



## CONTROLADOR ADAPTATIVO BINÁRIO DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

Ivanko Yannick Yanque Tomasevich

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadores: Liu Hsu

Eduardo Vieira Leão Nunes

Rio de Janeiro

Junho de 2012

# CONTROLADOR ADAPTATIVO BINÁRIO DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

Ivanko Yannick Yanque Tomasevich

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

---

Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat

---

Prof. Eduardo Vieira Leão Nunes, D.Sc.

---

Prof. Aldayr Dantas de Araújo, D.Sc.

---

Prof. Amit Bhaya, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JUNHO DE 2012

Yanque Tomasevich, Ivanko Yannick

Controlador Adaptativo Binário de Sistemas  
Multivariáveis/Ivanko Yannick Yanque Tomasevich.

– Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

XII, 98 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Liu Hsu

Eduardo Vieira Leão Nunes

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de  
Engenharia Elétrica, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 68 – 80.

1. Controle Adaptativo. 2. Modelo de Referência. 3.  
Sistemas Multivariáveis. 4. Passivação do Sistemas. I.  
Hsu, Liu *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro,  
COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*A mis padres Justo y Liliana, y  
a mi hermano Mirko, con mucho  
afecto y gratitud.*

# Agradecimentos

Agradeço aos meus orientadores, os Professores Liu Hsu e Eduardo Vieira Leão Nunes. Foi uma honra ser um dos muitos orientandos do primeiro e o primeiro orientando do segundo. A dedicação, generosidade, paciência e confiança deles tornou possível o desenvolvimento desta dissertação.

Aos professores Afonso Celso del Nero Gomes, Amit Bhaya, João Carlos dos Santos Basílio, Glauco Nery Taranto e Ramon Romankevicius Costa, pelos ricos ensinamentos nas aulas, que foram tão importantes no desenvolvimento da minha pesquisa.

Aos companheiros do LabCon, Ignacio Ricart, Andrei Battistel, Douglas Dotto de Oliveira, Nelson de Azevedo Barbosa, Nerito Oliveira Aminde, Luciano Menezes Freixo, Alexandre Seixas Soares, Evandro Luiz da Costa, Roberto Calvet, Josiel Alves Gouvêa e especialmente ao Antonio “Dr. Toni” Candea Leite, pela amizade, conversas, piadas e por criar um ambiente agradável no laboratório.

Aos membros da banca Prof. Amit Bhaya e Prof. Aldayr Dantas de Araújo, pelas valiosas sugestões e comentários.

Aos amigos Jerver Mañuico, Renso Benites e Juan Jose Uchuya, com quem dividi apartamento e gratos momentos. Aos amigos do futebol aos sábados com quem desfrutei de jogar e assistir tantos jogos.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro e à COPPE pela oportunidade de realizar o mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## CONTROLADOR ADAPTATIVO BINÁRIO DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

Ivanko Yannick Yanque Tomasevich

Junho/2012

Orientadores: Liu Hsu

Eduardo Vieira Leão Nunes

Programa: Engenharia Elétrica

O Controle Adaptativo por Modelo de Referência Binário (B-MRAC), proposto originalmente para sistemas SISO, é capaz de preservar as propriedades mais desejáveis de sistemas de controle por modos deslizantes, com a vantagem de possuir um sinal de controle contínuo. Nesta dissertação, uma extensão deste controlador para plantas MIMO com grau relativo uniforme e unitário é proposta.

Para ampliar a abrangência da aplicabilidade do controlador proposto um multiplicador passivador é projetado de forma que uma condição de passividade generalizada chamada WSPR seja obtida. Esta condição possibilita que o controlador possa ser aplicado mesmo que a matriz de ganho de alta frequência do sistema não seja simétrica, garantindo que o esquema de controle proposto possua estabilidade global e convergência do erro de rastreamento para zero. Também, mostra-se que o controlador B-MRAC tende a se comportar como um controlador vetorial unitário à medida que o ganho de adaptação tende para infinito. Os benefícios do multiplicador passivador podem ser verificados nesta transição do controle adaptativo para o controle por modos deslizantes. Nesta dissertação, também são apresentados resultados de simulação para verificar os resultados teóricos obtidos e ilustrar o desempenho do controlador proposto.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## BINARY ADAPTIVE CONTROLLER FOR MULTIVARIABLE SYSTEMS

Ivanko Yannick Yanque Tomasevich

June/2012

Advisors: Liu Hsu

Eduardo Vieira Leão Nunes

Department: Electrical Engineering

The Binary Model Reference Adaptive Control (B-MRAC), proposed originally for SISO systems, is capable of preserving the most desirable properties of sliding modes control systems, with the advantage of having a continuous control signal. In this work, an extension of this controller for MIMO plants with uniform relative degree one is proposed.

