



TEORIA DOS JOGOS APLICADA A PROBLEMAS DE COMUNICAÇÕES MÓVEIS

Camila Maria Gabriel Gussen

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Paulo Sergio Ramirez Diniz

Rio de Janeiro
Janeiro de 2012

TEORIA DOS JOGOS APLICADA A PROBLEMAS DE COMUNICAÇÕES MÓVEIS

Camila Maria Gabriel Gussen

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Paulo Sergio Ramirez Diniz, Ph.D.

Prof. Sergio Lima Netto, Ph.D.

Prof. José Antonio Apolinário Jr., D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
JANEIRO DE 2012

Gussen, Camila Maria Gabriel

Teoria dos Jogos Aplicada a Problemas de Comunicações Móveis/Camila Maria Gabriel Gussen. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

XV, 99 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Paulo Sergio Ramirez Diniz

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 47 – 49.

1. Teoria dos jogos. 2. Comunicações Móveis. 3. Equilíbrio de Wardrop. 4. Stackelberg Game. 5. Small-cells. 6. Femtocells. I. Diniz, Paulo Sergio Ramirez. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

À minha família.

Agradecimentos

“Nós somos o que pensamos. Tudo que somos surge com nossos pensamentos. Com nossos pensamentos nós fazemos o mundo.”

Buda

Agradeço a Deus por de alguma forma ter me dado as oportunidades necessárias para que eu conseguisse atingir e finalizar mais uma etapa da minha vida.

Agradeço muito a meus pais, Vera Joana e José Alberto, por terem me proporcionado uma excelente formação pessoal e educacional. Agradeço também a eles por sempre estarem comigo em todos os momentos da minha vida. Agradeço à minha irmã Clarissa por ser sempre minha amiga e por me entender (ou tentar!) nas diversas situações.

Agradeço especialmente à minha avó Angelina e à minha tia Tici por sempre me apoiarem em todos os momentos. Agradeço também a todos os meus familiares que sempre torceram por mim!

Agradeço ao meu namorado, Reinaldo, pela compreensão e pelo apoio em todos os momentos e por estar sempre do meu lado.

Agradeço ao meu orientador Paulo Diniz por ter me orientado neste trabalho fora de sua área de pesquisa, e também por ter possibilitado a realização do meu sonho de morar fora do Brasil. Mesmo muito atarefado, sempre estava disponível para me auxiliar no trabalho! E também por ser um exemplo a ser seguido de realização profissional e pessoal.

Agradeço ao meu orientador na França, prof. Mérouane Debbah por ter me aceito para trabalhar em seu grupo e também por ter me proporcionado a ida a um congresso internacional.

Agradeço à Elena Veronica Belmega que me co-orientou nestes três meses que eu passei no Supélec. Agradeço também a todo o apoio e atenção tanto durante quanto depois do trabalho. Com certeza o trabalho feito não seria o mesmo sem a sua orientação!

Agradeço a todos os professores que tive, tanto no mestrado, quanto na graduação e no colégio. É com o conhecimento ensinado por eles que consegui finalizar mais uma etapa!

Agradeço aos professores Sergio Lima Netto e José Apolinário por terem participado de minha banca de mestrado.

Agradeço aos alunos e funcionários do Laboratório de Processamento de Sinais pelos momentos de descontração!

Agradeço também a todas as pessoas que conheci no Supélec. Foram elas que contribuíram para a minha estada em Paris ser maravilhosa! Em especial gostaria de agradecer ao professor Raul de Lacerda por suas caronas diárias e por toda a sua ajuda neste período.

Agradeço à CAPES e à FAPERJ pelos dois anos de bolsa de mestrado e também a Alcatel Lucent pelo suporte financeiro durante a minha estada no Supélec.

Enfim, gostaria de agradecer a todos que contribuíram na minha vida.

Espero que consiga deixar uma contribuição ainda maior para a sociedade.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

TEORIA DOS JOGOS APLICADA A PROBLEMAS DE COMUNICAÇÕES MÓVEIS

Camila Maria Gabriel Gussen

Janeiro/2012

Orientador: Paulo Sergio Ramirez Diniz

Programa: Engenharia Elétrica

Esta dissertação tem como objetivo aplicar teoria dos jogos a problemas de comunicações móveis. Neste trabalho, alguns dos mais importantes conceitos de teoria dos jogos são apresentados. As formas de representação de um jogo são descritas e exemplificadas, assim como algumas das classificações mais utilizadas na literatura. Os principais conceitos de solução, equilíbrio de Nash e equilíbrio de Wardrop, são descritos.

Neste trabalho é resolvido também um jogo sobre a disputa de recursos disponíveis de um usuário que está no estado *idle*. Neste jogo, existem usuários que estão transmitindo com uma taxa de transmissão abaixo da necessária e um usuário com recursos disponíveis para auxiliar estes outros. Para este problema, são apresentadas simulações para analisar o ganho de capacidade.

É estudada também uma rede em que o operador implanta tecnologias heterogêneas como por exemplo *macro-cell*, *small-cell* e *femto-cell*. Baseado nestas tecnologias, o operador pode prover para os consumidores diferentes tipos de serviços. Para este problema, é formalizada a alocação conjunta dos preços e das bandas como um jogo de Stackelberg. É analisada também a solução do jogo correspondente, tanto matematicamente como através de simulações numéricas. Observa-se que para prover melhores serviços e obter uma maior receita, recursos (como banda) devem ser alocados para as *small-cells* e *femtocells*. Além disto, mudando o preço e a alocação das bandas, o operador pode manipular a demanda do sistema no ponto de equilíbrio em operação.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

GAME THEORY APPLIED TO WIRELESS COMMUNICATIONS PROBLEMS

Camila Maria Gabriel Gussen

January/2012

Advisor: Paulo Sergio Ramirez Diniz

Department: Electrical Engineering

The objective of this work is to apply game theory for wireless communications problems. Here the main concepts of game theory are presented. Representation of games as well as some types of games are described and examples are given. The main concepts related to the solutions are described; namely: Nash equilibrium and the Wardrop Equilibrium.

In this work, we also solve a resource allocation game. In this game, some users are transmitting with lower rate than the necessary; and a user, that is in idle state, has available resources to help the others. In this problem, we present some numerical results to analyse the capacity gain.

We also study a multi-tier network where an operator deploys heterogeneous technologies, e.g., composed of macrocells, small-cells and femtocells. Based on these technologies, the operator can provide to its customers several types of services. We formalize the joint pricing and bandwidth allocation problem as a Stackelberg game. We analyse the solution of the corresponding game, both, mathematically and via numerical simulations. We observe that, in order to provide enhanced services leading to higher revenue, some network resources (e.g., bandwidth) must be allocated to the small-cells and femto-cells. Furthermore, by tuning the pricing and the bandwidth allocation policy, the operator can manipulate the system loads at the equilibrium operating point.

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xv
1 Introdução	1
1.1 Trabalhos Relacionados	2
1.2 Principais Contribuições	3
1.3 Organização do Trabalho	4
2 Teoria dos Jogos	5
2.1 Teoria dos Jogos	5
2.2 Jogos	6
2.2.1 Representações dos jogos	6
2.2.2 Tipos dos jogos	11
2.3 Tipos de Estratégias	14
2.3.1 Estratégia Pura	14
2.3.2 Estratégia Mista	14
2.4 Tipos de Equilíbrio	14
2.4.1 Equilíbrio de Nash	14
2.4.2 Equilíbrio de Wardrop	15
2.5 Exemplo de Jogo	16
3 Problema de Alocação de Potência	21
3.1 Descrição	21
3.2 Modelo	21
3.2.1 Problema de teoria dos jogos	24
3.2.2 Problema de otimização	25
3.2.3 Solução do Problema de Teoria dos Jogos	25
3.2.4 Considerações Gerais	26
3.2.5 Resultados	29

4	Economia das Femtocells	36
4.1	Aspectos Econômicos	36
4.1.1	Problema de otimização	37
4.1.2	Problema de Teoria dos Jogos	37
4.2	Resultados Numéricos	38
5	Atribuição de Preços a Serviços de uma Rede Heterogênea	40
5.1	Descrição	40
5.2	Resultados Numéricos	42
6	Problema de Alocação Conjunta de Banda e Preços	43
6.1	Descrição	43
6.2	Resultados Numéricos	44
7	Conclusões e Trabalhos Futuros	45
7.1	Trabalhos Futuros	46
	Referências Bibliográficas	47
A	Economics of Femtocells	50
A.1	Economic aspects	50
A.1.1	Optimization problem	51
A.1.2	Game Theory problem	51
A.2	Communications aspects	53
A.2.1	The utility functions	53
A.2.2	The Macrocell Throughput	54
A.3	Numerical Results	63
B	Pricing in a Multiple-Service Heterogeneous Network	70
B.1	Description	70
B.2	Case 1	72
B.2.1	Proof of the Existence of the Thresholds at the Wardrop Equilibrium	72
B.2.2	Finding the Thresholds at the Wardrop Equilibrium	75
B.3	Case 2	76
B.3.1	Example	76
B.4	Specific Case: Three Available Services	77
B.4.1	Model of the throughput functions	77
B.4.2	Numerical Results	80
C	Joint Pricing and Bandwidth Allocation Problem	93
C.1	Description	93

C.1.1 Numerical Results	94
-----------------------------------	----

Lista de Figuras

2.1	Problema do controle de potência representado na forma extensiva em que o usuário 2 desconhece a escolha do usuário 1.	8
2.2	Problema do controle de potência representado na forma extensiva em que o usuário 2 desconhece a escolha do usuário 1.	9
2.3	Forma Característica \times Forma Particionada.	9
2.4	Forma em Grafo.	10
2.5	Modelo do Sistema MIMO adotado.	16
2.6	Região de utilidade para os três diferentes esquemas de transmissão (para $h_{12} = 0.2$).	18
2.7	Região de utilidade para os três diferentes esquemas de transmissão (para $h_{12} = 0.5$).	19
2.8	Região de utilidade para os três diferentes esquemas de transmissão (para $h_{12} = 0.7$).	19
3.1	Canal do <i>relay</i> com degradação gaussiana.	22
3.2	Análise da Equação (3.7), onde $F_1 = C \left(\frac{P_{0,i} + P_i + 2\sqrt{\alpha P_{0,i} P_i}}{N_0 + N_i} \right)$ e $F_2 = C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right)$, $P_{0,i} \leq P_{0,i}^{max}$	27
3.3	Análise da Equação (3.7), onde $F_1 = C \left(\frac{P_{0,i} + P_i + 2\sqrt{\alpha P_{0,i} P_i}}{N_0 + N_i} \right)$ e $F_2 = C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right)$, $P_{0,i} > P_{0,i}^{max}$	27
3.4	Análise do valor $P_{0,i}^{max}$, onde $F_1 = C \left(\frac{P_{0,i} + P_i + 2\sqrt{\alpha P_{0,i} P_i}}{N_0 + N_i} \right)$ e $F_2 = C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right)$	28
3.5	Ampliação da Figura 3.4.	28
3.6	Utilidade: antes e depois da alocação dos recursos.	31
3.7	Fração q : antes e depois da alocação dos recursos.	31
3.8	Capacidade: antes e depois da alocação dos recursos.	32
3.9	Utilidade: antes e depois da alocação dos recursos.	34

3.10	Fração q : antes e depois da alocação dos recursos.	35
3.11	Capacidade: antes e depois da alocação dos recursos.	35
4.1	Receita do operador no pior WE vs. preços p_m e p_f	39
5.1	Receita do operador no pior WE vs. preços p_m e p_{MS}	42
6.1	Receita do operador no pior WE vs. banda alocada para <i>macrocell</i> β_{mc} e no melhor WE vs. banda alocada para <i>macrocell</i> β_{mc}	44
A.1	Markov Process - the arrows are the transitions between the states of the system, where each state is the number of requests to be processed by the system (number of simultaneous active downloads).	60
A.2	Operator revenue at the worst WE vs. prices p_m and p_f	65
A.3	Fraction of users that subscribe to some service (x) - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_m and p_f	66
A.4	Fraction of users that subscribe to service s_f : αx - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_m and p_f	66
A.5	Fraction of users that subscribe to service s_m : $(1 - \alpha)x$ - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_m and p_f	67
A.6	Operator revenue at the best WE vs. prices p_m and p_f	67
A.7	Fraction of users that subscribe to some service (x) - points that correspond to operator revenue at the best WE vs. prices p_m and p_f	68
A.8	Fraction of users that subscribe to service s_f : αx - points that correspond to operator revenue at the best WE vs. prices p_m and p_f	68
A.9	Fraction of users that subscribe to service s_m : $(1 - \alpha)x$ - points that correspond to operator revenue at the best WE vs. prices p_m and p_f	69
B.1	Operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MS}	83
B.2	Fraction of users that subscribe to some service (x) - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MS}	84
B.3	Fraction of users that do not subscribe to any service ($1 - x$) - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MS}	84
B.4	Fraction of users that subscribe to service s_M : $\alpha_1 x$ - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MS}	85
B.5	Fraction of users that subscribe to service s_{MS} : $\alpha_2 x$ - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MS}	85
B.6	Fraction of users that subscribe to service s_{MSF} : $\alpha_3 x$ - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MS}	86
B.7	Operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MSF}	86

B.8	Fraction of users that subscribe to some service (x) - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MSF}	87
B.9	Fraction of users that do not subscribe to any service ($1 - x$) - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MSF}	87
B.10	Fraction of users that subscribe to service s_M : $\alpha_1 x$ - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MSF}	88
B.11	Fraction of users that subscribe to service s_{MS} : $\alpha_2 x$ - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MSF}	88
B.12	Fraction of users that subscribe to service s_{MSF} : $\alpha_3 x$ - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MSF}	89
B.13	Operator revenue at the worst WE vs. prices p_{MS} and p_{MSF}	89
B.14	Fraction of users that subscribe to some service (x) - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_{MS} and p_{MSF}	90
B.15	Fraction of users that do not subscribe to any service ($1 - x$) - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_{MS} and p_{MSF}	90
B.16	Fraction of users that subscribe to service s_M : $\alpha_1 x$ - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_{MS} and p_{MSF}	91
B.17	Fraction of users that subscribe to service s_{SM} : $\alpha_2 x$ - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_{MS} and p_{MSF}	91
B.18	Fraction of users that subscribe to service s_{MSF} : $\alpha_3 x$ - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_{MS} and p_{MSF}	92
C.1	Operator revenue at the worst WE vs. macrocell bandwidth β_{mc} and at the best WE vs. macrocell bandwidth β_{mc}	95
C.2	Operator revenue at the maximum over the worst WE vs. macrocell bandwidth β_{mc} and at the maximum over the best WE vs. macrocell bandwidth β_{mc}	97
C.3	Fraction of users that subscribe to some service x - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. macrocell bandwidth β_{mc}	97
C.4	Price of service s_M - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. macrocell bandwidth β_{mc}	98
C.5	Price of service s_{MS} - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. macrocell bandwidth β_{mc}	98
C.6	Price of service s_{MSF} - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. macrocell bandwidth β_{mc}	99

Lista de Tabelas

2.1	Dilema do prisioneiro representado na forma normal.	7
2.2	Problema do controle de potência representado na forma normal.	7
2.3	Exemplo de jogo simétrico: o problema do controle de potência.	11
2.4	Exemplo de jogo de soma zero: papel-pedra-tesoura.	12
3.1	Custo associado ao requerimento para $P_{relay} = 0.05$ Watts.	29
3.2	Custo associado ao requerimento para $P_{relay} = 0.1$ Watts.	29
3.3	Custo associado ao requerimento para $P_{relay} = 0.15$ Watts.	29
3.4	Nova utilidade no jogo de 2 jogadores para $P_{relay} = 0.05$	30
3.5	Nova utilidade no jogo de 2 jogadores para $P_{relay} = 0.1$	30
3.6	Nova utilidade no jogo de 2 jogadores para $P_{relay} = 0.15$	30
3.7	Nova utilidade no jogo de 4 jogadores para $P_{relay} = 0.05$	33
3.8	Nova utilidade no jogo de 4 jogadores para $P_{relay} = 0.1$	33
3.9	Nova utilidade no jogo de 4 jogadores para $P_{relay} = 0.15$	34
C.1	Maximum price of each service for each value of macrocell bandwidth.	94
C.2	Maximum price of each service for each value of macrocell bandwidth.	94

Capítulo 1

Introdução

Os sistemas de telefonia móvel são compostos principalmente por usuários que possuem telefones móveis e pelas estações rádio-base (do inglês *Base-Station*). Estas estações rádio-base estão dispostas de forma a prover uma cobertura para todos os usuários; o nome designado à área de cobertura de uma estação rádio-base é célula. O tamanho da célula pode variar de acordo com o padrão de comunicação adotado.

A crescente demanda por altas taxas de transmissão tem motivado o desenvolvimento de novos padrões de comunicação e novas arquiteturas de redes. Por exemplo, uma das formas para aumentar a capacidade do sistema é diminuir a distância entre o transmissor e receptor, ou seja, das células. Em [1] fala-se que a capacidade aumentou em cerca de 1 milhão de vezes desde 1957 (até 2008) e que a redução do tamanho das células e da distância transmissor/receptor contribuiu com um ganho de 1600 vezes neste total.

Visando aumentar ainda mais a capacidade, soluções como *small-cells* [2] e *femtocells* [1] [3] estão sendo desenvolvidas. Elas são dedicadas respectivamente para coberturas em ambientes abertos e fechados. *Small-cells* são células de curto alcance densamente implantadas que aumentam o *throughput* através do aumento do reuso do espectro e também através da diminuição da distância entre o transmissor e o receptor. *Femtocells* são usadas para tráfego *offloading* e cobertura de áreas fechadas; elas podem ser conectadas à rede através de DSL (do inglês *Digital Subscriber Line*), *cable modems* ou por bandas ortogonais de rádio.

Nestas redes heterogêneas várias questões surgem: qual é o modo mais eficiente em termos de energia e de custo no qual a operadora deve implantar, inter-conectar e alocar os recursos entre estas redes (exemplo: alocação do espectro, gerenciamento da interferência) e qual o preço para cada diferente tipo de serviço?

A fim de auxiliar na solução de problemas deste tipo, o ramo da matemática conhecido como Teoria dos Jogos tem sido cada vez mais utilizado.

1.1 Trabalhos Relacionados

Nós começaremos apresentando brevemente alguns dos trabalhos mais recentes e relevantes.

Em [1], três diferentes tipos de tecnologia são comparados em termos de custo de equipamentos, custos de operação e características: *femtocell*, *distributed antennas* e *microcells*. Os seguintes argumentos para a adoção de *femtocells* são apresentados: elas provêm uma melhor cobertura e capacidade do que as outras duas tecnologias (*distributed antennas* e *microcells*); há o aumento da taxa de dados na rede pois todos os recursos disponíveis serão utilizados somente pelos usuários que estão fora da casa (onde não há *femtocell*); o custo do operador será reduzido, reduzindo o custo com eletricidade apesar da crescente demanda pela taxa de transmissão, e a necessidade de novas *base-stations* para *macrocell* serão reduzidas; o usuário ficará mais satisfeito porque terá um melhor serviço e provavelmente não mudará de operadora.

Além do mais, quando *femtocells* são utilizadas, é possível escolher a configuração: *open access* ou *closed access*. Na configuração de *open access*, qualquer usuário pode utilizar a *femtocell*, enquanto que na configuração de *closed access* somente os usuários com permissão do dono da *femtocell* podem utilizar os recursos. A análise destas duas configurações é apresentada em [4] onde é mostrado que a melhor opção depende do esquema de múltiplo acesso adotado pela operadora.

Em [2], *small-cells* são vistas como uma solução verde para a crescente demanda das taxas de transmissão, no caso em que a maioria do tráfego seria suportada por esta tecnologia. Neste mesmo trabalho, os autores vêem *femtocell* como um estágio no desenvolvimento de *small-cells*. Todos os usuários de telefonia móvel poderiam ter acesso a *small-cells* e a infra-estrutura necessária seria provida pela operadora. O equipamento necessário seria instalado nas ruas, por exemplo nos pontos de ônibus e postes de eletricidade [2].

Em [5], novas tecnologias, que estão relacionadas com a qualidade de serviço - *Quality of Service* ou QoS, são analisadas sobre um ponto de vista econômico. A dinâmica da subscrição dos usuários é estudada assumindo que o operador provém um serviço. Em um caso, a QoS é considerada constante e em outro a QoS depende do número de usuários que adotam o mesmo serviço. Os autores investigam também o jogo onde os usuários podem escolher dentre três opções: adotar um serviço com uma QoS constante, adotar um serviço com uma QoS que varia de acordo com o número de usuários que adotam o mesmo serviço, ou escolher não ter nenhum dos serviços. É importante frizar que cada serviço é provido por operadoras diferentes. Em [5], os autores derivam também um intervalo de valores para os preços, de forma a maximizar o rendimento da operadora e tal que a dinâmica de usuários assinantes converge para o ponto de equilíbrio.

Em [6], um jogo de três camadas é modelado e analisado. No jogo da camada mais

alta, as operadoras decidem quais tecnologias implementar (*3G*, *WiFi* e *WiMax*). No jogo da camada intermediária, as operadoras têm como objetivo maximizar o rendimento e para isto escolhem o melhor preço para os serviços a serem providos. No jogo da camada inferior, os usuários escolhem os serviços dependendo da QoS e dos preços das tecnologias oferecidas. A função da QoS deste último jogo depende somente da quantidade de usuários que escolheram a mesma tecnologia da mesma operadora (para *3G* e *WiMax*) e da soma da quantidade de usuários que escolheu a mesma tecnologia (*WiFi*) de todas as operadoras.

Em [7], o sistema investigado é composto de uma operadora que provê dois tipos de serviços. A operadora escolhe os preços de forma a maximizar o rendimento. Os valores ótimos dos preços para o equilíbrio são encontrados usando uma busca exaustiva. Dois tipos de esquemas de divisão do espectro são também analisados: o de espectro comum, onde *macrocell* e *femtocell* usam a mesma banda, e o espectro compartilhado onde parte da banda é designada para *macrocell* e a outra parte para *femtocell*.

1.2 Principais Contribuições

As principais contribuições deste trabalho estão resumidas nos Capítulos 4, 5 e 6 e descritas de forma detalhada nos Apêndices A, B, C.

O objetivo desta parte é expandir os resultados de [7]. As nossas contribuições são múltiplas:

1. definimos de forma rigorosa e estudamos a formulação Stackelberg [8] de dois níveis: em um nível, o líder, neste cenário representado pela operadora, escolhe os preços dos serviços e a banda a ser alocada para cada tecnologia de forma a maximizar o lucro; e no outro nível, dadas as escolhas do líder, os seguidores, neste caso os usuários, jogam um jogo não-cooperativo e não atômico, no qual decidem de forma egoísta qual serviço adotar para maximizar o benefício obtido individualmente. Esta interferência mútua que é criada no sistema causa uma situação iterativa entre os usuários;
2. consideramos um número arbitrário de serviços, provamos a existência e deduzimos expressões do equilíbrio de Wardrop no jogo da camada inferior;
3. ilustramos a existência de múltiplos equilíbrios através de simulações numéricas;
4. consideramos o problema de alocação de banda entre as tecnologias *macro-cells* e *small-cells*;
5. simulações numéricas são feitas para os três tipos de serviço: *mobile-only* (M), *mobile-plus-small-cells* (MS) e *mobile-plus-small-plus-femtocells* (MSF);

6. analisamos a influência dos preços e da política da alocação da banda no estado da rede.

O caso mais geral, no qual existe um número arbitrário de operadoras e cada uma provê um número arbitrário de serviços, é deixado como extensão do nosso trabalho e de [5].

Além do mais, os resultados obtidos geraram o seguinte artigo de congresso: [9].

1.3 Organização do Trabalho

O trabalho está dividido em duas partes, sendo a primeira composta pelos Capítulos 2 e 3. No Capítulo 2 importantes conceitos de teoria dos jogos são apresentados; no Capítulo 3 será resolvido um jogo sobre a disputa de recursos disponíveis de um usuário que está no estado *idle*. Neste jogo, existem usuários que estão transmitindo com uma taxa de transmissão abaixo da necessária e um usuário com recursos disponíveis para auxiliar estes outros. Desta forma, com o intuito de maximizar a utilidade, os usuários ativos disputarão os recursos do usuário *idle*, que atuará como um *relay*. Neste Capítulo são feitas simulações para analisar o ganho de capacidade para o caso em que temos dois e quatro jogadores.

A segunda parte foi iniciada durante minha permanência na **Alcatel-Lucent Chair on Flexible Radio**; Supélec, Gif-Sur-Yvette, France, entre 5 de Janeiro de 2011 e 8 de Abril de 2011. No Supélec fui orientada pelo professor Mérouane Debbah e pela Elena Veronica Belmega, Ph.D. Esta parte está resumida nos Capítulos 4, 5 e 6, e encontra-se descrita detalhadamente em inglês nos Apêndices A, B, C.

No Apêndice A, a referência [7] é descrita e uma análise minuciosa da formulação de Stackelberg é feita. No final deste Apêndice simulações que ilustram a multiplicidade do equilíbrio de Wardrop são apresentadas. O Apêndice B contém uma extensão do problema apresentado no Apêndice A; mais precisamente, nós consideramos o caso em que a operadora provém um número arbitrário de serviços, por exemplo $M \geq 2$. Simulações para o caso em que a operadora provém 3 tipos diferentes de serviços são apresentadas. No Apêndice C, é derivada a banda ótima para ser alocada para as tecnologias de *macrocell* e *small-cells*; as simulações para este problema são apresentadas no final deste Apêndice.

Por fim, no Capítulo 7 são apresentados possíveis trabalhos futuros assim como a conclusão deste.

Capítulo 2

Teoria dos Jogos

Neste capítulo iremos apresentar conceitos importantes de Teoria dos Jogos. Alguns dos conceitos mostrados aqui serão usados nos capítulos posteriores.

2.1 Teoria dos Jogos

Teoria dos Jogos é um ramo da matemática que permite a análise de conflitos quando múltiplos agentes disputam os recursos disponíveis. Nela, basicamente, um conflito é modelado como sendo um jogo, onde cada jogador (ou agente) toma uma decisão e de acordo com essa decisão recebe certa recompensa (ou utilidade). Porém os jogos podem ter diferentes características e desta forma são classificados e analisados de formas distintas.

Essa teoria ganhou uma maior notoriedade depois da publicação em 1944 do livro “*The Theory of Games and Economic Behavior*” de John von Neumann e Oskar Morgenstern. Posteriormente John Nash também deu importantes contribuições para a teoria como por exemplo o famoso Equilíbrio de Nash, que será apresentado adiante. Diversos livros de teoria dos jogos com diferentes abordagens vêm sendo escritos como [10], [11], [12], [13], [14]; o que mostra a relevância deste assunto.

É importante ressaltar também que diversas áreas do conhecimento passaram a utilizar esta teoria, como por exemplo a Economia, Ciências Políticas, Relações Internacionais, Psicologia, Biologia e vários ramos da Engenharia, sendo um desses a área de comunicações sem fio [15].

Dentro da área de comunicações móveis, vários problemas têm sido analisados sob esta nova ótica. Problemas como a alocação distribuída de recursos, controle de tráfego, controle de potência, divisão do espectro para rádio cognitivo são alguns dos ramos de comunicações sem fio que, na pesquisa, vêm utilizando jogos não-cooperativos¹ [15].

¹Jogos não-cooperativos são os jogos em que os jogadores não colaboram com os outros jogadores. Este conceito será explicitado posteriormente.

2.2 Jogos

É importante definir os três agentes básicos que sempre fazem parte da definição de um jogo [11]:

- o conjunto de jogadores denotado por \mathcal{N} - eles são indivíduos racionais, que são os responsáveis pelas estratégias a serem adotadas;
- o conjunto das estratégias disponíveis para cada jogador i denotado por \mathcal{A}_i - as estratégias são uma descrição completa de como um jogador pode jogar [11], ou seja, são as possíveis ações. Deve-se notar que a escolha de uma ação depende da estratégia adotada pelos outros jogadores;
- as recompensas (utilidades) ou *pay-offs* denotadas por U ou ν - cada jogador recebe uma recompensa de acordo com a ação escolhida. É importante ressaltar que a recompensa recebida depende da ação conjunta dos outros jogadores.

2.2.1 Representações dos jogos

Antes de apresentarmos como os jogos podem ser classificados, iremos definir as duas possíveis formas de representar os jogos não-cooperativos:

- forma normal ou estratégica;
- forma extensiva.

Do mesmo modo, podemos representar os jogos cooperativos da seguinte forma:

- forma característica;
- forma particionada;
- forma em grafo.

A seguir explicaremos cada uma destas formas.

Forma Normal ou estratégica

Na forma normal ou estratégica, é representada a recompensa ou *pay-off* dos jogadores para todas as possíveis combinações de estratégias escolhidas por cada agente em um formato matricial.

Para ilustrarmos esta forma, iremos apresentar o dilema do prisioneiro. Neste dilema, temos dois suspeitos de terem cometido um crime que estão presos em lugares distintos e não podem se comunicar. Com o objetivo de descobrir quem foi o autor do crime, é perguntado para ambos se eles cometeram ou não o crime. Se apenas um deles confessar,

este será preso por 4 anos e o outro será solto; se os dois confessarem, ambos ficarão presos por um ano; e se nenhum confessar, ambos ficarão presos por três anos. Este dilema pode ser representado na forma normal através da Tabela 2.1, onde as possíveis ações do prisioneiro 1 estão representadas na linha, e do prisioneiro 2 na coluna. Cada combinação das possíveis ações dos dois jogadores resulta em certa recompensa, que neste caso é o número de anos em que cada um ficará preso. Para o prisioneiro 1 é o primeiro valor de cada célula e para o prisioneiro 2 o segundo valor.

Tabela 2.1: Dilema do prisioneiro representado na forma normal.

		Prisioneiro 2	
		não confessa	confessa
Prisioneiro 1	não confessa	(-3, -3)	(0, -4)
	confessa	(-4, 0)	(-1, -1)

Um outro exemplo de jogo que podemos usar para mostrar esta forma é o problema do controle de potência num sistema de comunicação sem fio [13]. Neste problema, os usuários (que são os jogadores) querem a maior SINR (do inglês, *Signal to Interference-plus-Noise Ratio*) possível usando de preferência a menor potência necessária. Para ilustrarmos esse exemplo, iremos considerar o caso em que haja somente dois usuários no sistema e que eles possam escolher a potência a ser utilizada na transmissão. Para simplificar o problema, iremos considerar somente o caso de potências baixa e alta. Então se ambos os usuários escolherem transmitir com a menor potência possível, ambos obterão uma SINR de 15 dB, mas se um usuário utilizar potência alta e outro potência baixa, o primeiro terá uma SINR de 20 dB e o segundo de 8 dB. Se ambos transmitirem com potência alta, ambos terão uma SINR de 12 dB. Podemos representar este conflito na forma normal, o qual pode ser visto na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Problema do controle de potência representado na forma normal.

		Usuário 2	
		potência baixa	potência alta
Usuário 1	potência baixa	(15, 15)	(8, 20)
	potência alta	(20, 8)	(12, 12)

Forma Extensiva

Na forma extensiva, um jogo é representado através de uma árvore de decisão. Nesta forma, os nós são os jogadores e os ramos são as possíveis estratégias. Deve-se notar que nesta forma é possível a representação de uma sequência temporal no processo de decisão.

É importante mencionar que nesta representação dois ou mais nós podem estar conectados por uma linha tracejada. Quando isto ocorre, o jogador não sabe em qual daqueles

nós ele está.

Para melhor ilustrar, voltemos ao caso do controle de potência apresentado anteriormente. Podemos representar o mesmo jogo com as mesmas considerações através da Figura 2.1, lembrando que a linha tracejada significa que o usuário 2 não sabe qual foi a estratégia adotada pelo usuário 1.

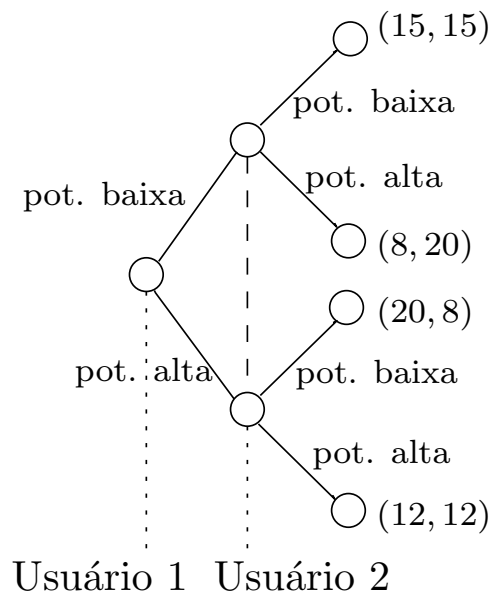


Figura 2.1: Problema do controle de potência representado na forma extensiva em que o usuário 2 desconhece a escolha do usuário 1.

Contudo, se considerarmos que o usuário 2 conhece a escolha do usuário 1, a representação ficará conforme a mostrada na Figura 2.2. É importante citar que adotar uma estratégia sabendo ou não a opção do outro usuário pode causar uma diferença no ponto de equilíbrio do jogo.

Forma Característica

A forma característica é usada para representar jogos cooperativos ou de coalizão². A recompensa que a coalizão S , que é formada por jogadores pertencentes a \mathcal{N} , irá receber depende somente da coalizão e não depende de como os jogadores que não fazem parte da coalizão estão organizados [15].

Forma Particionada

A forma particionada representa os jogos cooperativos em um formato similar à forma característica. A única diferença é que nesta forma a recompensa que a coalizão S recebe vai depender de como os jogadores que não fazem parte dela estão organizados ou agrupados. A Figura 2.3 retirada de [15] ilustra a diferença entre as duas formas, conforme explicado a seguir.

²Neste tipo de jogo os jogadores podem se unir e formar coalizões a fim de obter uma maior recompensa.

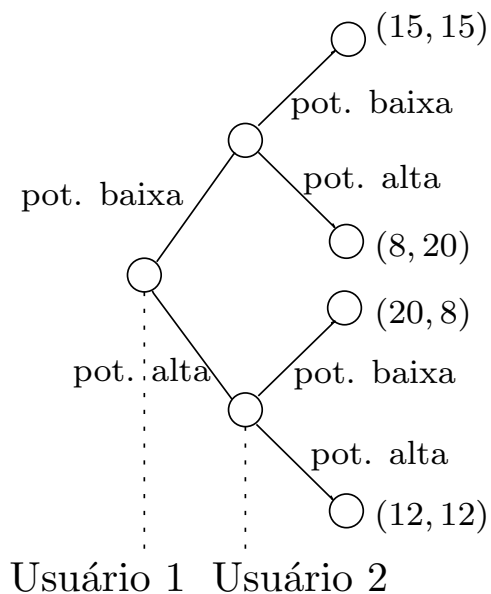


Figura 2.2: Problema do controle de potência representado na forma extensiva em que o usuário 2 desconhece a escolha do usuário 1.

