW_m = \frac{\partial W_m}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial W_m}{\partial y} dy \quad (5.51)$$

Comparando (5.49) e (5.51) resulta em

$$\left(i - \frac{\partial W_m}{\partial \lambda}\right) d\lambda - \left(f^e + \frac{\partial W_m}{\partial y}\right) dy = 0 \quad (5.52)$$

Como as variáveis  $\lambda$  e  $y$  são independentes conclui-se que

$$i = \frac{\partial W_m(\lambda, y)}{\partial \lambda} \quad (5.53)$$

$$f^e = -\frac{\partial W_m(\lambda, y)}{\partial y} \quad (5.54)$$

ou seja, se a energia armazenada é conhecida, as variáveis elétricas e mecânicas dos canais podem ser calculadas. É muito comum usar as relações energéticas em uma forma ligeiramente diferente da acima. Considere novamente a expressão (5.49), aqui repetida

$$dW_m = id\lambda - f^e dy \quad (5.55)$$

Considere agora o produto  $\lambda i$  e a seguinte identidade básica

$$d(\lambda i) = \lambda di + id\lambda \quad (5.56)$$

que pode ser inserida em (5.55) dando lugar a

$$dW_m = d(\lambda i) - \lambda di - f^e dy \quad (5.57)$$

que pode ser reescrita como

$$d(\lambda i - W_m) = \lambda di + f^e dy \quad (5.58)$$

A grandeza  $\lambda i - W_m = W_m^c$  é chamada de coenergia e é imediato verificar que

$$W_m^c = W_m^c(i, y) \quad (5.59)$$

de onde se retira a expressão

$$d(W_m^c) = \frac{\partial W_m^c}{\partial i} di + \frac{\partial W_m^c}{\partial y} dy$$

que pode ser combinada com (5.58) para fornecer

$$\lambda = \frac{\partial W_m^c(i, y)}{\partial i} \quad (5.60)$$

$$f^e = \frac{\partial W_m^c(i, y)}{\partial y} \quad (5.61)$$

No caso geral de um sistema com “m” terminais elétricos e “r” terminais mecânicos teríamos

$$dW_m = \sum_{k=1}^m i_k d\lambda_k - \sum_{k=1}^r f_k^e dy_k \quad (5.62)$$

Lembrando as notações vetoriais para as correntes  $i_k$  e os enlaces de fluxo  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  e introduzindo notações semelhantes para  $f_k^e$  e  $y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$  a equação acima pode ser reescrita como

$$dW_m = I^T d\lambda - F_e^T dY \quad (5.63)$$

Para as equações em termos de coenergia, notemos que a generalização de (5.56) é

$$\sum_{k=1}^m d(i_k \lambda_k) = \sum_{k=1}^m \lambda_k di_k + \sum_{k=1}^m i_k d\lambda_k \quad (5.64)$$

Definindo a coenergia como

$$W_m^c = \sum_{k=1}^m \lambda_k i_k - W_m \quad (5.65)$$

a combinação de (5.62) e (5.64) fornece

$$dW_m^c = \sum_{k=1}^m \lambda_k di_k + \sum_{k=1}^m f_k^e dy_k \quad (5.66)$$

que, em forma matricial, fica

$$dW_m^c = \Lambda^T dI + F_e^T dY \quad (5.67)$$

As variáveis elétricas e mecânicas dos canais podem ser obtidas por meio de

$$\lambda_k = \frac{\partial W_m^c}{\partial i_k} \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (5.68)$$

$$f_k^e = \frac{\partial W_m^c}{\partial y_k} \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (5.69)$$

Para que estas fórmulas possam ser empregadas é preciso conhecer as expressões para  $W_m^c$  (ou  $W_m$ ). Isto pode ser conseguido integrando (5.66) ou (5.67).

$$W_m^c = \sum_{k=1}^m \int_0^{i_k} \lambda_k(i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, y_1, y_2, \dots, y_r) di_k \quad (5.70)$$

## 5.7 Canais Mecânicos

Por simplicidade, vamos supor a existência de um único canal mecânico de saída. Para facilitar a futura aplicação a motores elétricos, a variável de deslocamento será uma posição angular  $\theta$  e a ação mecânica resultante do AE será um torque  $T^e$ .

Os resultados da seção anterior mostram que, para cada instante  $t$ ,  $T^e$  depende das correntes nos canais e do deslocamento:

$$T^e(t) = f_{T^e}(i_1(t), i_2(t), \dots, i_m(t), \theta(t)) \quad (5.71)$$

$$= f_{T^e}(I(t), \theta(t)) \quad (5.72)$$

Esta é uma relação estática, ou instântanea que mostra o relacionamento do AE com a ação mecânica. No caso dos motores, os torques elétricos gerados são aplicados a cargas mecânicas. As cargas mecânicas mais comuns são

- inércias, cujo valor é diretamente proporcional à aceleração angular  $\ddot{\theta}(t)$ ;
- amortecimento viscoso, diretamente proporcional à velocidade angular  $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$ ;
- amortecimento de Coulomb, ou atritos secos, que dependem de maneira não linear das variáveis;
- freios, que são torques constantes opostos a  $T^e$ ;



- outras cargas menos comuns.

Em símbolos

$$T^e(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + T_{freio} + T_{outros} \quad (5.73)$$

onde J é o momento angular das inércias e B é o coeficiente do atrito viscoso, etc.

## 5.8 Comentários

O conteúdo revisto neste capítulo ajudará na elaboração dos modelos matemáticos para o controle de velocidade de motores de indução convencionais e modificados.

# Capítulo 6

## Controle de Velocidade em Motor de Indução

### 6.1 Introdução

O controle da velocidade angular do protótipo, em boa parte das experiências práticas e em todas as simulações, era feito com um calço mecânico posicionando o rotor (Cardoso 2003). Em outras palavras, o efeito mancal, revisto no capítulo 4, permanecia inativo e o mancal motor trabalhava como se fosse um simples motor de indução.

As estratégias de controle mostrada em (Cardoso 2003) e (N. Cardoso 2004) supunham que o protótipo se comportasse como um motor de indução convencional, sem qualquer tipo de modificação em seus enrolamentos. Por estes motivos, este capítulo será dedicado ao estabelecimento de modelos matemáticos para descrever a dinâmica rotacional de motores de indução. Este campo clássico, pode ser visto em um vasto número de referências, como por exemplo (A.E. Fitzgerald 1952), (Chapman 1999), (Cad 2000), (Woodson & Melcher 1968), (Bernad Adkins 1975), (Kenjo 1991) e (Ong 1998).

Neste capítulo ainda se verá resultados de simulações para o modelo encontrado.

### 6.2 Acoplamento Eletromecânico

Analisaremos um motor de indução bifásico, com 4 pólos e enrolamentos distribuídos. Em dispositivos deste tipo podemos reconhecer 4 terminais elétricos distintos:

1. Fase *A* do estator, caracterizada por um enlace de fluxo  $\lambda_{as}$ , onde se injeta uma corrente  $i_{as}$ ;
2. Fase *B* do estator, caracterizada por  $\lambda_{bs}$  e  $i_{bs}$ ;
3. Fase *A* do rotor, caracterizada por  $\lambda_{ar}$  e  $i_{ar}$ ;
4. Fase *B* do rotor, caracterizada por  $\lambda_{br}$  e  $i_{br}$

Lembrando o conteúdo visto no capítulo 5, o enlace de fluxo em cada canal depende da corrente nesse canal, das correntes nos outros circuitos e da posição do rotor. Supondo linearidade elétrica, enrolamentos distribuídos e predominância do 1o. harmônico espacial (Woodson & Melcher 1968) temos

$$\lambda_{as} = L_s i_{as} + M i_{ar} \cos 2\theta - M i_{br} \sin 2\theta \quad (6.1)$$

$$\lambda_{bs} = L_s i_{bs} + M i_{ar} \sin 2\theta + M i_{br} \cos 2\theta \quad (6.2)$$

$$\lambda_{ar} = L_r i_{ar} + M i_{as} \cos 2\theta + M i_{bs} \sin 2\theta \quad (6.3)$$

$$\lambda_{br} = L_r i_{br} - M i_{as} \sin 2\theta + M i_{bs} \cos 2\theta \quad (6.4)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de giro do rotor;  $L_r$  e  $L_s$  são as auto-indutâncias no rotor e estator, respectivamente e  $M$  a indutância mútua.

Em notação matricial estas equações acima ficam

$$\begin{bmatrix} \lambda_{as} \\ \lambda_{bs} \\ \lambda_{ar} \\ \lambda_{br} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & 0 & M \cos 2\theta & -M \sin 2\theta \\ 0 & L_s & M \sin 2\theta & M \cos 2\theta \\ M \cos 2\theta & M \sin 2\theta & L_r & 0 \\ -M \sin 2\theta & M \cos 2\theta & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

ou então, usando a notação apresentada no capítulo 5,

$$\Lambda = LI \quad (6.6)$$

onde  $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{as} & \lambda_{bs} & \lambda_{ar} & \lambda_{br} \end{bmatrix}^T$ ,  $I = \begin{bmatrix} i_{as} & i_{bs} & i_{ar} & i_{br} \end{bmatrix}^T$  e  $L = L(\theta)$  é a matriz das indutâncias, simétrica.

O cálculo do torque elétrico pode ser feito a partir dos conceitos de energia e coenergia, ou seja, da conservação de energia (1a. Lei da Termodinâmica), como revisto no capítulo anterior.

A abordagem discutida será através do conceito de coenergia, onde é possível analisar sistemas usando a corrente como variável elétrica independente para sistemas de campo magnético e a tensão como variável elétrica independente para sistemas de campo elétrico. De fato, é mais comum fazer esta escolha. Alternativamente, algumas vezes é necessário fazer uma escolha usando um conjunto híbrido de variáveis consistindo tanto das correntes e enlaces de fluxo no sistema de campo magnético quanto tensões e cargas no sistema de campo elétrico.

De acordo com (5.70), a coenergia é dada por

$$W_m^c = \sum_{j=1}^m \int_0^{i_j} \lambda_j(i_1, \dots, i_{j-1}, i_j, 0, \dots, 0; y_1, \dots, y_m) di'_j \quad (6.7)$$

assim, aplicando ao nosso caso temos

$$W_m^c = \int_0^{i_{as}} \lambda_{as} di_{as} + \int_0^{i_{bs}} \lambda_{bs} di_{bs} + \int_0^{i_{ar}} \lambda_{ar} di_{ar} + \int_0^{i_{br}} \lambda_{br} di_{br} \quad (6.8)$$

Substituindo as equações (6.1), (6.2), (6.3) e (6.4) em (6.8), chegamos a

$$\begin{aligned} W_m^c &= \left[ \frac{1}{2} L_s i_{as}^2 + M(i_{ar} \cos 2\theta - i_{br} \sin 2\theta) i_{as} \right] + \left[ \frac{1}{2} L_s i_{bs}^2 + M(i_{ar} \sin 2\theta + i_{br} \cos 2\theta) i_{bs} \right] \\ &+ \left[ \frac{1}{2} L_r i_{ar}^2 + M(i_{as} \cos 2\theta + i_{bs} \sin 2\theta) i_{ar} \right] + \left[ \frac{1}{2} L_r i_{br}^2 - M(i_{as} \sin 2\theta + i_{bs} \cos 2\theta) i_{br} \right] \end{aligned}$$

Usando (5.69) temos, para este caso

$$T^e = \frac{dW_m^c}{d\theta} \quad (6.9)$$

Efetuada a derivada chegamos à expressão para o torque elétrico

$$T^e = 4M[(i_{ar} i_{bs} - i_{as} i_{br}) \cos 2\theta - (i_{ar} i_{as} + i_{bs} i_{br}) \sin 2\theta] \quad (6.10)$$

Com um pequeno algebrismo a equação (6.10) acima pode ser reescrita em termos do vetor  $I$  das correntes,

$$\begin{aligned}
 T^e &= 4M \left( I^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} I \cos 2\theta - I^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} I \sin 2\theta \right) \\
 &= 2MI^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\text{sen } 2\theta & -\text{cos } 2\theta \\ 0 & 0 & \text{cos } 2\theta & -\text{sen } 2\theta \\ -\text{sen } 2\theta & \text{cos } 2\theta & 0 & 0 \\ -\text{cos } 2\theta & -\text{sen } 2\theta & 0 & 0 \end{bmatrix} I
 \end{aligned}$$

Chamando a matriz quadrada acima de  $Q_{Te}$  temos uma expressão vetorial simples para o torque elétrico:

$$T^e = f_{Te}(I, \theta) = 2MI^T Q_{Te} I \quad (6.11)$$

As equações de enlace de fluxo (6.6) e torque elétrico (6.11) constituem o que chamamos de acoplamento eletromecânico da máquina.