In order to broaden the applicability of the proposed controller a passifying multiplier is designed so that a generalized passivity condition called WASPR is achieved. This condition allows the controller to be applicable even if the system high frequency gain matrix is not symmetric so that the proposed control scheme is globally stable and guaranteed convergence of the tracking error to zero. Moreover, the B-MRAC is shown to tend to the unit vector control as the adaptation gain increases to infinity. The benefits of the passifying multiplier can be assessed in this smooth transition from adaptive to sliding mode control. Simulation results are also presented so as to illustrate the theoretical findings and the enhanced performance of the proposed controller.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Breve histórico do Controle Adaptativo . . . . .	1
1.2 Importância do ganho de alta frequência . . . . .	3
1.2.1 Projeto com a abordagem SPR-Lyapunov, caso SISO . . . . .	5
1.2.2 Projeto com a abordagem SPR-Lyapunov, caso MIMO . . . . .	7
1.3 Controle adaptativo para sistemas MIMO . . . . .	8
1.3.1 Fatoração do ganho de alta frequência . . . . .	9
1.3.2 Extensão do conceito de Passividade . . . . .	12
1.4 Organização da Dissertação . . . . .	12
<b>2 Sistemas Multivariáveis</b>	<b>14</b>
2.1 Representação matemática de um sistema . . . . .	14
2.2 Pólos e Zeros de uma Matriz de Função de Transferência . . . . .	14
2.2.1 Forma de Smith MacMillan . . . . .	16
2.2.2 Descrição por frações matriciais . . . . .	18
2.2.3 Matriz de Rosenbrock . . . . .	21
2.3 Matriz interactor . . . . .	22
2.4 Controlabilidade e Observabilidade . . . . .	23
<b>3 Passivação de Sistemas MIMO</b>	<b>24</b>
3.1 Passividade . . . . .	24
3.1.1 Positividade e Passividade de sistemas lineares . . . . .	25
3.1.2 Lema de Kalman-Yakubovich . . . . .	26
3.1.3 Realimentação de saída . . . . .	26
3.2 Mitigação da condição de simetria . . . . .	28
<b>4 Controladores Adaptativos por Modelo de Referência</b>	<b>32</b>
4.1 Definição do problema MIMO . . . . .	33
4.2 Aplicação da passivação no MRAC MIMO . . . . .	37
4.3 Controle Adaptativo por Estrutura Variável . . . . .	38



4.4	Método do fator de modificação $\sigma$ . . . . .	39
4.4.1	Método da Modificação- $\sigma$ Fixo . . . . .	39
4.4.2	Método da Modificação- $\sigma$ Descontínuo . . . . .	40
4.5	Controle Adaptativo por Modelo de Referência Binário . . . . .	40
4.5.1	B-MRAC SISO . . . . .	42
4.5.2	B-MRAC MIMO . . . . .	42
4.5.3	Conexão entre o B-MRAC e o Controle Vetorial Unitário . . . . .	43
4.5.4	Análise de estabilidade do controlador B-MRAC . . . . .	44
4.6	Aplicação do Controle Adaptativo B-MRAC . . . . .	48
4.6.1	Exemplo de Projeto 1: Problema do Rastreamento Visual . . . . .	48
4.6.2	Exemplo de Projeto 2: Problema de uma planta MIMO . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>66</b>
5.1	Conclusões gerais . . . . .	66
5.2	Propostas para Trabalhos futuros . . . . .	67
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>68</b>
<b>A</b>	<b>Conceitos Básicos</b>	<b>81</b>
A.1	Traço, Função Vec e Produto de Kronecker . . . . .	81
A.2	Lema de Barbalat . . . . .	82
<b>B</b>	<b>Definições complementares</b>	<b>83</b>
<b>C</b>	<b>Prova alternativa de estabilidade B-MRAC</b>	<b>85</b>
<b>D</b>	<b>Parâmetros de adaptação ideais</b>	<b>88</b>
D.1	Equação do casamento ideal do MRC . . . . .	88
D.2	Parâmetros ideais do caso MRAC SISO . . . . .	89
D.2.1	Definição do problema SISO . . . . .	89
D.2.2	Exemplos de cálculo de parâmetros ideais de sistemas SISO . . . . .	90
D.3	Parâmetros ideais do caso MRAC MIMO . . . . .	93
D.3.1	Exemplos de cálculo de parâmetros ideais de sistemas MIMO . . . . .	93