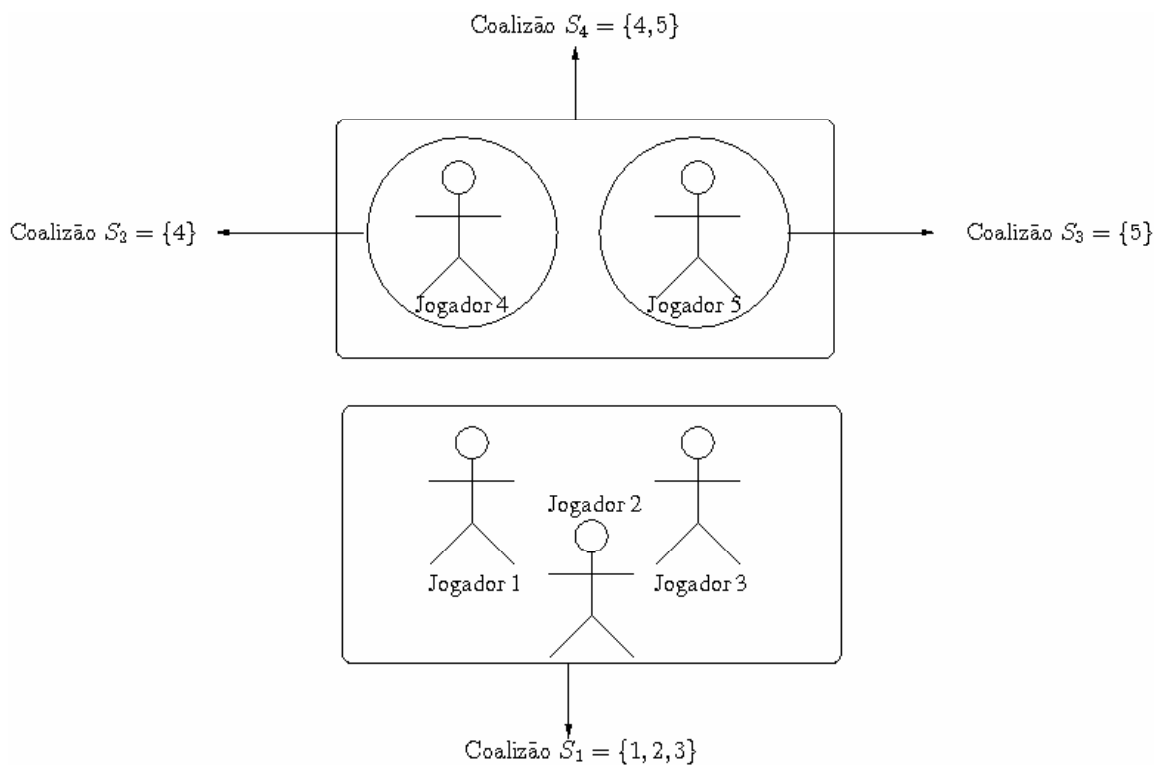


Figura 2.3: Forma Característica \times Forma Particionada.

De acordo com as definições apresentadas anteriormente, o valor da coalizão S_1 (denotado por $\nu(S_1)$), formada pelos jogadores 1, 2 e 3, não depende se os jogadores 4 e 5 formam uma única coalizão ou não. Isto pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\nu(S_1, \{S_2, S_3\}) = \nu(S_1, \{S_4\}) = \nu(S_1) \quad (2.1)$$

ou seja, o valor da coalizão S_1 , neste caso ($\nu(S_1)$) vai ser o mesmo tanto se existirem as coalizões S_2 e S_3 ou S_4 .

Já na forma característica, o valor da coalizão S_1 pode ser diferente dependendo se os jogadores 4 e 5 estão cooperando ou não. Matematicamente, podemos ter

$$\nu(S_1, \{S_2, S_3\}) \neq \nu(S_1, \{S_4\}), \quad (2.2)$$

desta forma, o valor de S_1 ($\nu(S_1)$) pode ser diferente se existirem as coalizões S_2 e S_3 ou somente a coalizão S_4 .

Forma em Grafo

A forma em Grafo foi introduzida em [16] por Myerson. Ela é importante nos casos em que os jogadores estão conectados e se comunicam através de pares de *links*. Neste tipo de jogo, a recompensa pode variar de acordo com o tipo de conexão existente entre os jogadores. Novamente, utilizamos uma ilustração de [15] (Figura 2.4) para melhor retratar esta forma.

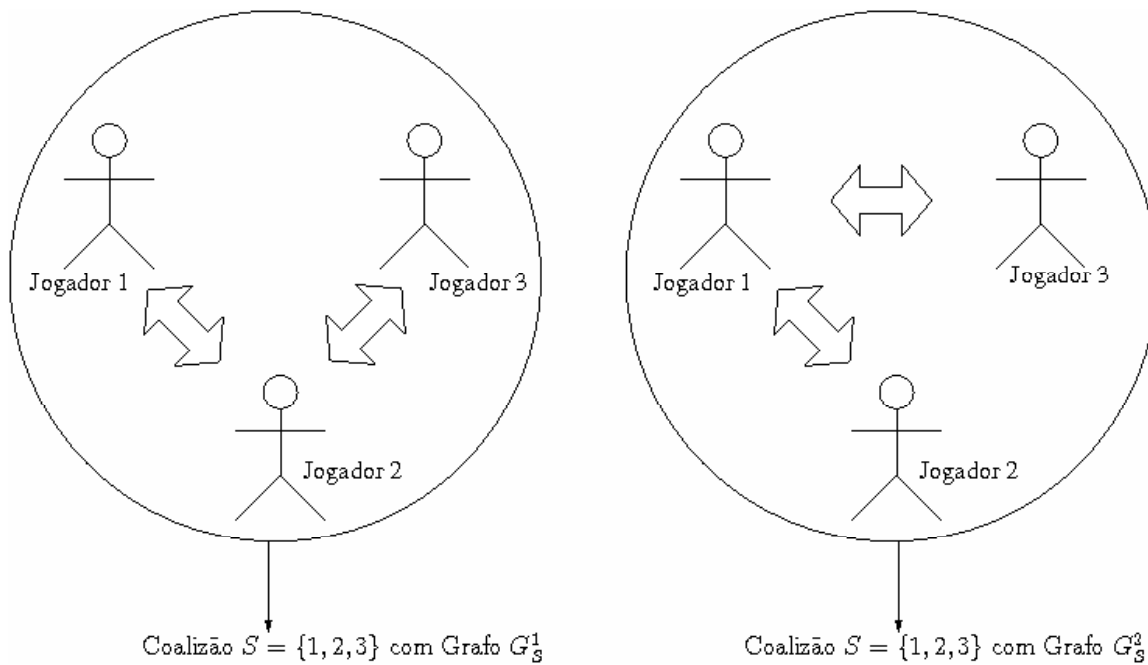


Figura 2.4: Forma em Grafo.

Na forma em grafo, é possível que o valor da coalizão S seja diferente se for representado pelos grafos G_S^1 ou G_S^2 , ou seja:

$$\nu\{G_S^1\} \neq \nu\{G_S^2\}. \quad (2.3)$$

2.2.2 Tipos dos jogos

Os jogos podem ser classificados de diferentes formas [17], variando apenas uma característica. A classificação facilita a localização de resultados referentes a existência e/ou unicidade dos pontos de equilíbrio do jogo em estudo.

Nas próximas subseções serão apresentados alguns tipos de jogos.

Jogos Cooperativos × Jogos Não-Cooperativos

Neste caso a característica a ser considerada é a cooperação ou não entre os jogadores, ou seja, se os jogadores podem se unir e formar coalizões a fim de aumentar o *pay-off*. Desta forma, são considerados cooperativos os jogos em que existe a possibilidade dos jogadores se unirem em coalizões e não-cooperativos os jogos em que não é possível a formação destes grupos.

Jogos Simétricos × Jogos Assimétricos

Esta divisão está relacionada ao *pay-off* recebido pelos jogadores. Um jogo é considerado simétrico se ele só depende da estratégia adotada, e não de qual jogador a escolheu. Ou seja, se trocarmos os jogadores mas deixarmos os *pay-offs* nas mesmas posições, e ainda assim os jogadores receberem a mesma recompensa para iguais estratégias adotadas anteriormente, o jogo é simétrico. Se isto não acontecer, o jogo é assimétrico. Podemos visualizar a simetria do jogo no caso do problema do controle de potência apresentado anteriormente. Conforme podemos perceber, se trocarmos apenas a posição dos jogadores da Tabela 2.2, os valores das recompensas continuam os mesmos como pode ser observado na Tabela 2.3.

Tabela 2.3: Exemplo de jogo simétrico: o problema do controle de potência.

		Usuário 1	
		potência baixa	potência alta
Usuário 2	potência baixa	(15, 15)	(8, 20)
	potência alta	(20, 8)	(12, 12)

Jogos de Soma-Zero × Jogos de Soma Não Zero

Um jogo é considerado de soma-zero se a soma das recompensas obtidas pelos dois jogadores der zero para qualquer conjunto possível de ações.

Um exemplo de jogo de soma-zero é o jogo do papel-pedra-tesoura [13]. Neste jogo de 2 participantes, cada um escolhe qual das três opções que irá utilizar na jogada. Como se sabe, a pedra quebra a tesoura, a tesoura corta o papel e o papel embrulha a pedra e como podemos notar existem dois possíveis resultados: um jogador ganha e o outro perde

ou os dois jogadores empatam. Este conflito pode ser representado através da Figura 2.4 através da forma normal.

Tabela 2.4: Exemplo de jogo de soma zero: papel-pedra-tesoura.

		Jogador 2		
		papel	pedra	tesoura
Jogador 1	papel	(0, 0)	(1, -1)	(-1, 1)
	pedra	(-1, 1)	(0, 0)	(1, -1)
	tesoura	(1, -1)	(-1, 1)	(0, 0)

Número de Jogadores

A referência [18] apresenta os tipos de jogos de acordo com o número de jogadores. É importante lembrar que quando só existe um jogador, temos um problema de otimização. O caso em que dois participantes disputam por recursos é o caso clássico e melhor entendido, enquanto que quando existem mais jogadores, o problema torna-se mais rico e complicado, devido às possíveis formações de coalizões [17].

Número de repetições de um jogo

Os jogos podem ser repetidos múltiplas vezes, e quando isto ocorre denominamos os jogos como sendo Jogos Repetidos. Deve-se notar que neste tipo os jogadores podem “aprender” a estratégia adotada pelos outros jogadores e assim buscar uma estratégia tal que maximize o seu *pay-off* [19]. Existe o caso também em que o jogo é repetido indefinidamente.

Jogos Discretos × Jogos Contínuos

Um jogo é considerado discreto se o conjunto de estratégias disponível para cada jogador é finito. Se este conjunto for contínuo, ou seja, tiver infinitas estratégias ou escolhas, o jogo é considerado contínuo. O problema do controle de potência pode ser um jogo contínuo se cada usuário puder escolher o valor potência que irá utilizar, sendo que este valor pode ser, por exemplo, de 0 dB a 30 dB.

Jogos Finitos × Jogos Infinitamente Longos

A maioria dos jogos acaba em um número finito de jogadas [17], desta forma são conhecidos como jogos finitos. Contudo note que na referência [10] é considerado um jogo finito o jogo que possui um conjunto finito de ações possíveis para cada jogador; porém nós já definimos anteriormente este tipo de jogo como sendo discreto, sendo esta última a notação que será utilizada neste trabalho.

Jogos Estáticos × Jogos Dinâmicos

Usaremos a definição de [17] para jogos estáticos: eles são jogos em que o jogador só tem um movimento para utilizar a sua estratégia, ou seja, os jogadores escolhem a ação simultaneamente e conseqüentemente não possuem o conhecimento das estratégias adotadas pelos outros jogadores. Já nos jogos dinâmicos os jogadores possuem mais de um movimento ou jogada, sendo que o jogador pode ou não ter conhecimento da estratégia adotada pelos oponentes nas rodadas anteriores.

Jogos de Informação Perfeita × Jogos de Informação Imperfeita

Um jogo é de informação perfeita se o jogador sabe **todas** as escolhas feitas anteriormente à sua decisão [17]. Como pode ser observado, esta classificação só pode ser aplicada a jogos dinâmicos.

Jogos de Informação Completa × Jogos de Informação Incompleta

Um jogo é considerado de informação completa se o jogador conhece [17]:

- quais são os outros jogadores;
- quais são as possíveis estratégias dos outros jogadores;
- e as recompensas para todas as combinações possíveis das estratégias de todos os outros jogadores.

É importante frizar que jogos de informação perfeita são diferentes de jogos de informação completa, já que neste último tipo o jogador não conhece necessariamente as ações adotadas previamente no jogo.

Jogos Não-Atômicos

Nos jogos não-atômicos, somente a mudança de estratégia de um grupo de jogadores influencia o *pay-off* dos jogadores ou seja, se apenas um jogador mudar a sua estratégia os *pay-offs* dos outros jogadores não serão alterados [20]. É importante notar que a quantidade de jogadores é grande neste tipo de jogo.

Um exemplo são as eleições, onde o voto de um conjunto de pessoas altera o resultado final e não o de somente uma. Outro exemplo é o processo de escolha da melhor rodovia para chegar no menor tempo ao destino. Se apenas um motorista resolver utilizar a rodovia A do que a B, o tempo do percurso dos outros não será alterado; contudo se um grupo de motoristas decidir seguir pela estrada A ao invés da B, então o tempo de todos será alterado.

2.3 Tipos de Estratégias

Cada jogador possui um conjunto de estratégias. Ele deve escolher a estratégia que possibilite maximizar a sua utilidade. Com este objetivo, apresentaremos duas formas que os jogadores podem adotar no processo de escolha da estratégia.

2.3.1 Estratégia Pura

A estratégia pura diz como o jogador irá jogar, ou seja, ela determina qual escolha o jogador irá fazer para qualquer situação (ou combinações de estratégias alheias). O conjunto de estratégias definido anteriormente (\mathcal{A}_i) corresponde ao conjunto puro de estratégias para cada jogador.

2.3.2 Estratégia Mista

A estratégia mista é a atribuição de probabilidades para cada estratégia possível de \mathcal{A}_i , $\forall i$. Desta forma, o jogador pode escolher aleatoriamente uma estratégia. Matematicamente podemos definir da seguinte forma:

$$\sigma_i = (\sigma_i(a_1), \dots, \sigma_i(a_j), \dots, \sigma_i(a_{M_i})) \quad (2.4)$$

onde $\sigma_i(a_j)$ é a probabilidade do jogador i adotar a estratégia $a_j \in \mathcal{A}_i$ e M_i é o número de estratégias puras disponíveis ao mesmo jogador. Temos ainda que

$$\sum_{j=1}^{M_i} \sigma_i(a_j) = 1. \quad (2.5)$$

É importante notar que existem infinitas estratégias mistas em um jogo, ainda que o número de estratégias puras seja finito.

2.4 Tipos de Equilíbrio

O objetivo da análise de um jogo é encontrar o(s) ponto(s) de equilíbrio deste sistema. Dependendo das características do jogo, o conceito de equilíbrio será diferente. A seguir apresentaremos apenas tipos de equilíbrio: o equilíbrio de Nash e o equilíbrio de Wardrop.

2.4.1 Equilíbrio de Nash

O equilíbrio de Nash é uma solução para jogos não-cooperativos. Um ponto é considerado como sendo o equilíbrio de Nash se nenhum jogador unilateralmente tem incentivo

em mudar a sua ação, em outras palavras, se qualquer um dos n jogadores modificar a estratégia escolhida não resultará em um maior ganho ou recompensa (denotada por $U(\cdot)$). Matematicamente podemos expressar este conceito da seguinte forma:

$$U(a_i, a_{-i}) > U(a'_i, a_{-i}) \quad (2.6)$$

onde $a_{-i} = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ são as ações escolhidas pelos jogadores com exceção do jogador i . Desta forma, podemos observar que $a = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ é um Equilíbrio de Nash.

Podemos visualizar o equilíbrio de Nash no problema do controle de potência apresentado na Tabela 2.2. Encontramos o equilíbrio de Nash se fizermos uma rápida análise: para qualquer escolha que o usuário 2 faça, se o usuário 1 escolher transmitir com potência baixa, ele terá uma menor recompensa do que se transmitir com potência alta. O mesmo ocorre para o usuário 2; para qualquer escolha do usuário 1, o jogador 2 obterá uma maior recompensa se utilizar uma potência alta do que baixa. Desta forma, o ponto do equilíbrio de Nash será o ponto onde os dois usuários utilizam potência alta e obtêm como recompensa, cada uma SNR de 12 dB. Notamos ainda que se utilizassem potência baixa, ambos obteriam uma maior recompensa.

2.4.2 Equilíbrio de Wardrop

O equilíbrio de Wardrop pode ser visto como a generalização do equilíbrio de Nash para um jogo com um número infinito de jogadores. Ele é um estado que é robusto a desvios de uma parte infinitesimal da população.

Este conceito foi introduzido por John Glen Wardrop no contexto de problemas de rotas de transporte [21], e é definido pelos dois princípios:

Primeiro princípio:

“Os tempos de viagem em todas as rotas efetivamente utilizadas são iguais ou menores do que aqueles que seriam experimentados por um único veículo em qualquer rota não utilizada”;

e

Segundo princípio:

“No equilíbrio o tempo médio de viagem é mínimo.”

ou seja, de acordo com o primeiro princípio cada usuário busca minimizar o custo do transporte. Note que é possível fazer uma analogia entre transporte e por exemplo serviços prestados por uma empresa: os usuários sempre querem minimizar o custo.

2.5 Exemplo de Jogo

Esta seção utiliza um exemplo similar ao mostrado na referência [22], sendo este um típico problema de comunicações móveis: o conflito na disputa pelos recursos disponíveis na rede. Só que este problema será agora analisado sob uma nova ótica: a de Teoria dos Jogos.

Neste exemplo vamos considerar um sistema MIMO (do inglês, *Multiple-Input Multiple-Output*) sem memória com apenas dois usuários. Este sistema está melhor representado na Figura 2.5 e pode ser descrito matematicamente da seguinte forma:

$$y_1(n) = h_{11}x_1(n) + h_{21}x_2(n) + e_1(n) \quad (2.7)$$

$$y_2(n) = h_{22}x_2(n) + h_{12}x_1(n) + e_2(n) \quad (2.8)$$

onde $x_i(n)$ é o sinal enviado pelo transmissor i , $y_i(n)$ é o sinal recebido pelo receptor i e $e_i(n)$ são amostras do ruído branco com média zero e variância σ^2 .

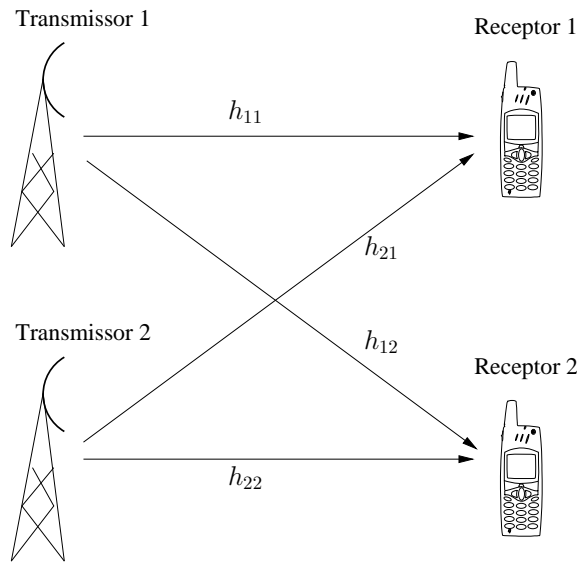


Figura 2.5: Modelo do Sistema MIMO adotado.

O objetivo de cada usuário do sistema é aumentar a taxa de transmissão gastando a menor potência possível. Matematicamente, podemos dizer que a taxa máxima que cada um dos dois usuários do sistema pode obter é a seguinte [22]:

$$R_1 = \log_2 \left(1 + \frac{P_1 |h_{11}|^2}{P_2 |h_{21}|^2 + \sigma^2} \right) \quad (2.9)$$

$$R_2 = \log_2 \left(1 + \frac{P_2 |h_{22}|^2}{P_1 |h_{12}|^2 + \sigma^2} \right). \quad (2.10)$$

Através das equações apresentadas acima, podemos observar que quanto maior a potência de transmissão escolhida por um usuário, maior a taxa obtida por ele e menor será a

taxa de transmissão do outro usuário do sistema. Para este tipo de problema sempre é estabelecido um valor máximo (no caso P_{max} para os dois transmissores) para a potência de transmissão.

A partir das informações apresentadas, podemos descrever o jogo:

- Conjunto de jogadores: $\mathcal{N} = \{1, 2\}$;
- Conjunto de estratégias: $\mathcal{A} = [0, P_{max}] \times [0, 1]$ onde o usuário escolhe a potência e a fração do tempo para transmissão;
- Função utilidade: $U_a^i = R_s^i$;

onde s é o esquema de transmissão; será analisada a região de utilidade somente dos seguintes esquemas de transmissão conhecidos:

- usuários transmitem simultaneamente (s_1);
- usuários dividem o tempo e em cada intervalo de tempo transmitem com potência diferentes (s_2);
- apenas um usuário transmite em um intervalo de tempo (s_3).

Estes três diferentes esquemas de transmissão e as respectivas regiões de utilidade (ou possíveis valores de taxa de transmissão) que os usuários podem atingir serão analisados.

É importante frisar que todos estes esquemas são possíveis soluções para o jogo apresentado; porém, o nosso objetivo é comparar estes três esquemas de transmissão de forma a analisar qual deles provê uma maior utilidade para os jogadores.

No primeiro esquema, s_1 , os dois usuários transmitem simultaneamente gerando interferência. Matematicamente, descrevemos a região de utilidade da seguinte forma:

$$\mathbf{R}_{s_1} = \bigcup (R_1, R_2) \quad (2.11)$$

No segundo tipo, s_2 , os usuários dividem o tempo e em cada intervalo de tempo transmitem com uma potência diferente:

$$\mathbf{R}_{s_2} = \bigcup \left(\tau R_1 + (1 - \tau) R'_1, \tau R_2 + (1 - \tau) R'_2 \right), \quad (2.12)$$

onde $0 \leq \tau \leq 1$.

No terceiro esquema, s_3 , apenas um usuário transmite durante um determinado intervalo de tempo:

$$\mathbf{R}_{s_3} = \bigcup (\tau R_1, (1 - \tau) R_2), \quad (2.13)$$

onde novamente $0 \leq \tau \leq 1$. É importante destacar que devido ao fato de apenas um usuário transmitir em um determinado intervalo de tempo, este não sofrerá interferência

do outro usuário; portanto no cálculo de R_1 teremos $P_2 = 0$, assim como para R_2 teremos $P_1 = 0$.

Na Figura 2.6 podemos observar a região de utilidade obtida utilizando estas três diferentes formas de transmissão. Os parâmetros utilizados foram os seguintes:

$$\begin{aligned} h_{11} &= 0.9 \\ h_{12} &= 0.2 \\ h_{21} &= 0.2 \\ h_{22} &= 0.8 \\ P_{max} &= 10 \\ \sigma^2 &= 10^{-1} \end{aligned}$$

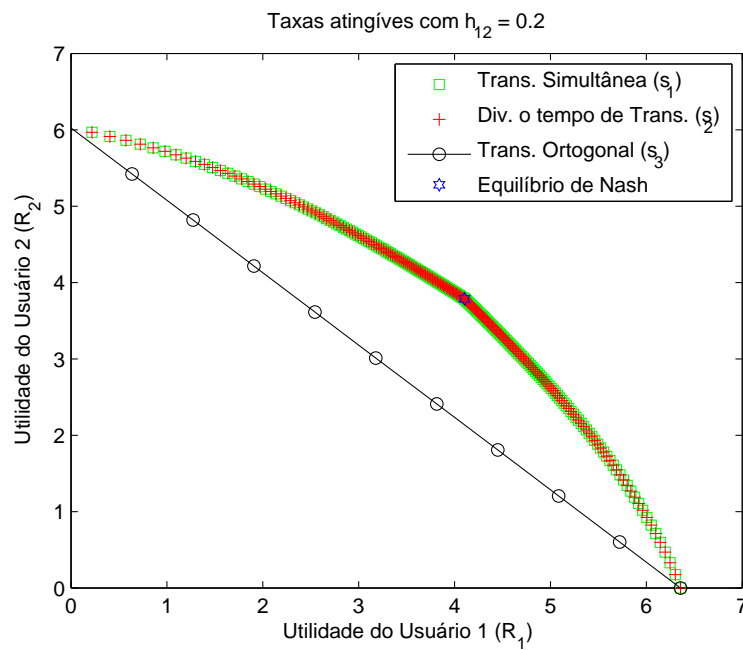


Figura 2.6: Região de utilidade para os três diferentes esquemas de transmissão (para $h_{12} = 0.2$).

A região de utilidade apresentada na Figura 2.6 mostra os valores máximos que os usuários podem obter para os três diferentes esquemas de transmissão. Qualquer ponto no interior destas curvas também pode ser atingido.

Podemos notar que a região resultante na Figura 2.6 é convexa pois existe uma interferência considerada fraca entre os usuários do sistema. Porém, se a interferência entre os usuários for maior, como por exemplo $h_{12} = 0.5$, a região de utilidade é reduzida e portanto o seu formato é modificado, conforme podemos observar na Figura 2.7.

Se aumentarmos ainda mais a interferência ou seja, usarmos $h_{12} = 0.7$, o formato da região de utilidade para transmissão simultânea torna-se côncavo. Podemos ver este fato

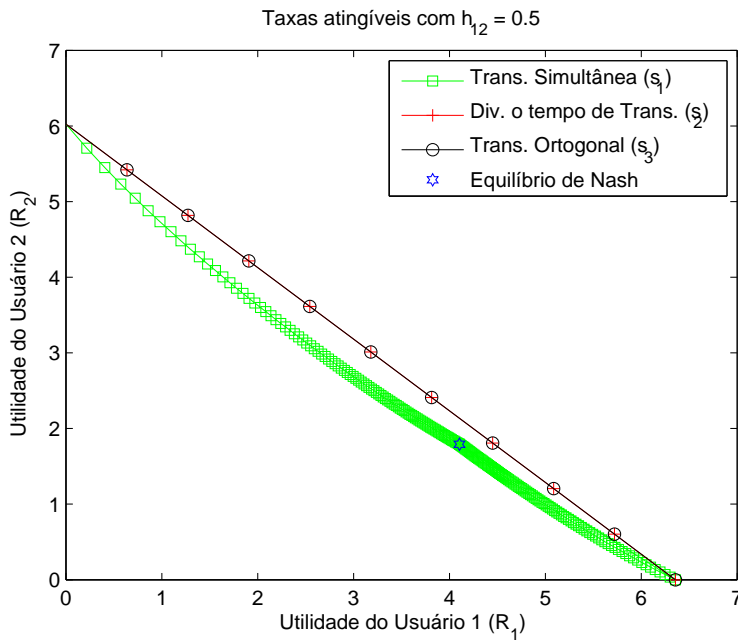


Figura 2.7: Região de utilidade para os três diferentes esquemas de transmissão (para $h_{12} = 0.5$).

na Figura 2.8.

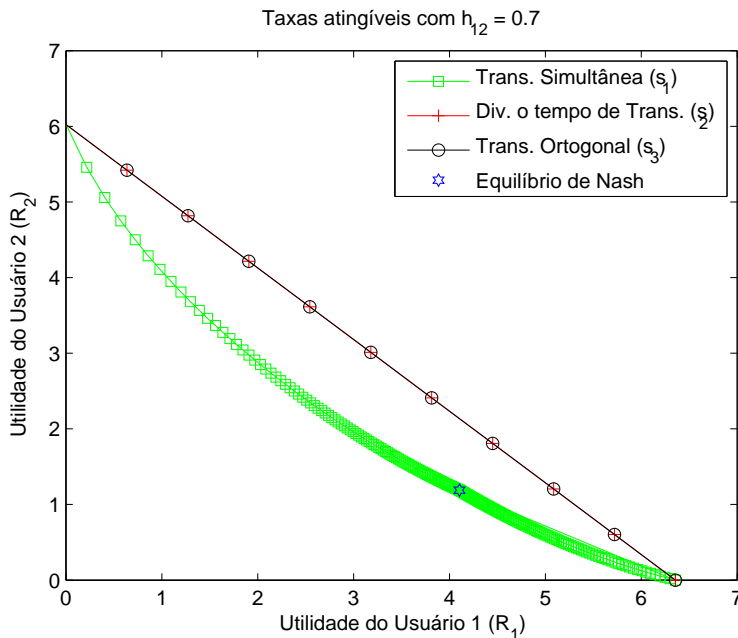


Figura 2.8: Região de utilidade para os três diferentes esquemas de transmissão (para $h_{12} = 0.7$).

É importante notar que o equilíbrio de Nash é o ponto em que os usuários transmitem com máxima potência ou seja, $P_1 = P_{max}$ e $P_2 = P_{max}$ e ambos durante todo o intervalo de tempo $\tau = 1$ [22]. Este ponto está representado nas figuras.

Podemos perceber ainda que, no caso em que os usuários dividem o tempo e trans-

mitem com diferentes potências, é equivalente ao melhor esquema de transmissão para cada situação: quando a interferência é fraca, este caso equivale a transmissão simultânea, como pode ser observado na Figura 2.6; com uma interferência considerada alta, o esquema de divisão no tempo e transmitir com potências diferentes é equivalente a transmissão ortogonal no tempo, o que pode ser visto na Figura 2.8.

O mesmo fenômeno também é observado através do modelo matemático das Equações (2.11), (2.12) e (2.13). Notamos que a Equação (2.11) é o caso em que $\tau = 1$ na Equação (2.12) e a Equação (2.13) representa o caso em que durante o intervalo de tempo τ o usuário 1 transmite com qualquer potência e 2 com potência zero, enquanto que no intervalo de tempo $(1 - \tau)$, o usuário 2 transmite com qualquer potência e o 1 não transmite nada (potência zero).

Capítulo 3

Problema de Alocação de Potência

Neste capítulo descreveremos e resolveremos um jogo no qual ocorre a disputa por recursos disponíveis em um sistema de comunicações. Neste jogo, existem usuários que estão transmitindo com uma taxa de transmissão abaixo da necessária e também um usuário no estado *idle* com recursos disponíveis para auxiliar estes outros usuários. Desta forma, com o intuito de maximizar a utilidade, os usuários disputarão os recursos do usuário *idle*.

3.1 Descrição

A sobrecarga de uma rede sem fio pode fazer com que os usuários não obtenham a taxa necessária para a transmissão. Com o intuito de incrementar as taxas de transmissão neste sistema, utilizaremos um usuário no estado *idle* como *relay*. Consideraremos que o *relay* é um aparelho móvel, mas que no momento está carregando a bateria; por isto ele terá recursos disponíveis para auxiliar usuários que estão em estado ativo.

Visando analisar e resolver esta disputa pelos recursos disponíveis identificamos dois problemas: um de teoria dos jogos e outro de otimização.

No problema de otimização o *relay* estabelece um critério para a distribuição de seus recursos. Neste caso, o usuário que necessita de mais recursos terá uma prioridade maior para recebê-los.

No problema de teoria dos jogos, os usuários ativos querem maximizar sua utilidade e para isto devem escolher solicitar ou não o auxílio, sendo que existe um custo associado a esta solicitação. Quanto maior a quantidade de usuários requisitando potência, menor será a quantidade que poderá ser designada a cada um.

3.2 Modelo

O modelo de transmissão a ser considerado é de um *relay* com degradação gaussiana [23], o qual pode ser observado na Figura 3.1.

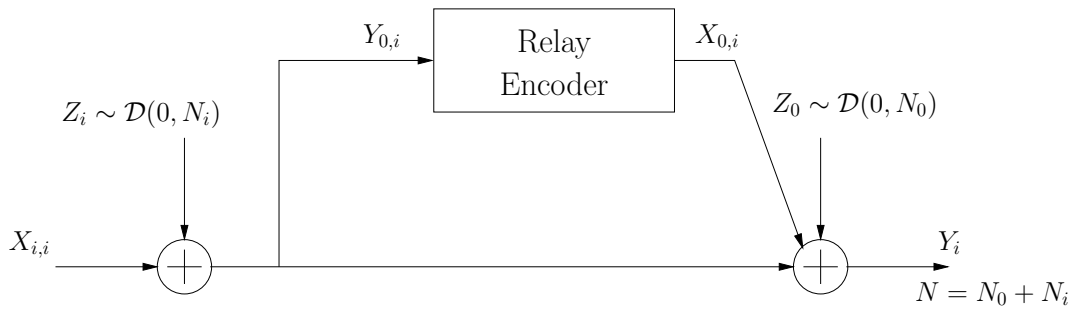


Figura 3.1: Canal do *relay* com degradação gaussiana.

Neste esquema, o transmissor ou usuário ativo i tem uma potência disponível para transmissão igual a P_i e o *relay* pode alocar $P_{0,i}$ para a transmissão do usuário i ; os ruídos Z_i e Z_0 são $Z_i \sim \mathcal{D}(0, N_i)$ e $Z_0 \sim \mathcal{D}(0, N_0)$, sendo $\mathcal{D}(\cdot, \cdot)$ a distribuição normal.

A capacidade do canal de um *relay* com degradação gaussiana pode ser obtida a partir da capacidade geral do canal com *relay* [23]:

$$C = \sup_{p(X_{i,i}, X_{0,i})} \min \{ I(X_{i,i}, X_{0,i}; Y_i), I(X_{i,i}; Y_i, Y_{0,i} | X_{0,i}) \}, \quad (3.1)$$

onde o termo $I(X_{i,i}; Y_i, Y_{0,i} | X_{0,i})$ é a informação mútua que existe quando o usuário i transmite $X_{i,i}$ tanto para o *relay* quanto para o receptor que receberão respectivamente $Y_{0,i}$ e Y_i (canal de *broadcast*); e o termo $I(X_{i,i}, X_{0,i}; Y_i)$ é a informação mútua que existe quando tanto o usuário i ($X_{i,i}$) quanto o *relay* ($X_{0,i}$) estão transmitindo simultaneamente para o receptor (Y_i) (canal de múltiplo acesso). Deve-se escolher o mínimo entre estes dois termos pois tanto a capacidade entre o usuário i e o *relay* e entre o *relay* e o receptor são limitadas; e os termos $I(X_{i,i}; Y_i, Y_{0,i} | X_{0,i})$ e $I(X_{i,i}, X_{0,i}; Y_i)$ estão respectivamente relacionados a estas limitações.

De acordo com [23] e [24], o canal de um *relay* é definido como degradado se a distribuição de probabilidade $p(Y_i, Y_{0,i} | X_{i,i}, X_{0,i})$ pode ser escrita como

$$p(Y_i, Y_{0,i} | X_{i,i}, X_{0,i}) = p(Y_i | X_{i,i}, X_{0,i}) p(Y_{0,i} | Y_i, X_{0,i}) \quad (3.2)$$

resultando em

$$I(X_{i,i}; Y_i, Y_{0,i} | X_{0,i}) = I(X_{i,i}; Y_{0,i} | X_{0,i}). \quad (3.3)$$

Desta forma, a Equação (3.1) fica reduzida à seguinte forma para o canal de um *relay* com degradação gaussiana:

$$C^* = \sup_{p(X_{i,i}, X_{0,i})} \min \{ I(X_{i,i}, X_{0,i}; Y_i), I(X_{i,i}; Y_{0,i} | X_{0,i}) \}, \quad (3.4)$$

resultando em [23]:

$$C^* = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \min \left\{ C \left(\frac{P_{0,i} + P_i + 2\sqrt{\bar{\alpha}P_{0,i}P_i}}{N_0 + N_i} \right), C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right) \right\}, \quad (3.5)$$

onde consideramos $C(x) = \log_2(1+x)$ e $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$. O sinal $X_{i,i}$ deve ser o seguinte: $X_{i,i} = (\sqrt{\frac{\alpha P_i}{P_{0,i}}} X_{0,i} + X_{i,0})$ [23], onde $X_{0,i}$ e $X_{i,0}$ devem ter uma distribuição normal com média zero e variâncias $P_{0,i}$ e αP_i , respectivamente, e também devem ser independentes.

Para obter a taxa descrita pela Equação (3.5), devemos considerar que a taxa R_i que pode ser obtida é menor do que a capacidade do canal de *broadcast*, ou seja $R_i < C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right)$.