### 6.3 Restrições Externas

De acordo com o capítulo 5, as resistências porventura existentes devem ser consideradas externas a cada canal. Assim a fase  $A$  do estator ficaria como abaixo, onde  $v_{as}$  é a tensão externa imposta.

A fase  $B$  dos estator e as duas fases do rotor apresentariam diagramas semelhantes. Supondo  $R_{as} = R_{bs} = R_s$  e  $R_{ar} = R_{br} = R_r$ , cada um dos circuitos acima poderia ser

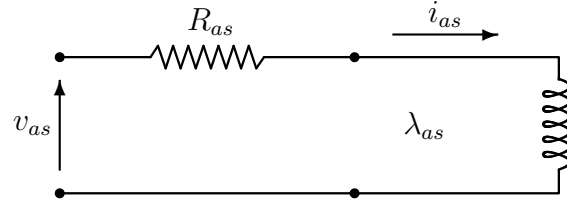


FIGURA 6.1: Canal elétrico e restrições

facilmente modelado, dando origem a

$$v_{as}(t) = R_s i_{as}(t) + \dot{\lambda}_{as}(t) \quad (6.12)$$

$$v_{bs}(t) = R_s i_{bs}(t) + \dot{\lambda}_{bs}(t) \quad (6.13)$$

$$v_{ar}(t) = R_r i_{ar}(t) + \dot{\lambda}_{ar}(t) \quad (6.14)$$

$$v_{br}(t) = R_r i_{br}(t) + \dot{\lambda}_{br}(t) \quad (6.15)$$

Em notação matricial temos

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_{as} \\ \dot{\lambda}_{bs} \\ \dot{\lambda}_{ar} \\ \dot{\lambda}_{br} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{ar} \\ i_{br} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{as} \\ v_{bs} \\ v_{ar} \\ v_{br} \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Sendo  $U = \begin{bmatrix} v_{as} & v_{bs} & v_{ar} & v_{br} \end{bmatrix}^T$  e  $R_{(4 \times 4)}$  a matriz das resistências acima temos

$$\dot{\Lambda} + RI = U \quad (6.17)$$

Em motores de indução, os enrolamentos do rotor são colocados em curto, e as fases do estator são alimentadas com tensões balanceadas e defasadas de  $90^\circ$ , no nosso caso.

Em resumo:

$$v_{ar}(t) = v_{br}(t) = 0$$

$$v_{as}(t) = V_0 \cos w_s(t)$$

$$v_{bs}(t) = V_0 \text{sen } w_s(t)$$

e o vetor das tensões externas fica

$$U = V_0 \begin{bmatrix} \cos w_s(t) \\ \text{sen } w_s(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

É muito importante notar que a amplitude  $V_0$  das tensões impostas ao estator, e a sua frequência de excitação  $w_s$  são parâmetros que podem ser livremente manipulados pelo operador, sendo assim considerados as variáveis de entrada do motor.

A variável de saída do motor é, claramente, a posição  $\theta$  do seu rotor, ou então a sua velocidade angular  $w = \dot{\theta}$ . Para relacionar  $\theta$  às outras grandezas entram em cena as restrições mecânicas. Lembrando que o torque gerado no motor é usado para acelerar a carga, vencer atritos viscosos e/ou de Coulomb (atritos secos) e para equilibrar eventuais torques externos, chegamos a

$$T_e = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + T_{ar} \frac{\dot{\theta}}{|\dot{\theta}|} + T_d \quad (6.19)$$

## 6.4 Modelo Completo

As equações da seção anterior fornecem o modelamento matemático completo para o motor de indução em estudo:

$$\dot{\Lambda} = -RI + U \quad (6.20)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{B}{J}\dot{\theta} - \frac{1}{J}T_d + T_e \quad (6.21)$$

$$\Lambda = L(\theta)I \quad (6.22)$$

$$T_e = 2MI^T Q_{T_e} I \quad (6.23)$$

Como  $\Lambda$  tem 4 componentes, o sistema acima é de 6ª ordem, com entradas  $V_0$  e  $w_s$  (presentes em  $U$ ) e saída  $\theta$  (ou  $\dot{\theta} = w$ ). As duas primeiras equações são lineares, mas as duas últimas, as relações estáticas, não.

Para facilitar a simulação do modelo acima é aconselhável eliminar as correntes  $I$ . Para isso basta substituir (6.6) em (6.21) e (6.23). O resultado é

$$\dot{\Lambda} = -RL^{-1}\Lambda + U \quad (6.24)$$

$$T^e = 2M\Lambda^T(L^{-1})^T Q_{Te} L^{-1}\Lambda \quad (6.25)$$

Para as simulações utilizou-se os seguintes parâmetros do protótipo:

- $R_r = 0.1\Omega$
- $R_s = 3\Omega$
- $M = 350.43 \times 10^{-4}H$
- $L_a = 384.67 \times 10^{-3}H$
- $J_r = 2.26 \times 10^{-3}$
- $B_r = 7.5 \times 10^{-6}$

as tensões nominais são caracterizadas por  $V_0 = 110V$  e  $w_s = 377rad/s$ . Para  $w_s$  foram considerados diferentes valores, conforme será visto.

Os próximos desenvolvimentos têm como objetivo exprimir as correntes do vetor  $I$  em função dos enlaces de  $\Lambda$  (inversão de  $L(\theta)$ ). Para simplificar as contas consideraremos  $L_a = L_r \cong L_s$ ,  $M_c = M \cos 2\theta$ ,  $M_s = M \sin 2\theta$  e  $M = M_c^2 + M_s^2$ .

De (6.1),

$$i_{as} = \frac{1}{L}[\lambda_{as} - M_c i_{ar} + M_s i_{br}] \quad (6.26)$$

De (6.2),

$$i_{bs} = \frac{1}{L}[\lambda_{bs} - M_s i_{ar} - M_c i_{br}] \quad (6.27)$$

De (6.3),

$$i_{ar} = \frac{1}{L}[\lambda_{ar} - M_c i_{as} - M_s i_{bs}] \quad (6.28)$$



De (6.4),

$$i_{br} = \frac{1}{L}[\lambda_{br} + M_s i_{as} - M_c i_{bs}] \quad (6.29)$$

Substituindo (6.28) e (6.29) em (6.26) encontramos  $i_{as}$

$$\begin{aligned} i_{as} &= \frac{1}{L} \left[ \lambda_{as} - \frac{M_c}{L} (\lambda_{ar} - M_c i_{as} - M_s i_{bs}) + \frac{M_s}{L} (\lambda_{br} + M_s i_{as} - M_c i_{bs}) \right] \\ &= \frac{L\lambda_{as} - M_c\lambda_{ar} + M_s\lambda_{br}}{L^2 - M^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$i_{as} = \frac{L}{L^2 - M^2} \lambda_{as} - \frac{M \cos 2\theta}{L^2 - M^2} \lambda_{ar} + \frac{M \sin 2\theta}{L^2 - M^2} \lambda_{br}. \quad (6.30)$$

Procedendo da mesma forma encontramos as demais correntes:

$$i_{bs} = \frac{L}{L^2 - M^2} \lambda_{bs} - \frac{M \sin 2\theta}{L^2 - M^2} \lambda_{ar} - \frac{M \cos 2\theta}{L^2 - M^2} \lambda_{br} \quad (6.31)$$

$$i_{ar} = \frac{L}{L^2 - M^2} \lambda_{ar} - \frac{M \sin 2\theta}{L^2 - M^2} \lambda_{bs} - \frac{M \cos 2\theta}{L^2 - M^2} \lambda_{as} \quad (6.32)$$

$$i_{br} = \frac{L}{L^2 - M^2} \lambda_{br} - \frac{M \cos 2\theta}{L^2 - M^2} \lambda_{bs} + \frac{M \sin 2\theta}{L^2 - M^2} \lambda_{as} \quad (6.33)$$

Da equação (6.19) considerando apenas o atrito viscoso e a inércia da carga temos

$$T_e = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{J}T_e - \frac{B}{J}\dot{\theta} \quad (6.34)$$

cuja modelagem é vista na figura (6.2).

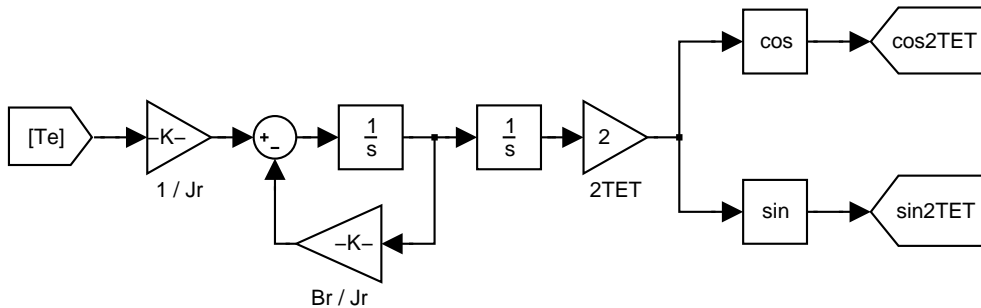


FIGURA 6.2: Modelagem da equação do Torque

Os enlaces de fluxo  $\lambda_{as}$ ,  $\lambda_{bs}$ ,  $\lambda_{ar}$  e  $\lambda_{br}$  podem ser eliminados através de algebrismos,

onde aparecem como variáveis apenas as correntes nas fases do estator e rotor,  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ . Uma forma de se chegar a estes resultados é descrita abaixo.

Definindo  $\lambda$  o vetor dos enlaces de fluxo,  $R$  a matriz das resistências no rotor e estator e  $I$ , o vetor das correntes nas fases a e b no rotor e estator temos

$$\lambda = LI \Rightarrow \dot{\lambda} = \dot{L}I + L\dot{I} = -RI + U \quad (6.35)$$

logo,

$$\dot{I} = L^{-1}[-R - \dot{L}]I + L^{-1}U = -(L^{-1}R + L^{-1}\dot{L})I + L^{-1}U \quad (6.36)$$

com isso chegamos a um modelo em que os enlaces de fluxo foram eliminados. Embora os modelos sejam equivalentes, há uma certa suspeita de que a forma híbrida seja mais simples de simular.