Descreveremos brevemente como a cooperação entre o transmissor i e o *relay* acontece. Esta descrição foi retirada de [24]. Para atingirmos a taxa da Equação (3.5), são necessários dois *codebooks*. O primeiro *codebook* terá $2^{n R_i}$ *codewords* de potência αP_i e o segundo *codebook* terá $2^{n R_{0,i}}$ *codewords* de potência $\bar{\alpha} P_i$ onde $R_{0,i} < \log_2 \left(1 + (\sqrt{P_{0,i}} + \sqrt{\bar{\alpha} P_i})^2 / (\alpha P_i + N_i + N_0) \right)$.

Primeiramente o usuário i transmite uma *codeword* do primeiro *codebook*; o *relay* saberá qual é o índice desta *codeword*, pois assumimos que $R_i < C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right)$; contudo, o receptor possui uma lista de possíveis *codewords* de tamanho $2^{n (R_i - C(\alpha P_i / (N_i + N_0)))}$.

Na transmissão do bloco seguinte, o usuário i e o *relay* irão cooperar de modo a resolver a incerteza do receptor. Contudo, ambos não sabem qual lista que o receptor possui pois não possuem o conhecimento do sinal recebido Y_i . Para isto, eles particionam aleatoriamente o primeiro *codebook* em $2^{n R_{0,i}}$ células, sendo que cada célula terá um número igual de *codewords*; todas as três partes (transmissor, receptor e *relay*) envolvidas no processo concordam na partição. Então, o usuário i e o *relay* encontram a célula da partição em que aquela *codeword* está e enviam simultaneamente a *codeword* do segundo *codebook* com o índice.

O *relay* deve colocar um fator multiplicativo nesta *codeword* devido à restrição de potência que possui. Nesta mesma transmissão, o usuário i acrescenta uma *codeword* nova (do primeiro *codebook*) para ser enviada juntamente com aquela *codeword* do segundo *codebook*.

Após esta segunda recepção, o receptor encontra o índice do segundo *codebook* de acordo com a *codeword* mais próxima encontrada no segundo *codebook*. Esta *codeword* é então subtraída deste último sinal recebido e é obtida uma lista de índices de tamanho $2^{n R_{0,i}}$ que correspondem a *codewords* do primeiro *codebook* que foram transmitidas na segunda vez.

Para o receptor terminar de computar a *codeword* que foi enviada no primeiro sinal, ele calcula a intersecção entre a lista que contém as possíveis *codewords* recebidas no primeiro sinal com a célula da partição do segundo *codebook*. É importante frizar que as

taxas e potências foram escolhidas de forma que exista uma probabilidade muito alta de que haja apenas uma *codeword* nesta intersecção.

No estado estacionário o usuário i e o *relay* sempre cooperam de forma a resolver a incerteza existente no receptor referente à transmissão anterior. Explicações mais detalhadas e as respectivas provas relacionadas à capacidade do canal degradado do *relay* podem ser encontradas em [24], [23].

Desta forma, iremos considerar como a capacidade nova do usuário i ($C_{nova,i}$) a capacidade obtida quando o *relay* aloca $P_{0,i}$ para este usuário:

$$C_{nova,i} = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \min \left\{ C \left(\frac{P_{0,i} + P_i + 2\sqrt{\alpha P_{0,i} P_i}}{N_0 + N_i} \right), C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right) \right\}, \quad (3.6)$$

É importante definir também a capacidade atual do usuário i , ou seja a capacidade dele sem o auxílio do *relay*:

$$C_{atual,i} = C \left(\frac{P_i}{N_0 + N_i} \right), \quad (3.7)$$

a capacidade necessária ao usuário i :

$$C_{nec,i} = C \left(\frac{P_{nec,i}}{N_0 + N_i} \right); \quad (3.8)$$

onde $P_{nec,i}$ é a potência necessária para que o mesmo usuário obtenha a taxa de transmissão desejada. Neste sistema, os usuários que tiverem $C_{atual,i} < C_{nec,i}$ devem decidir se requisitam ou não auxílio do *relay*, sendo que existe um custo ε_i associado ao requerimento. O *relay* possui uma potência $P_{relay} \leq \sum_{i=1}^M P_{0,i}$ disponível para distribuir entre os usuários que obtiverem a menor fração $q_i = \frac{C_{atual,i}}{C_{nec,i}}$. Nas Subsecções 3.2.1 e 3.2.2, estes dois problemas serão descritos.

É importante notar que neste modelo consideramos que não existe interferência entre os usuários pois eles transmitem em bandas ortogonais.

3.2.1 Problema de teoria dos jogos

Neste problema, os usuários ou jogadores, devem escolher dentre as duas possibilidades: pedir ou não o auxílio na transmissão para o usuário *idle*.

Cada jogador tem conhecimento dos *payoffs* de todos os jogadores. O *relay*, que conhece todas as informações de todos os usuários, calculará as utilidades dos jogadores para todas as possíveis ações dos jogadores e enviará estes valores a todos. Portanto, podemos observar que o jogo é de informação completa.

Desta forma, podemos definir o jogo da seguinte forma:

- Conjunto de usuários: $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$, onde N é finito;
- Conjunto de estratégias (puras) para o jogador $i, \forall i \in \mathcal{N}$:
 $\mathcal{A}_i = \{0, 1\}$;
 onde 0 significa não requerer auxílio e 1, requerer;
- Funções utilidade:

$$U_i(\mathbf{a}) = \begin{cases} C\left(\frac{P_i}{N_0 + N_i}\right), & \text{se } a_i = 0 \\ \max_{0 \leq \alpha_i \leq 1} \min \left\{ C\left(\frac{P_{0,i}(\mathbf{a}) + P_i + 2\sqrt{\alpha_i P_{0,i}(\mathbf{a}) P_i}}{N_0 + N_i}\right), C\left(\frac{\alpha_i P_i}{N_i}\right) \right\} - \varepsilon_i, & \text{se } a_i = 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

onde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$ é o vetor das estratégias escolhidas pelos jogadores e ε_i é o custo associado ao requerimento de recursos pelo jogador i .

3.2.2 Problema de otimização

O *relay* pode ser um usuário que no momento está em estado *idle* e que está carregando a bateria, por isso ele terá recursos disponíveis para auxiliar os usuários que estão em estado ativo. Este usuário *idle* adotará o seguinte critério de otimização para alocar os recursos: os usuários que requisitarem e que possuem uma menor fração q receberão potência. Em outras palavras, primeiramente são selecionados os usuários com menor fração:

$$q_{min} = \min(\mathbf{q}); \quad (3.10)$$

a seguir é atribuído a cada um dos usuários que possuem q_{min} potência o suficiente para que eles atinjam a fração

$$\hat{q}_{min} = \min(\mathbf{q}_{-min}), \quad (3.11)$$

onde \mathbf{q}_{-min} representa o vetor $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_M)$ excluindo-se o(s) elemento(s) que é(são) igual(is) a q_{min} . Este processo continua até que toda a potência do *relay* seja distribuída. Caso não haja potência suficiente para que todos os usuários obtenham \hat{q}_{min} , então estes recebem recursos suficientes para chegar a \tilde{q}_{min} com $q_{min} \leq \tilde{q}_{min} < \hat{q}_{min}$.

3.2.3 Solução do Problema de Teoria dos Jogos

O conceito de solução de um jogo finito e estático com informação completa é o equilíbrio de Nash.

Existência do Ponto de Equilíbrio

A existência de um ponto de equilíbrio é dada pelo seguinte teorema [25], [26]:

Teorema 3.2.1 *Todo jogo finito, descrito na forma estratégica possui um equilíbrio de estratégia mista.*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [26].

É importante ressaltar que vários pontos de equilíbrio podem existir, contudo para este problema não faremos a análise da multiplicidade destes pontos.

3.2.4 Considerações Gerais

A análise da Equação (3.6) é de extrema importância, tal que a reescreveremos:

$$C_{nova,i} = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \min \left\{ C \left(\frac{P_{0,i} + P_i + 2\sqrt{\alpha P_{0,i} P_i}}{N_0 + N_i} \right), C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right) \right\}.$$

Para resolvê-la é necessário selecionar e armazenar o valor mínimo que é proveniente de $F_1 = C \left(\frac{P_{0,i} + P_i + 2\sqrt{\alpha P_{0,i} P_i}}{N_0 + N_i} \right)$ ou de $F_2 = C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right)$ para todo $0 \leq \alpha \leq 1$. Então deve-se selecionar o valor máximo dentre estes valores mínimos e o valor correspondente de α .

Contudo, existe uma forma mais simples de solucioná-la. Se observarmos que a função $F_1 = C \left(\frac{P_{0,i} + P_i + 2\sqrt{\alpha P_{0,i} P_i}}{N_0 + N_i} \right)$ é decrescente em relação a α e $F_2 = C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right)$ é crescente em relação a α , notaremos que para valores fixos de $P_i, P_{0,i}, N_0, N_i$, haverá uma intersecção entre as duas funções¹, sendo que o valor correspondente de α será a solução procurada. Podemos observar o formato das funções na Figura 3.2 para $P_i = 0.1$, $P_{0,i} = 0.01$, $N_0 = 10^{-2}$, $N_i = 10^{-2}$. Como pode ser visualizado, o ponto de intersecção é o valor máximo dentre os mínimos para a capacidade.

Analisando ainda a Equação (3.7), pode-se notar que existe um valor máximo para a potência que o *relay* pode alocar para o usuário ativo ($P_{0,i}^{max}$). Qualquer valor acima deste não aumentará a capacidade deste usuário ativo: pois para todo $0 < \alpha < 1$ a função F_2 terá valores menores do que a função F_1 e portanto todos os valores de mínimo pertencerão a função F_2 . Desta forma, o valor de α que maximiza $C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right)$ será 1. Podemos observar este fenômeno na Figura 3.3 para $P_i = 0.1$, $P_{0,i} = 0.2$, $N_0 = 10^{-2}$, $N_i = 10^{-2}$; para este caso não existe o ponto de intersecção entre as curvas.

O valor máximo $P_{0,i}^{max}$ que pode ser atribuído a cada usuário corresponde ao ponto de intersecção entre F_1 e F_2 para $\alpha = 1$. Desta forma se igualarmos F_1 e F_2 e escolhermos $\alpha = 1$ obteremos $P_{0,i}^{max} = \frac{P_i N_0}{N_i}$. Nas Figuras 3.4 e 3.5 podemos observar que para

¹É necessário que $P_{0,i} \leq P_{0,i}^{max}$, onde o valor de $P_{0,i}^{max}$ será mostrado a seguir.

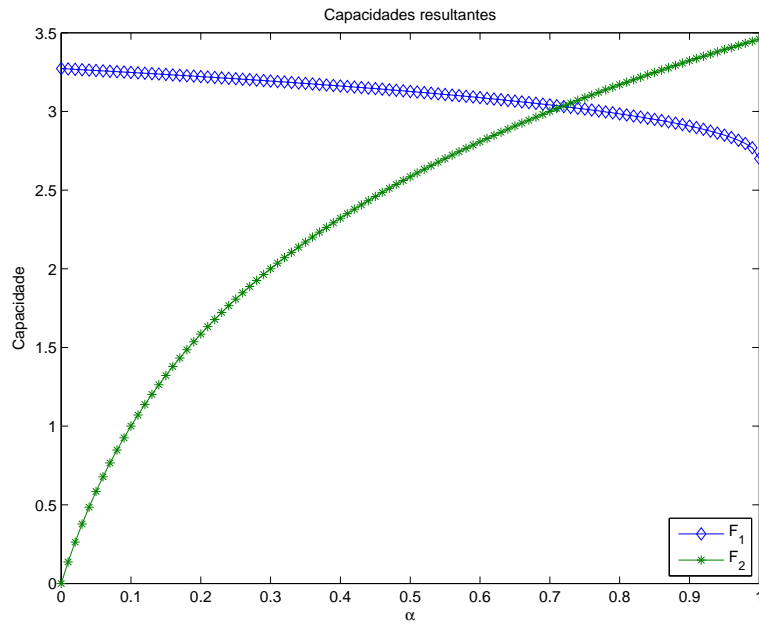


Figura 3.2: Análise da Equação (3.7), onde $F_1 = C \left(\frac{P_{0,i} + P_i + 2\sqrt{\alpha P_{0,i} P_i}}{N_0 + N_i} \right)$ e $F_2 = C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right)$, $P_{0,i} \leq P_{0,i}^{max}$.

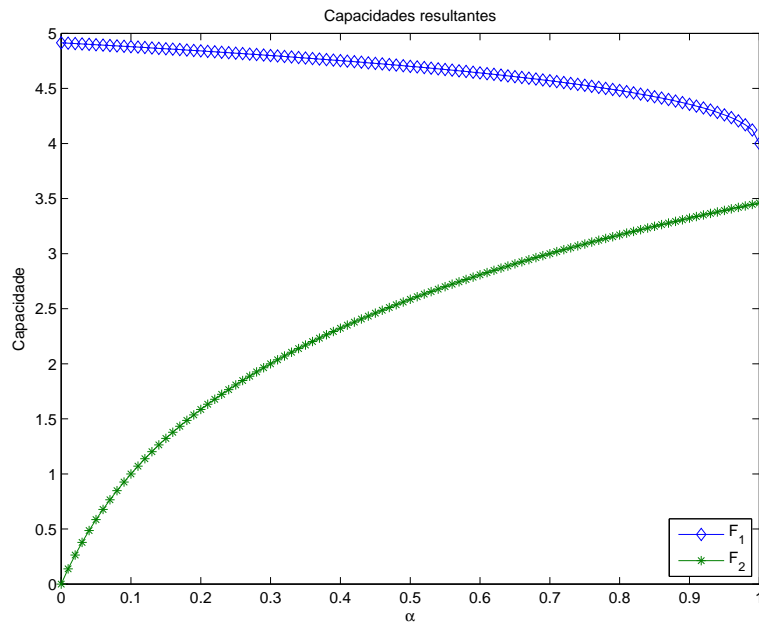


Figura 3.3: Análise da Equação (3.7), onde $F_1 = C \left(\frac{P_{0,i} + P_i + 2\sqrt{\alpha P_{0,i} P_i}}{N_0 + N_i} \right)$ e $F_2 = C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right)$, $P_{0,i} > P_{0,i}^{max}$.

$P_i = 0.1$, $N_0 = 10^{-2}$, $N_i = 10^{-2}$, então $P_{0,i}^{max} = 0.1$, fazendo com que a intersecção seja para $\alpha = 1$.

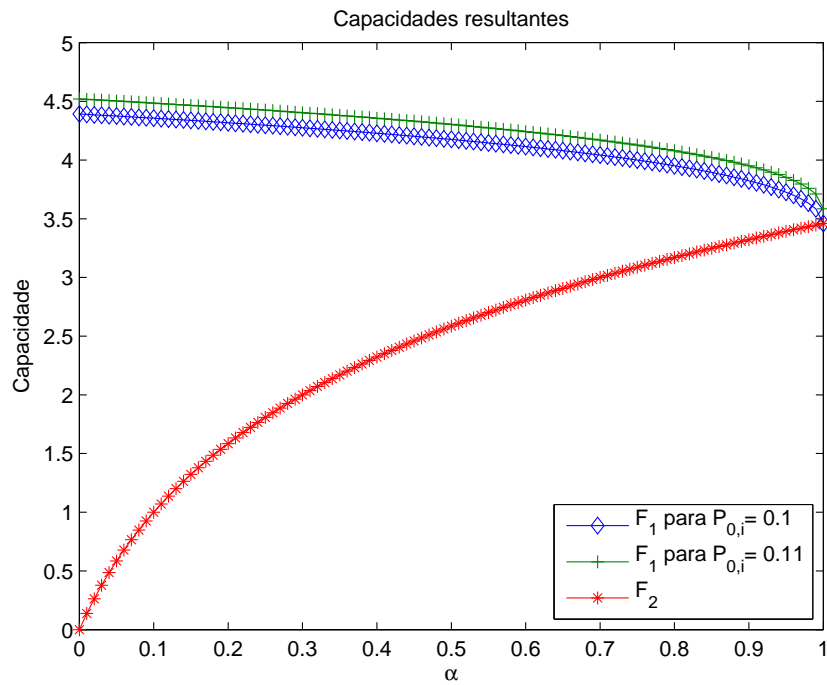


Figura 3.4: Análise do valor $P_{0,i}^{max}$, onde $F_1 = C \left(\frac{P_{0,i} + P_i + 2\sqrt{\alpha P_{0,i} P_i}}{N_0 + N_i} \right)$ e $F_2 = C \left(\frac{\alpha P_i}{N_i} \right)$.

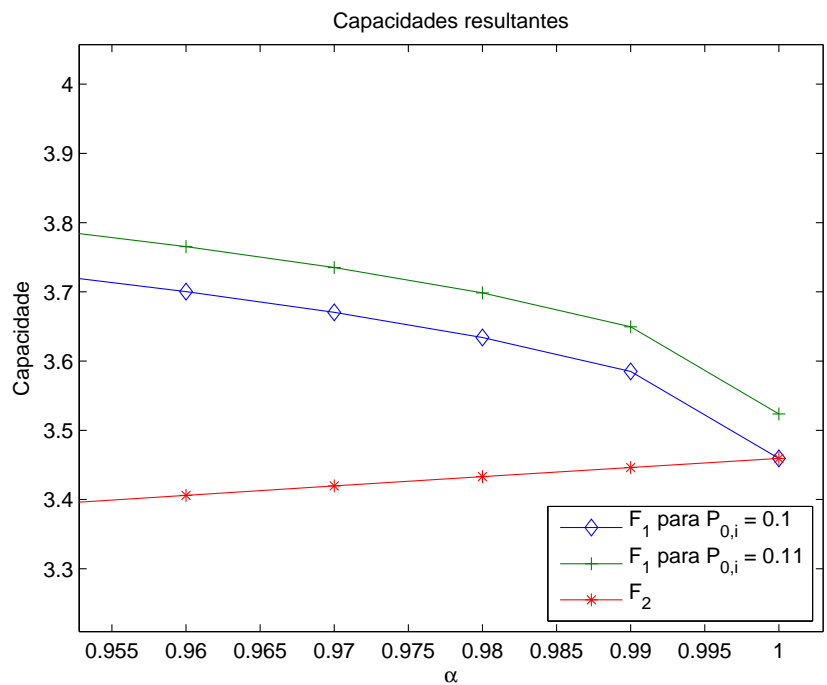


Figura 3.5: Ampliação da Figura 3.4.

3.2.5 Resultados

Resultados numéricos para o problema de teoria dos jogos e de otimização descritos nas Subseções 3.2.1 e 3.2.2 foram obtidos usando códigos em Matlab.

Simulação 1

Nesta simulação dois usuários estão disputando os recursos disponíveis. Cada um destes usuários possui a potência $\mathbf{P} = [0.2 \ 0.1]$ (watts), porém precisam de $\mathbf{P}_{nec} = [0.5 \ 0.3]$. O custo associado à escolha de requerer auxílio é considerado como sendo 15% do valor de $C_{nova,i}$ ou seja, $\varepsilon_i = 0.15 C_{nova,i}$; a potência do ruído observado por cada um dos usuários é $\mathbf{N} = [10^{-2} \ 10^{-2}]$ e a potência do ruído observado pelo *relay* é $N_0 = 10^{-2}$.

Note que o objetivo dos usuários é ter uma utilidade máxima, sendo esta utilidade descrita na Equação (3.9).

Para o cenário descrito acima, observa-se o resultado considerando-se 3 diferentes potências disponíveis para o *relay*: $P_{relay} = 0.05$, $P_{relay} = 0.1$ Watts e $P_{relay} = 0.15$.

Para estes três jogos, os valores dos custos ($\varepsilon_i = 0.15 C_{nova,i}$) para cada combinação estão dispostos nas Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3, respectivamente. Como é possível observar, o custo é zero quando os jogadores optam por não requisitar potência.

Tabela 3.1: Custo associado ao requerimento para $P_{relay} = 0.05$ Watts.

Estratégias (\mathbf{a})	ε_1	ε_2
(0,0)	0	0
(0,1)	0	0.505
(1,0)	0.621	0
(1,1)	0.581	0.495

Tabela 3.2: Custo associado ao requerimento para $P_{relay} = 0.1$ Watts.

Estratégias (\mathbf{a})	ε_1	ε_2
(0,0)	0	0
(0,1)	0	0.519
(1,0)	0.645	0
(1,1)	0.604	0.514

Tabela 3.3: Custo associado ao requerimento para $P_{relay} = 0.15$ Watts.

Estratégias (\mathbf{a})	ε_1	ε_2
(0,0)	0	0
(0,1)	0	0.519
(1,0)	0.656	0
(1,1)	0.621	0.519

Nas Tabelas 3.4, 3.5 e 3.6, pode-se observar as utilidades obtidas² para todas as pos-

²É importante frizar que estas utilidades foram obtidas a partir da Equação 3.9

síveis ações dos dois usuários para os mesmos valores de potência que o *relay* tem disponível. Como pode ser observado nas Tabelas 3.4 e 3.5, independentemente da escolha do jogador 1, o jogador 2 sempre requisita potência pois ele obtém uma utilidade maior quando escolhe esta ação. Então o jogador 1, que possui conhecimento das recompensas do jogador 2, e também que este deseja maximizá-la, infere que o jogador 2 sempre requisitará potência; portanto o usuário 1 escolherá não pedir recursos, pois esta opção proverá um maior *payoff*. O ponto de equilíbrio de Nash será $\mathbf{a} = (0, 1)$.³ Contudo, no jogo representado na Tabela 3.6, ambos os jogadores terão a recompensa maximizada se escolherem pedir auxílio, resultando no ponto de equilíbrio $\mathbf{a} = (1, 1)$.

Tabela 3.4: Nova utilidade no jogo de 2 jogadores para $P_{relay} = 0.05$.

		Jogador 2	
		não requer	requer
Jogador 1	não requer	(3.459, 2.585)	(3.459, 2.863)
	requer	(3.518, 2.585)	(3.295, 2.804)

Tabela 3.5: Nova utilidade no jogo de 2 jogadores para $P_{relay} = 0.1$.

		Jogador 2	
		não requer	requer
Jogador 1	não requer	(3.459, 2.585)	(3.459, 2.941)
	requer	(3.653, 2.585)	(3.424, 2.914)

Tabela 3.6: Nova utilidade no jogo de 2 jogadores para $P_{relay} = 0.15$.

		Jogador 2	
		não requer	requer
Jogador 1	não requer	(3.459, 2.585)	(3.459, 2.941)
	requer	(3.715, 2.585)	(3.518, 2.941)

Nas Figuras 3.6, 3.7 e 3.8 podemos observar respectivamente o ganho na utilidade, ganho da fração q e o ganho de capacidade obtido por cada jogador. É importante notar que os valores plotados são os pontos de equilíbrio resultante de cada jogo. Nestas figuras também estão representados o valor máximo possível de cada parâmetro que cada usuário poderia obter. Para o jogador 2, podemos observar que, quando a potência disponível do *relay* é de 0.15, este jogador obtém a potência máxima que ele poderia receber.

Simulação 2

Esta simulação é feita de forma análoga à anterior. Porém, existem quatro usuários disputando os recursos disponíveis. Cada um destes usuários possui a potência $P =$

³Os pontos de equilíbrio obtidos para cada jogo estão indicados nas tabelas pela região sombreada.

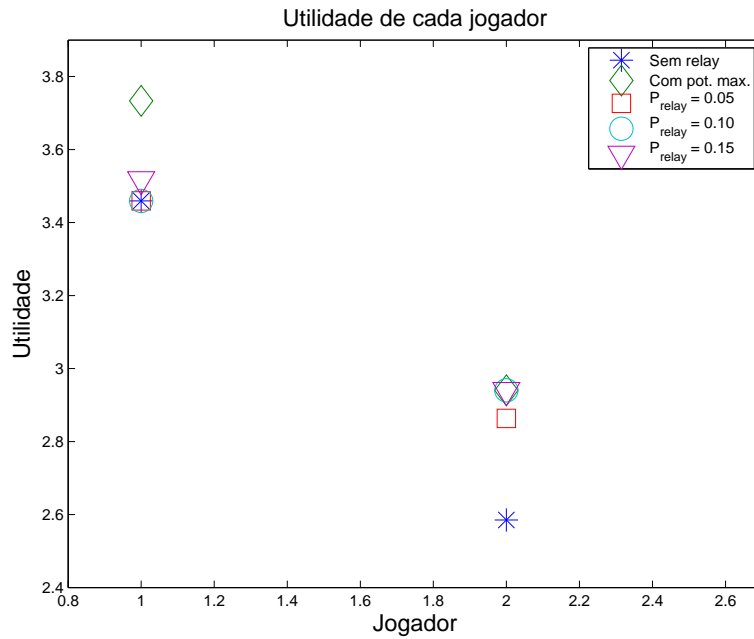


Figura 3.6: Utilidade: antes e depois da alocação dos recursos.

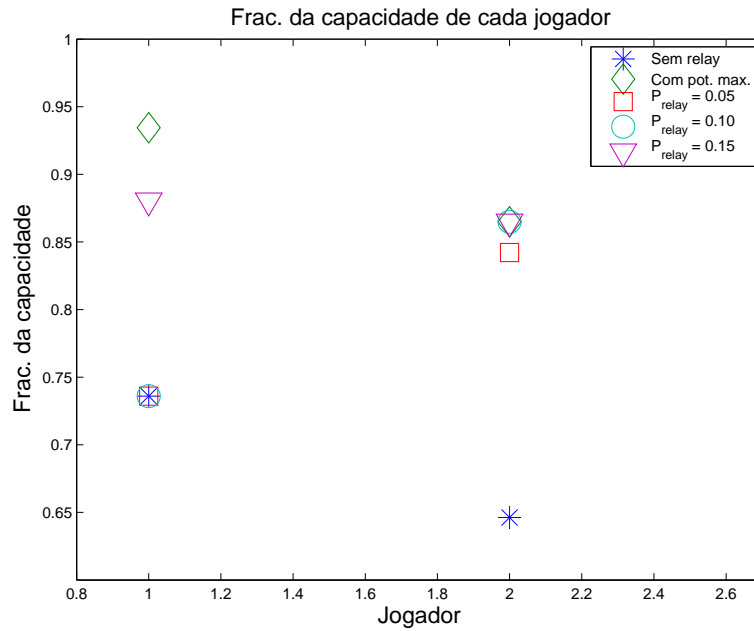


Figura 3.7: Fração q : antes e depois da alocação dos recursos.

[0.20 0.10 0.05 0.15] (watts), contudo precisam de $P_{nec} = [0.5 0.3 0.2 0.4]$. O custo associado a escolha de requerer auxílio é 15% do valor de $C_{nova,i}$ ou seja, $\varepsilon_i = 0.15 C_{nova,i}$; a potência do ruído observado por cada um dos usuários é $N = [10^{-2} 10^{-2} 10^{-2} 10^{-2}]$ e a potência do ruído observado pelo *relay* é $N_0 = 10^{-2}$. Para este mesmo cenário, observa-se o resultado considerando-se 3 diferentes potências disponíveis para o *relay*: $P_{relay} = 0.05$, $P_{relay} = 0.1$ e $P_{relay} = 0.15$.

Nas Tabelas 3.7, 3.8 e 3.9 pode-se observar as utilidades obtidas para os três jogos

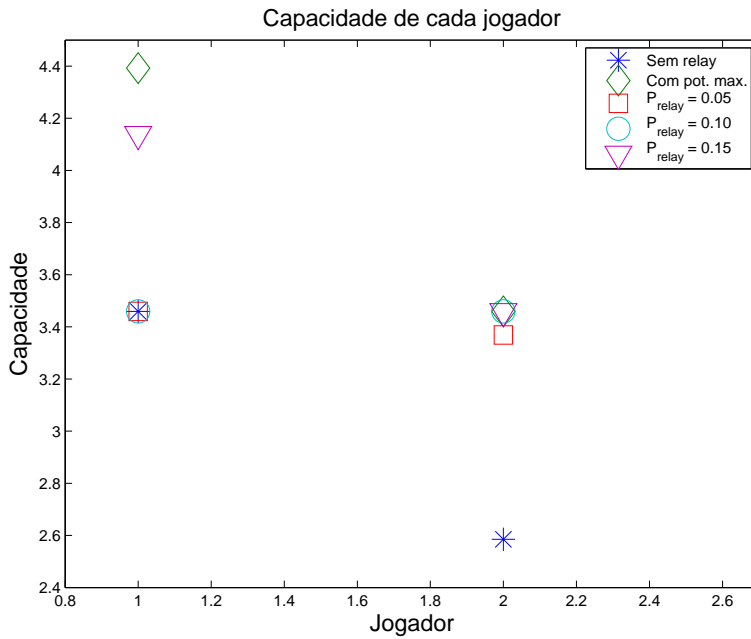


Figura 3.8: Capacidade: antes e depois da alocação dos recursos.

para todas as possíveis ações dos quatro usuários para os mesmos valores de potência que o *relay* tem disponível.

Pode-se notar no jogo da Tabela 3.7 que o jogador 3 sempre obterá uma utilidade maior se escolher requerer potência, independentemente das ações dos outros jogadores. Então os outros jogadores, sabendo da provável decisão de 3, preferem não pedir recursos, pois esta opção proverá um maior *payoff*. O ponto de equilíbrio de Nash será $\mathbf{a} = (0, 0, 1, 0)$.

Podemos fazer a mesma análise com os dados do jogo contido na Tabela 3.8: os jogadores 2 e 3 sempre requisitam auxílio. Com este conhecimento (pois o jogo é de informação completa), os jogadores 1 e 4 decidem não pedir recursos, fazendo com que o ponto de equilíbrio seja $\mathbf{a} = (0, 1, 1, 0)$.

A análise do jogo descrito na Tabela 3.9 é idêntica às anteriores: os jogadores 2, 3 e 4 sempre desejam potência; então, o jogador 1 usa esta informação para decidir não pedir recursos, resultando no seguinte ponto de equilíbrio: $\mathbf{a} = (0, 1, 1, 1)$.

Nas Figuras 3.9, 3.10 e 3.11 podemos observar respectivamente o ganho na utilidade, ganho da fração q e o ganho de capacidade obtido por cada jogador. É importante notar que os valores plotados são os pontos de equilíbrio resultante de cada jogo. Nestas figuras também estão representados o valor máximo possível de cada parâmetro que cada usuário poderia obter. Deve-se perceber que neste caso os dois primeiros jogadores possuem os mesmos parâmetros dos jogadores da Simulação 1; contudo como esperado estes receberão menos recursos pois existem mais jogadores com necessidades semelhantes.

Deve-se ressaltar que os pontos de equilíbrio das simulações 1 e 2 são pontos de equilíbrio puro.

Tabela 3.7: Nova utilidade no jogo de 4 jogadores para $P_{relay} = 0.05$.

Estratégias (\mathbf{a})	Utilidade			
	Jogador 1	Jogador 2	Jogador 3	Jogador 4
(0, 0, 0, 0)	3.4594	2.5850	1.8074	3.0875
(0, 0, 0, 1)	3.4594	2.5850	1.8074	3.2441
(0, 0, 1, 0)	3.4594	2.5850	2.1972	3.0875
(0, 0, 1, 1)	3.4594	2.5850	2.1968	2.7892
(0, 1, 0, 0)	3.4594	2.8635	1.8074	3.0875
(0, 1, 0, 1)	3.4594	2.7815	1.8074	3.0543
(0, 1, 1, 0)	3.4594	2.5339	2.1915	3.0875
(0, 1, 1, 1)	3.4594	2.5308	2.1887	2.7790
(1, 0, 0, 0)	3.5179	2.5850	1.8074	3.0875
(1, 0, 0, 1)	3.3586	2.5850	1.8074	3.1385
(1, 0, 1, 0)	2.9854	2.5850	2.1972	3.0875
(1, 0, 1, 1)	2.9848	2.5850	2.1967	2.7891
(1, 1, 0, 0)	3.2947	2.8038	1.8074	3.0875
(1, 1, 0, 1)	3.2296	2.7483	1.8074	3.0179
(1, 1, 1, 0)	2.9774	2.5337	2.1913	3.0875
(1, 1, 1, 1)	2.9737	2.5306	2.1886	2.7788

Tabela 3.8: Nova utilidade no jogo de 4 jogadores para $P_{relay} = 0.1$.

Estratégias (\mathbf{a})	Utilidade			
	Jogador 1	Jogador 2	Jogador 3	Jogador 4
(0, 0, 0, 0)	3.4594	2.5850	1.8074	3.0875
(0, 0, 0, 1)	3.4594	2.5850	1.8074	3.3667
(0, 0, 1, 0)	3.4594	2.5850	2.1972	3.0875
(0, 0, 1, 1)	3.4594	2.5850	2.1972	3.2441
(0, 1, 0, 0)	3.4594	2.9405	1.8074	3.0875
(0, 1, 0, 1)	3.4594	2.9005	1.8074	3.1850
(0, 1, 1, 0)	3.4594	2.8635	2.1972	3.0875
(0, 1, 1, 1)	3.4594	2.7815	2.1972	3.0543
(1, 0, 0, 0)	3.6526	2.5850	1.8074	3.0875
(1, 0, 0, 1)	3.4941	2.5850	1.8074	3.2651
(1, 0, 1, 0)	3.5179	2.5850	2.1972	3.0875
(1, 0, 1, 1)	3.3586	2.5850	2.1972	3.1385
(1, 1, 0, 0)	3.4237	2.9136	1.8074	3.0875
(1, 1, 0, 1)	3.3616	2.8607	1.8074	3.1412
(1, 1, 1, 0)	3.2947	2.8038	2.1972	3.0875
(1, 1, 1, 1)	3.2296	2.7483	2.1972	3.0179

Tabela 3.9: Nova utilidade no jogo de 4 jogadores para $P_{relay} = 0.15$.

Estratégias (α)	Jogador 1	Jogador 2	Jogador 3	Jogador 4
(0, 0, 0, 0)	3.4594	2.5850	1.8074	3.0875
(0, 0, 0, 1)	3.4594	2.5850	1.8074	3.4000
(0, 0, 1, 0)	3.4594	2.5850	2.1972	3.0875
(0, 0, 1, 1)	3.4594	2.5850	2.1972	3.3667
(0, 1, 0, 0)	3.4594	2.9405	1.8074	3.0875
(0, 1, 0, 1)	3.4594	2.9405	1.8074	3.2441
(0, 1, 1, 0)	3.4594	2.9405	2.1972	3.0875
(0, 1, 1, 1)	3.4594	2.9005	2.1972	3.1850
(1, 0, 0, 0)	3.7148	2.5850	1.8074	3.0875
(1, 0, 0, 1)	3.5737	2.5850	1.8074	3.3394
(1, 0, 1, 0)	3.6526	2.5850	2.1972	3.0875
(1, 0, 1, 1)	3.4941	2.5850	2.1972	3.2651
(1, 1, 0, 0)	3.5179	2.9405	1.8074	3.0875
(1, 1, 0, 1)	3.4353	2.9234	1.8074	3.2101
(1, 1, 1, 0)	3.4237	2.9136	2.1972	3.0875
(1, 1, 1, 1)	3.3616	2.8607	2.1972	3.1412

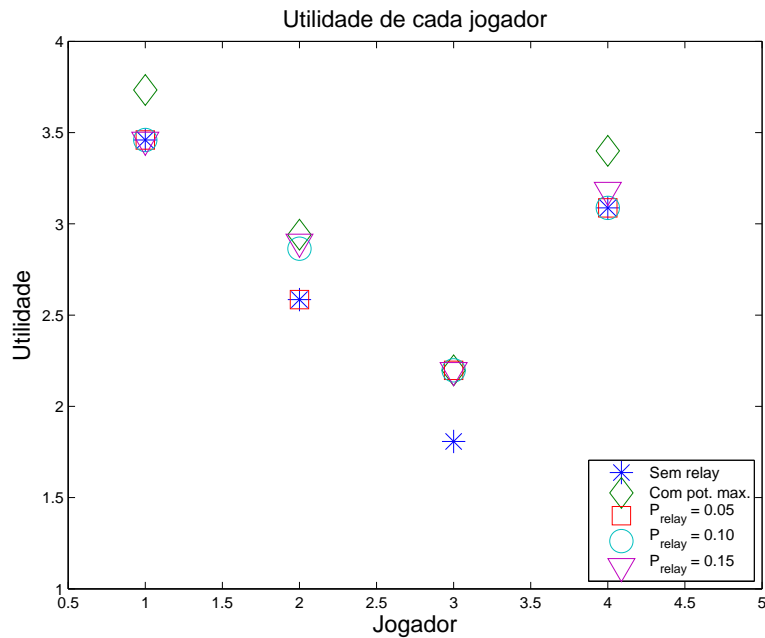


Figura 3.9: Utilidade: antes e depois da alocação dos recursos.

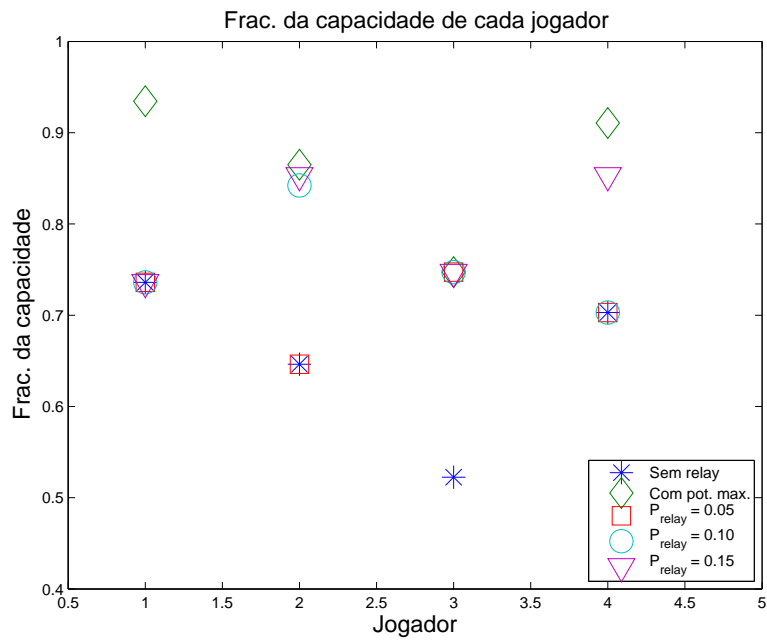


Figura 3.10: Fração q : antes e depois da alocação dos recursos.

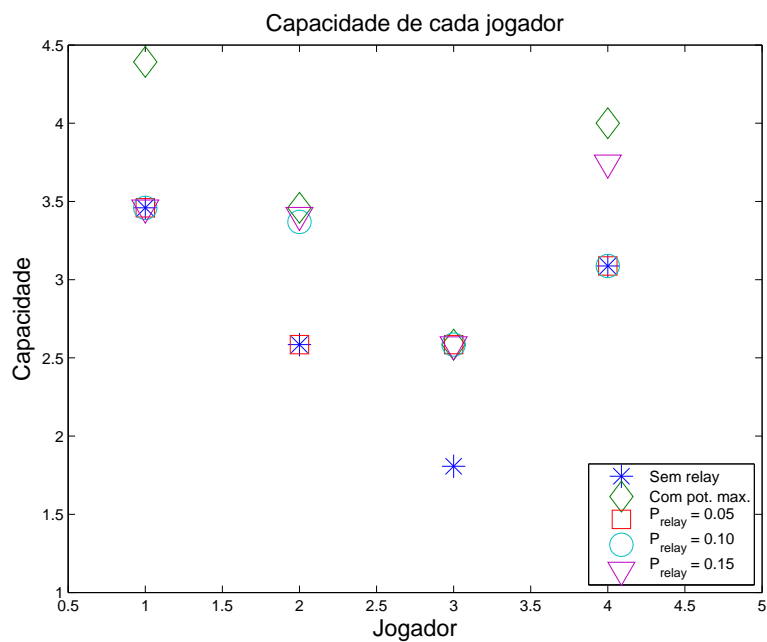


Figura 3.11: Capacidade: antes e depois da alocação dos recursos.

Capítulo 4

Economia das Femtocells

O objetivo deste capítulo é reanalisar a referência [7]. Em [7], o sistema é composto de um operador da rede, que oferece dois tipos de serviço para uma população de usuários que podem ser divididas em infinitos tipos de classes. Os tipos de serviços oferecidos são *mobile-only service* (M) e *mobile-plus-femtocell service* (FM). Para encontrar os pontos de equilíbrio, é provada a existência de *thresholds* que delimitam os tipos de usuários. Simulações numéricas são apresentadas para analisar o equilíbrio. Entretanto, nada é dito sobre o problema de duas camadas e sobre a existência e/ou multiplicidade dos pontos de equilíbrio do jogo não atômico.

Neste capítulo será definido de uma maneira rigorosa e matemática, o problema em investigação. Com este intuito, este capítulo será dividido em duas partes principais: uma que considera os aspectos econômicos e a outra que considera os aspectos de telecomunicações.

No Apêndice A este capítulo será melhor detalhado.

4.1 Aspectos Econômicos

Durante a análise detalhada de [7], foi identificado um problema de duas camadas:

- Alto nível: o operador deseja maximizar a sua receita (problema de otimização);
- Baixo nível: os usuários querem maximizar suas utilidades (problema de um jogo não atômico).

De forma a descrever estes dois problemas, o seguinte modelo é apresentado:

- $x \in [0, 1]$ é a fração da população de usuários que adota algum serviço, e $(1 - x)$ é a fração da população dos usuários que não adota nenhum serviço;
- αx é a fração da população que assina o serviço s_f (*mobile-plus-femtocell service*), tal que $\alpha \geq 0$, and $(1 - \alpha)x$ é a fração da população que assina o serviço s_m (*mobile-only service*);

- $g_i(\alpha, x)$ é o *throughput* de um usuário que aderiu ao serviço s_i , $i \in \{m, f\}$;
- $\mathbf{p} = (p_m, p_f) \in [0, P]^2$ é o vetor de preços cobrados pelos serviços providos;
- $U_i^\gamma(\alpha, x, \mathbf{p}) = \gamma g_i(\alpha, x) - p_i$ é a utilidade de um usuário do tipo γ que aderiu ao serviço s_i , sendo que esta utilidade depende do estado da rede (como exemplo a demanda no sistema $(1 - x, (1 - \alpha)x, \alpha x)$);
- $(1 - x, (1 - \alpha)x, \alpha x)$ é o estado da rede, onde $(1 - x)$ representa a fração dos usuários que não aderiu a nenhum serviço, $[(1 - \alpha)x]$ a demanda do serviço s_m e (αx) a demanda do serviço s_f ;
- $\Gamma(\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma_{max}}$, $\gamma \in [0, \gamma_{max}]$ é a distribuição dos usuários de acordo com a avaliação deles com relação ao *throughput*. Esta distribuição é considerada uniforme.

4.1.1 Problema de otimização

O operador da rede quer maximizar o seu rendimento. Para isto, ele precisa maximizar o rendimento médio por usuário (R_u) que é dado por:

$$\max_{p_m, p_f} \{p_m[1 - \alpha^{WE}(p_m, p_f)]x^{WE}(p_m, p_f) + p_f\alpha^{WE}(p_m, p_f)x^{WE}(p_m, p_f)\}$$

onde o provedor pode escolher o preço dos serviços. O parâmetro $x^{WE}(p_m, p_f)$ é a fração da população no equilíbrio de Wardrop (WE) que assina algum serviço; onde $[(1 - \alpha^{WE}(p_m, p_f)) x^{WE}(p_m, p_f)]$ e $[\alpha^{WE}(p_m, p_f)x^{WE}(p_m, p_f)]$ são as frações da população no equilíbrio de Wardrop (WE) que assinam o serviço s_m e serviço s_f , respectivamente. É importante notar que o rendimento médio por usuário é igual ao rendimento total dividido por (N).

Assumindo que o operador sabe o estado da rede no equilíbrio, então ele pode escolher os preços que maximizam o seu rendimento.

4.1.2 Problema de Teoria dos Jogos

Os usuário podem escolher entre três opções:

- adotar nenhum serviço;
- assinar o serviço *mobile-only* s_m - significando que o usuário pode conectar a estrutura de *macrocells*;
- assinar o serviço s_f - significando que o usuário pode conectar a sua *femtocell* e também a *macrocell*.

Então, o jogo onde cada usuário quer maximizar sua utilidade pode ser definido como:

- Conjunto de usuários: $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$, onde $N \rightarrow +\infty$;
- Conjunto de ações: $\mathcal{A} = \{0, m, f\}$;
onde $0, m$ e f significa que o usuário adotou nenhum serviço, serviço s_m ou serviço s_f , respectivamente;
- Funções utilidade:

$$U_a^\gamma(\alpha, x, \mathbf{p}) = \begin{cases} 0, & \text{se } a = 0 \\ \gamma g_m(\alpha, x) - p_m, & \text{se } a = m \\ \gamma g_f(\alpha, x) - p_f, & \text{se } a = f \end{cases} \quad (4.1)$$

onde os preços $p_m > 0$ e $p_f > 0$ são fixos e decididos pelo operador. As funções $g_m(\alpha, x)$ e $g_f(\alpha, x)$ representam o *throughput* obtido no serviço contratado e $\gamma \in [0, \gamma_{max}]$ o tipo do usuário. Intuitivamente, γ representa a avaliação do usuário para o *throughput*.

A análise detalhada deste capítulo está no Apêndice A.

4.2 Resultados Numéricos

Resultados numéricos foram realizados usando códigos em MatLab.

O seguinte cenário foi analisado: $\gamma_{max} = 1$, $\tau = 0.6$, $\psi = 1$, $\beta_{mc} = 0.83$ e $\frac{E[T_b]}{R_{mc}} = 2$.

Na Figura 4.1, a receita do operador é mostrada para cada combinação dos preços de serviços: $p_m \in \{0, 0.1, \dots, 2\}$ e $p_f \in \{0, 0.1, \dots, 2\}$.

De forma a obter a receita do operador, todos os pontos de equilíbrio de Wardrop foram obtidos a partir do sistemas de equações que será apresentado no Apêndice A. Em alguns casos, como é possível ter mais de um ponto de equilíbrio, foram escolhidos os pontos que resultam em uma menor receita para o operador.

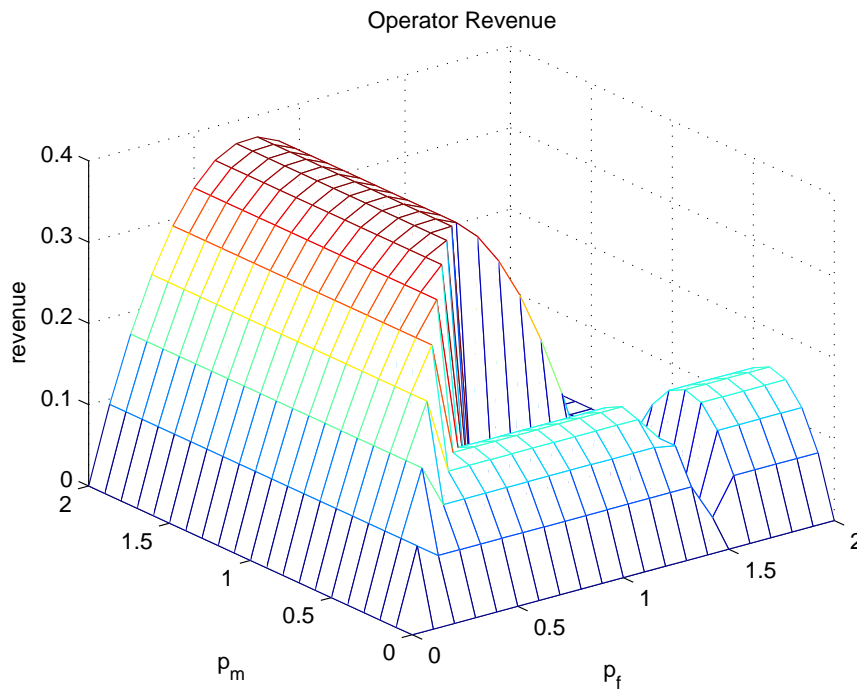


Figura 4.1: Receita do operador no pior WE vs. preços p_m e p_f .

Capítulo 5

Atribuição de Preços a Serviços de uma Rede Heterogênea

Neste capítulo assumimos um sistema similar ao adotado no Capítulo 4. A maior diferença consiste no número de serviços que a operadora pode prover. Por exemplo, a operadora pode prover três diferentes serviços usando três diferentes tecnologias: *macrocells*, *femtocells* e/ou *small-cells*.

5.1 Descrição

É necessário introduzir a seguinte notação:

- $\alpha_i x \in [0, 1]$ é a fração da população que assina o serviço s_i , $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ e $\sum_{j=1}^M \alpha_j = 1$;
- $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_M) \in [0, P]^M$ é o vetor dos preços cobrados por cada serviço provido;
- $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}$ com $\mathcal{B} = \left\{ (\beta_1, \dots, \beta_T) \in [0, 1]^T \mid \sum_{k=1}^T \beta_k = 1 \right\}$ é o vetor com os valores de banda que foram alocadas entre as tecnologias providas.

Novamente, o problema tem duas camadas diferentes. Na camada de alto nível, existe um problema de otimização onde o operador da rede deseja maximizar a receita média por usuário (ou seja, receita total/ N):

$$\max_{\mathbf{p}} \left\{ \sum_{j=1}^M p_j \alpha_j^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) x^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \right\}$$

e cada usuário deseja maximizar sua utilidade, resultando no seguinte jogo:

- Conjunto de usuários: $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$, $N \rightarrow +\infty$;

- Conjunto de ações: $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, M\}$; onde j significa que o usuário assinou o serviço s_j ;
- Funções utilidade:

$$U_j^\gamma(\boldsymbol{\alpha}, x, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = \gamma g_j(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) - p_j. \quad (5.1)$$

(observe que $p_0 = 0$ e $U_0^\gamma(\boldsymbol{\alpha}, x, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = 0$).

O principal resultado pode ser resumido pelos seguintes Teoremas:

Teorema 5.1.1 No jogo não-atômico descrito acima,

$\mathcal{G} = \{[0, \gamma_{\max}], \mathcal{A}, \{U_a^\gamma\}_{a \in \mathcal{A}, \gamma \in [0, \gamma_{\max}]}\}$, para fixos $\mathbf{p} \in [0, P]^M$ e $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}$, se as duas seguintes condições existirem:

[C1] as funções utilidade $\{U_a^\gamma\}_{a, \gamma}$ dependem somente das demandas, ou seja, $(\boldsymbol{\alpha}, x) \in [0, 1]^{M+1}$ e não das identidades dos usuários;

[C2] as funções $g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta})$ forem contínuas com relação a $(\boldsymbol{\alpha}, x)$, $\forall i \in \{1, \dots, M\}$.

Então existe pelo menos um equilíbrio de Wardrop. ■

A prova segue de [C1], [C2] e aplicando-se o Teorema 2 de [20] para este cenário.

Teorema 5.1.2 No jogo não-atômico descrito no teorema anterior, se a seguinte condição também for satisfeita:

[C3] existe uma ordem como:

$$g_{r_1}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) < g_{r_2}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) < \dots < g_{r_M}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}), \quad \forall (\boldsymbol{\alpha}, x).$$

Os pontos de equilíbrio são as soluções para o seguinte sistema de equações de ponto fixo:

$$\begin{cases} \alpha_i^{WE} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{A} \setminus \{c_1, \dots, c_Q\} \\ \hat{\gamma}_{c_i} = \frac{p_{c_i} - p_{c_{i-1}}}{g_{c_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - g_{c_{i-1}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta})}, \\ \quad \forall i \in \{1, \dots, Q\} \\ x^{WE} = 1 - \Gamma(\hat{\gamma}_{c_1}) \\ \alpha_{c_i}^{WE} = \frac{\Gamma(\hat{\gamma}_{c_{i+1}}) - \Gamma(\hat{\gamma}_{c_i})}{x^{WE}}, \quad \forall i \in \{1, \dots, Q\} \end{cases} \quad (5.2)$$

onde $0 \leq \hat{\gamma}_{c_1} \leq \hat{\gamma}_{c_2} \leq \dots \leq \hat{\gamma}_{c_Q} \leq \gamma_{\max}$ são os limiares que dividem as classes de usuários tal que, no WE todos os usuários de tipo $\gamma \in (\hat{\gamma}_{c_k}, \hat{\gamma}_{c_{k+1}}]$ assinam o serviço c_k , para todo $k \in \{0, 1, \dots, Q\}$, com a convenção que $\hat{\gamma}_{c_0} = 0$ e $\hat{\gamma}_{c_{Q+1}} = \gamma_{\max}$. Dependendo dos preços \mathbf{p} , somente um subconjunto dos $Q \leq A$ serviços, ou seja $\{c_1, \dots, c_Q\}$, será

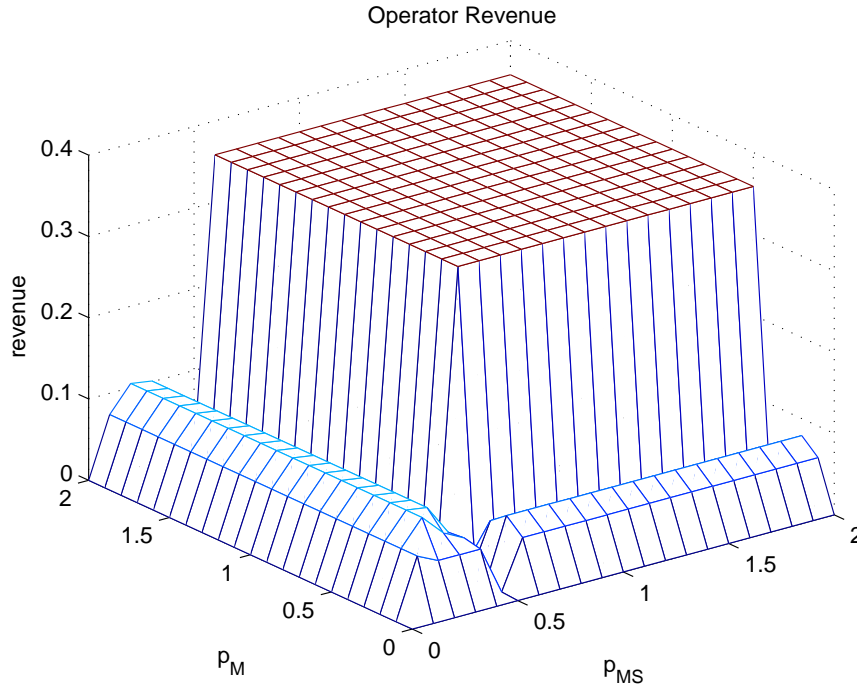


Figura 5.1: Receita do operador no pior WE vs. preços p_M e p_{MS} .

adotado no WE. Este subconjunto é tal que as seguintes condições existem simultaneamente:

$$\begin{aligned}
 g_{c_1}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) &< \cdots < g_{c_Q}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) && \forall(\boldsymbol{\alpha}, x) \\
 p_{c_1} &\leq \cdots \leq p_{c_Q}. && \blacksquare
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

A condição [C3] significa que o operador garante uma QoS para cada serviço independentemente da demanda que possa existir. Por exemplo, se forem considerados dois serviços s_j e s_k tal que $p_{s_j} \geq p_{s_k}$ and $g_{s_j}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) < g_{s_k}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta})$, $\forall(\boldsymbol{\alpha}, x)$ então o serviço s_j não será escolhido por nenhum usuário.

No Apêndice B encontra-se uma descrição detalhada deste problema.

5.2 Resultados Numéricos

Novamente, resultados numéricos foram obtidos usando códigos em MatLab.

O seguinte cenário foi investigado: $\gamma_{max} = 1$, $\beta_{mc} = 0.43$, $\beta_{sc} = 0.4$, $\beta_{fc} = 0.17$, $p_M \in \{0, 0.1, \dots, 2\}$, $p_{MS} \in \{0, 0.1, \dots, 2\}$ e $p_{MSF} \in \{0, 0.1, \dots, 2\}$.

Na Figura 5.1 a receita do operador é mostrada para a combinação de preços citada acima, e fixando $p_{MSF} = 0.7$.

Capítulo 6

Problema de Alocação Conjunta de Banda e Preços

Neste capítulo será apresentada outra extensão do problema descrito em [7]. O modelo do sistema adotado é similar ao do Capítulo 5. A diferença consiste em uma diferente política de alocação de banda entre as tecnologias: *macrocell*, *smallcells* e *femtocells*.

6.1 Descrição

O operador quer maximizar a receita média por usuário. O novo problema de otimização é:

$$\max_{\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}} [p_M \alpha_1^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) x^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) + p_{MS} \alpha_2^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) x^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) + p_{MSF} \alpha_3^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) x^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta})]$$

onde $\mathbf{p} = (p_M, p_{MS}, p_{MSF})$ e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{mc}, \beta_{sc}, \beta_{fc})$. Cada usuário deseja maximizar sua utilidade; resultando no seguinte jogo:

- Conjunto de usuários: $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$, $N \rightarrow +\infty$;
- Conjunto de ações: $\mathcal{A} = \{0, M, MS, MSF\}$; onde 0, M, MS e MSF significa que o usuário assinou algum serviço, serviço s_M , serviço s_{MS} ou serviço s_{MSF} , respectivamente;
- Função utilidade do usuário de tipo γ quando escolhe o serviço a :

$$U_a^\gamma(\boldsymbol{\alpha}, x, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{cases} 0, & \text{se } a = 0 \\ \gamma g_M(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) - p_M, & \text{se } a = M \\ \gamma g_{MS}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) - p_{MS}, & \text{se } a = MS \\ \gamma g_{MSF}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) - p_{MSF}, & \text{se } a = MSF \end{cases} \quad (6.1)$$

Novamente, a descrição detalhada deste problema encontra-se no Apêndice C.

6.2 Resultados Numéricos

Simulações foram realizadas para a seguinte faixa de valores: $\beta_{mc} \in \{0.03, 0.08, 0.13 \dots, 0.73\}$, com um passo de 0.05 e $\gamma_{max} = 1$.

Primeiramente, para $p_M = 0.5$, $p_{MS} = 2.0$ e $p_{MSF} = 4.2$ foram calculados os pontos de WE. Os pontos que provém tanto a pior quanto a melhor receita foram escolhidos. A seguir foi variado o valor da banda alocada para *macrocell* (β_{mc}) e o mesmo cálculo foi realizado. O resultado pode ser observado na Figura 6.1.

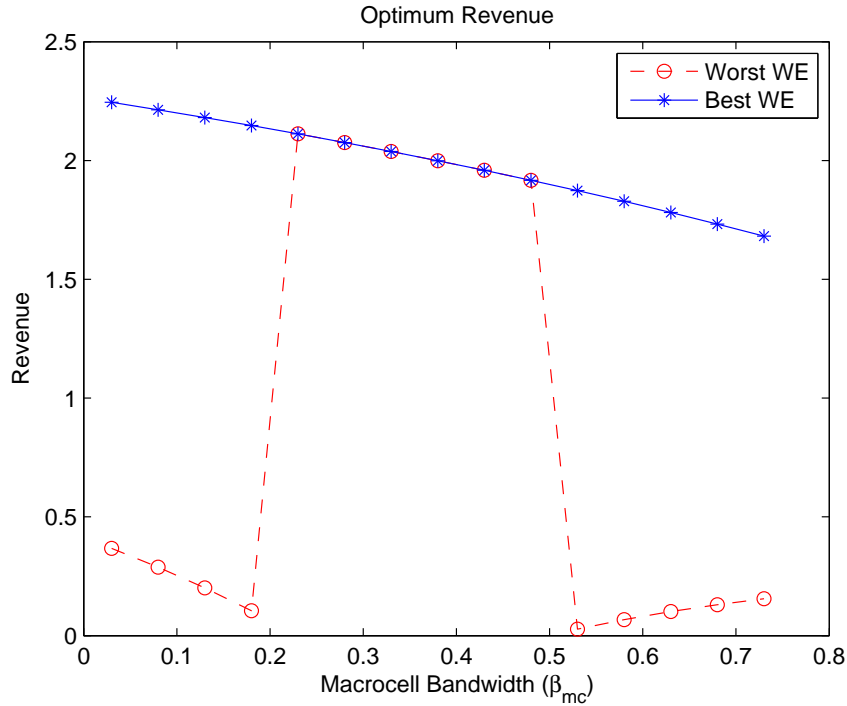


Figura 6.1: Receita do operador no pior WE vs. banda alocada para *macrocell* β_{mc} e no melhor WE vs. banda alocada para *macrocell* β_{mc} .

Capítulo 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

O objetivo deste trabalho foi estudar e aplicar teoria dos jogos a problemas de comunicações móveis.

No Capítulo 2 importantes conceitos de teoria dos jogos foram apresentados, assim como exemplos ilustrativos.

No Capítulo 3 foi apresentado um jogo sobre a disputa de recursos disponíveis de um usuário que está no estado *idle*. Neste jogo, existem usuários que estão transmitindo com uma taxa de transmissão abaixo da necessária e também um usuário com recursos disponíveis para auxiliar estes outros. Os usuários ativos disputam os recursos do usuário *idle*, que atua como um *relay*. Neste capítulo também foram feitas simulações para analisar o ganho de capacidade para o caso em que temos dois e quatro jogadores.

No Capítulo 4 e posteriormente no Apêndice A foi analisado um jogo não-atômico no qual a utilidade de um serviço depende não somente das demandas deste determinado serviço (por exemplo, *crowding games*, *congestion games* [27]), mas sim da demanda de todos os serviços. Nele, a referência [7] foi descrita e uma análise minuciosa da formulação de Stackelberg foi feita.

O Capítulo 5 e o Apêndice B contêm uma extensão do problema apresentado no Apêndice A; mais precisamente, nós consideramos o caso em que a operadora provê um número arbitrário de serviços, por exemplo $M \geq 2$. Foram usados resultados numéricos para estudar um cenário em particular, onde o operador provê três tecnologias (*macrocell*, *small-cells* e *femtocells*) para oferecer os serviços M, MS e MSF para seus clientes. Os modelos para as funções de *throughput* $g_{s_j}(\cdot)$ são extensões do proposto em [7] e suas expressões analíticas dependem dos parâmetros mencionados nos cenários considerados.

No Capítulo 6 e no Apêndice C, foi analisada a influência da política de alocação de banda entre *macrocell* e *small-cells* no estado de equilíbrio da rede; as simulações para este problema foram apresentadas no final deste apêndice.

Utilizando-se os resultados obtidos nos Apêndices A, B e C foi escrito o seguinte artigo de congresso: [9].

7.1 Trabalhos Futuros

Possíveis extensões da primeira parte deste trabalho são as seguintes:

- Análise matemática da existência de pontos de equilíbrio puro para o problema apresentado no Capítulo 3;
- Desenvolvimento de novos critérios de otimização como forma de alocar os recursos disponíveis do *relay*.

Como continuação da segunda parte deste trabalho, os seguintes assuntos, ainda não resolvidos, são interessantes para futuro desenvolvimento:

- Estudo do caso de múltiplos operadores, onde estes escolhem os preços de seus serviços de maneira competitiva e não cooperativa de forma a otimizar o seu lucro. Neste caso, o problema de nível mais alto é um jogo não cooperativo e o conjunto de soluções, o equilíbrio de Nash, deve ser analisado;
- Análise do número ótimo de operadores sob um ponto de vista da arquitetura de rede;
- Estudar algoritmos de aprendizado que são de baixa complexidade e que requerem pouco conhecimento dos parâmetros da rede. Estes algoritmos podem ser implementados no transmissor de forma a permitir a convergência dos usuários para um estado estável de equilíbrio da rede;
- Estudo do problema geral de alocação de banda dentre as três tecnologias: *macro-cell*, *smallcells* e *femtocells*.

Referências Bibliográficas

- [1] CHANDRASEKHAR, V., ANDREWS, J. G., GATHERER, A. “Femtocell Networks: A Survey”, *IEEE Communications Magazine*, v. 46, n. 9, pp. 59–67, Sept. 2008.
- [2] HOYDIS, J., KOBAYASHI, M., DEBBAH, M. “Green Small Cell Networks”, *IEEE Vehicular Technology Magazine*, v. 6, pp. 37–43, Mar. 2011.
- [3] AL-RUBAYE, S., AL-DULAIMI, A., COSMAS, J. “Cognitive Femtocell”, *IEEE Vehicular Technology Magazine*, v. 6, pp. 44–51, Mar. 2011.
- [4] XIA, P., CHANDRASEKHAR, V., ANDREWS, J. G. “Open vs closed access femtocells in the uplink”, *IEEE Transactions on Wireless Communications*, v. 9, n. 12, pp. 3798–3809, Dec. 2010.
- [5] REN, S., PARK, J., VAN DER SCHAAR, M. “Users subscription, revenue maximization, and competition in communications markets”. In: *The 30th IEEE International Conference on Computer Communications (IEEE INFOCOM 2011)*, pp. –1–9, Shanghai, China, Apr. 2011.
- [6] MAILLÉ, P., TUFFIN, B., VIGNE., J.-M. “Economics of Technological Games Among Telecommunication Service Providers”, *Proc. of IEEE GLOBECOM, Miami, FL, USA*, 2010.
- [7] SHETTY, N., PAREKH, S., WALRAND, J. “Economics of Femtocells”. In: *Proc. IEEE Global Telecommunications Conference (GLOBECOM)*, Hawaii, USA, Nov. 2009.
- [8] VON STACKELBERG, H. *The theory of market economy*. Oxford, England, Oxford Univ. Press, 1952.
- [9] GUSSEN, C. M. G., BELMEGA, E. V., DEBBAH, M. “Pricing and bandwidth allocation problems in wireless multi-tier networks”. In: *IEEE Asilomar Conf. on Signals, Systems, and Computer*, Pacific Grove, CA, USA, Nov. 2011.
- [10] OSBORNE, M. J., RUBINSTEIN, A. *A Course in Game Theory*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, 1994. ISBN: 0-262-65040-1.

- [11] ROMP, G. *Game Theory - Introduction and Applications*. Oxford University Press, 1997. ISBN: 0-19-877501-6.
- [12] HARGREAVES-HEAP, S. P., VAROUFAKIS, Y. *Game Theory, A Critical Introduction*. London and New York, Routledge, Taylor & Francis Group, 2004. ISBN: 0-203-56960-1.
- [13] MACKENZIE, A. B., SILVA, L. A. D. *Game Theory for Wireless Engineers*. Morgan & Claypool Publishers, 2006.
- [14] LEYTON-BROWN, K., SHOHAM, Y. *Essentials of Game Theory, A Concise, Multidisciplinary Introduction*. Morgan & Claypool Publishers, 2008.
- [15] SAAD, W., HAN, Z., DEBBAH, M., et al. “Coalitional Game Theory for Communications Networks”, *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 26, n. 5, pp. 77–96, Setembro 2009.
- [16] MYERSON, R. “Graphs and Cooperation in Games”, *Math. Oper. Res.*, v. 2, pp. 225–229, Junho 1977.
- [17] DEBBAH, M. “Game Theory for Cognitive Radio Applications”. 2008. Curso ministrado na The University Graduate Center (UNIK), Noruega.
- [18] NEUMANN, J. V., MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1953.
- [19] E SILVA, E. D. S., FIGUEIREDO, D. R. “Uma breve Introdução à Teoria dos Jogos com aplicações a Redes de Computadores”. 2007. Tutorial.
- [20] SCHMEIDLER, D. “Equilibrium Points of Nonatomic Games”, *Journal of Statistical Physics*, v. 7, n. 4, pp. 295–300, 1973.
- [21] WARDROP, J. G. “Some theoretical aspects of road traffic research”, *Proceedings of Institute of Civil Engineers, Part II*, 1952.
- [22] LARSSON, E. G., JORSWIECK, E. A., LINDBLUM, J., et al. “Game Theory and the Flat-Fading Gaussian Interference Channel”, *IEEE Signal Processing Magazine*, v. 26, n. 5, pp. 18–27, Setembro 2009.
- [23] COVER, T. M., GAMAL, A. A. E. “Capacity Theorems for the Relay Channel”, *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 25, n. 5, pp. 572–584, Sep. 1979.
- [24] COVER, T. M., THOMAS, J. A. *Elements of Information Theory*. Wiley Interscience, 1991.

- [25] NASH, J. “Equilibrium Points in n-person games”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 35, pp. 48–49, 1950.
- [26] FUDENBERG, D., TIROLE, J. *Game Theory*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, 1991.
- [27] MILCHTAICH, I. “Generic Uniqueness of Equilibrium in Large Crowding Games”, *Department of Economics, Bar-Ilan University*, Feb. 2000.
- [28] DAHLMAN, E., PARKVALL, S., SKÖLD, J., et al. *3G Evolution: HSPA and LTE for Mobile Broadband*. Academic Press, 2008.
- [29] TSE, D., VISWANATH, P. *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge University Press, 2005.
- [30] PEEBLES, J. P. Z. *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles*. McGraw-Hill International Editions, 1993. ISBN: 0-07-112782-8.
- [31] CORCORAN, J. “Markov Processes Course”. Fall 2009 - University of Colorado at Boulder. Poisson Lecture - Extra Notes.

Apêndice A

Economics of Femtocells

In this appendix, our objective is to revisit [7]. In [7], the system under investigation is composed of a network operator who offers two types of service for a continuous population of users divided in infinite types or classes. The type of services offered are mobile-only service (M) and mobile-plus-femtocell service (FM). In order to find the equilibrium points, the existence of some thresholds on the users type were proved and numerical simulations were provided to analyse the equilibrium. However, nothing is said about the two-level problem and about the existence and multiplicity of the equilibrium points of the non-atomic game.

In this appendix, we define in a rigorous, mathematical way the problem under investigation. To this aim, we divide this chapter in two main parts: one that considers the economic aspects and one the telecommunications aspects of the problem.

A.1 Economic aspects

During the detailed analysis in [7], we identified a two-layer problem:

- Higher level: the operator wants to maximize his revenue (optimization problem);
- Lower-level: the users want to maximize their utilities (non-atomic game problem).

In order to describe these two problems, the following model is considered:

- $x \in [0, 1]$ is the fraction of the population of users that subscribe to some service, and $(1 - x)$ is the fraction of the population of users that do not subscribe to any service;
- αx is the fraction of the population that subscribes to service s_f , such that $\alpha \geq 0$, and $(1 - \alpha)x$ is the fraction of the population that subscribes to service s_m .
- $g_i(\alpha, x)$ is the throughput of one user that subscribes to service s_i , $i \in \{m, f\}$;

- $\mathbf{p} = (p_m, p_f) \in [0, P]^2$ is the vector of prices charged for the provided services;
- $U_i^\gamma(\alpha, x, \mathbf{p}) = \gamma g_i(\alpha, x) - p_i$ is the utility of an user of type γ that chooses service s_i , which depends on the state of the network (i.e. the loads in the system $(1 - x, (1 - \alpha)x, \alpha x)$);
- $(1 - x, (1 - \alpha)x, \alpha x)$ is the state of the network, where $(1 - x)$ represents the fraction of the users that do not subscribe to any service, $[(1 - \alpha)x]$ the load in service s_m and (αx) the load in service s_f .

A.1.1 Optimization problem

The network operator wants to maximize his revenue. For this, the operator needs to maximize the mean revenue per user (R_u) that is given by:

$$\max_{p_m, p_f} \{p_m [1 - \alpha^{WE}(p_m, p_f)] x^{WE}(p_m, p_f) + p_f \alpha^{WE}(p_m, p_f) x^{WE}(p_m, p_f)\}$$

where the provider can choose the price of the services. The parameter $x^{WE}(p_m, p_f)$ is the fraction of the population at the Wardrop Equilibrium (WE) that subscribes to some service; $[(1 - \alpha^{WE}(p_m, p_f)) x^{WE}(p_m, p_f)]$ and $[\alpha^{WE}(p_m, p_f) x^{WE}(p_m, p_f)]$ are the fractions of the population at the Wardrop Equilibrium (WE) that subscribe to service s_m and service s_f , respectively. It is important to note that the mean revenue per user is equal to the total revenue divided by (N).