Em resumo, as matrizes  $L$  e  $Q$  envolvidas no acoplamento eletromecânico dependem dos parâmetros físicos e da variável  $\theta$ . As matrizes seguintes também são importantes:

$$G = M \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad H = -2M \begin{bmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{bmatrix} = \frac{dG}{d\theta}$$

As matrizes principais são as das indutâncias  $L$ , do torque  $Q$  e das resistências  $R$ , dadas por:

$$L = L' = \begin{bmatrix} L_s I_2 & G' \\ G & L_r I_2 \end{bmatrix} \quad Q = Q' = \begin{bmatrix} 0 & H' \\ H & 0 \end{bmatrix} = \frac{dL}{d\theta}$$

$$R = R' = \text{diag}\{R_s, R_s, R_r, R_r\} = \begin{bmatrix} R_s I_2 & 0 \\ 0 & R_r I_2 \end{bmatrix}$$

### 6.4.1 Inversa e derivada de $L$

A estrutura de  $L$  mostrada acima com quatro quadrados, facilita sobremaneira a sua inversão.

$$L^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} L_r I_2 & -G \\ -G' & L_s I_2 \end{bmatrix}$$

onde  $\Delta = L_r L_s - M^2$ .

A estrutura de  $L^{-1}$  é a mesma de  $L$  e o parâmetro físico  $\Delta$  mede a invertibilidade, devemos ter  $\Delta \neq 0$ .

A derivada temporal também pode ser encontrada de maneira simples:

$$\dot{G} = -2M\dot{\theta} \begin{bmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin 2\theta \end{bmatrix} = \dot{\theta} H \Rightarrow \dot{L} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & H' \\ H & 0 \end{bmatrix} = \dot{\theta} Q$$

## 6.5 Simulação

Através de simulação via simulink-MATLAB, é possível visualizar os comportamentos de diferentes frequências de operação e com o rotor girando apenas com o atrito viscoso e com carga que varia com o cubo da velocidade.

### 6.5.1 Dados para a Simulação

### 6.5.2 Caso 1 - Carga Simples: Motor operando com atrito viscoso (Br) e inércia da carga (Jr)

$$T_e = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{J}T_e - \frac{B}{J}\dot{\theta}$$

- $w_s = 300 \text{ rad/s} \approx 48 \text{ Hz}$
- $w_s = 377 \text{ rad/s} \approx 60 \text{ Hz}$

- $\omega_s = 450 \text{ rad/s} \approx 70 \text{ Hz}$

o modelo completo pode ser visto na figura (6.3).

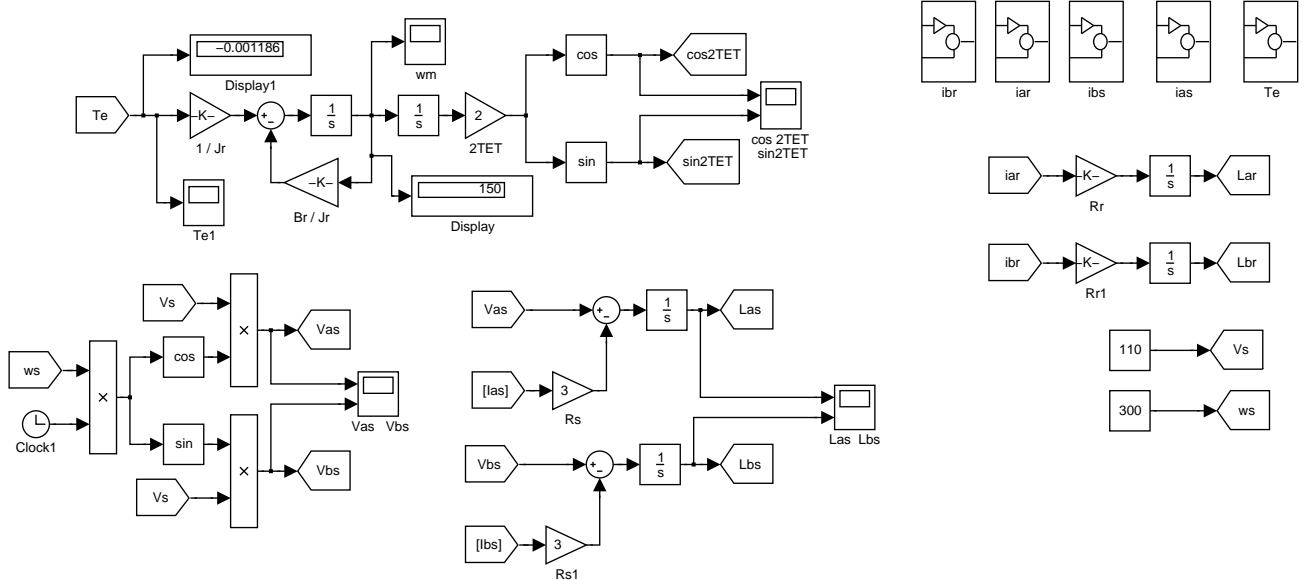


FIGURA 6.3: Modelo com carga simples

### Comentários : Caso 1

Consideraremos  $V_s$  constante. Conforme visto nas figuras (6.7), (6.9) e (6.11) a máquina alcança a velocidade de regime, com um tempo de acomodação relativamente alto, provavelmente devido ao uso dos parâmetros originais do protótipo não estarem bem ajustados e definidos, requerendo assim, uma nova medição dos parâmetros constantes da máquina visando um melhor resultado nas simulações. Porém, podemos observar com clareza funcionalidade do modelo encontrado, visto que a máquina consegue atingir a região de estabilidade.

### 6.5.3 Caso 2 - Carga Simples: Motor operando com carga que varia com o cubo da velocidade

Quando o motor tem que vencer uma carga que varia com o cubo da velocidade (aplicação de modelo usado em um ventilador industrial) tem-se

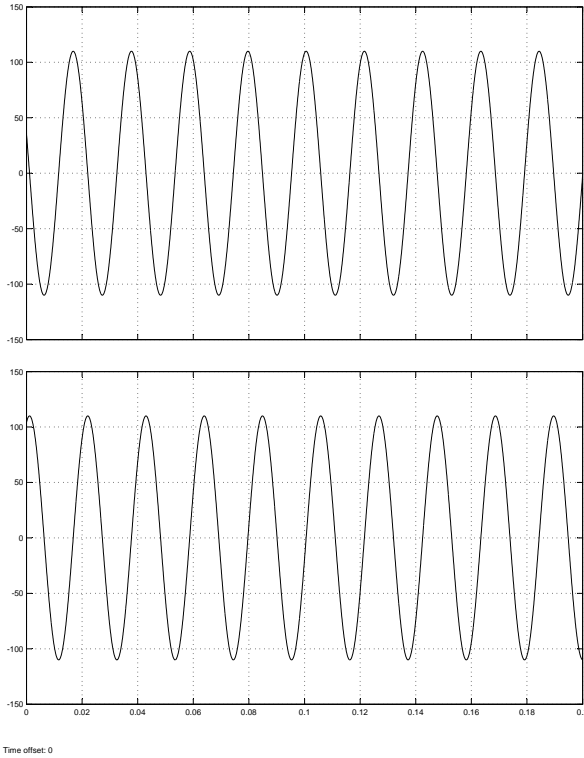


FIGURA 6.4: Vas e Vbs

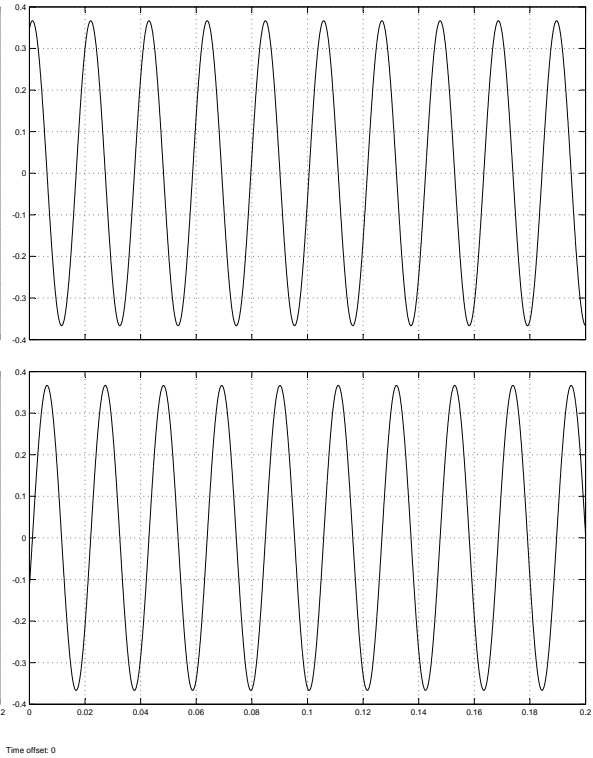


FIGURA 6.5: Las e Lbs

$$T_e = J\ddot{\theta} + B\dot{\theta}^3 \quad (6.37)$$

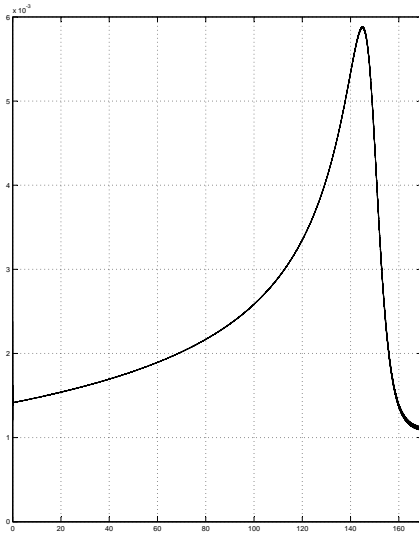
o que significa que o torque da hélice domina a carga. A modelagem da equação acima pode ser vista na figura (6.12).

Novamente simulou-se para os valores de  $w_s$  abaixo, através do modelo visto na figura (6.13).

- $w_s = 300 \text{ rad/s} \approx 48 \text{ Hz}$
- $w_s = 377 \text{ rad/s} \approx 60 \text{ Hz}$
- $w_s = 450 \text{ rad/s} \approx 70 \text{ Hz}$

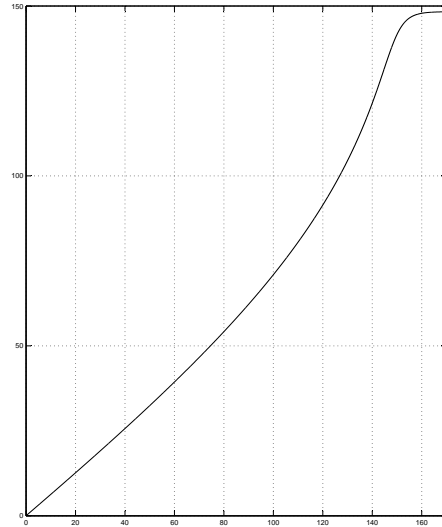
### Comentários : Caso 2

Consideraremos  $V_s$  constante. Conforme visto nas figuras (6.15), (6.17) e (6.19) a máquina alcança a velocidade de regime, com um tempo de acomodação relativamente alto, provavelmente devido ao uso dos parâmetros originais do protótipo não estarem



Time offset: 0

FIGURA 6.6: Caso1:  $T_e$  para  $w_s = 300$  rad/s

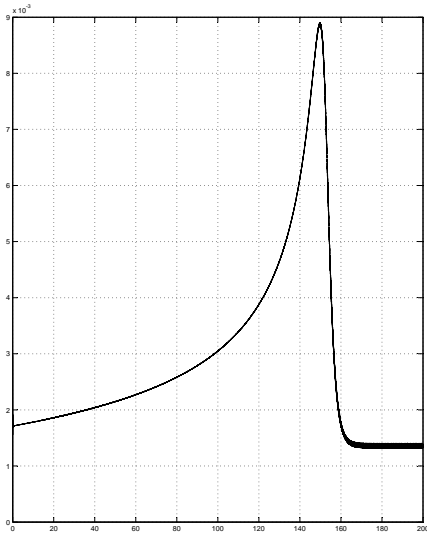


Time offset: 0

FIGURA 6.7: Caso1:  $w_m$  para  $w_s = 300$  rad/s

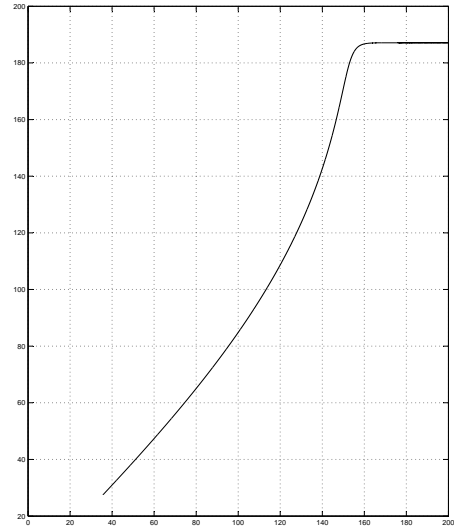
bem ajustados e definidos, requerendo assim, uma nova medição dos parâmetros constantes da máquina visando um melhor resultado nas simulações. Porém, podemos observar com clareza funcionalidade do modelo encontrado, visto que a máquina consegue atingir a região de estabilidade.