Assuming that the operator is aware of the network state at the equilibrium, then he will be able to choose the prices that maximize its revenue.

A.1.2 Game Theory problem

The users can choose among three possibilities:

- subscribe to no service;
- subscribe to mobile-only service s_m - meaning that the user is able to connect to the macrocells;
- subscribe to mobile-plus-femto service s_f - meaning that the user can connect to his femtocell and to the macrocell.

Thus, the game where each user wants to maximize his utility can be defined as:

- Set of Users: $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$, where $N \rightarrow +\infty$;

- Set of actions: $\mathcal{A} = \{0, m, f\}$;

where 0, m and f means the user subscribes to no service, service s_m or service s_f , respectively;

- Utility functions:

$$U_a^\gamma(\alpha, x, \mathbf{p}) = \begin{cases} 0, & \text{if } a = 0 \\ \gamma g_m(\alpha, x) - p_m, & \text{if } a = m \\ \gamma g_f(\alpha, x) - p_f, & \text{if } a = f \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

where the prices $p_m > 0$ and $p_f > 0$ are fixed and decided by the operator. The functions $g_m(\alpha, x)$ and $g_f(\alpha, x)$ represent the throughput for the subscribed service and $\gamma \in [0, \gamma_{max}]$ is the user type. Intuitively, γ represents the user valuation for a unit of throughput.

The solution concept of a non-atomic game is the Wardrop Equilibrium. The two principles stated by Wardrop in the context of transportation issues [21] are:

1. *The journey times in all routes actually used are equal and less than those which would be experienced by a single vehicle on any unused route.*
2. *At equilibrium the average journey time is minimum.*

We see that there is an analogy here between services and routes.

Remark: It is important to say that the utility a user is going to receive when choosing service s_i does not depend only on amount of the users that subscribe to the same service $((1 - \alpha)x, \alpha x)$, but also on the amount of the users that subscribe to the other service.

Therefore, the game that we are dealing with is a more general than crowding games. The main characteristics of a crowding game are [27]:

- each player is affected by the actions of other players, only through the total number of players choosing the same action as that player;
- different players can have different utilities when using the same service;
- under reasonable conditions on the payoff function we have the existence of the Wardrop Equilibrium [27].

The characteristics of the non-atomic game under study are:

- each player is affected by the actions of other players through all the loads in the system;
- different players can have different utilities when using the same service;
- there exists an WE if payoffs are continuous [20].

Theorem A.1.1 *In the non-atomic game $\mathcal{Y} = (\mathcal{N}, \mathcal{A}, \{U_i^\gamma\}_{i \in \mathcal{A}, \gamma \in [0, \gamma_{max}]})$, if the utilities functions $U_i^\gamma(\alpha, x, \mathbf{p})$, $\forall i \in \{0, m, f\}$, $\forall \gamma \in [0, \gamma_{max}]$ depend only on the system “loads” (the fraction of users connected to the services: $(1 - x), ((1 - \alpha)x), (\alpha x)$) and are continuous with respect to these loads, then at least one Wardrop Equilibrium exists. ■*

The proof follows by applying the results in [20].

A.2 Communications aspects

In this scenario, users are assumed to receive a higher throughput (or benefit) when adopting service s_f :

Hypothesis A.1 $g_m(\alpha, x) < g_f(\alpha, x) \quad \forall (\alpha, x) \in [0, 1]^2$.

In order to find the values of $x^{WE}(p_m, p_f)$ and $\alpha^{WE}(p_m, p_f)$ at the equilibrium, the existence of the thresholds $\hat{\gamma}_m$ and $\hat{\gamma}_f$ on the users types were proved in [7]¹. These thresholds are useful because all the users that subscribe to the same service are going to be between the same range of values. In other words: all the users of type $\gamma \in [0, \hat{\gamma}_m)$ subscribe to no service, the users of type $\gamma \in [\hat{\gamma}_m, \hat{\gamma}_f)$ subscribe to service s_m and the users of type $\gamma \in [\hat{\gamma}_f, \gamma_{max}]$ subscribe to service s_f . The equilibrium is given by the solution of the following system (a fixed point system):

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_m = \frac{p_m}{g_m(\alpha^{WE}, x^{WE})} \\ \hat{\gamma}_f = \frac{p_f - p_m}{g_f(\alpha^{WE}, x^{WE}) - g_m(\alpha^{WE}, x^{WE})} \\ x^{WE} = 1 - \Gamma(\hat{\gamma}_m) \\ \alpha^{WE} = \frac{1 - \Gamma(\hat{\gamma}_f)}{x^{WE}} \end{cases}, \quad (\text{A.2})$$

where $\Gamma(\gamma)$ is the distribution of the users valuations.

The users are considered to be distributed uniformly with respect to their valuation of the throughput:

Hypothesis A.2 $\Gamma(\gamma) = \frac{\gamma}{\gamma_{max}}, \quad \gamma \in [0, \gamma_{max}]$.

A.2.1 The utility functions

The utilities are $U_i^\gamma(\alpha, x, \mathbf{p}) = \gamma g_i(\alpha, x) - p_i$ where $g_i(\alpha, x)$ represents the throughput the users obtain. The throughput, modeled through the function $g_j(\alpha, x)$, $\forall (\alpha, x) \in [0, 1]^2$ and $j \in \{m, f\}$, is defined as:

$$g_j(\alpha, x) = \kappa \mathbb{E}[T_j], \quad j \in \{m, f\} \quad (\text{A.3})$$

¹In Appendix B similar proofs are made.

where κ is a constant of proportionality and $\mathbb{E}[T_j]$ is the expected throughput obtained for using service $j \in \{m, f\}$.

In order to describe $\mathbb{E}[T_f]$, it is expected that the users spend the fraction of time τ inside home and $(1-\tau)$ outside home. Then the expected rate is modeled as a combination of the throughput obtained by the user via femtocell connection ($\mathbb{E}[T_b]$), that is available inside home, and by the macrocell connection ($\mathbb{E}[T_m]$):

$$\mathbb{E}[T_f] = \tau\mathbb{E}[T_b] + (1 - \tau)\mathbb{E}[T_m]; \quad (\text{A.4})$$

with the hypothesis that on average the users spend more time inside home:

Hypothesis A.3 $\tau > \frac{1}{2}$.

Futhermore, it is assumed that the throughput obtained using the femtocell connection is higher than the throughput obtained when connected to the macrocell:

Hypothesis A.4 $\mathbb{E}[T_m] < \mathbb{E}[T_b]$.

In the following subsection we describe the expected macrocell throughput $\mathbb{E}[T_m]$.

A.2.2 The Macrocell Throughput

We denote by $R_m = \beta_{mc}WS_{mc}$ (in bits/sec) the achievable rate of the downlink network (rate at which the macrocell base station can send reliable information to all users); $0 < \beta_{mc} < 1$ is a factor related to the bandwidth allocated for macrocell transmission: from W (total bandwidth in Hz), $\beta_{mc}W$ are available for macrocell and S_{mc} (in bit/sec/Hz) is the spectral efficiency. We will use the following notation in the dissertation: $R_{mc} = WS_{mc}$.

We further assume that, inside each macrocell, the users are identically distributed over the available services as in the whole network. Mathematically, this means that if we assume that each cell has N_{cell} users, then

Hypothesis A.5 $x = x_{\text{cell}}$,

and

Hypothesis A.6 $\alpha = \alpha_{\text{cell}}$,

and we are going to use x instead of x_{cell} and α instead of α_{cell} .

At the network layer, the base station receives all the users requests for packets transmissions. The service arrival is modeled as a Poisson process, where:

- λ_o is the individual service rate request for the user's outside home;

- λ_i is the individual service rate request for the user's inside home;
- λ_t is the total service/packet rate request in system;

λ_t is given by:

$$\lambda_t = [\tau\lambda_i(1 - \alpha) + (1 - \tau)\lambda_o]xN_{cell}.$$

We are going to prove that the term $\tau\lambda_i(1 - \alpha)xN_{cell}$ is the request for packets transmissions of all the users that are inside home and that do not subscribe to femtocell. In the same way, it is possible to show that $\lambda_o(1 - \tau)(1 - \alpha)xN_{cell}$ is the request for packets transmissions of all the users that are outside home and that do not subscribe to femto-cell and $\lambda_o(1 - \tau)\alpha xN_{cell}$ is the request for packets transmissions of all the users that are outside home and that subscribe to femtocell.

Proof that the service/packet rate request of all the users that are inside home and that do not subscribe to femtocell is a Poisson process [31]:

Let each request for packet transmission be denoted by the Poisson process $\{N_j(t)\}$ with rate λ_i . Following, $\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}, \dots, \{N_{\tau(1-\alpha)xN_{cell}}(t)\}$ are independent Poisson process with rate λ_i (each process has the same rate)².

Then, $N(t)$ is the number of requests for packets transmissions of all the users that are inside home and that do not subscribe to femtocell, in the interval $(0, t)$ of the Poisson process with rate $\lambda = \lambda_i\tau(1 - \alpha)xN_{cell}$.

We are going to check now whether the three Poisson axioms are verified for $N(t)$.

1. The number of events that have occurred up to time 0 is zero: $N(0) = 0$

$$\begin{aligned} N(0) &= N_1(0) + \dots + N_{\tau(1-\alpha)xN_{cell}}(0) \\ N(0) &= 0 \end{aligned}$$

because all $\{N_j(t)\}$ are Poisson processes.

2. The number of requests in disjoint intervals are independent from each other (independent increments).

Given

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_q \tag{A.5}$$

and the fact that

$$\{N_1(t)\}, \{N_2(t)\}, \dots, \{N_{\tau(1-\alpha)xN_{cell}}(t)\} \tag{A.6}$$

²We can also use the following notation for the Poisson process of rate λ_i : $N_j(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$

are independent Poisson process. We can write (A.6) as:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} N_j(t_2) - \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} N_j(t_1), \quad \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} N_j(t_3) - \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} N_j(t_2), \\ \cdots, \quad \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} N_j(t_q) - \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} N_j(t_{q-1}) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} [N_j(t_2) - N_j(t_1)], \quad \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} [N_j(t_3) - N_j(t_2)], \\ \cdots, \quad \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} [N_j(t_q) - N_j(t_{q-1})]. \end{aligned}$$

The processes $N_i(t)$ and $N_l(t)$ are independent for $i \neq l$. We also have that $N_j(t_k) - N_j(t_{k-1})$ is independent of $N_j(t_p) - N_j(t_{p-1})$ for $k \neq p$ and $\forall j = 1, \dots, \tau(1 - \alpha)xN_{\text{cell}}$, because $N_j(t)$ is a Poisson process.

This way, we have that $\sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} [N_j(t_k) - N_j(t_{k-1})]$ is independent of

$\sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} [N_j(t_p) - N_j(t_{p-1})]$ for $k \neq p$ and following $N(t_k) - N(t_{k-1})$ is independent of $N(t_p) - N(t_{p-1})$ for $k \neq p$.

3. By stationary increments, $N(c + t) - N(c)$ for $t > 0$ has the same distribution of $N(t) - N(0) = N(t)$ which is a Poisson distribution with rate (λ) and $\lambda = \lambda_i \tau(1 - \alpha)xN_{\text{cell}}$.

We can write

$$\begin{aligned} N(c + t) - N(c) &= \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} N_j(c + t) - \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} N_j(c) \\ &= \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} [N_j(c + t) - N_j(c)] \end{aligned}$$

and for all $j = \{1, \dots, \tau(1 - \alpha)xN_{\text{cell}}\}$, $N_j(c + t) - N_j(c) \sim \text{Poisson}(\lambda_j)$.

If we make $Z_j = N_j(c + t) - N_j(c)$ and $\eta_j = \lambda_j$, and let $Y = \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} Z_j$, then the moment generating function of the random variable Y is:

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}_Y(t) &= \mathbb{E} [e^{tY}] = \mathbb{E} \left[e^{t \sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} Z_j} \right] = \\
&= \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} e^{tZ_j} \right] = \prod_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} \mathbb{E} [e^{tZ_j}] = \prod_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} \mathbb{M}_{Z_j}(t) = \\
&= \prod_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} \exp [\eta_j (e^t - 1)] = \exp \left[\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} \eta_j \right)}_{\lambda} (e^t - 1) \right] = \exp [\lambda (e^t - 1)]
\end{aligned}$$

where the moment generating function for the Poisson distribution is $\mathbb{M}_{Z_j}(t) = \exp [\eta_j (e^t - 1)]$.

$$\Rightarrow Y \sim \text{Poisson}(\lambda), \text{ with } \lambda = \left(\sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} \eta_j \right) = \lambda_i \tau (1 - \alpha) x N_{\text{cell}}.$$

Then, as we can see, we obtained the moment generating function for a Poisson random variable with rate $\sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} \eta_j$ [30].

Therefore:

$$\begin{aligned}
&Z_1, Z_2, \dots, Z_{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} \text{ are independent processes with } Z_j \sim \text{Poisson}(\eta_j) \\
\Rightarrow &\sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} Z_j \sim \text{Poisson} \left(\sum_{j=1}^{\tau(1-\alpha)xN_{\text{cell}}} \eta_j \right). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Until now we proved that $\tau \lambda_i (1 - \alpha) x N_{\text{cell}}$ is the request for packets transmissions of all the users that are inside home and that do not subscribe to femtocell. In the same way, it is possible to prove that $\lambda_o (1 - \tau) (1 - \alpha) x N_{\text{cell}}$ is the request for packets transmissions of all the users that are outside home and that do not subscribe to femtocell and $\lambda_o (1 - \tau) \alpha x N_{\text{cell}}$ is the request for packets transmissions of all the users that are outside home and that subscribe to femtocell resulting in the following total request:

$$\lambda_t = [\tau \lambda_i (1 - \alpha) + (1 - \tau) \lambda_o] x N_{\text{cell}}. \quad (\text{A.7})$$

Remark: We observe that the macrocell server receives requests both from the macrocell users and the femtocell users. Therefore, the utility of an user connecting to macrocell depends also on the load of the users connected to femtocells (and vice-versa). This is the reason why our game is not a crowding game but a more general non-atomic game.

The Base Station has a buffer that treats the received packets of all the users in parallel.

The average rate at which the system can serve one user is

$$\mu = \frac{\beta_{mc} R_{mc}}{L} \left(\frac{\text{bits/sec}}{\text{bits}} \right) \quad (\text{A.8})$$

where L is the mean file length. If there are ℓ different demands, the average rate that the system is going to serve each demand is $\frac{\mu}{\ell}$. The service time of the parallel requests are assumed to be exponentially distributed. Therefore the rate that the service is treated is:

$$\mu_t = \mu.$$

Proof that the rate that the service is treated is a Poisson process [31]:

Let each user demand served be denoted by the Poisson process $\{M_j(t)\}$ with rate $\frac{\mu}{\ell}$. Following, $\{M_1(t)\}, \{M_2(t)\}, \dots, \{M_\mu(t)\}$ are independent Poisson processes with rate $\frac{\mu}{\ell}$ (each process has the same rate).

Then, $M(t)$ is the number of requests for packets transmissions of all the users that were served, in the interval $(0, t)$ of the Poisson process of rate $\mu_t = \mu$.

We are going to check now whether the three Poisson axioms are verified for $M(t)$.

1. The number of events that have occurred up to time 0 is zero: $M(0) = 0$

$$M(0) = M_1(0) + \dots + M_\ell(0)$$

$$M(0) = 0$$

because all $\{M_j(t)\}$ are Poisson processes.

2. The number of users requests served in disjoint intervals are independent from each other (independent increments).

Given

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_q \quad (\text{A.9})$$

and the fact that

$$\{M_1(t)\}, \{M_2(t)\}, \dots, \{M_\mu(t)\} \quad (\text{A.10})$$

are independent Poisson processes. We can write equation (A.10) as:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\ell} M_j(t_2) - \sum_{j=1}^{\ell} M_j(t_1), \sum_{j=1}^{\ell} M_j(t_3) - \sum_{j=1}^{\ell} M_j(t_2), \\ & \dots, \sum_{j=1}^{\ell} M_j(t_q) - \sum_{j=1}^{\ell} M_j(t_{q-1}) \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\ell} [M_j(t_2) - M_j(t_1)], \sum_{j=1}^{\ell} [M_j(t_3) - M_j(t_2)], \\ & \dots, \sum_{j=1}^{\ell} [M_j(t_q) - M_j(t_{q-1})]. \end{aligned}$$

The processes $M_i(t)$ and $M_l(t)$ are independent for $i \neq l$. We also have that $M_j(t_k) - M_j(t_{k-1})$ is independent of $M_j(t_p) - M_j(t_{p-1})$ for $k \neq p$ and $\forall j = 1, \dots, \ell$, because $M_j(t)$ is a Poisson process.

This way, we have that $\sum_{j=1}^{\ell} [M_j(t_k) - M_j(t_{k-1})]$ is independent of $\sum_{j=1}^{\ell} [M_j(t_p) - M_j(t_{p-1})]$ for $k \neq p$ and following $M(t_k) - M(t_{k-1})$ is independent of $M(t_p) - M(t_{p-1})$ for $k \neq p$.

3. By stationary increments, $M(c+t) - M(c)$ for $t > 0$ has the same distribution of $M(t) - M(0) = M(t)$ which is a Poisson distribution with rate (μt) .

We can write

$$\begin{aligned} M(c+t) - M(c) &= \sum_{j=1}^{\ell} M_j(c+t) - \sum_{j=1}^{\ell} M_j(c) \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} [M_j(c+t) - M_j(c)] \end{aligned}$$

and for all $j = \{1, \dots, \ell\}$, $M_j(c+t) - M_j(c) \sim \text{Poisson}\left(\frac{\mu}{\ell}\right)$.

If we make $Z_j = M_j(c+t) - M_j(c)$ and $\eta_j = \frac{\mu}{\ell}$, and let $Y = \sum_{j=1}^{\ell} Z_j$, then the moment generating function of the random variable Y is:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_Y(t) &= \mathbb{E} [e^{tY}] = \mathbb{E} \left[e^{t \sum_{j=1}^{\ell} Z_j} \right] = \\ & \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^{\ell} e^{tZ_j} \right] = \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{E} [e^{tZ_j}] = \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{M}_{Z_j}(t) = \\ & \prod_{j=1}^{\ell} \exp [\eta_j (e^t - 1)] = \exp \left[\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\ell} \eta_j \right)}_{\mu} (e^t - 1) \right] = \exp [\mu (e^t - 1)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y \sim \text{Poisson}(\mu), \text{ with } \mu = \left(\sum_{j=1}^{\ell} \eta_j \right).$$

Then, as we can see, we obtained the moment generating function for a Poisson random variable with rate $\sum_{j=1}^{\ell} \eta_j$.

Therefore:

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_{\ell} \text{ are independent processes with } Z_j \sim \text{Poisson}(\eta_j)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\ell} Z_j \sim \text{Poisson} \left(\sum_{j=1}^{\ell} \eta_j \right). \quad \blacksquare$$

Then, the total service/packet rate that the system serves all the demand is:

$$\mu_t = \mu.$$

The process of receiving and treating the users requests can be modelled using Markov process as shown in Figure A.1.

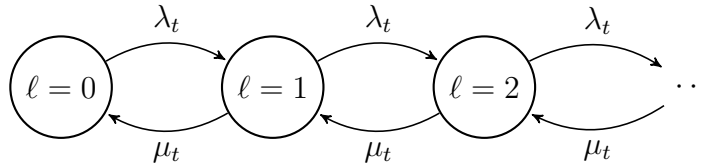


Figura A.1: Markov Process - the arrows are the transitions between the states of the system, where each state is the number of requests to be processed by the system (number of simultaneous active downloads).

Remark: We assume that the rate of users requests is lower than the service rate: $\lambda_t < \mu_t$.

If we denote $\rho = \frac{\lambda_t}{\mu_t}$ we will have:

Hypothesis A.7 $0 < \rho < 1$,

In order to analyse the rate that individual packets are served ($\mathbb{E}[T_m]$), it is necessary to calculate the probability of having ℓ simultaneous active downloads.

We consider that the queue is in equilibrium, then the equations of the Markov Process for the steady state are:

$$\begin{aligned} \Pr(\ell = k) &= \frac{\lambda_t}{\mu_t} \Pr(\ell = k - 1) \\ &= \left(\frac{\lambda_t}{\mu_t} \right)^2 \Pr(\ell = k - 2) \\ &\vdots \\ &= \left(\frac{\lambda_t}{\mu_t} \right)^k \Pr(\ell = 0) \end{aligned}$$

and we know that

$$\begin{aligned}
\Pr(\ell = 0) &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(\ell = k) \\
&= 1 - \Pr(\ell = 0) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_t}{\mu_t} \right)^k \\
&= 1 - \frac{\lambda_t}{\mu_t}
\end{aligned}$$

and

$$\Pr(\ell = k) = \left(1 - \frac{\lambda_t}{\mu_t} \right) \left(\frac{\lambda_t}{\mu_t} \right)^k$$

or

$$\Pr(\ell) = \left[1 - \frac{\lambda_t}{\mu_t} \right] \left(\frac{\lambda_t}{\mu_t} \right)^\ell.$$

Then the rate at which individual packets are served is:

$$\mathbb{E}[T_m] = \frac{\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\beta_{mc} R_{mc}}{\ell} \Pr(\ell)}{\sum_{\ell=1}^{\infty} \Pr(\ell)} \quad (\text{A.11})$$

where the term $\frac{\beta_{mc} R_{mc}}{\ell}$ represents the individual data rate when there are ℓ different demands; $\Pr(\ell)$ is the probability of having ℓ different demands and $\sum_{\ell=1}^{\infty} \Pr(\ell)$ is the fraction of time that macrocell serves the users.

We can write Equation (A.11) as:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_m] &= \frac{\beta_{mc} R_{mc} \left[1 - \frac{\lambda_t}{\mu_t} \right] \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell} \left(\frac{\lambda_t}{\mu_t} \right)^\ell}{\left[1 - \frac{\lambda_t}{\mu_t} \right] \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_t}{\mu_t} \right)^\ell} = \frac{\beta_{mc} R_{mc} \log \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda_t}{\mu_t}} \right)}{\frac{1}{1 - \frac{\lambda_t}{\mu_t}} - 1} \\
\mathbb{E}[T_m] &= \beta_{mc} R_{mc} \left[1 - \frac{\lambda_t}{\mu_t} \right] \frac{-\log \left(1 - \frac{\lambda_t}{\mu_t} \right)}{\frac{\lambda_t}{\mu_t}}
\end{aligned}$$

or

$$\mathbb{E}[T_m] = \beta_{mc} R_{mc} [1 - \rho] \frac{-\log(1 - \rho)}{\rho}.$$

Using these notations we can re-write the throughputs as follows:

$$g_m(\alpha, x) = \kappa \beta_{mc} R_{mc} \varphi \quad (\text{A.12})$$

$$g_f(\alpha, x) = \kappa R_{mc} (\tau b + (1 - \tau) \beta_{mc} \varphi) \quad (\text{A.13})$$

with

$$\begin{cases} b = \frac{\mathbb{E}[T_b]}{R_{mc}} \\ \varphi = (1 - \rho) \frac{-\ln(1-\rho)}{\rho} \\ \rho = \frac{[\tau(1-\alpha) + (1-\tau)\psi]x}{c_0} \\ \psi = \frac{\lambda_o}{\lambda_i}. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

where $\rho = \frac{\lambda_t}{\mu_t}$ and λ_t is defined in Eq. (A.7) and μ_t in Eq. (A.8). The following assumption is also made:

Hypothesis A.8 $\lim_{N_{cell} \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\lambda_i N_{cell}} = c_0$

where $0 < c_0 < \infty$ is a finite positive constant. Intuitively, the service packet rate goes to infinity at the same speed as the number of users (N_{cell}).

Remark: The available bandwidth is W ; $\beta_{mc}W$ are allocated for macrocell's transmission and $(1 - \beta_{mc})W = \beta_{fc}W$ for femtocell transmission. This means that femtocell and macrocell operate in orthogonal frequency bands.

Only Macrocell service

The case where the only available service is the macrocell, is useful for investigating whether deploying femtocells improves significantly the operator's revenue. Similarly to the case where two services are provided, we obtain the expressions of the WE as fixed point solutions of:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_{mc} = \frac{p_{mc}}{g_{mc}(x^{WE})} \\ x_{mc}^{WE} = 1 - \Gamma(\hat{\gamma}_{mc}) \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

where

$$g_{mc}(x) = \kappa R_{mc} \varphi_{mc} \quad (\text{A.16})$$

$$\varphi_{mc} = (1 - \rho_{mc}) \frac{-\ln(1-\rho_{mc})}{\rho_{mc}} \quad (\text{A.17})$$

$$\rho_{mc} = \frac{[\tau + (1-\tau)\psi]x}{c_{mc}} \quad (\text{A.18})$$

$$\psi = \frac{\lambda_o}{\lambda_i}. \quad (\text{A.19})$$

and τ is the fraction of time (in average) that the user spends inside home. The following assumption is made:

Hypothesis A.9 $\lim_{N_{cell} \rightarrow \infty} \frac{\mu_{mc}}{\lambda_i N_{cell}} = c_{mc}$

where c_{mc} is a positive finite constant. Also $\mu_{mc} = \frac{R_{mc}}{L}$. Note that $\beta_{mc} = 1$ in these equations because all the bandwidth is used for macrocell transmission.

A.3 Numerical Results

Numerical simulations were performed using MatLab codes. Similarly to [7], the values of $g_m(\alpha, x)$, $g_f(\alpha, x)$, p_m and p_f were normalized by κR_{mc} and the operator revenue was also normalized by κR_{mc} .

Some important details that generate constraints in the implementation are following described.

From Theorem A.1.1, $U_j^\gamma(\alpha, x, \mathbf{p})$ has to be continuous, implying in the following conditions:

$$\begin{aligned} 0 < \rho < 1 \\ 0 < [\tau + \tau(-\alpha - \psi) + \psi]x < c_0 \end{aligned}$$

and if we analyse the borders of the possible values we got as the strongest condition, the following one (when $x = 1$ and $\alpha = 0$):

$$0 < \tau - \psi\tau + \psi < c_0. \tag{A.20}$$

The following scenario was investigated: $\gamma_{max} = 1$, $\tau = 0.6$, $\psi = 1$, $\beta_{mc} = 0.83$ and $\frac{E[T_b]}{R_{mc}} = 2$.

In Figure A.2, the operator revenue is plotted for each combination of the services prices: $p_m \in \{0, 0.1, \dots, 2\}$ and $p_f \in \{0, 0.1, \dots, 2\}$. In order to obtain the operator revenue, all the Wardrop Equilibrium points were obtained as solutions to the system of equations (A.2). In some cases, it is possible to have more than one equilibrium point, thus we have chosen the point that yields the minimum operator revenue.

It is interesting to note that when $p_m \geq p_f$, no user will subscribe to service s_m , thus just one equilibrium point exists and the surface is smooth in these range of values. It is also important to highlight that there exists a maximum price that the user is going to pay

for each service. For service s_m the maximum price is obtained as the solution:

$$\begin{aligned}
U_m^\gamma(\alpha, x, \mathbf{p}) &= 0 \\
\gamma g_m(\varphi) - p_m &= 0 \\
p_m &= \gamma g_m(\varphi) \\
p_m^{max} &= \max_{\gamma, \varphi} [\gamma g_m(\varphi)] \\
p_m^{max} &= \gamma_{max} \beta_{mc}
\end{aligned}$$

because $\max_{\gamma, \varphi} [g_m(\varphi)] = \max_{\gamma, \varphi} [\varphi \beta_{mc}] = \beta_{mc}$, where φ is given in the equation (A.14). And the maximum price for service s_f is given by the solution to:

$$\begin{aligned}
U_f^\gamma(\alpha, x, \mathbf{p}) &= 0 \\
\gamma g_f(\alpha, x) - p_f &= 0 \\
p_f &= \gamma(\tau b + (1 - \tau)\beta_{mc}\varphi) \\
p_f^{max} &= \max_{\gamma, \varphi} [\gamma(\tau b + (1 - \tau)\beta_{mc}\varphi)] \\
p_f^{max} &= \gamma_{max}(\tau b + \beta_{mc} - \tau\beta_{mc})
\end{aligned}$$

where $\max_{\gamma, \varphi} [\varphi] = 1$. Using the same parameters as of the simulations, we obtain $p_m^{max} = 0.83$ and $p_f^{max} = 1.532$. This explains why in Figure A.2, for $p_f = 1.5$ and for all the values of p_m , the revenue is near zero: almost no user connects to service s_f . The fraction of users that connect to some service can be seen in Figure A.3 where it can be observed that for $p_m = 0.8$ (and $p_f \geq 0.9$) and for $p_f = 1.5$ this fraction is small, thus explaining the phenomenon observed in Figure A.2.

Figure A.4 illustrates the fraction of users that subscribe to service s_f (denoted by the parameters αx) as function of the prices of service s_m and of service s_f , and Figure A.5 illustrates the fraction of users that subscribe to service s_m (denoted by the parameters $(1 - \alpha)x$) as function of the prices.

In Figure A.4, note that for some $p_f = 1.4, 1.5$ (near the maximum value that the user is going to pay for this service) and for $0.1 \leq p_m \leq 0.6$ we have equilibrium points in which just few users subscribe to service s_f (Figures A.3 and A.5 complement this explanation). Note that, in this range of values we have more than one equilibrium point, but the chosen point was the one that yields the minimum revenue.

In Figure A.6, it is shown the operator revenue at the best WE vs. prices p_m and p_f . Note that the operator revenues of Figures A.2 and A.6 are different due to the multiplicity of the WE points. Note that even in Figure A.6 we have the same maximum values of the prices that the users are going to pay.

Figures A.7, A.8 and A.9 contain respectively the fraction of users that subscribe to some service (x), the fraction of users that subscribe to service s_f : αx , and the fraction of

users that subscribe to service s_m : $(1 - \alpha)x$. All the points of the figures correspond to operator revenue at the best WE vs. prices p_m and p_f .

Besides, it is interesting to observe that in Figure A.6 we have two different types of shape: the one that is in $0 \leq p_m \leq 2$ and $0 \leq p_f \leq 1.5$ is characterized by the fact that all the users just choose service s_f , while the curve in $0 \leq p_m \leq 0.8$ and $1.5 < p_f \leq 2$ is characterized by the fact that all the users just subscribe to service s_m (this conclusion was based also in Figures A.7, A.8 and A.9).

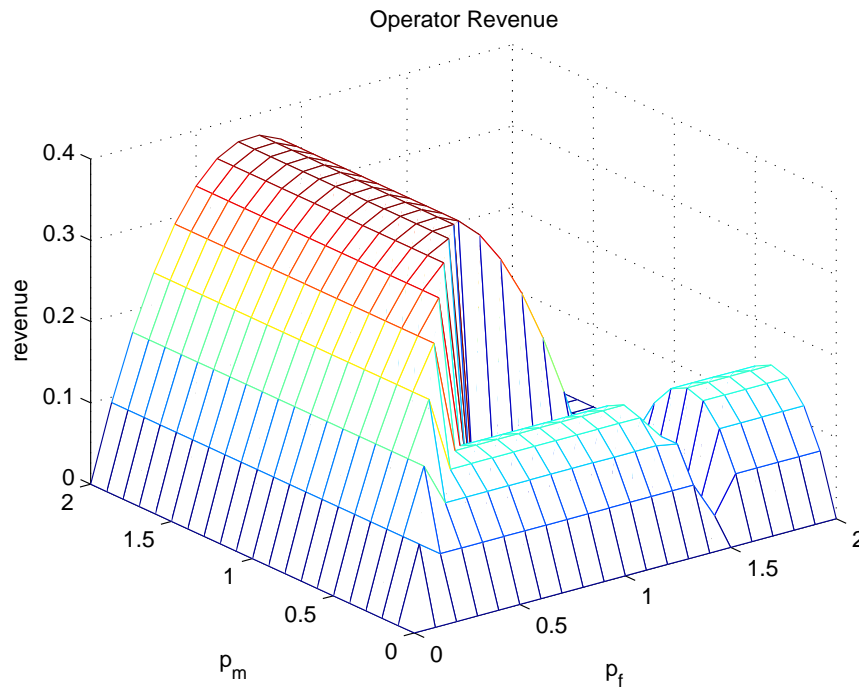


Figura A.2: Operator revenue at the worst WE vs. prices p_m and p_f .

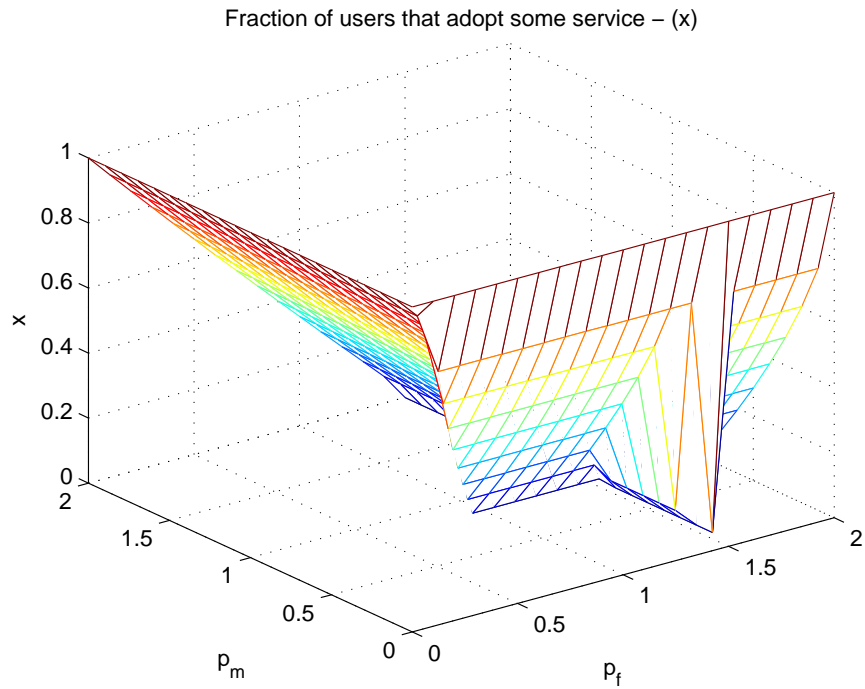


Figura A.3: Fraction of users that subscribe to some service (x) - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_m and p_f .

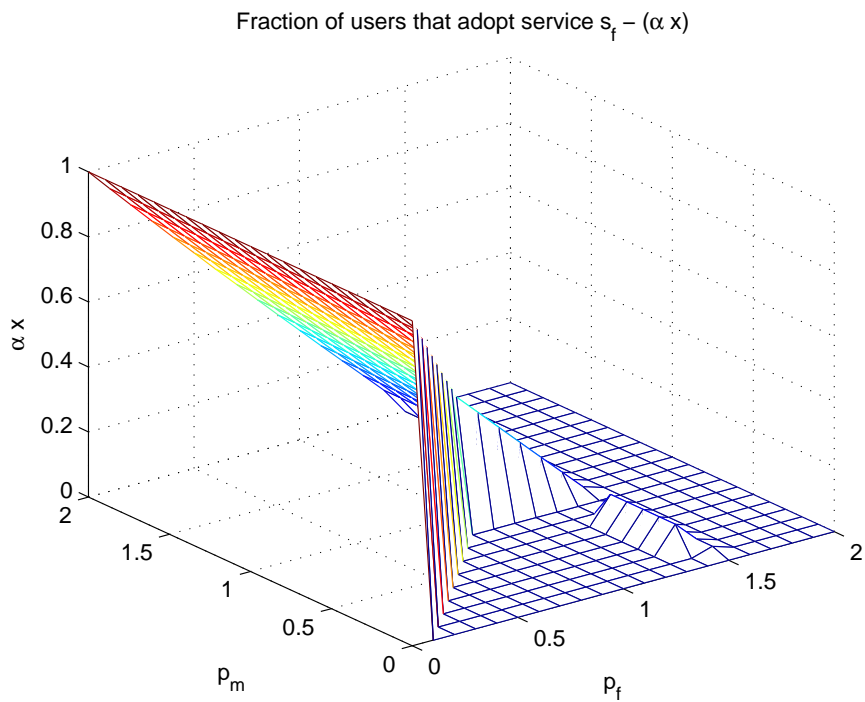


Figura A.4: Fraction of users that subscribe to service s_f : αx - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_m and p_f .

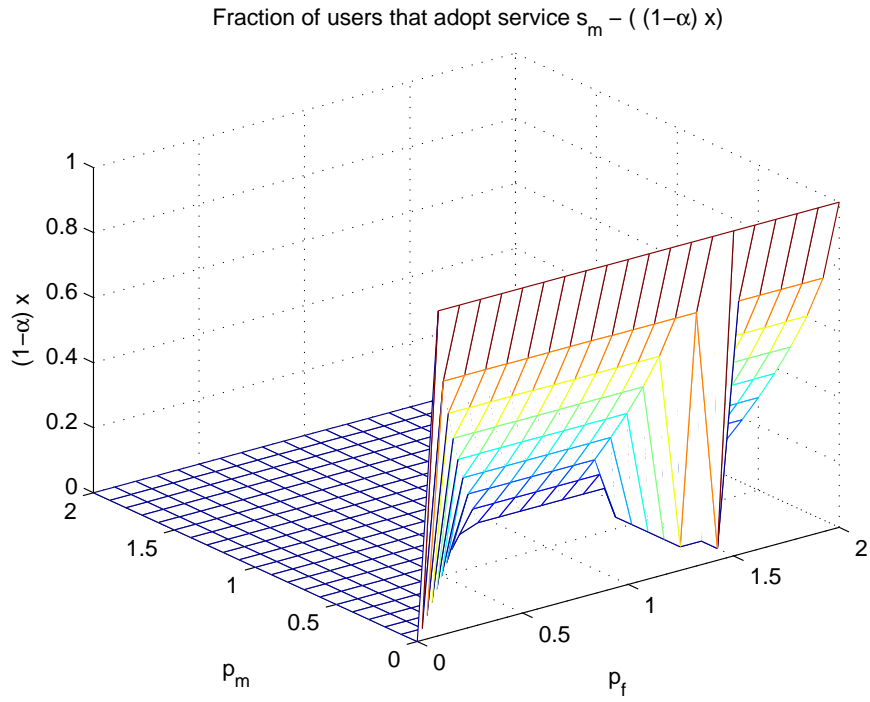


Figura A.5: Fraction of users that subscribe to service s_m : $(1 - \alpha)x$ - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_m and p_f .

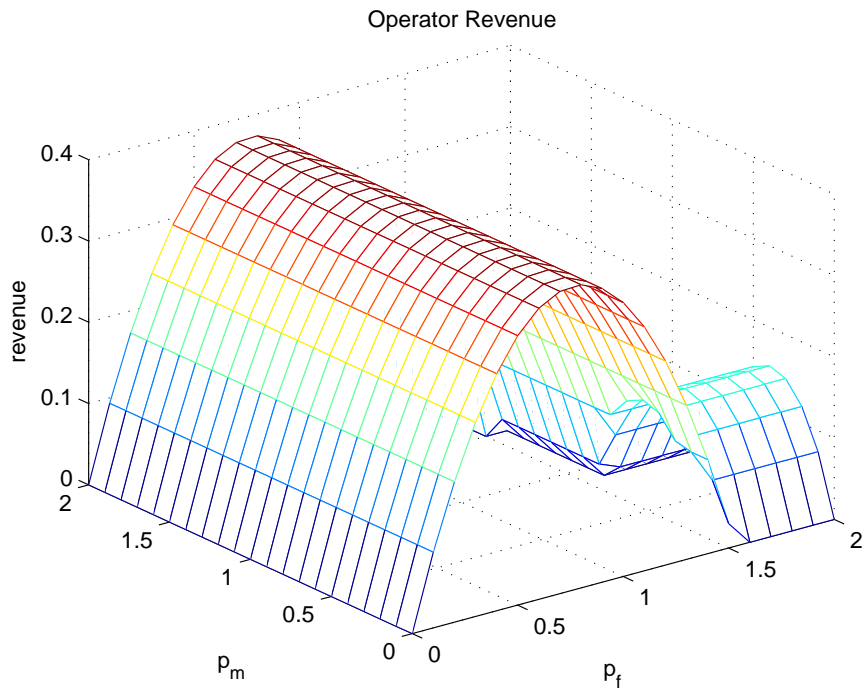


Figura A.6: Operator revenue at the best WE vs. prices p_m and p_f .

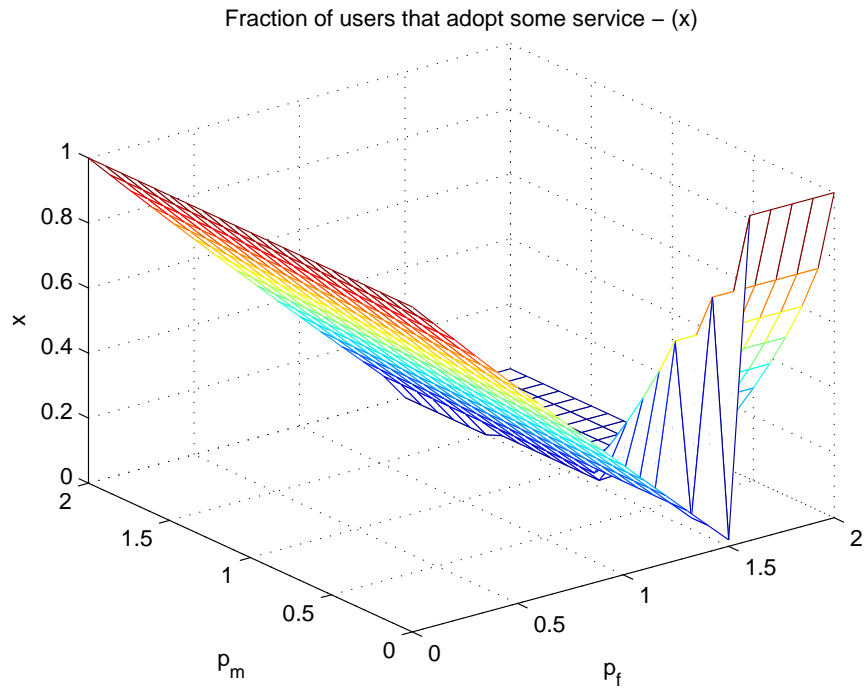


Figura A.7: Fraction of users that subscribe to some service (x) - points that correspond to operator revenue at the best WE vs. prices p_m and p_f .

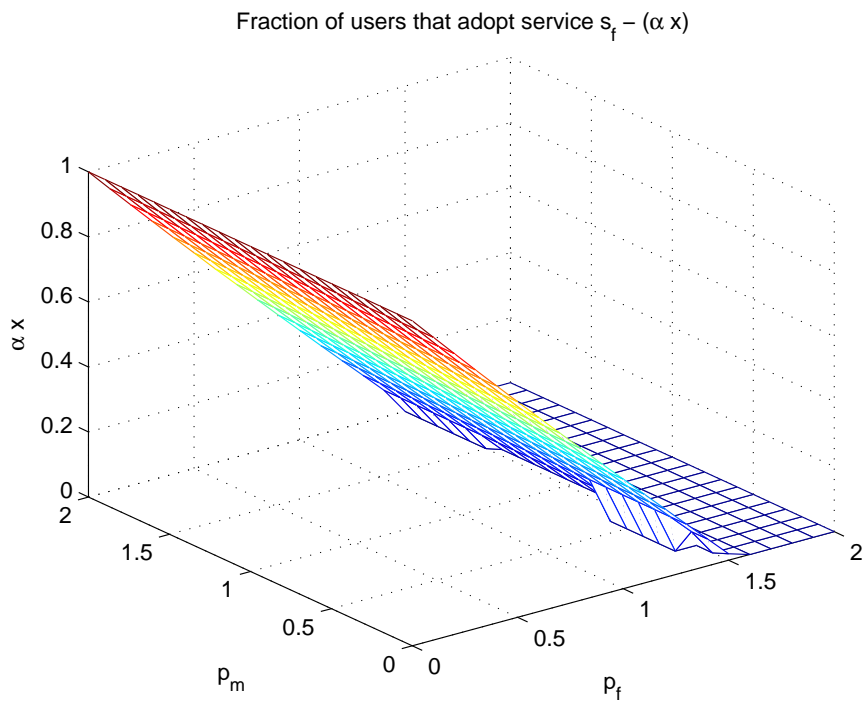


Figura A.8: Fraction of users that subscribe to service s_f : αx - points that correspond to operator revenue at the best WE vs. prices p_m and p_f .

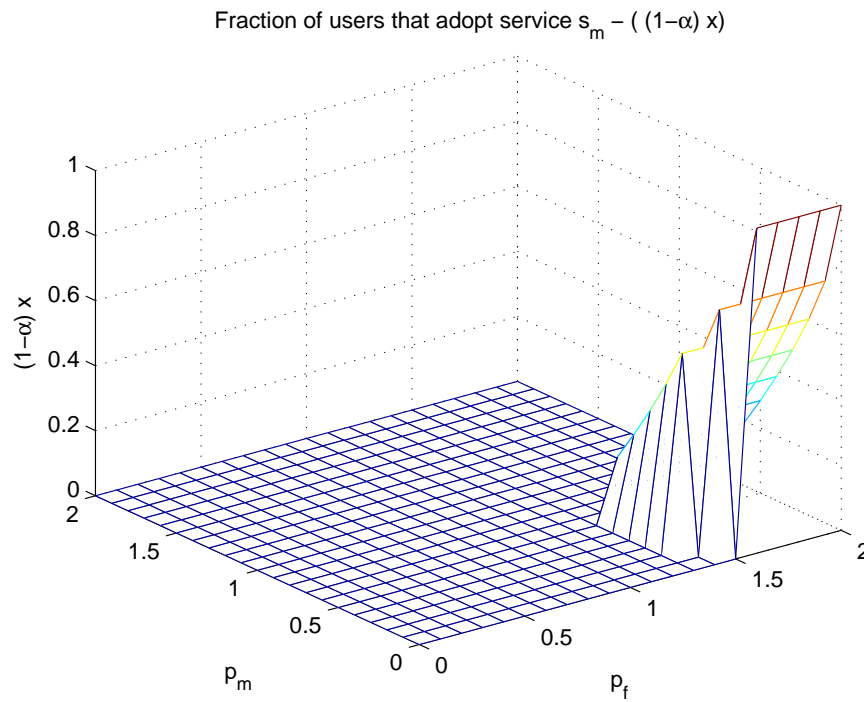


Figura A.9: Fraction of users that subscribe to service s_m : $(1 - \alpha)x$ - points that correspond to operator revenue at the best WE vs. prices p_m and p_f .

Apêndice B

Pricing in a Multiple-Service Heterogeneous Network

In this appendix, we assume a similar system model as in Appendix A. The major difference consists in the number of services that the operator can provide. For example, the operator could provide different services using 3 different technologies: macrocells, femtocells and/or small-cells.

B.1 Description

We introduce the following notation:

- $\alpha_i x \in [0, 1]$ is the fraction of the population that adopts service s_i , $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$ and $\sum_{j=1}^M \alpha_j = 1$;
- $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_M) \in [0, P]^M$ is the vector of prices charged for the provided services;
- $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}$ with $\mathcal{B} = \left\{ (\beta_1, \dots, \beta_T) \in [0, 1]^T \mid \sum_{k=1}^T \beta_k = 1 \right\}$ is the bandwidth-allocation policy vector among the deployed technologies assumed to be operating in orthogonal frequency bands.

Again, the problem has two different layers. At the upper-level, we have an optimization problem where the network operator wants to maximize the mean revenue per user (i.e., total revenue/ N):

$$\max_{\mathbf{p}} \left\{ \sum_{j=1}^M p_j \alpha_j^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) x^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \right\}$$

and each user wants to maximize his utility, resulting in the following game (in the lower-level):

- Set of Users: $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$, $N \rightarrow +\infty$;
- Set of actions: $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, M\}$; where j means the user subscribes to service s_j ;
- Utility functions:

$$U_j^\gamma(\boldsymbol{\alpha}, x, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = \gamma g_j(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) - p_j. \quad (\text{B.1})$$

(note that $p_0 = 0$ and $U_0^\gamma(\boldsymbol{\alpha}, x, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = 0$).

Our main result can be summarized by the following Theorem:

Theorem B.1.1 In the non-atomic game described above,

$\mathcal{G} = \{[0, \gamma_{\max}], \mathcal{A}, \{U_a^\gamma\}_{a \in \mathcal{A}, \gamma \in [0, \gamma_{\max}]}\}$, for fixed $\mathbf{p} \in [0, P]^M$ and $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{B}$, if the following three conditions are met:

[C1] the payoff functions $\{U_a^\gamma\}_{a, \gamma}$ depend only on the loads, i.e., $(\boldsymbol{\alpha}, x) \in [0, 1]^{M+1}$ and not on the users' identities;

[C2] the functions $g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta})$ are continuous w.r.t. $(\boldsymbol{\alpha}, x)$, $\forall i \in \{1, \dots, M\}$.

Then there exists at least one Wardrop Equilibrium. ■

The proof follows from [C1], [C2] and applying Theorem 2 in [20] to our scenario.

Theorem B.1.2 In the non-atomic game described in the previous theorem, if the following condition is also satisfied:

[C3] there exists an ordering such as:

$$g_{r_1}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) < g_{r_2}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) < \dots < g_{r_M}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}), \quad \forall (\boldsymbol{\alpha}, x).$$

The equilibrium points are solutions to the following fixed-point system of equations:

$$\begin{cases} \alpha_i^{WE} = 0, \quad \forall i \in \mathcal{A} \setminus \{c_1, \dots, c_Q\} \\ \hat{\gamma}_{c_i} = \frac{p_{c_i} - p_{c_{i-1}}}{g_{c_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - g_{c_{i-1}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta})}, \\ \quad \forall i \in \{1, \dots, Q\} \\ x^{WE} = 1 - \Gamma(\hat{\gamma}_{c_1}) \\ \alpha_{c_i}^{WE} = \frac{\Gamma(\hat{\gamma}_{c_{i+1}}) - \Gamma(\hat{\gamma}_{c_i})}{x^{WE}}, \quad \forall i \in \{1, \dots, Q\} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

where $0 \leq \hat{\gamma}_{c_1} \leq \hat{\gamma}_{c_2} \leq \dots \leq \hat{\gamma}_{c_Q} \leq \gamma_{\max}$ are thresholds on the classes of users such that, at the WE all the users of type $\gamma \in (\hat{\gamma}_{c_k}, \hat{\gamma}_{c_{k+1}}]$ connect to service c_k for all $k \in \{0, 1, \dots, Q\}$, with the convention that $\hat{\gamma}_{c_0} = 0$ and $\hat{\gamma}_{c_{Q+1}} = \gamma_{\max}$. Depending on the prices \mathbf{p} , only a subset of $Q \leq A$ services, i.e. $\{c_1, \dots, c_Q\}$, will be adopted at the WE. This subset is such that the two conditions are met simultaneously:

$$\begin{aligned} g_{c_1}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) &< \dots < g_{c_Q}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) && \forall (\boldsymbol{\alpha}, x) \\ p_{c_1} &\leq \dots \leq p_{c_Q}. && \blacksquare \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Condition [C3] simply means that the operator guarantees an experienced QoS for each service which is independent on the system loads. For an intuitive insight, consider two services s_j and s_k such that $p_{s_j} \geq p_{s_k}$ and $g_{s_j}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) < g_{s_k}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta})$, $\forall (\boldsymbol{\alpha}, x)$ then service s_j will not be chosen by any user.

We will proceed by proving this theorem. First we prove the existence of the thresholds $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_M$ at the WE and then we use these thresholds to obtain analytic expression of the WE.

B.2 Case 1

We start by assuming that the prices of the services are ordered as follows:

$$p_{s_1} < p_{s_2} < \dots < p_{s_M} \quad (\text{B.4})$$

We can prove the existence of the thresholds with respect to the type $\gamma \in [0, \gamma_{max}]$ of the users in the population.

B.2.1 Proof of the Existence of the Thresholds at the Wardrop Equilibrium

Let us consider an arbitrary Wardrop Equilibrium $(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}) \in [0, 1]^{M+1}$. With the existence of this WE point, we are going to prove the existence of thresholds that separate the users who choose different services.

- (1) First, we need to prove the existence of a threshold $\hat{\gamma}_1 \in [0, \gamma_{max}]$ that separates the users who subscribe to some service from the users that do not subscribe to any service:

(1.1)

$$\begin{aligned} & \text{If } \exists \bar{\gamma} \in [0, \gamma_{max}], \exists s_i, i \in \{1, 2, \dots, M\} \text{ s.t.} \\ & U_{s_i}^{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) > 0 \Leftrightarrow \bar{\gamma} g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - p_{s_i} > 0, \\ & \forall (\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}) \in [0, 1]^{M+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Then } & \forall \gamma > \bar{\gamma}, \gamma g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) > \bar{\gamma} g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) \\ & \Rightarrow (\gamma - \bar{\gamma}) g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) > 0 \\ & \Rightarrow \gamma g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - p_{s_i} > 0 \\ & \Rightarrow U_{s_i}^{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) > 0, \forall (\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}) \in [0, 1]^{M+1}. \end{aligned}$$

This means all the users of type $\gamma > \bar{\gamma}$ will connect to one service and $\exists \hat{\gamma}_1 \in [0, \gamma_{max}]$.

(1.2)

$$\begin{aligned}
& \text{If } \forall \bar{\gamma} \in [0, \gamma_{max}] \forall s_i, i \in \{1, 2, \dots, M\} \text{ s.t.} \\
& U_{s_i}^{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \bar{\gamma} g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - p_{s_i} = 0, \\
& \quad \forall (\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}) \in [0, 1]^{M+1} \\
& \Rightarrow \alpha_i^{WE} = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, M\}.
\end{aligned}$$

Then no user connects to any service.

In conclusion, there $\exists \hat{\gamma}_1 \in [0, \gamma_{max}]$ such that all users of type $\gamma \in [0, \hat{\gamma}_1]$ subscribe to no service and all users of type $\gamma \in (\hat{\gamma}_1, \gamma_{max}]$ subscribe to some service.

It is easy to check that:

$$x^{WE} = 1 - \Gamma(\hat{\gamma}_1). \quad (\text{B.5})$$

(2) We are going to prove the existence of a threshold $\hat{\gamma}_2 \in [\hat{\gamma}_1, \gamma_{max}]$ that separates users who subscribe to service 1 from the users that subscribe to the other services:

(2.1)

$$\begin{aligned}
& \text{If } \exists \bar{\gamma} \in [\hat{\gamma}_1, \gamma_{max}], \exists s_i, i \in \{2, \dots, M\} \text{ s.t.} \\
& \quad U_{s_i}^{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) > U_{s_1}^{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \\
& \Leftrightarrow \bar{\gamma} g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - p_{s_i} > \bar{\gamma} g_{s_1}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - p_{s_1}, \\
& \quad \forall (\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}) \in [0, 1]^{M+1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Then } \forall \gamma > \bar{\gamma} \rightarrow (\gamma - \bar{\gamma}) g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) > (\gamma - \bar{\gamma}) g_{s_1}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}). \\
& \Rightarrow \gamma g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - p_{s_i} > \gamma g_{s_1}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - p_{s_1} \\
& \Rightarrow U_{s_i}^{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) > U_{s_1}^{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta})
\end{aligned}$$

Then $\exists \hat{\gamma}_2 > \hat{\gamma}_1$ such that all the users of type $\gamma \in [\hat{\gamma}_2, \gamma_{max}]$ will connect to any service s_i $i \in \{2, \dots, M\}$ and $\forall \gamma \in [\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2]$, users connect to service s_1 .

(2.2)

$$\begin{aligned}
& \text{If } \forall \bar{\gamma} \in [\hat{\gamma}_1, \gamma_{max}], \forall s_i, i \in \{2, \dots, M\} \text{ s.t.} \\
& \quad U_{s_i}^{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) < U_{s_1}^{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta})
\end{aligned}$$

Then all the users in $[\hat{\gamma}_1, \gamma_{max}]$ connect to service s_1 .

This means that there exists $\hat{\gamma}_2 \in [\hat{\gamma}_1, \gamma_{max}]$ such that all users of type $\gamma \in (\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2)$ subscribe to s_1 and all users of type $\gamma \in (\hat{\gamma}_2, \gamma_{max}]$ subscribe to some of the other services $s_i, i \in \{2, \dots, M\}$.

(3) $\dots (j-1)$ The same procedure can be done $\forall s_i, i \in \{3, \dots, j-1\}$.

(j) More generally, we will prove the existence of a threshold $\hat{\gamma}_j \in [\hat{\gamma}_{j-1}, \gamma_{max}]$ that separates users who subscribe to service s_{j-1} from the users who subscribe to some service s_i with $i \in \{j, \dots, M\}$:

(j.1)

$$\begin{aligned} \text{If} \quad & \exists \bar{\gamma} \in [\hat{\gamma}_{j-1}, \gamma_{max}], \exists s_i, i \in \{j, \dots, M\} \text{ s.t.} \\ & U_{s_i}^{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) > U_{s_{j-1}}^{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \\ \Leftrightarrow \quad & \bar{\gamma} g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - p_{s_i} > \bar{\gamma} g_{s_{j-1}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - p_{s_{j-1}}, \\ & \forall (\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}) \in [0, 1]^{M+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Then} \quad & \forall \gamma > \bar{\gamma} \\ & (\gamma - \bar{\gamma}) g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) > (\gamma - \bar{\gamma}) g_{s_{j-1}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}). \\ \Rightarrow \quad & \gamma g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - p_{s_i} > \gamma g_{s_{j-1}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - p_{s_{j-1}} \\ \Rightarrow \quad & U_{s_i}^{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) > U_{s_{j-1}}^{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \end{aligned}$$

Then $\forall \gamma > \bar{\gamma}$, users connect to something else than $s_k, k \in \{0, \dots, j\}$.

Therefore $\exists \hat{\gamma}_j \in [\hat{\gamma}_{j-1}, \gamma_{max}]$ such that users of type $\gamma \in [\hat{\gamma}_{j-1}, \hat{\gamma}_j]$ will connect to service s_j and users of type $\gamma \in [\hat{\gamma}_j, \gamma_{max}]$ connect to any service $s_i, i \in \{j, \dots, M\}$.

(j.2)

$$\begin{aligned} \text{If} \quad & \forall \bar{\gamma} \in [\hat{\gamma}_{j-1}, \gamma_{max}], \forall s_i, i \in \{j, \dots, M\} \text{ s.t.} \\ & U_{s_i}^{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) < U_{s_{j-1}}^{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \end{aligned}$$

Then all the users in $[\hat{\gamma}_{j-1}, \gamma_{max}]$ connect to service s_{j-1} .

This means that there exists $\hat{\gamma}_j \in [\hat{\gamma}_{j-1}, \gamma_{max}]$ such that all users of type $\gamma \in (\hat{\gamma}_{j-1}, \hat{\gamma}_j)$ subscribe to s_{j-1} and all users of type $\gamma \in (\hat{\gamma}_j, \gamma_{max}]$ subscribe to some of the other services $s_i, i \in \{j, \dots, M\}$.

...

B.2.2 Finding the Thresholds at the Wardrop Equilibrium

The existence of the thresholds at the Wardrop Equilibrium was proved in the previous section. At this point, it is necessary to find their expression in function of (α^{WE}, x^{WE}) . Aiming at that, consider the following function $f_i : (\hat{\gamma}_{i-1}, \hat{\gamma}_{i+1}) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_i(\gamma) = U_{s_i}^\gamma(\alpha^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) - U_{s_{i-1}}^\gamma(\alpha^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \quad (\text{B.6})$$

with $U_{s_0}^\gamma(\alpha^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = 0$. It is possible to rewrite the function as:

$$f_i(\gamma) = \gamma[g_{s_i}(\alpha^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - g_{s_{i-1}}(\alpha^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta})] - [p_{s_i} - p_{s_{i-1}}]. \quad (\text{B.7})$$

We notice that the function $f_i(\gamma)$ is linear and continuous with respect to $\gamma \in (\hat{\gamma}_{i-1}, \hat{\gamma}_{i+1})$.

For $\forall \gamma \in (\hat{\gamma}_{i-1}, \hat{\gamma}_i)$, we know that $f_i(\gamma) < 0$ because $U_{s_i}^\gamma(\alpha^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) < U_{s_{i-1}}^\gamma(\alpha^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta})$, and for $\forall \gamma \in (\hat{\gamma}_i, \hat{\gamma}_{i+1})$, we know that $f_i(\gamma) > 0$ because $U_{s_i}^\gamma(\alpha^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) > U_{s_{i-1}}^\gamma(\alpha^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta})$. As the function $f_i(\gamma)$ is continuous and using the Intermediate Value Theorem, it must pass through zero at the point $\hat{\gamma}_i$, meaning that $f_i(\hat{\gamma}_i) = 0$ and, thus,

$$U_{s_{i-1}}^{\hat{\gamma}_i}(\alpha^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = U_{s_i}^{\hat{\gamma}_i}(\alpha^{WE}, x^{WE}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}). \quad (\text{B.8})$$

The intuition is that the users of type $\hat{\gamma}_i$ are indifferent between services $i - 1$ and i at the Wardrop Equilibrium.

Therefore, it is possible to write equation (B.8) as

$$\hat{\gamma}_i g_{s_{i-1}}(\alpha^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - p_{s_{i-1}} = \hat{\gamma}_i g_{s_i}(\alpha^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - p_{s_i} \quad (\text{B.9})$$

and the value of $\hat{\gamma}_i$ is obtained as:

$$\hat{\gamma}_i = \frac{p_{s_i} - p_{s_{i-1}}}{g_{s_i}(\alpha^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - g_{s_{i-1}}(\alpha^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta})} \quad (\text{B.10})$$

where $p_{s_0} = 0$ and $g_{s_0}(\alpha^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) = 0$, meaning that the price and the benefit of subscribe to no service is equal to zero.

Also, it is easy to note that:

$$\alpha_i^{WE} = \frac{\Gamma(\hat{\gamma}_{i+1}) - \Gamma(\hat{\gamma}_i)}{x^{WE}}, \quad \forall i \in \{1, \dots, M - 1\} \quad (\text{B.11})$$

and

$$\alpha_M^{WE} = \frac{1 - \Gamma(\hat{\gamma}_M)}{x^{WE}}, \quad (\text{B.12})$$

and the value of x^{WE} is the solution of:

$$x^{WE} = 1 - \Gamma(\hat{\gamma}_1) \quad (\text{B.13})$$

Using equations (B.10), (B.11), (B.12) and (B.13) we can find the Wardrop Equilibrium points of the system.

B.3 Case 2

We will now consider the general case where the prices of the services can be in any order:

$$p_{c_1} < p_{c_2} < \dots < p_{c_M} \quad (\text{B.14})$$

where the bijective mapping between $c_j \rightarrow s_i$ is known. It is also possible to write $\{c_1, c_2, \dots, c_M\}$ as a permutation of $\{s_1, s_2, \dots, s_M\}$, using the notation $\sigma(c_j) = s_i$ with $i, j \in \{1, \dots, M\}$ and which means that the service associated to the price index c_j is s_i .

We will see that, in general, there are some services (depending on their prices) that will not be subscribed to by any user. In the next subsection, we give a simple illustrative example to show this.

B.3.1 Example

Given that

$$g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) < g_{s_{i+1}}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}), \quad \forall (\boldsymbol{\alpha}, x) \in [0, 1]^{M+1} \quad (\text{B.15})$$

and assuming that $p_{s_i} > p_{s_{i+1}}$, then $U_{s_i}^\gamma(\boldsymbol{\alpha}, x, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) < U_{s_{i+1}}^\gamma(\boldsymbol{\alpha}, x, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) \quad \forall (\boldsymbol{\alpha}, x) \in [0, 1]^{M+1}$ and no user will subscribe to service i because service $i + 1$ always provides him a higher utility.

Therefore, the idea is to discard all the services that will not be used by the users and construct a reduced problem that is similar to Case 1. Thus, the services that will be used at the Wardrop Equilibrium are denoted by d_1, d_2, \dots, d_Q such that:

$$g_{d_1}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) < g_{d_2}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) < \dots < g_{d_Q}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}), \quad \forall (\boldsymbol{\alpha}, x) \in [0, 1]^{M+1}. \quad (\text{B.16})$$

and the prices of the services are ordered as follows:

$$p_{d_1} < p_{d_2} < \dots < p_{d_Q} \quad (\text{B.17})$$

where $Q < M$. Therefore, we will look for a permutation $\pi \in \mathbb{P}_Q$ (set of permutations of Q elements) such that $\pi(d_k) = s_i$, with d_k satisfying [C2] and (B.17), with $k \in$

$\{1, \dots, Q\}$, $i \in \{1, \dots, M\}$ for $i \in \mathbb{J}_Q$ where \mathbb{J}_Q is a subset of $Q \leq M$ elements $\mathbb{J}_Q \subset \{1, \dots, M\}$. In other words, we associate the price index d_k with service s_i .

The following algorithm constructs the vector π , the index of services in an ascending order of price. The services that are not used, are not in this vector.

```

 $\pi(d_1) = \sigma(c_1)$ 
 $l = 0$ 
for aux = 2 : M
    if index_service( $\sigma(c_{aux})$ ) > index_service( $\pi(d_l)$ ) then
        if vector_price( $\sigma(c_{aux})$ ) == vector_price( $\pi(d_l)$ ) then
             $\pi(d_l) = \sigma(c_{aux})$ 
        elseif
             $l = l+1$ 
             $\pi(d_l) = \sigma(c_{aux})$ 
        endif
    endif
endfor

```

As can be noted, the vector π is composed of a reduced subset of the services available, that are ordered in the same way as in Case 1. Therefore, after some simplification, Case 2 is reduced to Case 1 with reduced dimension $Q \leq M$.

B.4 Specific Case: Three Available Services

We use numerical results to study a particular scenario where the operator deploys three technologies Macrocells, Smallcells and Femtocells to provide mobile-only service s_M , mobile-plus-smallcell service s_{MS} and mobile-plus-smallcell-plus-femtocell service s_{MSF} to its clients. It is important to say that where there is femtocell coverage there is not small-cell coverage and vice versa.

The total available bandwidth is W , where $\beta_{fc}W$ are designated for femtocell transmission, $\beta_{mc}W$ for macrocell transmission and $\beta_{sc}W$ for small-cell transmission.

The models for the throughput functions $g_i(\cdot)$ are extensions to the one proposed in [7] and are shown in the next section.

B.4.1 Model of the throughput functions

Again, the throughput, modeled through the function $g_j(\alpha, x, \beta)$, $\forall(\alpha, x) \in [0, 1]^3$ and $j \in \{M, MS, MSF\}$, will be defined as:

$$g_j(\alpha, x, \beta) = \kappa \mathbb{E}[T_j], \quad j \in \{M, MS, MSF\} \quad (\text{B.18})$$

where κ is a constant of proportionality and $\mathbb{E}[T_j]$ is the expected throughput obtained for using service $j \in \{M, MS, MSF\}$ and the vector $(\alpha x) = (x \alpha_1, x \alpha_2, x \alpha_3)$ contains the fraction of users that subscribe to service s_M, s_{MS} and s_{MSF} respectively.

In order to describe $\mathbb{E}[T_{MS}]$ and $\mathbb{E}[T_{MSF}]$, we make a combination of the rates obtained by the user via femtocell connection ($\mathbb{E}[T_b]$), that is available inside home, by small-cell connection ($\mathbb{E}[T_s]$) and by the macrocell connection ($\mathbb{E}[T_m]$):

$$\mathbb{E}[T_{MS}] = \tau_{sc}\mathbb{E}[T_s] + (1 - \tau_{sc})\mathbb{E}[T_m]; \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbb{E}[T_{MSF}] = \tau_{fc}\mathbb{E}[T_b] + \tau_{sc}\mathbb{E}[T_s] + \tau_{mc}\mathbb{E}[T_m]; \quad (\text{B.20})$$

where

- τ_{fc} is the time that the user spends inside home;
- τ_{sc} is the time that the user spends inside a region with small-cell access;
- τ_{mc} is the time that the user spends outside home and outside a region that has small-cell access;

the following two hypothesis are made:

Hypothesis B.1 $\tau_{mc} < \tau_{sc} < \tau_{fc}$

and that the throughputs obtained are ordered as:

Hypothesis B.2 $E[T_m] < E[T_s] < E[T_b]$

The expected Macrocell throughput $\mathbb{E}[T_m]$ is obtained in a similar manner as in Appendix A and under the same hypothesis. The total service/packet rate request in macrocell is given by:

$$\lambda_{mc} = \lambda x \alpha_1 N_{\text{cell}} + (1 - \tau_{sc}) \lambda x \alpha_2 N_{\text{cell}} + (1 - \tau_{sc} - \tau_{fc}) \lambda x \alpha_3 N_{\text{cell}},$$

where

- $\lambda x \alpha_1 N_{\text{cell}}$ is the rate request of all mobile-only users;
- $(1 - \tau_{sc}) \lambda x \alpha_2 N_{\text{cell}}$ is the rate request of mobile-plus-smallcell that are not in a region with small-cell coverage;
- $(1 - \tau_{sc} - \tau_{fc}) \lambda x \alpha_3 N_{\text{cell}}$ is the rate request of the mobile-plus-smallcell-plus-femtocell that are not inside home neither in a region with small-cell coverage.

The average rate at which the macrocell server can attend one user is¹:

$$\mu_m = \frac{\beta_{mc} R_{mc}}{L} \quad (\text{B.21})$$

where L is the mean file length. If there are ℓ different demands, the average rate that the system is going to serve each demand is $\frac{\mu_m}{\ell}$. The total service/packet rate at which the macrocell serves all the demand is²:

$$\mu_{mc} = \mu_m.$$

Again, we assume that $\lambda_{mc} < \mu_{mc}$ and if $\rho_{mc} = \frac{\lambda_{mc}}{\mu_{mc}}$; then we have:

Hypothesis B.3 $0 < \rho_{mc} < 1$.

Following the same steps as in the previous appendix we obtain:

$$\mathbb{E}[T_m] = \beta_{mc} R_{mc} [1 - \rho_{mc}] \frac{-\log(1 - \rho_{mc})}{\rho_{mc}}. \quad (\text{B.22})$$

with

$$\rho_{mc} = \frac{[\alpha_1 + (1 - \tau_{sc})\alpha_2 + (1 - \tau_{sc} - \tau_{fc})\alpha_3]x}{c_{mc}} \quad (\text{B.23})$$

and we make the following assumption:

Hypothesis B.4 $\lim_{N_{cell} \rightarrow \infty} \frac{\mu_{mc}}{\lambda N_{cell}} = c_{mc}$

where $0 < c_{mc} < \infty$ is a positive constant.

The same procedure was made to obtain the expected small-cell throughput $\mathbb{E}[T_s]$. Thus the total service/packet rate request in a small-cell base station is modeled as:

$$\lambda_{sc} = \tau_{sc} \lambda x \alpha_2 \frac{N_{cell}}{A_{cell}} + \tau_{sc} \lambda x \alpha_3 \frac{N_{cell}}{A_{cell}} \quad (\text{B.24})$$

where A_{cell} denotes the number of small-cells inside a macrocell; $\tau_{sc} \lambda x \alpha_2 \frac{N_{cell}}{A_{cell}}$ is the rate request of mobile-plus-smallcell that are inside the small-cell coverage and $\tau_{sc} \lambda x \alpha_3 \frac{N_{cell}}{A_{cell}}$ is the rate request of mobile-plus-smallcell-plus-femtocell that are inside the small-cell coverage.