Portanto, chega-se a conclusão que, ao adicionar uma carga que varia com o cubo da velocidade, a velocidade de regime dificilmente chegará à síncrona  $w_s/2$ , pelo contrário, a tendência é ficar abaixo e, ainda levando um tempo maior para atingir seu regime permanente, à medida que aumentamos o  $w_s$ .



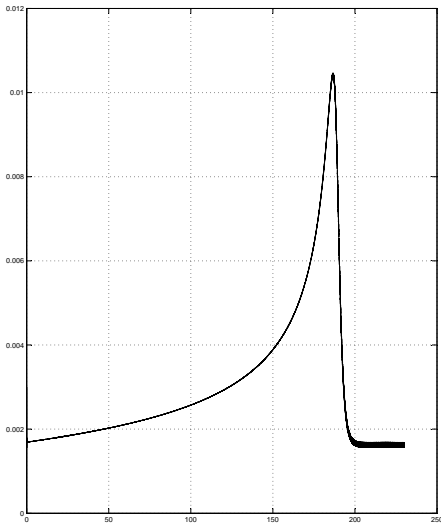
Time offset: 0

FIGURA 6.8: Caso1:  $T_e$  para  $w_s = 377$  rad/s



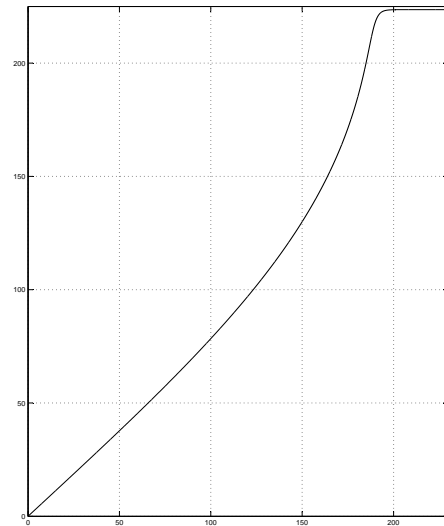
Time offset: 0

FIGURA 6.9: Caso1:  $w_m$  para  $w_s = 377$  rad/s



Time offset: 0

FIGURA 6.10: Caso1:  $T_e$  para  $w_s = 450$  rad/s



Time offset: 0

FIGURA 6.11: Caso1:  $w_m$  para  $w_s = 450$  rad/s

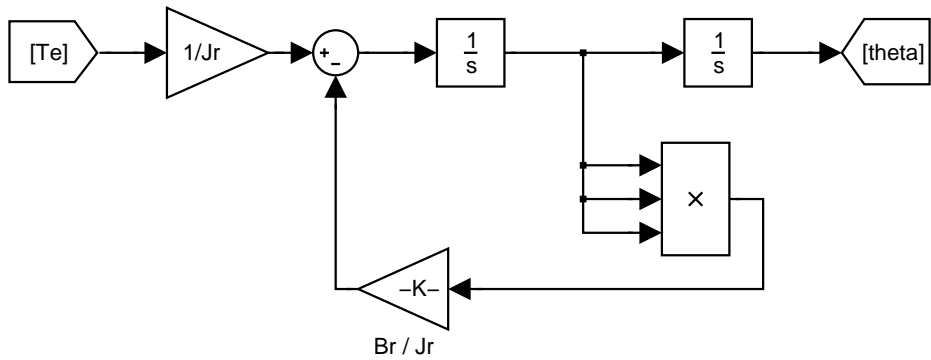


FIGURA 6.12: Caso2: Modelagem da equação do Torque

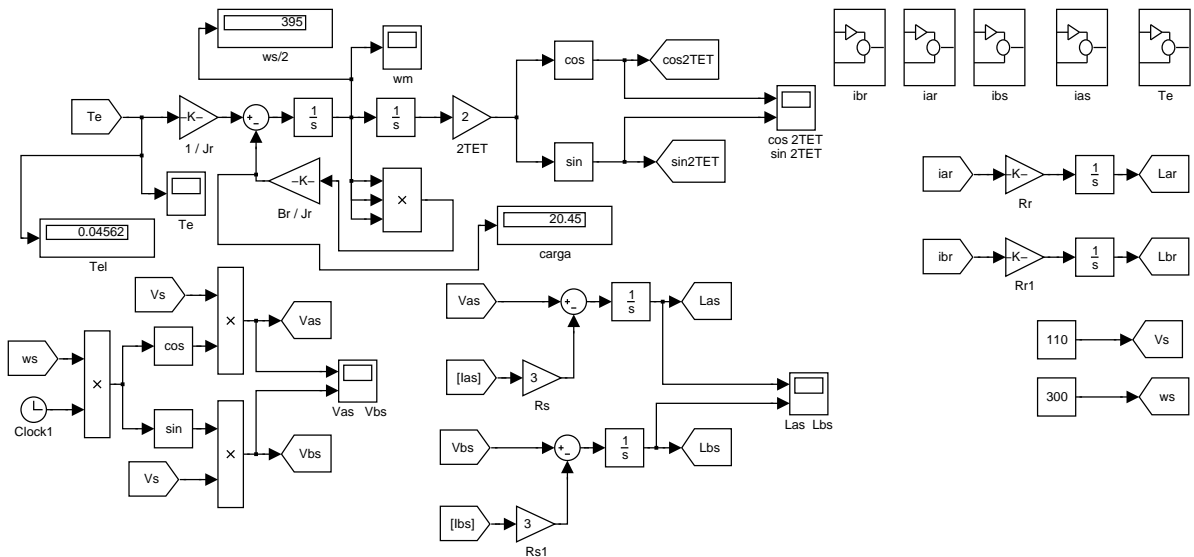


FIGURA 6.13: Modelo com carga que varia com o cubo da velocidade



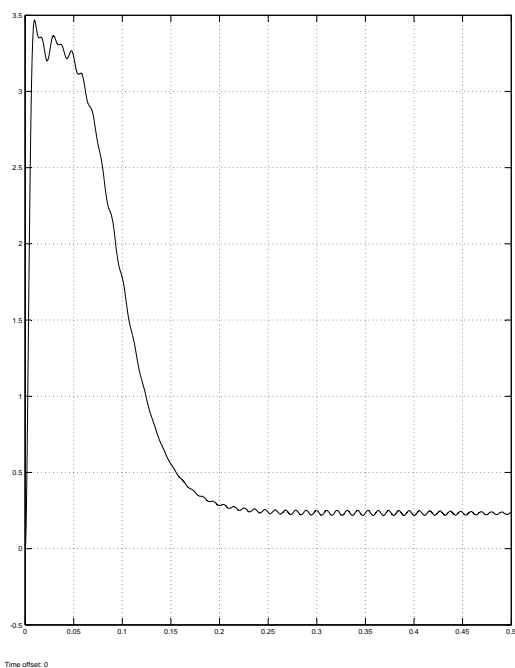


FIGURA 6.14: Caso2:  $T_e$  para  $w_s = 300$  rad/s

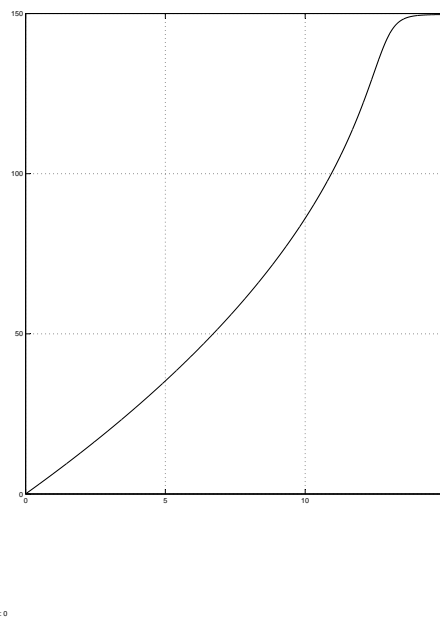


FIGURA 6.15: Caso2:  $w_m$  para  $w_s = 300$  rad/s

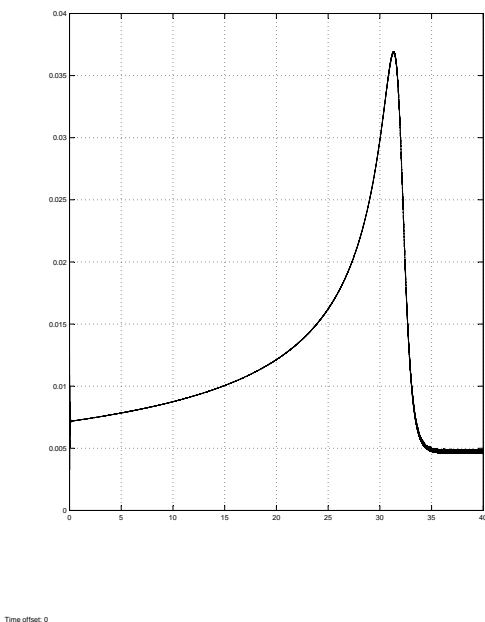


FIGURA 6.16: Caso2:  $T_e$  para  $w_s = 377$  rad/s

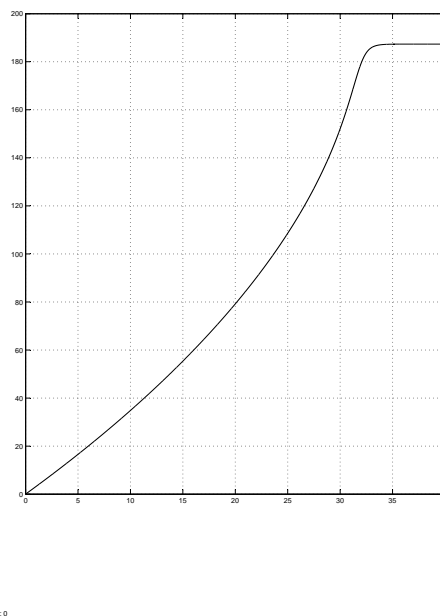
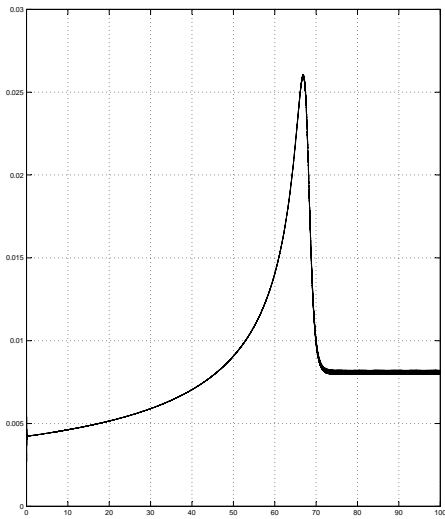
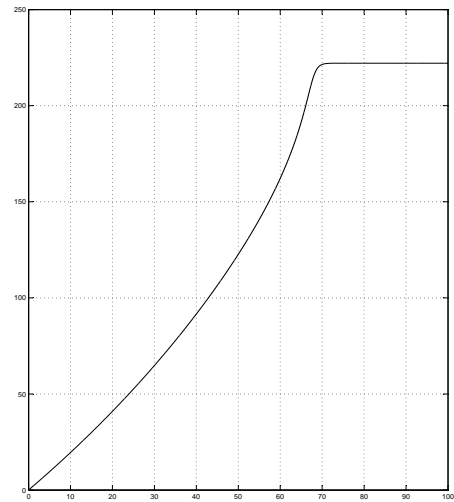


FIGURA 6.17: Caso2:  $w_m$  para  $w_s = 377$  rad/s



Time offset: 0

FIGURA 6.18: Caso2:  $T_e$  para  $w_s = 450$  rad/s



Time offset: 0

FIGURA 6.19: Caso2:  $w_m$  para  $w_s = 450$  rad/s

# Capítulo 7

## Modelo Matemático do Motor Modificado

### 7.1 Introdução

O efeito mancal existente nos protótipos em estudo é conseguido pela alteração dos enrolamentos de um motor de indução convencional. A capacidade de gerar forças radiais de posicionamento de um dispositivo como este já foi analisada no capítulo 4.