The average rate that the small-cell can serve one user is

$$\mu_s = \frac{\beta_{sc} R_{sc}}{L} \quad (\text{B.25})$$

¹We are using the same notation as in Appendix A.

²The proof is similar as the one presented in Appendix A.

where we denote by R_{sc} the achievable rate of the downlink network (rate at which the small-cell can send reliable information to all the users), this rate is related to the physical properties of the channel (for example the bandwidth). The total service/packet rate that small-cell serves all the demand is³:

$$\mu_{sc} = \mu_s.$$

Once more, we consider that $\lambda_{sc} < \mu_{sc}$ and making $\rho_{sc} = \frac{\lambda_{sc}}{\mu_{sc}}$ we have:

Hypothesis B.5 $0 < \rho_{sc} < 1$.

Similarly, we obtain:

$$\mathbb{E}[T_s] = \beta_{sc} R_{sc} [1 - \rho_{sc}] \frac{-\log(1 - \rho_{sc})}{\rho_{sc}}. \quad (\text{B.26})$$

with

$$\rho_{sc} = \frac{[1 - \alpha_1] \tau_{sc} x}{c_{sc}} \quad (\text{B.27})$$

and we are making the following assumption:

Hypothesis B.6 $\lim_{N_{cell} \rightarrow \infty} \frac{\mu_{sc} A_{cell}}{\lambda N_{cell}} = c_{sc}$

where $0 < c_{sc} < \infty$ is a positive constant.

B.4.2 Numerical Results

Thus the values of the WE points will be found through the following set of equations:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_i = \frac{p_{s_i} - p_{s_{i-1}}}{g_{s_i}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta}) - g_{s_{i-1}}(\boldsymbol{\alpha}^{WE}, x^{WE}, \boldsymbol{\beta})} \\ \alpha_i^{WE} = \frac{\Gamma(\hat{\gamma}_{i+1}) - \Gamma(\hat{\gamma}_i)}{x^{WE}}, \forall i \in \{1, \dots, M-1\} \\ \alpha_M^{WE} = \frac{1 - \Gamma(\hat{\gamma}_M)}{x^{WE}} \\ x^{WE} = 1 - \Gamma(\hat{\gamma}_1) \end{cases} \quad (\text{B.28})$$

Once more, the values of $g_M(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta})$, $g_{MS}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta})$, $g_{MSF}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta})$, p_M , p_{MS} and p_{MSF} were normalized by κR_{mc} and the operator revenue was normalized by κR_{mc} :

$$\begin{cases} \frac{g_M(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta})}{\kappa R_{mc}} = \beta_{mc} \varphi_{mc} \\ \frac{g_{MS}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta})}{\kappa R_{mc}} = \tau_{sc} \beta_{sc} \frac{R_{sc}}{R_{mc}} \varphi_{sc} + (1 - \tau_{sc}) \beta_{mc} \varphi_{mc} \\ \frac{g_{MSF}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta})}{\kappa R_{mc}} = \tau_{fc} \frac{E[T_b]}{R_{mc}} + \tau_{sc} \beta_{sc} \frac{R_{sc}}{R_{mc}} \varphi_{sc} + \tau_{mc} \beta_{mc} \varphi_{mc} \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

³The proof is similar as the proof presented in Appendix A.

where

$$\begin{cases} \varphi_{mc} = [1 - \rho_{mc}] \frac{-\log(1-\rho_{mc})}{\rho_{mc}} \\ \rho_{mc} = \frac{[\alpha_1 + (1 - \tau_{sc})\alpha_2 + (1 - \tau_{sc} - \tau_{fc})\alpha_3]x}{c_{mc}} \\ \varphi_{sc} = [1 - \rho_{sc}] \frac{-\log(1-\rho_{sc})}{\rho_{sc}} \\ \rho_{sc} = \frac{[1 - \alpha_1]\tau_{sc}x}{c_{sc}}. \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

In order to ensure that the hypothesis $\mathbb{E}[T_m] < \mathbb{E}[T_s] < \mathbb{E}[T_b]$ is met, we have the following constraints:

$$c_{sc} = \frac{\beta_{sc}R_{sc}A_{\text{cell}}}{L\lambda N_{\text{cell}}} > \frac{\tau_{sc}}{\tau_{mc}} \quad (\text{B.31})$$

$$c_{mc} = \frac{\beta_{mc}R_{mc}}{L\lambda N_{\text{cell}}} > 1 \quad (\text{B.32})$$

$$\beta_{sc} \frac{R_{sc}}{R_{mc}} < \frac{\mathbb{E}[T_b]}{R_{mc}} \quad (\text{B.33})$$

Remark: It is also important to highlight that it exists a maximum price that the users are going to pay for one service.

For service s_M the maximum price is given by the solution of the following equation:

$$\begin{aligned} U_M^\gamma(\boldsymbol{\alpha}, x, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) &= 0 \\ \gamma g_M(\varphi_{mc}) - p_M &= 0 \\ p_M &= \gamma g_M(\varphi_{mc}) \\ p_M^{\max} &= \max_{\gamma, \varphi_{mc}} [\gamma g_M(\varphi_{mc})] \\ p_M^{\max} &= \gamma_{\max} \beta_{mc} \end{aligned}$$

where $\max_{\gamma, \varphi_{mc}} [g_M(\varphi_{mc})] = \max_{\gamma, \varphi_{mc}} [\varphi_{mc} \beta_{mc}] = \beta_{mc}$, with φ_{mc} defined in the set of equations (B.30). The maximum price for service s_{MS} is

$$\begin{aligned} U_{MS}^\gamma(\boldsymbol{\alpha}, x, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) &= 0 \\ \gamma g_{MS}(\varphi_{mc}, \varphi_{sc}) - p_{MS} &= 0 \\ p_{MS} &= \gamma \left[\tau_{sc} \beta_{sc} \frac{R_{sc}}{R_{mc}} \varphi_{sc} + (1 - \tau_{sc}) \beta_{mc} \varphi_{mc} \right] \\ p_{MS}^{\max} &= \max_{\gamma, \varphi_{mc}, \varphi_{sc}} \left\{ \gamma \left[\tau_{sc} \beta_{sc} \frac{R_{sc}}{R_{mc}} \varphi_{sc} + (1 - \tau_{sc}) \beta_{mc} \varphi_{mc} \right] \right\} \\ p_{MS}^{\max} &= \gamma_{\max} \left[\tau_{sc} \beta_{sc} \frac{R_{sc}}{R_{mc}} + (1 - \tau_{sc}) \beta_{mc} \right] \end{aligned}$$

where $\max_{\gamma, \varphi_{mc}, \varphi_{sc}} [\varphi_{sc}] = 1$ and $\max_{\gamma, \varphi_{mc}, \varphi_{sc}} [\varphi_{mc}] = 1$. And the maximum price for service s_{MSF}

is

$$\begin{aligned}
U_{\text{MSF}}^\gamma(\boldsymbol{\alpha}, x, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) &= 0 \\
\gamma g_{\text{MSF}}(\varphi_{mc}, \varphi_{sc}) - p_{\text{MSF}} &= 0 \\
p_{\text{MSF}} &= \gamma \left[\tau_{fc} \frac{\mathbb{E}[T_b]}{R_{mc}} + \tau_{sc} \beta_{sc} \frac{R_{sc}}{R_{mc}} \varphi_{sc} + \tau_{mc} \beta_{mc} \varphi_{mc} \right] \\
p_{\text{MSF}}^{\max} &= \max_{\gamma, \varphi_{mc}, \varphi_{sc}} \left\{ \gamma \left[\tau_{fc} \frac{\mathbb{E}[T_b]}{R_{mc}} + \tau_{sc} \beta_{sc} \frac{R_{sc}}{R_{mc}} \varphi_{sc} + \tau_{mc} \beta_{mc} \varphi_{mc} \right] \right\} \\
p_{\text{MSF}}^{\max} &= \gamma_{\max} \left[\tau_{fc} \frac{\mathbb{E}[T_b]}{R_{mc}} + \tau_{sc} \beta_{sc} \frac{R_{sc}}{R_{mc}} + \tau_{mc} \beta_{mc} \right]
\end{aligned}$$

where $\max_{\gamma, \varphi_{mc}, \varphi_{sc}} [\varphi_{sc}] = 1$ and $\max_{\gamma, \varphi_{mc}, \varphi_{sc}} [\varphi_{mc}] = 1$.

Thus, under all these considerations, simulations were performed using MatLab. The following scenario was investigated: $\gamma_{\max} = 1$, $\tau_{mc} = 0.15$, $\tau_{sc} = 0.25$, $\tau_{fc} = 0.6$, $\frac{R_{sc}}{R_{mc}} = 1.7917$, $\frac{\mathbb{E}[T_b]}{R_{mc}} = 2$, $\beta_{mc} = 0.43$, $\beta_{sc} = 0.4$, $\beta_{fc} = 0.17$, $p_M \in \{0, 0.1, \dots, 2\}$, $p_{\text{MS}} \in \{0, 0.1, \dots, 2\}$ and $p_{\text{MSF}} \in \{0, 0.1, \dots, 2\}$. Using these parameters, we obtain as the maximum prices that the users are going to pay: $p_M = 0.43$, $p_{\text{MS}} = 0.5017$ and $p_{\text{MSF}} = 1.4437$.

In Figures B.1, B.2, B.3, B.4, B.5 and B.6, the price of service s_{MSF} is fixed at 0.7.

In Figures B.7, B.8, B.9, B.10, B.11 and B.12, the price of service s_{MS} is fixed at 0.4.

In Figures B.13, B.14, B.15, B.16, B.17 and B.18, the price of service s_M is fixed at 0.4.

In Figures B.1, B.7 and B.13, the operator revenue is plotted as function of the prices of services. In order to obtain the operator revenue, all the Wardrop Equilibrium points were found. In some cases it is possible to have more than one equilibrium point; thus we have chosen the point that yields the minimum operator revenue. The discontinuities in Figures B.1, B.7 and B.13 are due to multiplicity of WE.

The fraction of users that subscribe to some service - (x), the fraction of users that subscribe to service $s_M - (\alpha_1 x)$, the fraction of users that subscribe to service $s_{\text{MS}} - (\alpha_2 x)$ and the fraction of users that subscribe to service $s_{\text{MSF}} - (\alpha_3 x)$ that correspond to the points shown in Figure B.1 are plotted in Figures B.2, B.4, B.5 and B.6 respectively for the same scenario.

In Figure B.1 it is possible to see the maximum price that the user is going to pay for services s_M and s_{MS} is $p_M \approx 0.4$, $p_{\text{MS}} \approx 0.5$ (for these values of price, almost no user subscribe to any service, as can be seen in Figure B.3). In the same way, it is possible to note (in Figure B.1) that each one of the three different curves is characterized by the fact that all the users subscribe to almost one service (using Figures B.4, B.5 and B.6): basically, just service p_M is chosen in the curve of $0 \leq p_M \leq 0.4$ and $0 \leq p_{\text{MS}} \leq 2$; the service p_{MS} is chosen for majority of the points of the curve for $0 \leq p_M \leq 2$ and $0 \leq p_{\text{MS}} \leq 0.5$; and for the curve in $0.5 \leq p_M \leq 2$ and $0.6 \leq p_{\text{MS}} \leq 2$ the only service that

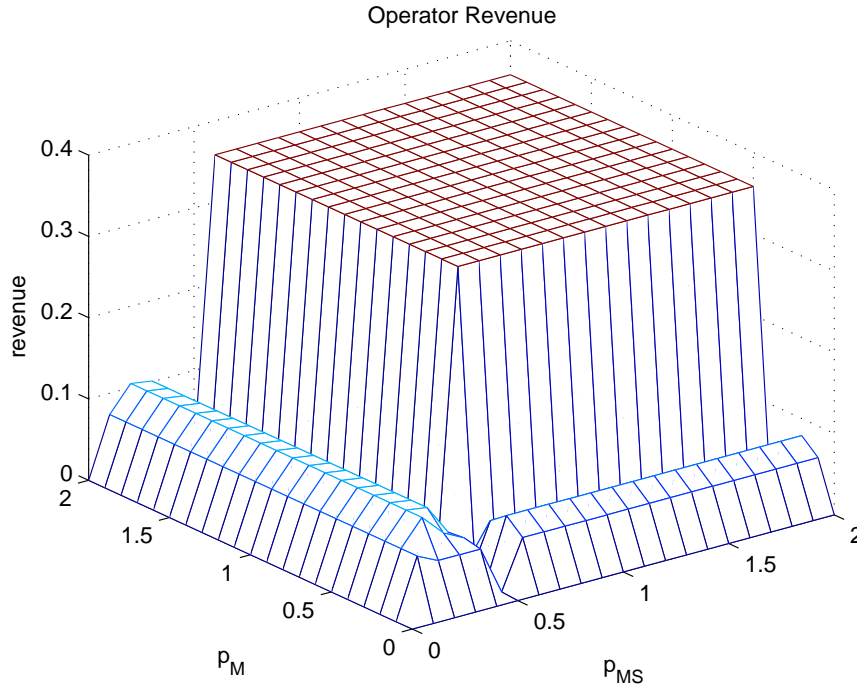


Figura B.1: Operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MS} .

is used is s_{MSF} .

In Figures B.8, B.10, B.11 and B.12, we illustrate the values of x , $\alpha_1 x$, $\alpha_2 x$ and $\alpha_3 x$ that correspond to the revenues shown in B.7 and in Figures B.14, B.16, B.17 and B.18 the values of x , $\alpha_1 x$, $\alpha_2 x$ and $\alpha_3 x$ that correspond to the revenues of Figure B.13.

In Figure B.7 we can see that the revenue is increasing when the price of the service p_{MSF} also increases. This increase in the revenue is interrupted when $p_{MSF} = 0.5$ because for the values of $p_{MSF} \geq 0.5$ we will have more than one equilibrium point due to the fact that the price of service s_{MS} is $p_{MS} = 0.4$ and some users will subscribe to this service. In the same figure, we see that for $p_{MSF} = 1.4$ the revenue is even lower; this occur because just few users subscribe to service s_{MSF} (we can see this in Figures B.10, B.11 and B.12).

The curve in Figure B.13 is quite similar with the one in Figure B.7; although the majority of the equilibrium points are different: for $p_{MS} \geq 0.6$ and $p_{MSF} \geq 0.5$ the only service that is used is s_M (Figures B.16, B.17 and B.18).

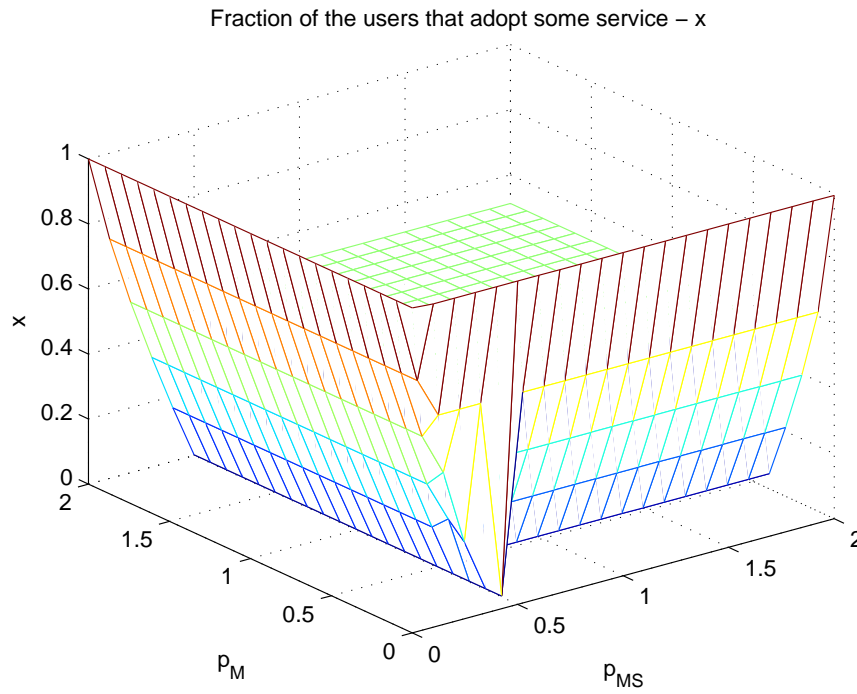


Figura B.2: Fraction of users that subscribe to some service (x) - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MS} .

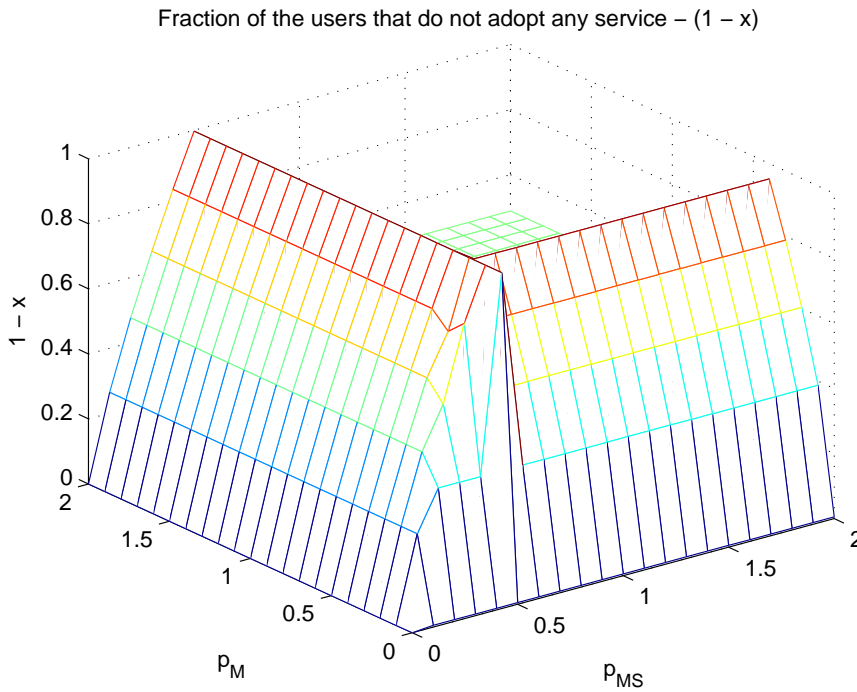


Figura B.3: Fraction of users that do not subscribe to any service ($1 - x$) - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MS} .

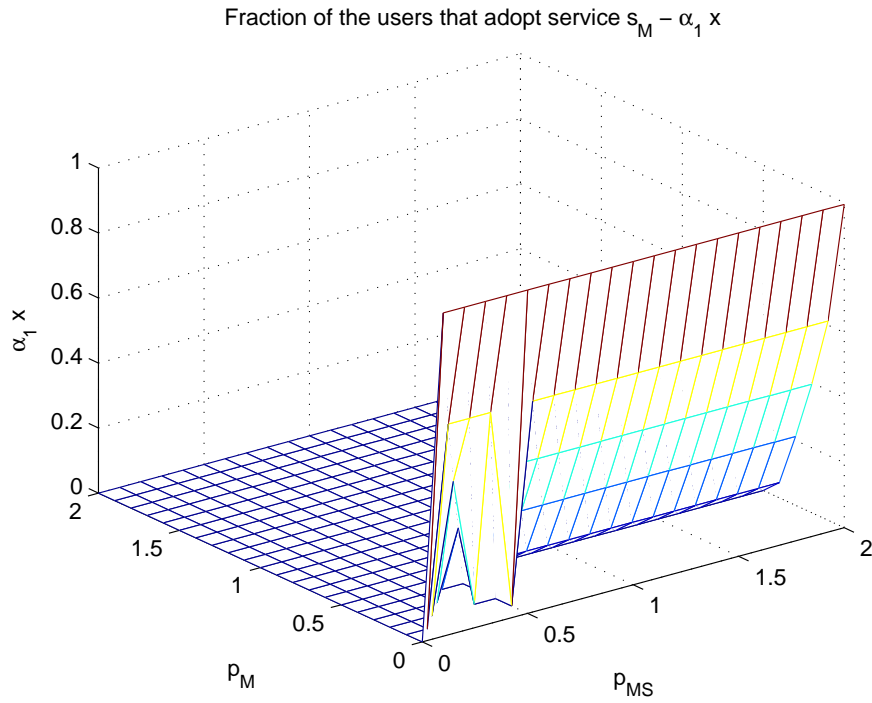


Figura B.4: Fraction of users that subscribe to service s_M : $\alpha_1 x$ - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MS} .

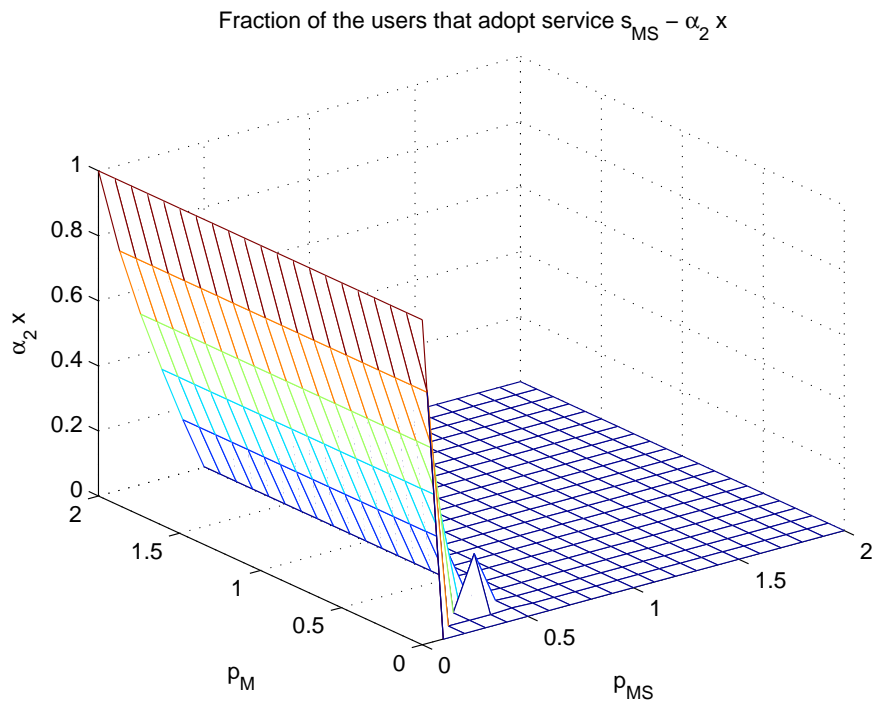


Figura B.5: Fraction of users that subscribe to service s_{MS} : $\alpha_2 x$ - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MS} .

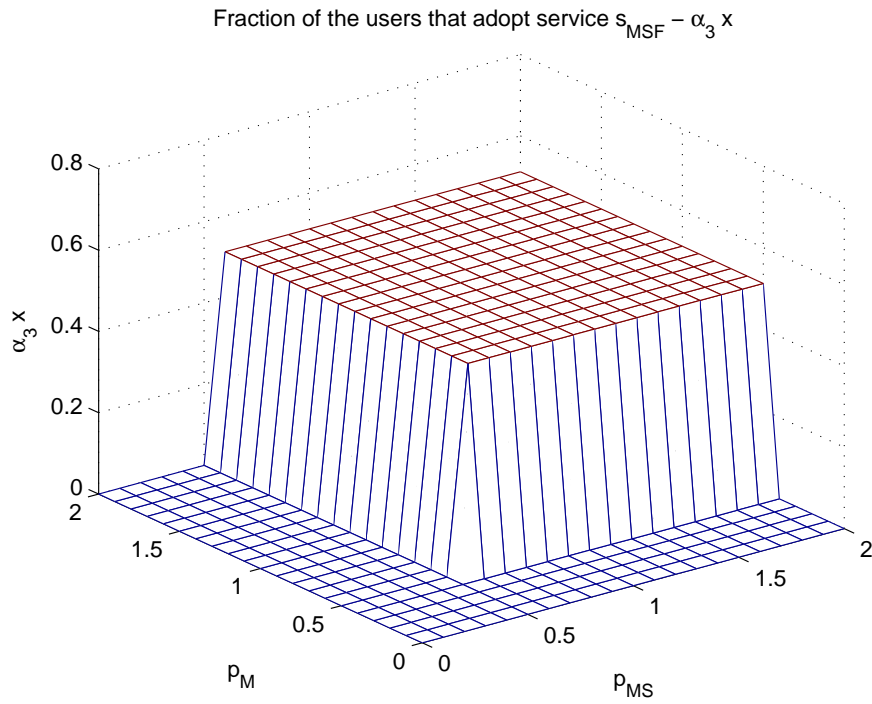


Figura B.6: Fraction of users that subscribe to service s_{MSF} : $\alpha_3 x$ - points that correspond to operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MS} .

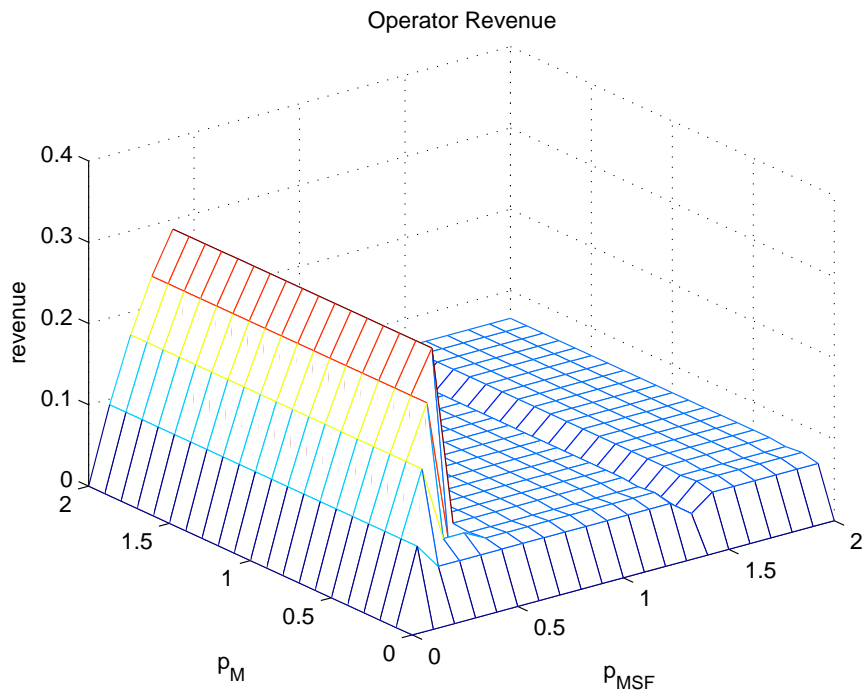


Figura B.7: Operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MSF} .

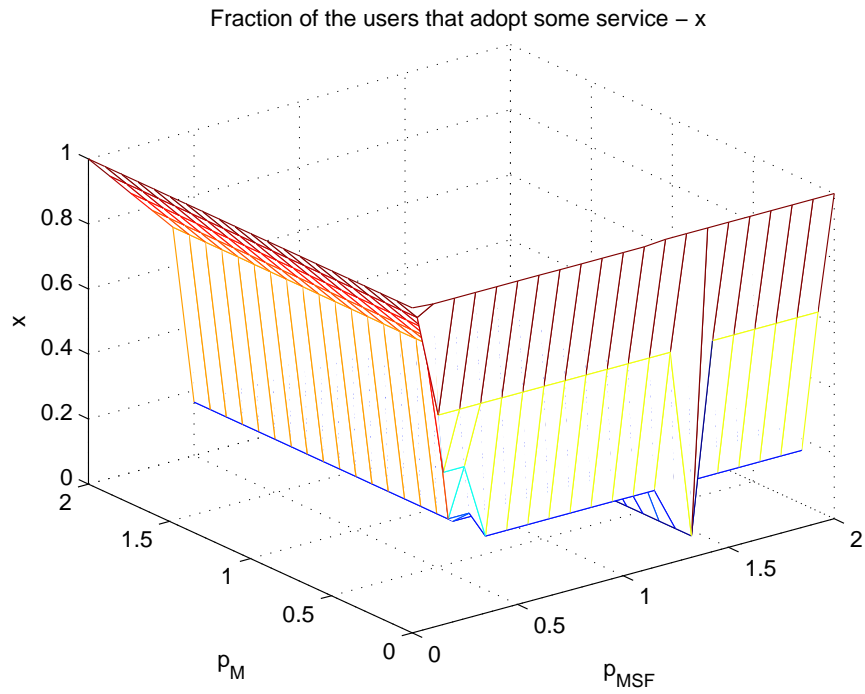


Figura B.8: Fraction of users that subscribe to some service (x) - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MSF} .

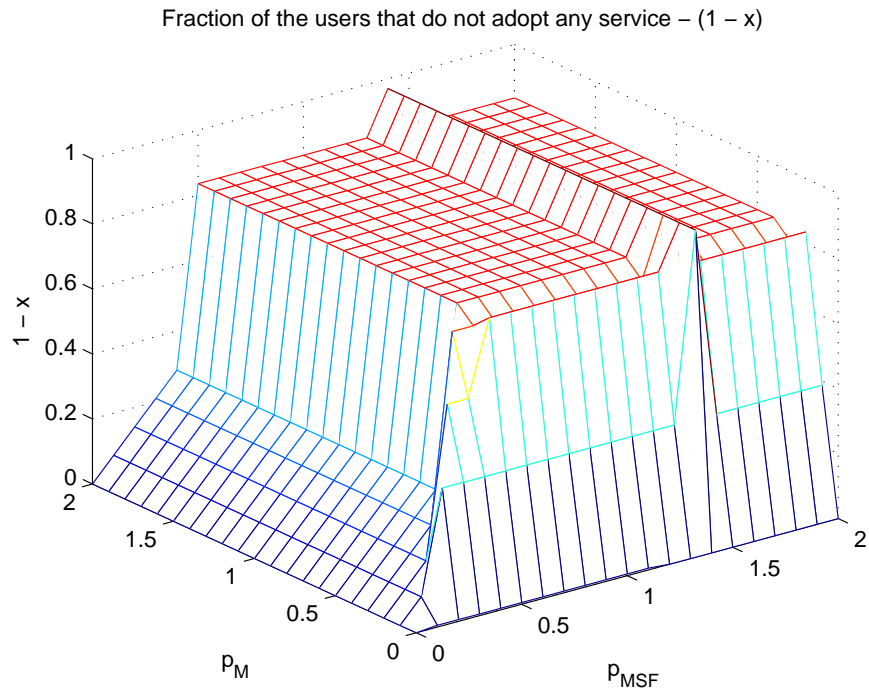


Figura B.9: Fraction of users that do not subscribe to any service ($1 - x$) - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MSF} .

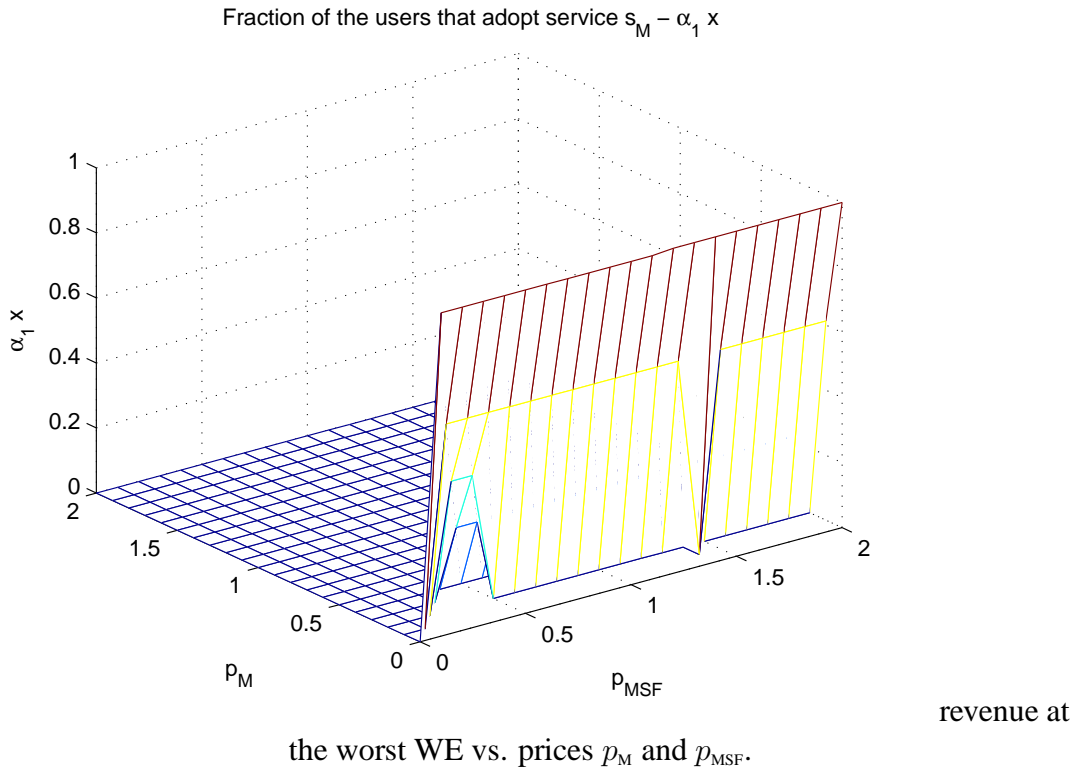


Figure B.10: Fraction of users that subscribe to service s_M : $\alpha_1 x$ - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MSF} .

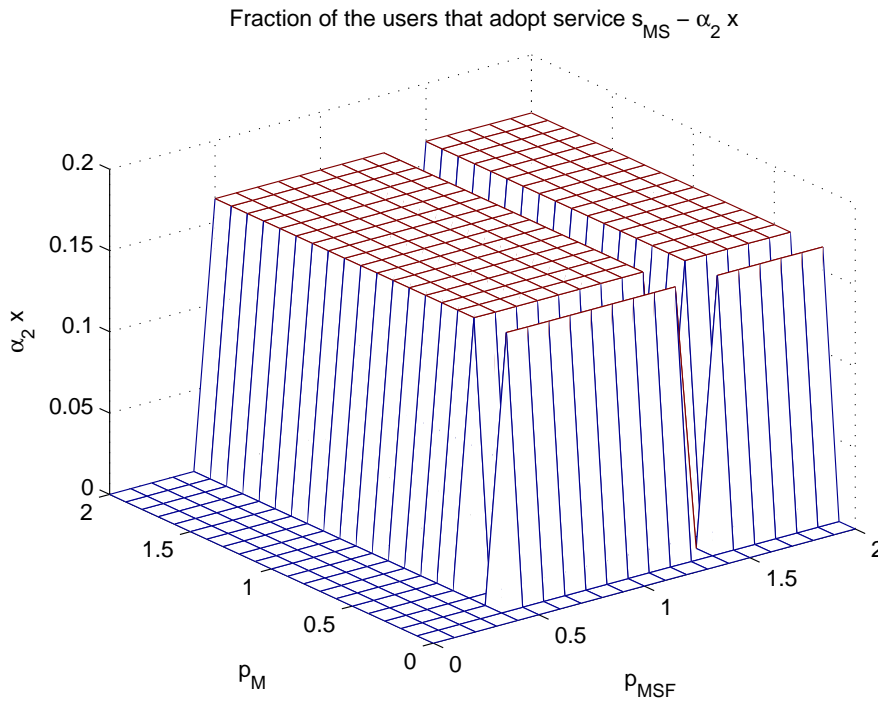


Figure B.11: Fraction of users that subscribe to service s_{MS} : $\alpha_2 x$ - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MSF} .