O presente capítulo será dedicado ao estabelecimento dos modelos matemáticos para descrever a dinâmica rotacional dos motores de indução modificados para funcionarem como mancais motores. As figuras (7.1) e (7.2), aqui repetidas, facilitam a visualização do dispositivo. Temos um motor de indução bifásico, com 4 pólos e enrolamentos distribuídos. As fases *A* e *B* são separadas geometricamente por  $45^\circ$ .

As quatro bobinas da fase B estão ligadas em série e o conjunto é excitado por uma tensão AC:  $v_{bs}(t) = V_0 \text{sen } w_s t$ . Quando as quatro bobinas da fase A estão ligadas em série e o conjunto é excitado por  $v_{as}(t) = V_0 \text{cos } w_s t$  temos um motor de indução convencional cuja dinâmica de rotação foi analisada no capítulo 6.

O efeito mancal aparece quando as quatro bobinas da fase A são consideradas separadamente. A próxima seção entrará em detalhes sobre estes aspectos.

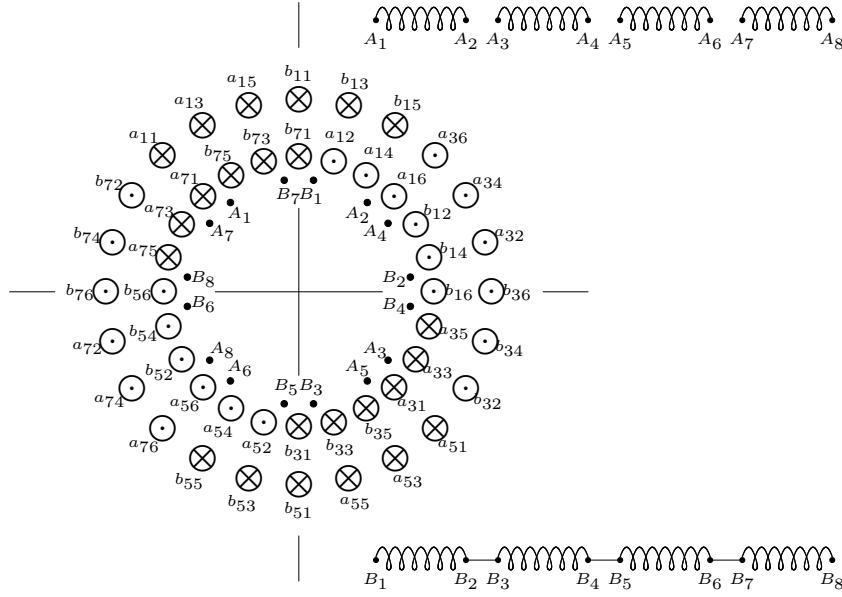


FIGURA 7.1: Enrolamentos do mancal-motor de indução

## 7.2 Detalhes das subfases

A bobina  $A_1A_2$  receberá o índice  $as_1$ , a bobina  $A_3A_4$  receberá o índice  $as_2$ , etc. Deste modo a fase  $A$  original é desmembrada em 4 partes.

Estas subfases da fase  $A$  dão origem a 4 canais elétricos que podem ser acionados de maneira independente por meio das injeções das correntes  $i_{as_k}$ , onde  $k = 1, 2, 3, 4$ , ou por meio de imposição das tensões  $v_{as_k}$ , onde  $k = 1, 2, 3, 4$ . A figura (7.3) ilustra estes canais.

É importante notar que se as tensões impostas aos 4 canais são

$$v_{as_1}(t) = v_{as_2}(t) = v_{as_3}(t) = v_{as_4}(t) = \frac{V_0}{4} \cos w_s(t)$$

então tudo se passa como se as quatro bobinas estivessem ligadas em série e fossem sujeitas a uma tensão  $V_0 \cos w_s(t)$ . O dispositivo passaria a funcionar como um motor de indução convencional.

O objetivo é fazer o dispositivo funcionar como um mancal motor, e para isso devemos usar um acionamento diferencial, caracterizado pelas tensões

$$v_{as_1}(t) = \left( \frac{V_0}{4} - V_y \right) \cos w_s(t) \quad (7.1)$$

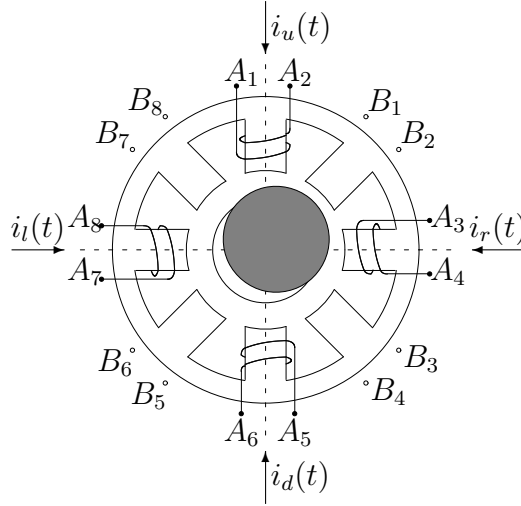


FIGURA 7.2: Representação física dos quatro pólos nas fases A e B

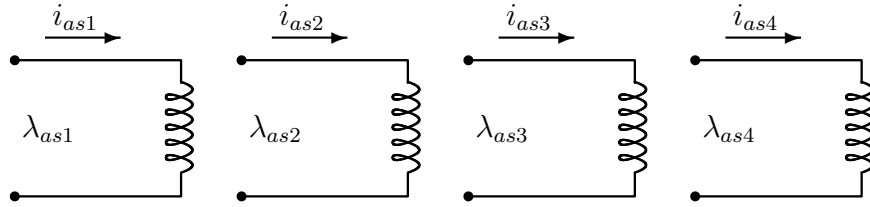


FIGURA 7.3: Subfases da fase A

$$v_{as2}(t) = \left( \frac{V_0}{4} + V_x \right) \cos w_s(t) \quad (7.2)$$

$$v_{as3}(t) = \left( \frac{V_0}{4} + V_y \right) \cos w_s(t) \quad (7.3)$$

$$v_{as4}(t) = \left( \frac{V_0}{4} - V_x \right) \cos w_s(t) \quad (7.4)$$

### 7.3 Acoplamento Eletromecânico: matriz $L^n$

Supomos independência entre os 4 canais eletromecânicos originados da fase A esquematizados na figura (7.3). Em outras palavras, as tensões  $v_{as_k}(t)$  (ou as correntes  $i_{as_k}(t)$ ) podem ser escolhidas livremente, sem qualquer tipo de restrição.

A fase B do estator e as fases do rotor permanecem como antes (capítulo 6) e com isto temos um acoplamento eletromecânico com sete terminais elétricos independentes.

Lembrando os capítulos 5 e 6, o enlace de fluxo em cada um desses 7 canais depende das correntes nos canais e da posição do rotor. Supomos, como antes, linearidade

elétrica, enrolamentos distribuídos e predominância do 1º harmônico espacial. Supomos ainda, como antes, que não há indução de fluxo entre circuitos em quadratura geométrica. As equações de enlace de fluxo ficam

$$\lambda_{as1} = L_{11}i_{as1} + L_{12}i_{as2} + L_{13}i_{as3} + L_{14}i_{as4} + L_{1ar}i_{ar} \cos 2\theta - L_{1br}i_{br} \sin 2\theta \quad (7.5)$$

$$\lambda_{as2} = L_{21}i_{as1} + L_{22}i_{as2} + L_{23}i_{as3} + L_{24}i_{as4} + L_{2ar}i_{ar} \cos 2\theta - L_{2br}i_{br} \sin 2\theta \quad (7.6)$$

$$\lambda_{as3} = L_{31}i_{as1} + L_{32}i_{as2} + L_{33}i_{as3} + L_{34}i_{as4} + L_{3ar}i_{ar} \cos 2\theta - L_{3br}i_{br} \sin 2\theta \quad (7.7)$$

$$\lambda_{as4} = L_{41}i_{as1} + L_{42}i_{as2} + L_{43}i_{as3} + L_{44}i_{as4} + L_{4ar}i_{ar} \cos 2\theta - L_{4br}i_{br} \sin 2\theta \quad (7.8)$$

$$\lambda_{bs} = L_s i_{bs} + M i_{ar} \sin 2\theta + M i_{br} \cos 2\theta \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ar} &= M_{as1}i_{as1} \cos 2\theta + M_{as2}i_{as2} \cos 2\theta + M_{as3}i_{as3} \cos 2\theta + M_{as4}i_{as4} \cos 2\theta \\ &+ M i_{bs} \sin 2\theta + L_r i_{ar} \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{br} &= -M_{bs1}i_{as1} \sin 2\theta - M_{bs2}i_{as2} \sin 2\theta - M_{bs3}i_{as3} \sin 2\theta - M_{bs4}i_{as4} \sin 2\theta \\ &+ M i_{bs} \cos 2\theta + L_r i_{br} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Para colocar estas equações em notação matricial consideremos os seguintes vetores

$$\Lambda_I^m = \begin{bmatrix} \lambda_{as1} \\ \lambda_{as2} \\ \lambda_{as3} \\ \lambda_{as4} \end{bmatrix} \quad \Lambda_{II}^m = \begin{bmatrix} \lambda_{bs} \\ \lambda_{ar} \\ \lambda_{br} \end{bmatrix} \quad \Lambda^m = \begin{bmatrix} \lambda_I^m \\ \lambda_{II}^m \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

É fácil perceber que

$$\Lambda^m = L^m I^m$$

onde  $I^m \in \mathbb{R}^7$  é o vetor das correntes e  $L^m = L^m(\theta)$  é a matriz das indutâncias

modificada, dada por

$$L^m = \begin{bmatrix} L_I^m & L_{II}^m \\ L_{III}^m & L_{IV}^m \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

onde

$$L_I^m = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix} \quad L_{II}^m = \begin{bmatrix} L_{1ar} & L_{1br} \\ L_{2ar} & L_{2br} \\ L_{3ar} & L_{3br} \\ L_{4ar} & L_{4br} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen } 2\theta \end{bmatrix}$$

$$L_{III}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos 2\theta & 0 \\ 0 & -\text{sen } 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{as1} & M_{as2} & M_{as3} & M_{as4} \\ M_{bs1} & M_{bs2} & M_{bs3} & M_{bs4} \end{bmatrix}$$

$$L_{IV}^m = \begin{bmatrix} L_s & M \text{sen } 2\theta & M \cos 2\theta \\ M \text{sen } 2\theta & L_r & 0 \\ M \cos 2\theta & 0 & L_r \end{bmatrix}$$

Todo o desenvolvimento posterior do modelo dependerá da matriz  $L^m$ , o que levanta um ponto importante: como conhecer seus parâmetros  $L_{jk}$ ,  $L_{jar}$ ,  $L_{jbr}$ ,  $M_{ask}$  e  $M_{bsk}$ ? Os parâmetros conhecidos são aqueles identificados para o motor antes das modificações e presentes na matriz  $L(4 \times 4)$  da equação (6.5):  $L_s$ ,  $L_r$  e  $M$ .

O problema pode ser expresso em forma matricial: dada  $L(4 \times 4)$  como em (6.5) encontrar  $L^m(7 \times 7)$  como em (7.13).

O procedimento a seguir é baseado no exemplo de aplicação 2 visto na seção 5.5. Consideraremos as 4 bobinas da fase *A* do estator ligadas em série, o que acarreta

$$i_{as1} = i_{as2} = i_{as3} = i_{as4} = i_{as} \quad (7.14)$$

As equações acima podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
\lambda_{as1} &= (L_{11} + L_{12} + L_{13} + L_{14})i_{as} + L_{1ar}i_{ar} \cos 2\theta - L_{1br}i_{br} \sin 2\theta \\
\lambda_{as2} &= (L_{21} + L_{22} + L_{23} + L_{24})i_{as} + L_{2ar}i_{ar} \cos 2\theta - L_{2br}i_{br} \sin 2\theta \\
\lambda_{as3} &= (L_{31} + L_{32} + L_{33} + L_{34})i_{as} + L_{3ar}i_{ar} \cos 2\theta - L_{3br}i_{br} \sin 2\theta \\
\lambda_{as4} &= (L_{41} + L_{42} + L_{43} + L_{44})i_{as} + L_{4ar}i_{ar} \cos 2\theta - L_{4br}i_{br} \sin 2\theta \\
\lambda_{bs} &= L_s i_{bs} + M i_{ar} \sin 2\theta + M i_{br} \cos 2\theta \\
\lambda_{ar} &= L_r i_{ar} + (M_{as1} + M_{as2} + M_{as3} + M_{as4})i_{as} \cos 2\theta + M i_{bs} \sin 2\theta \\
\lambda_{br} &= L_r i_{br} - (M_{bs1} + M_{bs2} + M_{bs3} + M_{bs4})i_{as} \sin 2\theta + M i_{bs} \cos 2\theta
\end{aligned}$$

O enlace do fluxo da nova bobina (vide seção 5.5) será

$$\lambda_{as1} + \lambda_{as2} + \lambda_{as3} + \lambda_{as4} = \lambda_{as} \quad (7.15)$$

o que permite reescrever o sistema acima, somando suas 4 primeiras equações:

$$\lambda_{as} = \left( \sum_{j,k=1}^4 L_{jk} \right) i_{as} + \left( \sum_{j=1}^4 L_{jar} \right) i_{ar} \cos 2\theta - \left( \sum_{j=1}^4 L_{jbr} \right) i_{br} \sin 2\theta \quad (7.16)$$

$$\lambda_{ar} = \left( \sum_{k=1}^4 M_{ask} \right) i_{as} \cos 2\theta + M i_{bs} \sin 2\theta + L_r i_{ar} \quad (7.17)$$

$$\lambda_{bs} = L_s i_{bs} + M i_{ar} \sin 2\theta + M i_{br} \cos 2\theta \quad (7.18)$$

$$\lambda_{br} = - \left( \sum_{k=1}^4 M_{brk} \right) i_{as} \sin 2\theta + M i_{bs} \cos 2\theta + L_r i_{br} \quad (7.19)$$

A ligação em série das 4 bobinas refaz a bobina original da fase *A* e o dispositivo passa a funcionar como motor de indução convencional, logo as equações acima podem ser comparadas às equações (6.1),(6.2),(6.3) e (6.4) do capítulo anterior, o que leva a

$$\sum_{j,k=1}^4 L_{jk} = L_s \quad (7.20)$$

$$\sum_{j=1}^4 L_{jar} = M \quad (7.21)$$

$$\sum_{j=1}^4 L_{jbr} = M \quad (7.22)$$



$$\sum_{k=1}^4 M_{ask} = M \quad (7.23)$$

$$\sum_{k=1}^4 M_{bsk} = M \quad (7.24)$$

Supondo que a divisão da fase  $A$  é perfeitamente simétrica teremos uma possível maneira de encontrar soluções para as equações acima:

$$L_{11} = L_{12} = \dots = L_{44} = \frac{L_s}{16} \quad (7.25)$$

$$L_{1ar} = L_{2ar} = L_{3ar} = L_{4ar} = \frac{M}{4} \quad (7.26)$$

$$L_{1br} = L_{2br} = L_{3br} = L_{4br} = \frac{M}{4} \quad (7.27)$$

$$M_{as1} = M_{as2} = M_{as3} = M_{as4} = \frac{M}{4} \quad (7.28)$$

$$M_{bs1} = M_{bs2} = M_{bs3} = M_{bs4} = \frac{M}{4} \quad (7.29)$$

e a matriz  $L^m$  tem todos seus parâmetros determinados em função dos parâmetros medidos da máquina.

Esta possível solução das equações (7.20) a (7.24) acarretará uma matriz  $L^m$  que é singular independentemente dos parâmetros físicos, pois suas 4 primeiras colunas são idênticas e iguais a

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} L_s \\ L_s \\ L_s \\ L_s \\ 0 \\ 4M \cos 2\theta \\ -4M \sin 2\theta \end{bmatrix}$$

A não invertibilidade da matriz das indutâncias comprometerá irremediavelmente

a simulação do sistema, vide comentários no capítulo anterior.

É preciso analisar novamente as equações (7.20) a (7.24), em particular a primeira delas. Outra possível solução que respeita aspectos de simetria é dada por

$$L_{11} = L_{22} = L_{33} = L_{44} = \frac{L_s}{4}$$

$$L_{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

Com isto a matriz das indutâncias fica (vide 7.13)

$$L^m = \begin{bmatrix} L_I^m & L_{II}^m \\ L_{III}^m & L_{IV}^m \end{bmatrix}$$

onde

$$L_I^m = \frac{L_s}{4} I_4 \quad L_{II}^m = \frac{M}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen } 2\theta \end{bmatrix} \quad L_{III}^m = (L_{II}^m)'$$

$$L_{IV}^m = \begin{bmatrix} L_s & M \text{sen } 2\theta & M \cos 2\theta \\ M \text{sen } 2\theta & L_r & 0 \\ M \cos 2\theta & 0 & L_r \end{bmatrix}$$

Chamando de  $X$  a inversa de  $L^m$  e particionando-a com as mesmas dimensões teremos

$$(L^m)^{-1} = X = \begin{bmatrix} X_u & X_s \\ X'_s & X_d \end{bmatrix}$$

Usando  $L^m X = I_7$  e ignorando o expoente  $m$  nas partições chegamos ao sistema

$$L_I X_u + L_{II} X'_s = I \quad (7.30)$$

$$L_I X_s + L_{II} X_d = 0 \quad (7.31)$$

$$L_{III} X_s + L_{IV} X_d = I \quad (7.32)$$

que pode ser resolvido, dando origem a

$$X_d = (L_{IV} - L_{III} L_I^{-1} L_{II})^{-1} \quad (7.33)$$

$$X_s = -L_I^{-1} L_{II} X_d \quad (7.34)$$

$$X_u = L_I^{-1} + L_I^{-1} L_{II} X'_d L_{III} L_I^{-1} \quad (7.35)$$

Após um razoável algebrismo, que será omitido, a equação (7.33) pode ser desenvolvida até

$$X_d = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} L_r & -M \operatorname{sen} 2\theta & -M \cos 2\theta \\ -M \operatorname{sen} 2\theta & L_s & 0 \\ -M \cos 2\theta & 0 & L_s \end{bmatrix}$$

onde  $\Delta = L_r L_s - M^2$

A partir deste ponto as equações (7.34) e (7.35) fornecerão as outras partições da inversa.

$$X_s = \frac{M}{\Delta} \begin{bmatrix} 0 & -\cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \\ 0 & -\cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \\ 0 & -\cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \\ 0 & -\cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \end{bmatrix} \quad X_u = \frac{4}{L_s} I_4 + \frac{M^2}{\Delta L_s} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como acontecia no caso do motor de indução tradicional, também para este motor modificado as estruturas da matriz das indutâncias e de sua inversa apresentam uma semelhança muito bem vinda.

## 7.4 Restrições Externas

Usando os mesmos argumentos da seção 6.3 e supondo mais uma vez que a divisão de fase  $A$  é perfeitamente simétrica temos as equações relacionando as tensões externas impostas a cada canal com as variáveis desse canal:

$$\begin{aligned} v_{as1}(t) &= \frac{1}{4} R_s i_{as1}(t) + \dot{\lambda}_{as1}(t) \\ v_{as2}(t) &= \frac{1}{4} R_s i_{as2}(t) + \dot{\lambda}_{as2}(t) \\ v_{as3}(t) &= \frac{1}{4} R_s i_{as3}(t) + \dot{\lambda}_{as3}(t) \\ v_{as4}(t) &= \frac{1}{4} R_s i_{as4}(t) + \dot{\lambda}_{as4}(t) \\ v_{bs}(t) &= R_s i_{bs}(t) + \dot{\lambda}_{bs}(t) \\ v_{ar}(t) &= R_r i_{ar}(t) + \dot{\lambda}_{ar}(t) \\ v_{br}(t) &= R_r i_{br}(t) + \dot{\lambda}_{br}(t) \end{aligned}$$

Em rotação matricial:

$$\dot{\Lambda}^m + R^m I^m = U^m$$

onde  $U^m = [v_{as1} v_{as2} \dots v_{br}]^T \in \mathbb{R}^7$  e  $R^m$  é a nova matriz das resistências dada por

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_r \end{bmatrix}$$

Lembrando que os enrolamentos do rotor são colocados em curto temos:

$$v_{ar}(t) = v_{br}(t) = 0$$

A fase  $B$  do estator é alimentada pela tensão  $v_{bs}(t) = V_0 \text{sen } \omega_s t$  e as quatro subfases da fase  $A$  satisfazem as equações (7.1), (7.2), (7.3) e (7.4) da seção 7.2. Com isto temos

$$U^n(t) = \begin{bmatrix} (\frac{V_o}{4} - V_y) \cos \omega_s t \\ (\frac{V_o}{4} + V_x) \cos \omega_s t \\ (\frac{V_o}{4} + V_y) \cos \omega_s t \\ (\frac{V_o}{4} - V_x) \cos \omega_s t \\ V_o \text{sen } \omega_s t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{V_0}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega_s t \\ \text{sen } \omega_s t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \cos \omega_s t \quad (7.36)$$

## 7.5 Torque Elétrico

Utilizando o mesmo procedimento visto na seção 6.2, podemos encontrar a expressão do torque elétrico para um motor de indução modificado.