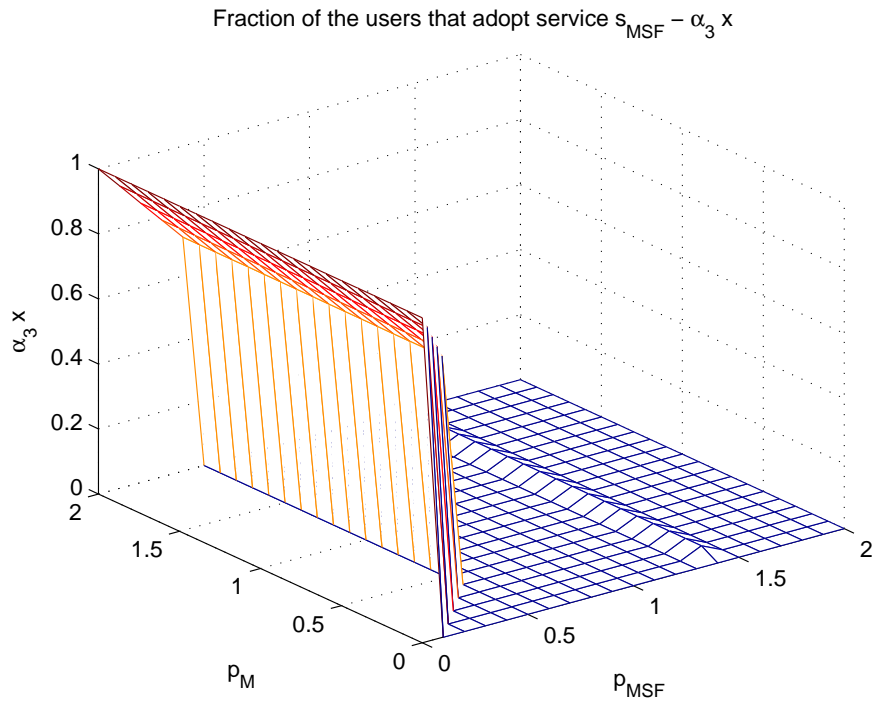


Figura B.12: Fraction of users that subscribe to service s_{MSF} : $\alpha_3 x$ - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_M and p_{MSF} .

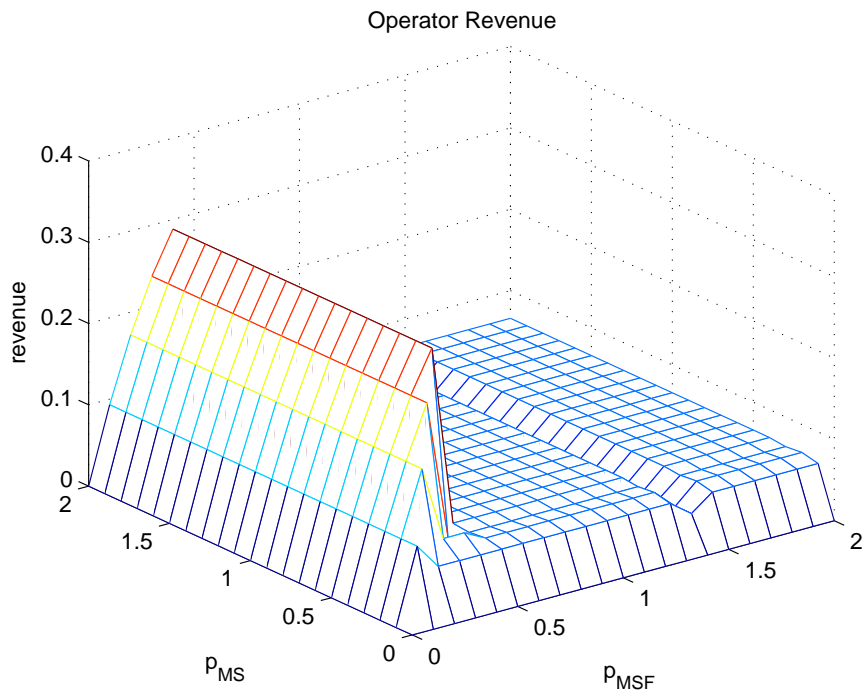


Figura B.13: Operator revenue at the worst WE vs. prices p_{MS} and p_{MSF} .

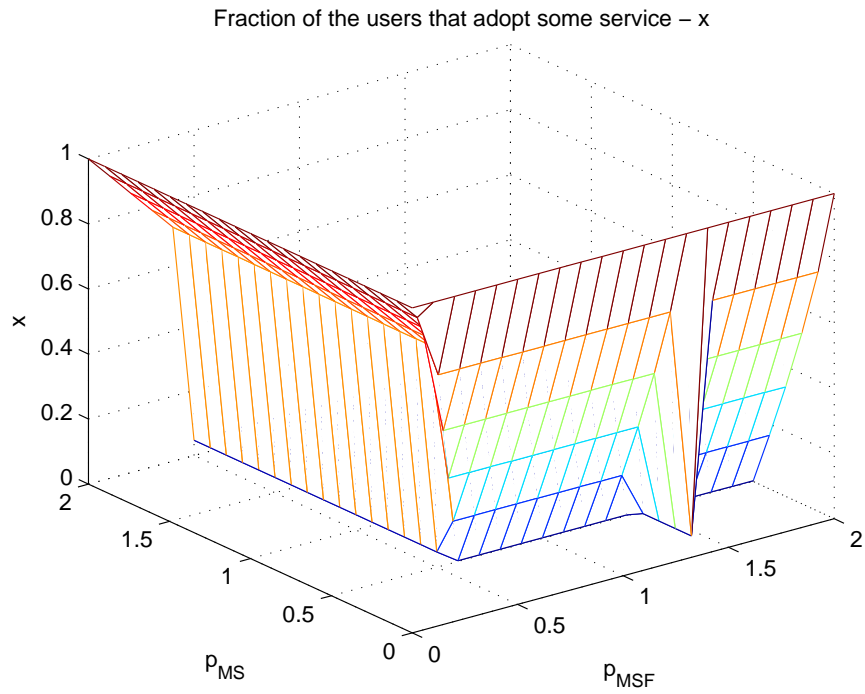


Figura B.14: Fraction of users that subscribe to some service (x) - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_{MS} and p_{MSf} .

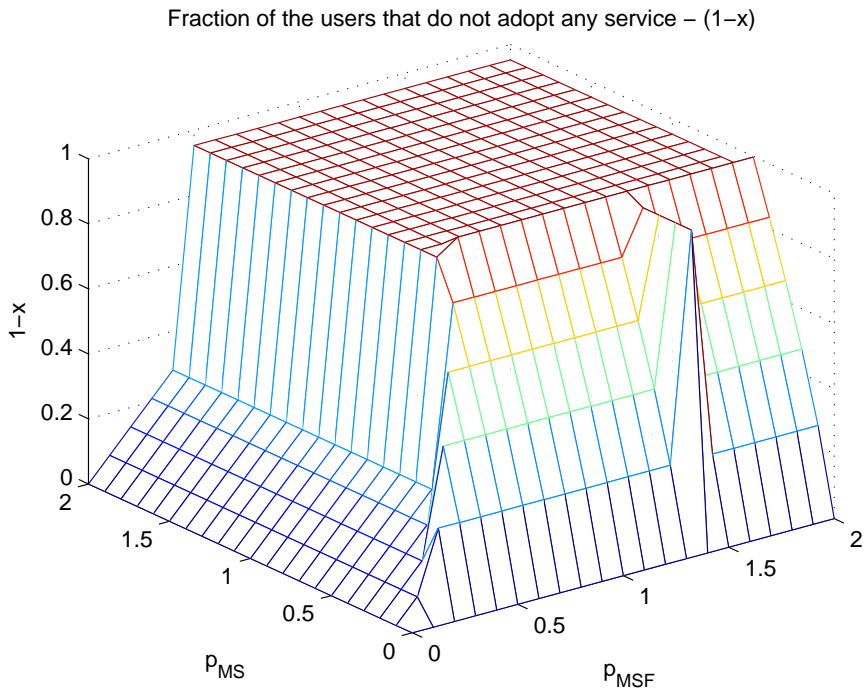


Figura B.15: Fraction of users that do not subscribe to any service ($1 - x$) - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_{MS} and p_{MSf} .

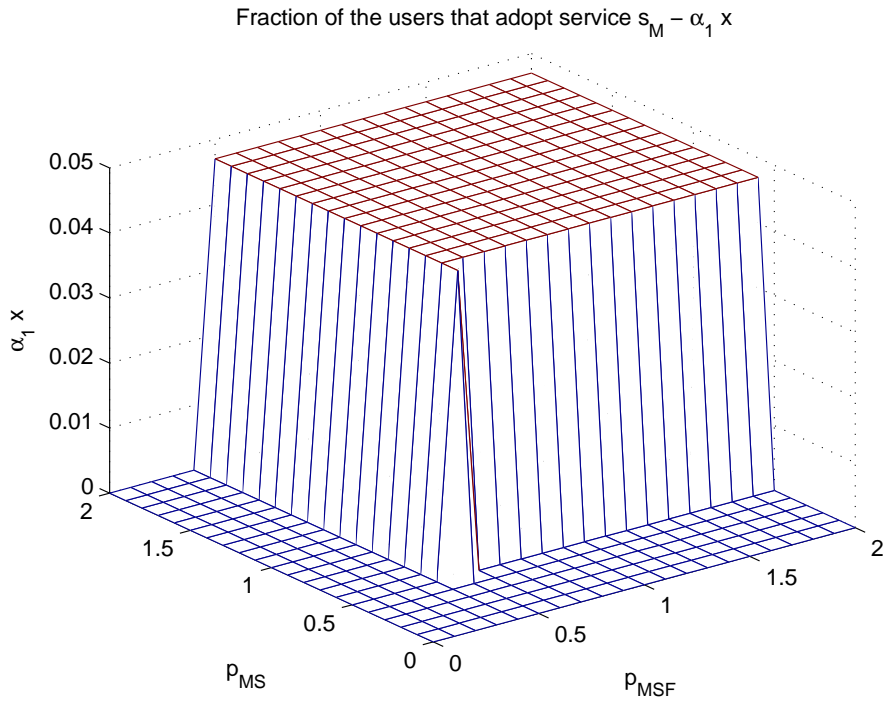


Figura B.16: Fraction of users that subscribe to service s_M : $\alpha_1 x$ - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_{MS} and p_{MSf} .

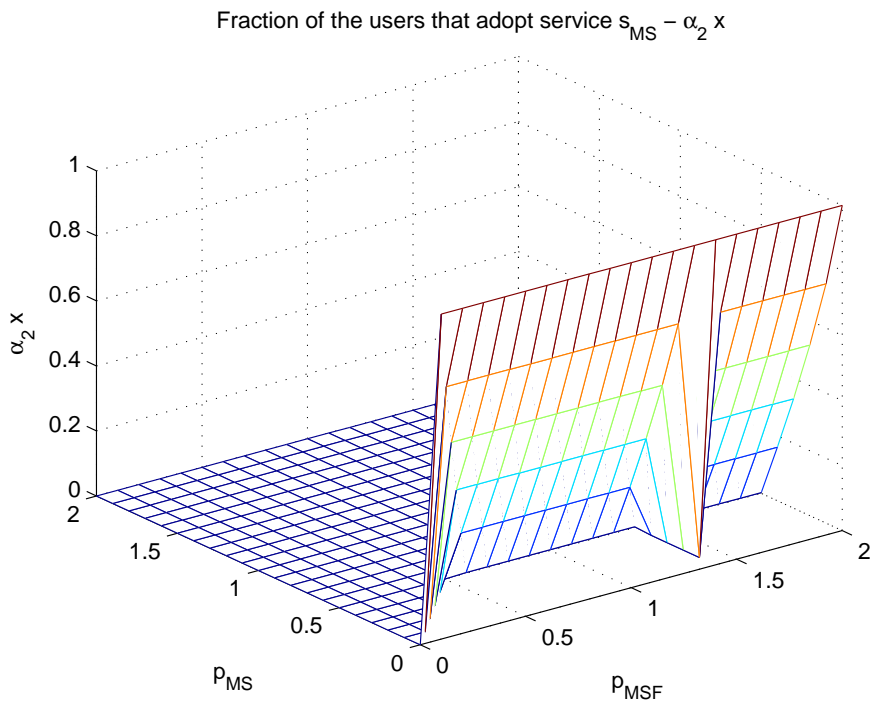


Figura B.17: Fraction of users that subscribe to service s_{SM} : $\alpha_2 x$ - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_{MS} and p_{MSf} .

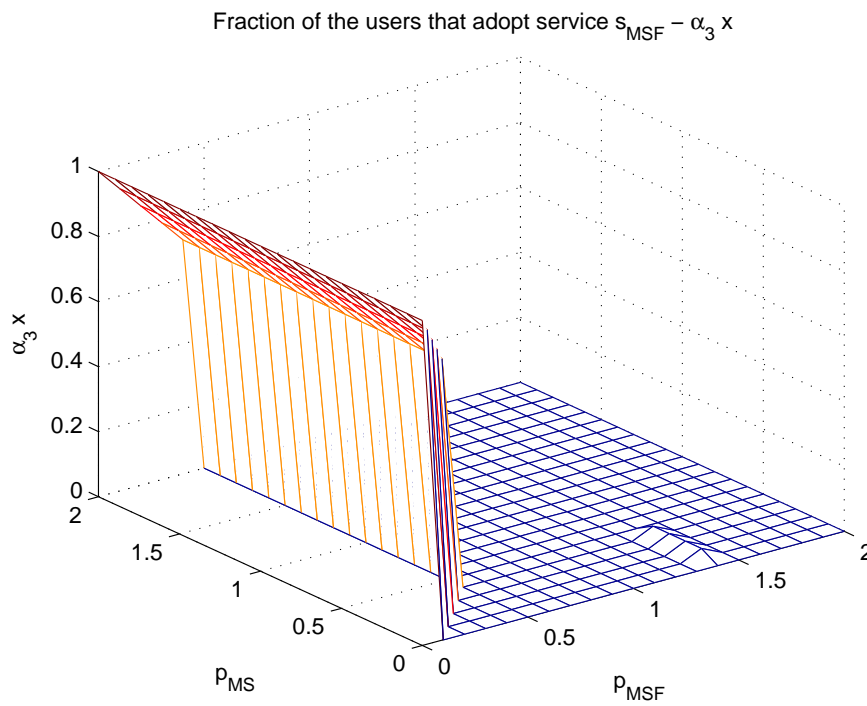


Figura B.18: Fraction of users that subscribe to service s_{MSF} : $\alpha_3 x$ - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. prices p_{MS} and p_{MSF} .

Apêndice C

Joint Pricing and Bandwidth Allocation Problem

In this appendix, we are going to present another extension of the problem described in [7]. In this appendix, the system model is similar as the one presented in Appendix B. The major difference consists in a different bandwidth allocation policy among the technologies: macrocell, smallcells and femtocells.

C.1 Description

The network operator wants to maximize the mean revenue per user. The new optimization problem is

$$\max_{\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}} [p_M \alpha_1^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) x^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) + p_{MS} \alpha_2^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) x^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) + p_{MSF} \alpha_3^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) x^{WE}(\mathbf{p}, \boldsymbol{\beta})]$$

where $\mathbf{p} = (p_M, p_{MS}, p_{MSF})$ and $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{mc}, \beta_{sc}, \beta_{fc})$. Each user wants to maximize his utility; resulting in the following game:

- Set of Users: $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$, $N \rightarrow +\infty$;
- Set of actions: $\mathcal{A} = \{0, M, MS, MSF\}$; where 0, M, MS and MSF means the user subscribes to no service, service s_M , service s_{MS} or service s_{MSF} , respectively;
- Utility function of a user of type γ when connection to service a :

$$U_a^\gamma(\boldsymbol{\alpha}, x, \mathbf{p}, \boldsymbol{\beta}) = \begin{cases} 0, & \text{if } a = 0 \\ \gamma g_M(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) - p_M, & \text{if } a = M \\ \gamma g_{MS}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) - p_{MS}, & \text{if } a = MS \\ \gamma g_{MSF}(\boldsymbol{\alpha}, x, \boldsymbol{\beta}) - p_{MSF}, & \text{if } a = MSF \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

The Wardrop Equilibrium, solution of this game, can be found using the following system of equations:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{WE} = 1 - \Gamma(\hat{\gamma}_m) \\ \hat{\gamma}_m = \frac{p_M}{g_M(\alpha^{WE}, x^{WE}, \beta)} \\ \hat{\gamma}_s = \frac{p_{MS} - p_M}{g_{MS}(\alpha^{WE}, x^{WE}, \beta) - g_M(\alpha^{WE}, x^{WE}, \beta)} \\ \hat{\gamma}_f = \frac{p_{MSF} - p_{MS}}{g_{MSF}(\alpha^{WE}, x^{WE}, \beta) - g_{MS}(\alpha^{WE}, x^{WE}, \beta)} \\ \alpha_1^{WE} = \frac{\Gamma(\hat{\gamma}_s) - \Gamma(\hat{\gamma}_m)}{x^{WE}}, \\ \alpha_2^{WE} = \frac{\Gamma(\hat{\gamma}_f) - \Gamma(\hat{\gamma}_s)}{x^{WE}}, \\ \alpha_3^{WE} = \frac{1 - \Gamma(\hat{\gamma}_f)}{x^{WE}}. \end{array} \right. \quad (C.2)$$

The model of the functions $g_j(\alpha, x, \beta) \forall j \in \{M, MS, MSF\}$ are the same as the ones presented in Section B.4.1.

The total available bandwidth for all the services is W , where $\beta_{fc}W = 0.2W$ are designated for femtocell transmission, $\beta_{mc}W$ for macrocell transmission and $\beta_{sc}W = (0.8 - \beta_{mc})W$ for small-cell transmission. The bandwidth influences in the values of the functions $g_j(\alpha, x) \forall j \in \{M, MS, MSF\}$.

The bandwidth allocated for femtocell transmission is considered fixed.

C.1.1 Numerical Results

The simulation was performed for a range of values of $\beta_{mc} \in \{0.03, 0.08, 0.13 \dots, 0.73\}$, with a step of 0.05. The following scenario was investigated: $\gamma_{max} = 1$, $\tau_{mc} = 0.15$, $\tau_{sc} = 0.25$, $\tau_{fc} = 0.6$, $\frac{R_{sc}}{R_{mc}} = 12.1667$, $\frac{\mathbb{E}[T_b]}{R_{mc}} = 11$.

Once more, it is important to say that the maximum price that the user will pay for some service varies according the bandwidth allocated for the services. These maximum values are given in Tables C.1 and C.2.

Tabela C.1: Maximum price of each service for each value of macrocell bandwidth.

β_{mc}	0.0300	0.0800	0.1300	0.1800	0.2300	0.2800	0.3300	0.3800
p_M^{max}	0.0300	0.0800	0.1300	0.1800	0.2300	0.2800	0.3300	0.3800
p_{MS}^{max}	2.4558	2.3413	2.2267	2.1121	1.9975	1.8829	1.7683	1.6538
p_{MSF}^{max}	9.0378	8.8933	8.7487	8.6041	8.4595	8.3149	8.1703	8.0258

Tabela C.2: Maximum price of each service for each value of macrocell bandwidth.

β_{mc}	0.4300	0.4800	0.5300	0.5800	0.6300	0.6800	0.7300
p_M^{max}	0.4300	0.4800	0.5300	0.5800	0.6300	0.6800	0.7300
p_{MS}^{max}	1.5392	1.4246	1.3100	1.1954	1.0808	0.9663	0.8517
p_{MSF}^{max}	7.8812	7.7366	7.5920	7.4474	7.3028	7.1583	7.0137

First, for $p_M = 0.5$, $p_{MS} = 2.0$ and $p_{MSF} = 4.2$ we calculated the WE points and we chose the ones that provided the worst and the best revenue. Then we varied the value of the macrocell bandwidth (β_{mc}) and the same calculus was performed. The result can be seen in Figure C.1. Note that for $p_M = 0.5$, this service (s_M) is only used if $\beta_{mc} \geq 0.5$; service s_{MS} is used only for $\beta_{mc} \leq 0.2289$ when $p_{MS} = 2.0$ while the user can pay $p_{MSF} = 4.2$ for service s_{MSF} for any bandwidth allocation. It is important to note that at the worst WE point, for $\beta_{mc} \leq 0.18$, the users choose only to connect to service s_{MS} , while at the best WE point, the users choose to connect only to service s_{MSF} . When $0.23 \leq \beta_{mc} \leq 0.48$, the WE point is unique and corresponds to the users choosing service s_{MSF} . Also, when $\beta_{mc} \geq 0.53$, at the worst WE users choose service s_M while at the best WE they choose service s_{MSF} . The multiplicity of the WE explains here also the discontinuities in the graphs.

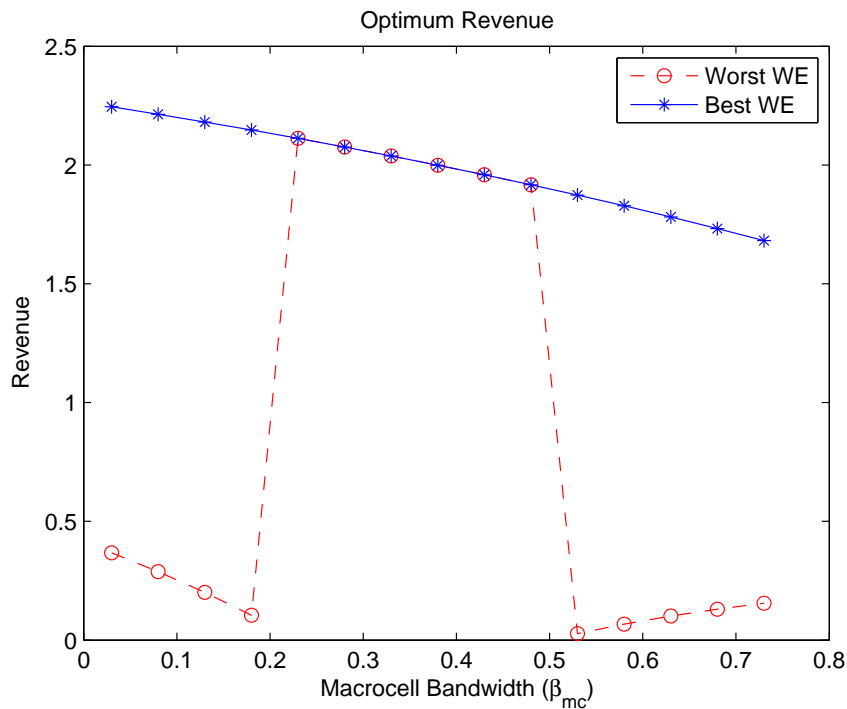


Figura C.1: Operator revenue at the worst WE vs. macrocell bandwidth β_{mc} and at the best WE vs. macrocell bandwidth β_{mc} .

Another type of simulation was performed: for each value of β_{mc} , all the combination of the prices of services s_M , s_{MS} and s_{MSF} were considered (range of prices: $p_M \in \{0, 0.1, 0.2, \dots, 1\}$, $p_{MS} \in \{0, 0.2, 0.4, \dots, 3\}$ and $p_{MSF} \in \{0, 0.2, 0.4, \dots, 9\}$). If for a certain combination of the prices (and for a fixed value of the bandwidth) there exist more than one Wardrop Equilibrium, the chosen point is the one that provides the minimum revenue (worst case scenario). After computing the revenues for all possible combination of prices and bandwidths, the values of p_M, p_{MS}, p_{MSF} that provide the maximum revenue for a given bandwidth allocation policy are considered in Figures C.2, C.3,

C.4, C.5 and C.6.

In Figure C.2, we plot the maximum revenue as a function of macrocell bandwidth (β_{mc}). The operator revenue is calculated in the following manner: first, for each combination of p_M, p_{MS}, p_{MSF} and for a fixed bandwidth we select the WE points that yields the worst and the best revenue; next, we select among the previous result the maximum revenue (for each case) and the corresponding values of $x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, p_M, p_{MS}, p_{MSF}$. As we can note, the revenue for both cases decreases when the macrocell bandwidth is increased. This occurs because we considered that the user will have a higher throughput when connected to small-cells than macrocells (hypothesis $\mathbb{E}[T_m] < \mathbb{E}[T_s] < \mathbb{E}[T_b]$); the throughput is proportional to the allocated bandwidth (β_{mc}, β_{sc}) and the parameter $\frac{R_{sc}}{R_{mc}} = 12.1667$ is always fixed, resulting in the fact that the user can pay more for a service with a higher quality.

In Figure C.3, the fraction of users that subscribe to some service is illustrated, where the points correspond to the ones that yields the maximum of the worst revenues (the ones that originated Figure C.2). In this case, the only service that is used is the mobile-plus-smallcell-plus-femtocell service s_{MSF} .

In Figures C.4, C.5 and C.6 it is plotted the prices that generate the optimum revenue (the points correspond to the ones in Figure C.2 that yield the maximum of the worst revenues). It is important to see also from Tables C.1 and C.2 that the prices of services s_M and s_{MS} are always higher than the ones that the user would pay, meaning that the only service that is used is s_{MSF} . It is interesting to note that the higher the bandwidth allocated for macrocell the higher the optimum price of service s_M (Figure C.4). The intuition is that if you allocate more bandwidth for macrocell, then the rate is increased and the user can pay more for this service. The same observation can be done with respect to the bandwidth allocated for small-cells transmission in Figure C.5. The “ladder” aspect of the graphs may be caused by the low resolution in our exhaustive search for the optimal prices. A higher resolution causes the time of the simulation to grow exponentially.

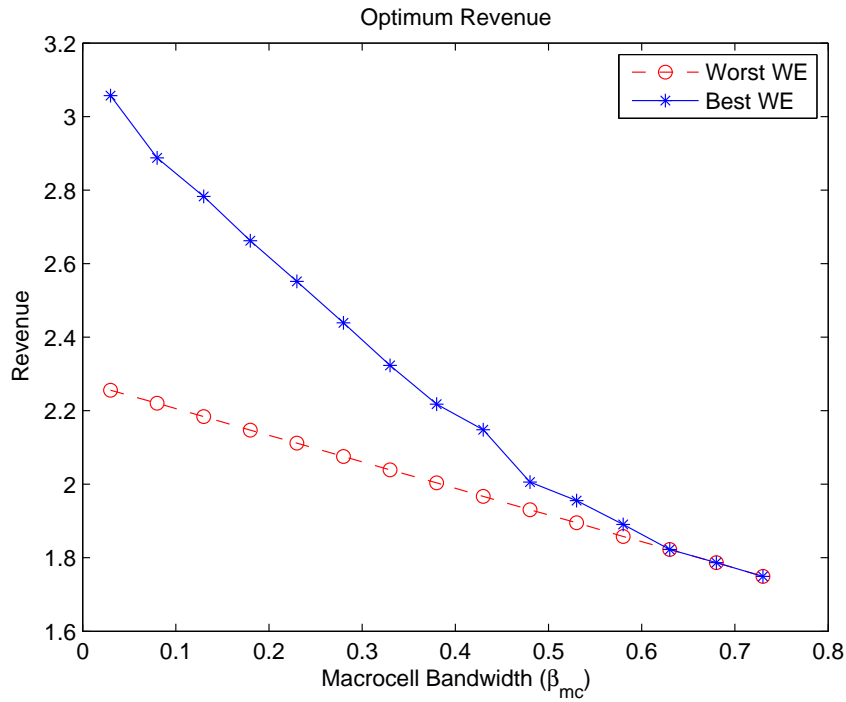


Figura C.2: Operator revenue at the maximum over the worst WE vs. macrocell bandwidth β_{mc} and at the maximum over the best WE vs. macrocell bandwidth β_{mc} .

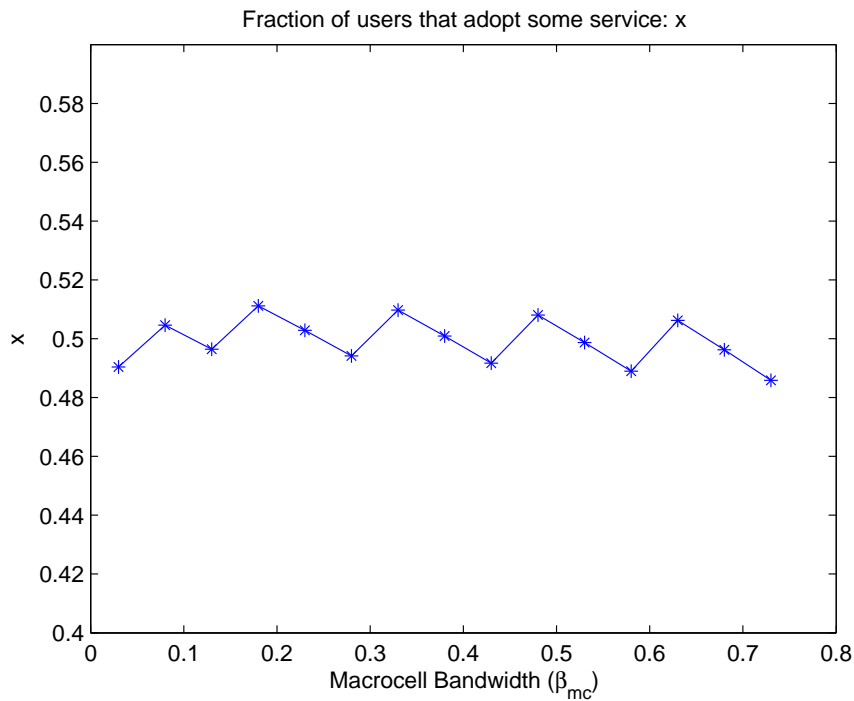


Figura C.3: Fraction of users that subscribe to some service x - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. macrocell bandwidth β_{mc} .

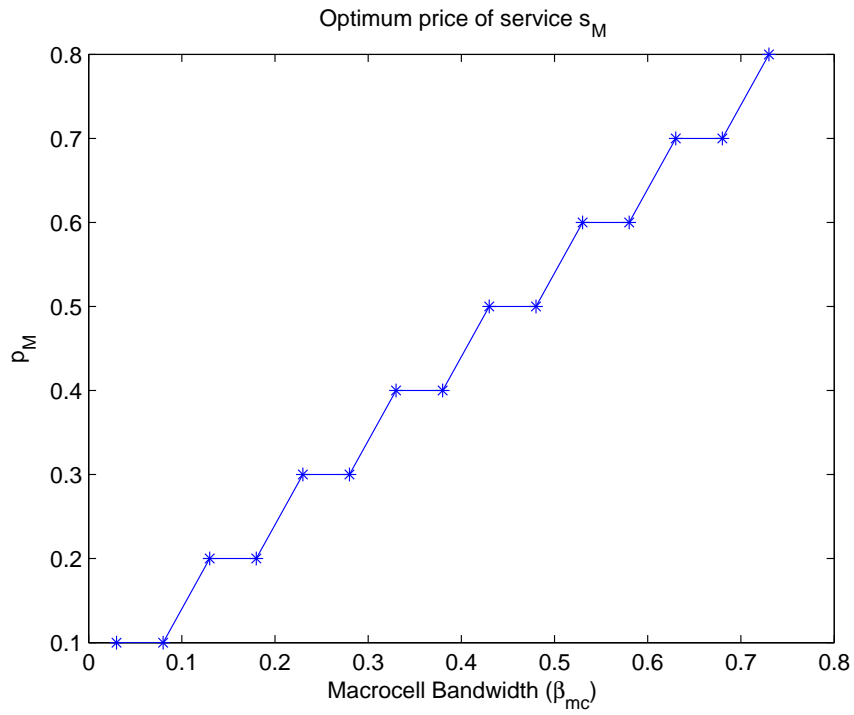


Figura C.4: Price of service s_M - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. macrocell bandwidth β_{mc} .

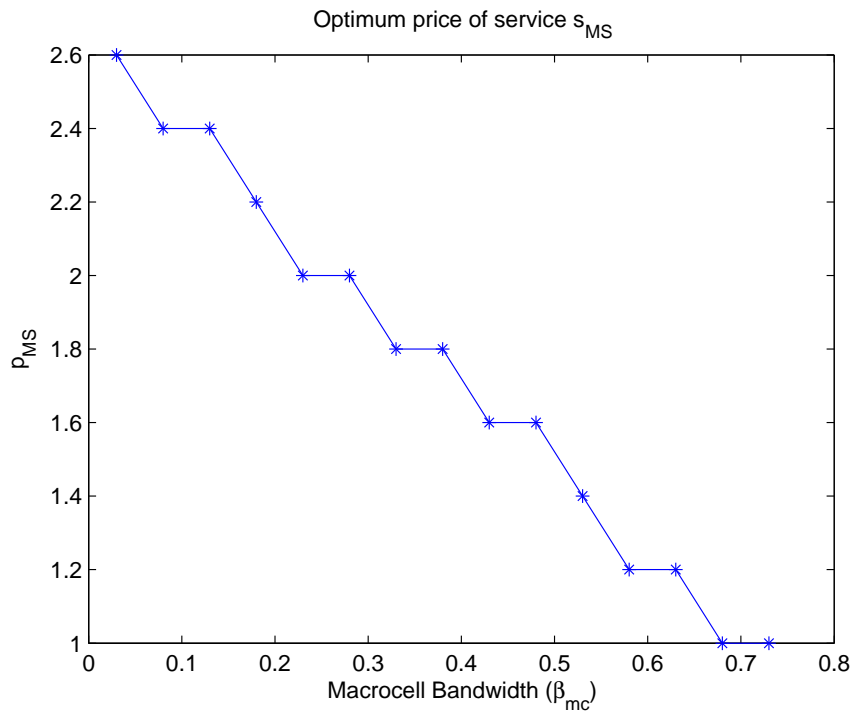


Figura C.5: Price of service s_{MS} - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. macrocell bandwidth β_{mc} .

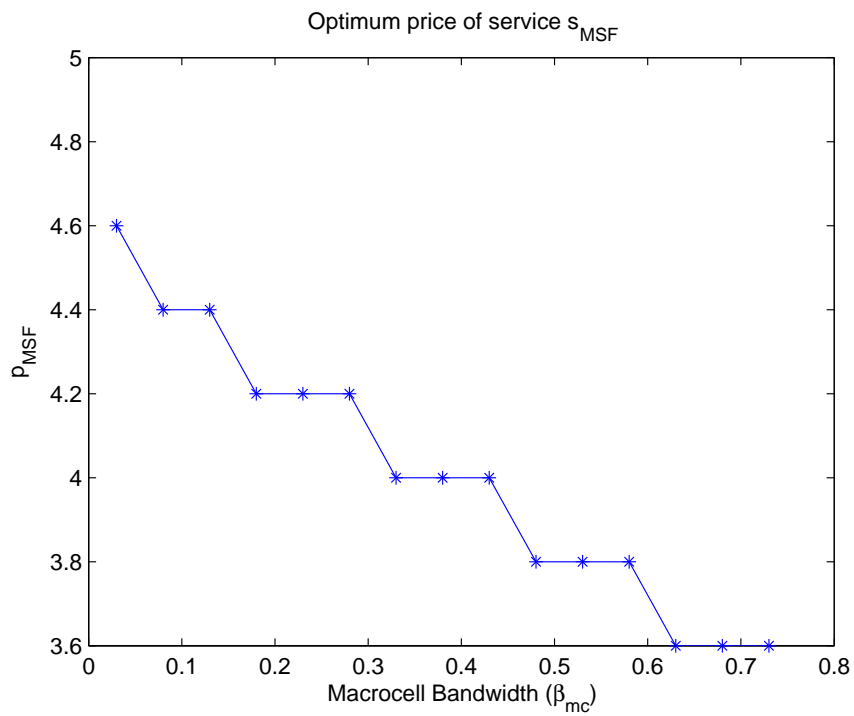


Figura C.6: Price of service s_{MSF} - points that correspond to the operator revenue at the worst WE vs. macrocell bandwidth β_{mc} .