Usando a definição de coenergia visto na equação (5.70) temos:

$$W_m^c = \int_0^{i_{as1}} \lambda_{as1} di_{as1} + \int_0^{i_{as2}} \lambda_{as2} di_{as2} + \int_0^{i_{as3}} \lambda_{as3} di_{as3} \quad (7.37)$$

$$+ \int_0^{i_{as4}} \lambda_{as4} di_{as4} + \int_0^{i_{ar}} \lambda_{ar} di_{ar} + \int_0^{i_{br}} \lambda_{br} di_{br} \int_0^{i_{bs}} \lambda_{bs} di_{bs}$$

Substituindo as equações de enlace de fluxo (7.5), (7.6),(7.7),(7.8),(7.9),(7.10),(7.11) na equação (7.37), chegamos a

$$W_m^c = \frac{1}{2}L_{11}i_{as1}^2 + (L_{12}i_{as2} + L_{13}i_{as3} + L_{14}i_{as4} + L_{1ar}i_{ar} \cos 2\theta L_{1br}i_{br} \sin 2\theta)i_{as1}$$

$$+ \frac{1}{2}L_{22}i_{as2}^2 + (L_{21}i_{as1} + L_{23}i_{as3} + L_{24}i_{as4} + L_{2ar}i_{ar} \cos 2\theta - L_{2br}i_{br} \sin 2\theta)i_{as2}$$

$$+ \frac{1}{2}L_{33}i_{as3}^2 + (L_{31}i_{as1} + L_{32}i_{as2} + L_{34}i_{as4} + L_{3ar}i_{ar} \cos 2\theta - L_{3br}i_{br} \sin 2\theta)i_{as3}$$

$$+ \frac{1}{2}L_{44}i_{as4}^2 + (L_{41}i_{as1} + L_{42}i_{as2} + L_{43}i_{as3} + L_{4ar}i_{ar} \cos 2\theta - L_{4br}i_{br} \sin 2\theta)i_{as4}$$

$$+ \frac{1}{2}L_r i_{ar}^2 + (M_{as1}i_{as1} \cos 2\theta + M_{as2}i_{as2} \cos 2\theta + M_{as3}i_{as3} \cos 2\theta + M_{as4}i_{as4} \cos 2\theta$$

$$+ M_{i_{bs} \sin 2\theta})i_{ar} + \frac{1}{2}L_r i_{br}^2 - (M_{bs1}i_{as1} \sin 2\theta + M_{bs2}i_{as2} \sin 2\theta + M_{bs3}i_{as3} \sin 2\theta$$

$$+ M_{bs4}i_{as4} \sin 2\theta + M_{i_{bs} \sin 2\theta})i_{br} + \frac{1}{2}L_s i_{bs}^2 + M(i_{ar} \sin 2\theta + i_{br} \cos 2\theta)i_{bs}$$

Usando (5.69) temos

$$T^e = \frac{dW_m^c}{d\theta} \quad (7.38)$$

Efetuada a derivada chegamos a expressão para o torque elétrico

$$T^e = 2[(-L_{1ar}i_{ar}i_{as1} - L_{2ar}i_{ar}i_{as2} - L_{3ar}i_{ar}i_{as3} - L_{4ar}i_{ar}i_{as4} - M_{as1}i_{ar}i_{as1} - M_{as2}i_{ar}i_{as2}$$

$$- M_{as3}i_{ar}i_{as3} - M_{as4}i_{ar}i_{as4} - 2M_{i_{br} \sin 2\theta}) \sin 2\theta + (-L_{1br}i_{br}i_{as1} - L_{2br}i_{br}i_{as2} - L_{3br}i_{br}i_{as3}$$

$$-L_{4br}i_{br}i_{as4} + 2Mi_{bs}i_{ar} - M_{bs1}i_{br}i_{as1} - M_{bs2}i_{br}i_{as2} - M_{bs3}i_{br}i_{as3} - M_{bs4}i_{br}i_{as4}) \cos 2\theta]$$

As equações de enlace de fluxo (7.5), (7.6),(7.7),(7.8),(7.9),(7.10),(7.11) juntamente com a equação do Torque Elétrico formam o modelamento matemático completo para um motor de indução modificado.

## 7.6 Comentários

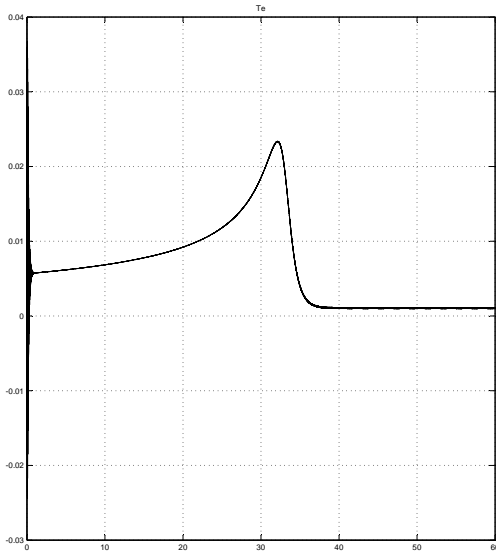
Baseado no enfoque do acoplamento eletromecânico da máquina chegamos a um modelo matemático que descreve o comportamento do motor de indução modificado, no capítulo seguinte será visto simulação que possam validar e comprovar o modelo obtido.



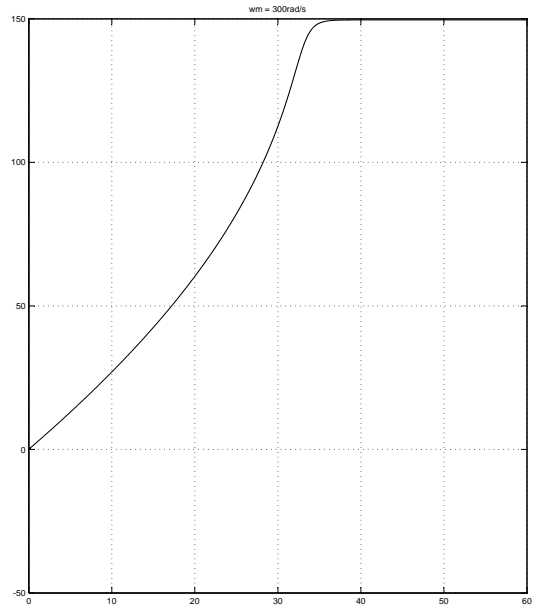


As variações de frequência são as seguintes:

- $w_s = 300 \text{ rad/s} \approx 48 \text{ Hz}$
- $w_s = 377 \text{ rad/s} \approx 60 \text{ Hz}$
- $w_s = 450 \text{ rad/s} \approx 70 \text{ Hz}$



Time offset: 0

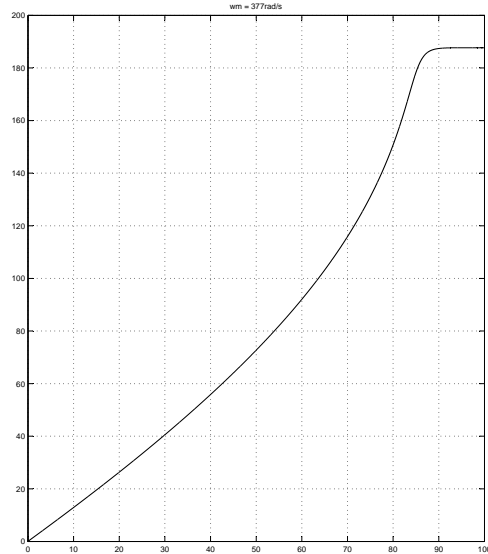
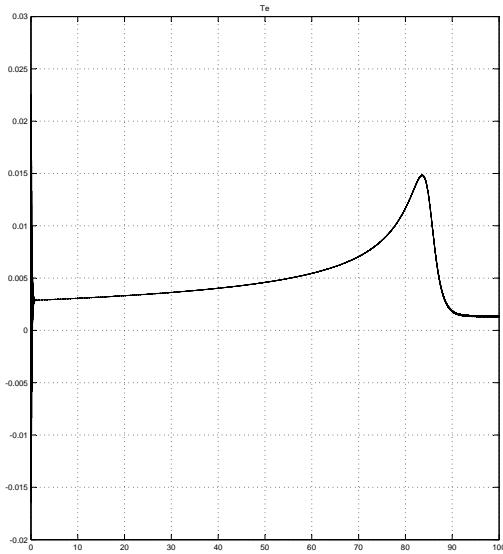


Time offset: 0

FIGURA 8.2: Caso 3:  $T_e$  para  $w_s = 300 \text{ rad/s}$       FIGURA 8.3: Caso 3:  $w_m$  para  $w_s = 300 \text{ rad/s}$

### 8.1.2 Comentários Caso 3

Consideraremos  $V_s$  constante. Conforme visto nas figuras (8.3), (8.5) e (8.7) a máquina alcança a velocidade de regime, com um tempo de acomodação relativamente alto, provavelmente devido ao uso dos parâmetros originais do protótipo não estarem bem ajustados e definidos, requerendo assim, uma nova medição dos parâmetros constantes da máquina visando um melhor resultado nas simulações. Porém, podemos observar com clareza funcionalidade do modelo encontrado, visto que a máquina consegue atingir a região de estabilidade.



Time offset: 0

Time offset: 0

FIGURA 8.4: Caso 3:  $T_e$  para  $w_s = 377$  rad/s

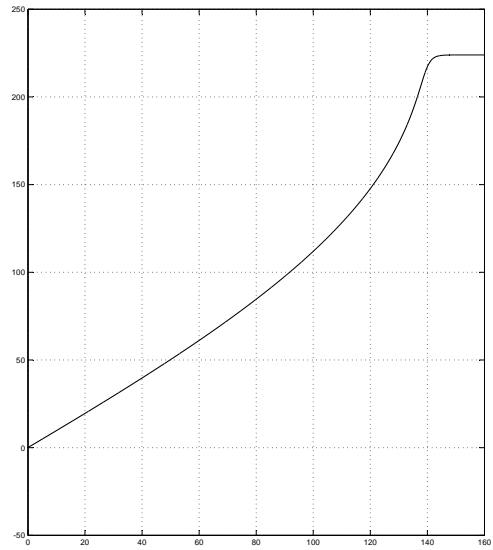
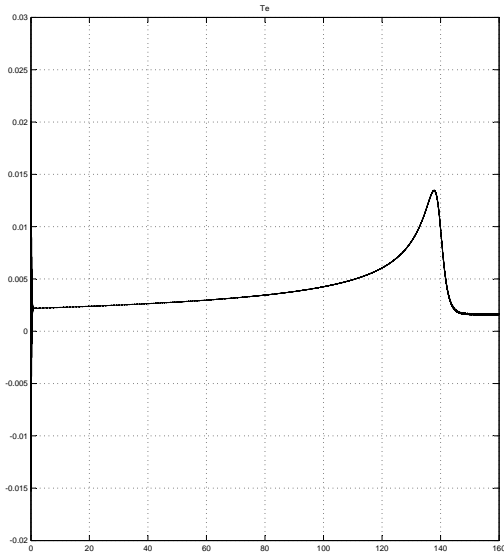
FIGURA 8.5: Caso 3:  $w_m$  para  $w_s = 377$  rad/s

### 8.1.3 Caso 4: Controle de Velocidade + Controle de Posição Simulado

O objetivo agora é analisar a influência do controle de posição na evolução da velocidade, para isso iremos supor a existência de um controle de posição que foi superdimensionado através da geração de um sinal de controle aleatório com modulação exponencial da ordem de  $100e^{-t}$ , conforme pode ser visto no modelo da figura (8.8).

### 8.1.4 Comentários Caso 5

Observando as figuras (8.10) e (8.12) percebemos que a máquina atinge a sua velocidade de regime porém, apesar do controle de posição ter sido superdimensionado houve pouca influência no controle de velocidade o que mostra que na pratica o modelo é viável.



Time offset: 0

Time offset: 0

FIGURA 8.6: Caso 3:  $T_e$  para  $w_s = 450$  rad/s

FIGURA 8.7: Caso 3:  $w_m$  para  $w_s = 450$  rad/s

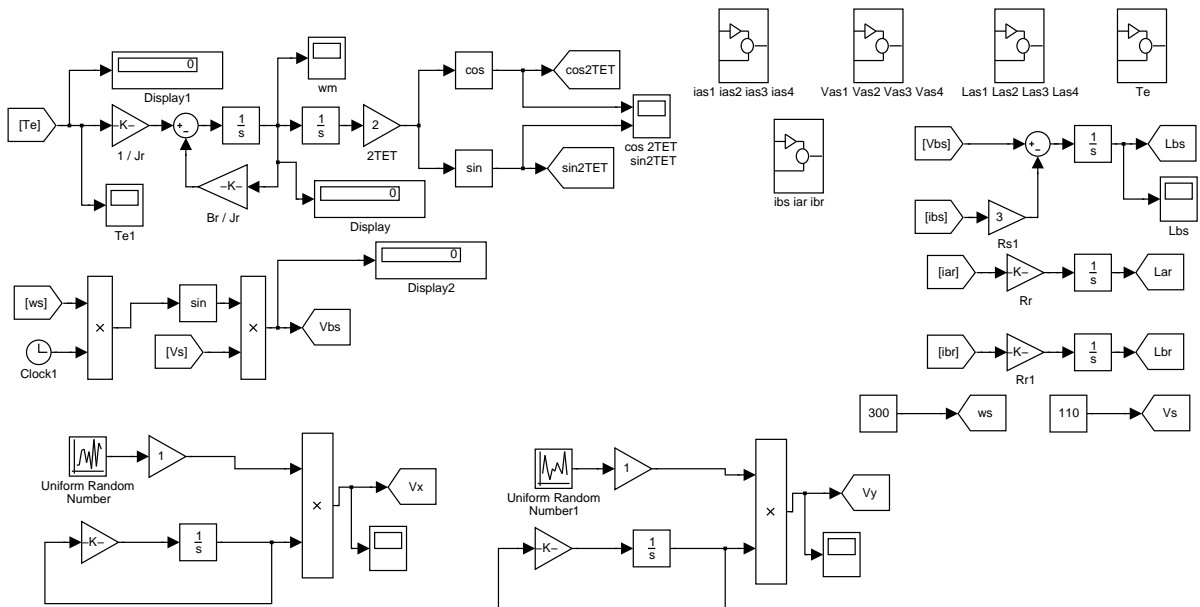
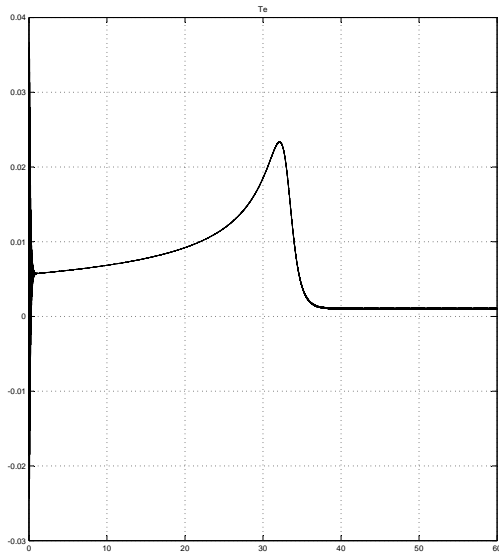
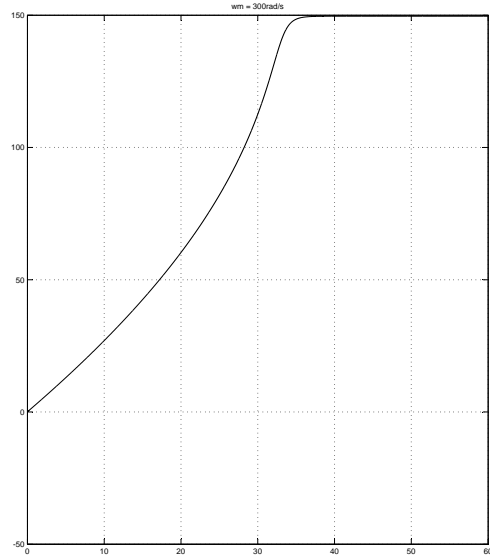


FIGURA 8.8: Modelo para controle de velocidade + posição



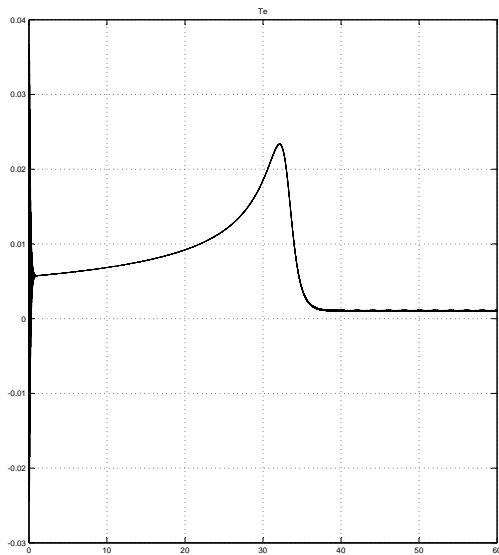
Time offset: 0

FIGURA 8.9: Caso 4:  $T_e$  para  $w_s = 300$  rad/s



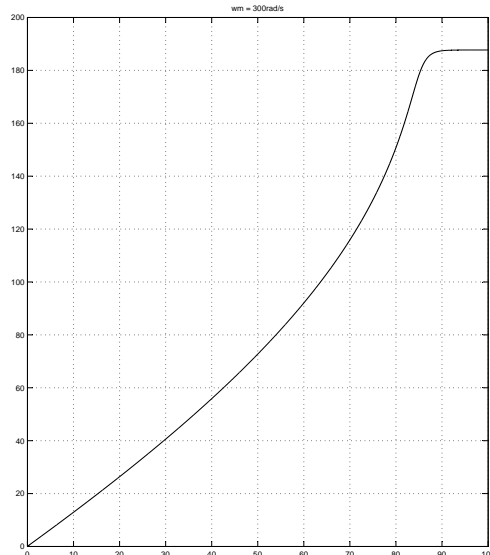
Time offset: 0

FIGURA 8.10: Caso 4:  $w_m$  para  $w_s = 300$  rad/s



Time offset: 0

FIGURA 8.11: Caso 4:  $T_e$  para  $w_s = 377$  rad/s



Time offset: 0

FIGURA 8.12: Caso 4:  $w_m$  para  $w_s = 377$  rad/s

# Capítulo 9

## Conclusões e Trabalhos Futuros

### 9.1 Conclusões

Tendo como ponto de partida os trabalhos já realizados até o momento na linha de mancais-motores na COPPE, este trabalho teve como foco principal o estabelecimento de um modelo matemático para descrever a dinâmica rotacional dos motores de indução modificados para funcionarem como mancais-motores. É importante ressaltar que, este trabalho foi dividido em três fases bem claras. A primeira fase destacou os trabalhos já realizados nesta linha de pesquisa na COPPE, onde vimos algumas soluções encontradas. Foi visto a topologia dos Mancais Magnéticos, seu funcionamento, classificação e geração de forças radiais.

Na segunda fase vimos o que é um Mancal-Motor, sua estrutura e particularidades. Na fase final e a mais importante dedicamos os três últimos capítulos ao estudo do Acoplamento Eletromecânico de um motor de indução, bifásico e 4 pólos, onde o objetivo maior era estudar como as modificações feitas alteram a capacidade de gerar torque do motor, ou seja, obtemos o modelo matemático rotacional para o motor alterado. Ainda nesta última fase vimos algumas simulações feitas de um controle de velocidade em um motor de indução sem alteração de seus enrolamentos com o seu modelo matemático. No último capítulo são mostrados algumas simulações feitas para comprovar e validar o modelo matemático encontrado para o motor de indução modificado.

É importante destacar a dificuldade encontrada para obter referências bibliográficas

que pudessem fornecer as equações dinâmicas de um motor de indução bifásico, 4 pólos na sua forma diferencial. Por isso espera-se que este trabalho venha a contribuir para futuros estudos na linha de mancais-motores.

## 9.2 Trabalhos Futuros

Como sugestões para continuidade deste estudo apresentamos:

- Melhoria dos modelos matemáticos encontrados, visando a implementação prática;
- Simular e testar novas situações e expondo os modelos encontrados à diferentes situações de funcionalidade;
- Integralizar os controle de Velocidade e Posição;
- Implementação prática do controle integralizado.

# Referências Bibliográficas

- A. Chiba, T. D. . T. R. (1994), ‘An analysis of bearingless ac motors’, *IEEE Transactions on Energy Conversion* 9.
- A. Salazar, . R. S. (1993), ‘A bearingless method for induction machines’, *IEEE Transactions on Magnetism* 29.
- A.E. Fitzgerald, Charles Kingsley, A. K. (1952), *Electric Machinery*, 3rd edn, McGraw-Hill.
- Bernad Adkins, R. G. H. (1975), *The General Theiry of Alternating Current Machines*, Chapman and Hall.
- Cad, M. M. (2000), Estratégias de modelagem dinâmica e simulação computacional do motor de indução trifásico, Master’s thesis, Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos.
- Cardoso, N. N. (2003), Controle simultâneo de velocidade e posição em mancais motores magnéticos, Master’s thesis, Federal University of Rio de Janeiro, COPPE.
- Chapman, S. (1999), *Eletric Machinery*, 3rd edn, McGraw-Hill.
- David, D. (2000), Levitação de Rotor por Mancais-motores Radiais Magnéticos e Mancais Axial Supercondutor Auto-estável, PhD thesis, COPPE, Federal University of Rio de Janeiro.
- D.F.B. David, A.C. Del Nero Gomes, J. S. A. R. R. A. R. N. (2000), ‘A hybrid levitating rotor system with radial electromagnetic motor-bearings and axial superconducting bearing’, *In Proceedings of the MAGLEV 2000* pp. 441–446.
- G. Schweitzer, H. B. & Traxler, A. (1994), *Active Magnetic Bearings*, Vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zurich.
- Hayt, W. H. (1988), *Engineering Electromagnetics*, 5th edn, McGraw-Hill.
- J. Young Beams, J. . M. (1942), ‘The production of centrifugl fields’, *Journal of Applied Phisics*.
- J.R. Reitz, F. & R.W.Christy (1992), *Foundations of Electromagnetic Theory.*, 4th edn, Vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zurich.
- Kenjo, T. (1991), *Eletric Motors and their Controls*, Oxford University Press.

- Knospe, C. & Collins, E. (1996), 'Introduction to the special issue on magnetic bearing control', *IEEE Transactions on Control Systems Technology* pp. 481–483.
- N. Cardoso, A.C. Del Nero Gomes, D. D. (2004), 'Simultaneous control of speed and position for magnetic motor bearings', *VI Induscon*.
- Ong, C.-M. (1998), *Dynamic Simulations of Electric Machinery using Matlab/Simulink*, Prentice Hall.
- Ortiz, A. (1994), Uma Proposta de motor elétrico sem mancal mecânico, PhD thesis, COPPE, Federal University of Rio de Janeiro.
- R. Schob, . J. B. (1994), 'Vector control of bearingless motor', *ISMB*.
- Santisteban, J. (1999), Estudo de Influência da carga torsional sobre o posicionamento radial de um mancal motor, PhD thesis, Federal University of Rio de Janeiro, COPPE.
- Woodson, H. & Melcher, J. (1968), *Electromechanical Dynamics*, Vol. I, 1st edn, John Wiley & Sons.