# Lista de Figuras

1.1	MRAC para uma planta de primeira ordem. . . . .	3
3.1	Esquema de realimentação de saída. . . . .	27
3.2	Sistema WSPR. . . . .	29
3.3	Sistema WASPR. . . . .	30
4.1	Estrutura do controle adaptativo por modelo de referência (MRAC). . . . .	32
4.2	Resultado da ação da projeção da lei do gradiente contrária ao sentido de $\theta$ . . . . .	41
4.3	Representação esquemática do sistema câmara-robô. . . . .	48
4.4	Problema de rastreamento visual adaptativo. . . . .	49
4.5	Controle MRAC sem passivação e $\gamma = 5$ : (a) Erros de rastreamento $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta $u$ ; (c) Parâmetros adaptados $\Theta$ . . . . .	52
4.6	Controle MRAC com passivação e $\gamma = 5$ : (a) Erros de rastreamento $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta $u$ ; (c) Parâmetros adaptados $\Theta$ . . . . .	52
4.7	Controle B-MRAC sem passivação e $\gamma = 5$ : (a) Erros de rastreamento $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta $u$ ; (c) Parâmetros adaptados $\Theta$ . . . . .	53
4.8	Controle B-MRAC com passivação e $\gamma = 5$ : (a) Erros de rastreamento $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta $u$ ; (c) Parâmetros adaptados $\Theta$ . . . . .	54
4.9	Controle B-MRAC com passivação e $\gamma = 20$ : (a) Erros de rastreamento $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta $u$ ; (c) Parâmetros adaptados $\Theta$ . . . . .	54
4.10	Controle B-MRAC com passivação e $\gamma = 20$ (escala de tempo ate convergência de parâmetros): (a) Erros de rastreamento $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta $u$ ; (c) Parâmetros adaptados $\Theta$ . . . . .	55
4.11	Controle UVC sem passivação: (a) Erros de rastreamento $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta $u$ . . . . .	56

4.12	Controle B-MRAC sem passivação e $\gamma = 100$ : (a) Erros de rastreamento $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta $u$ ; (c) Parâmetros adaptados $\Theta$ . . . . .	56
4.13	Controle B-MRAC com passivação e $\gamma = 100$ : (a) Erros de rastreamento $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta $u$ ; (c) Parâmetros adaptados $\Theta$ . . . . .	57
4.14	Controle B-MRAC com passivação e $\gamma = 100$ (escala de tempo ate convergência de parâmetros): (a) Erros de rastreamento $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta $u$ ; (c) Parâmetros adaptados $\Theta$ . . . . .	57
4.15	Erros de rastreamento com $\omega = r(t)$ : (a) MRAC sem passivação; (b) B-MRAC sem passivação; (c) MRAC com passivação; (d) B-MRAC com Passivação. . . . .	58
4.16	Rastreamento visual com MRAC sem passivação e $\gamma = 0.1$ : (a) Erros de rastreamento com $\omega = r(t) - x_c$ ; (b) Sinais de controle da planta $\omega = r(t) - x_c$ ; (c) Erros de rastreamento com $\omega = r(t)$ ; (d) Sinais de controle da planta $\omega = r(t)$ . . . . .	58
4.17	Controle MRAC sem passivação e $\gamma = 10$ : (a) Erros de rastreamento ( $e_L$ ); (b) Norma do vetor de parâmetros modificado $\ \vartheta\ $ . . . .	62
4.18	Parâmetros de adaptação do MRAC sem passivação e $\gamma = 10$ : (a) $\tilde{\Theta}_u = \Theta_u - \Theta_u^*$ ; (b) $\tilde{\Theta}_y = \Theta_y - \Theta_y^*$ ; (c) $\tilde{\Theta}_0 = \Theta_0 - \Theta_0^*$ ; (d) $\tilde{K}_\Theta = K_\Theta - K_\Theta^*$ . . . . .	62
4.19	Controle MRAC com passivação e $\gamma = 10$ : (a) Erros de rastreamento ( $e_L$ ); (b) Norma do vetor de parâmetros modificado $\ \vartheta\ $ . . . .	63
4.20	Parâmetros de adaptação do MRAC com passivação e $\gamma = 10$ : (a) $\tilde{\Theta}_u = \Theta_u - \Theta_u^*$ ; (b) $\tilde{\Theta}_y = \Theta_y - \Theta_y^*$ ; (c) $\tilde{\Theta}_0 = \Theta_0 - \Theta_0^*$ ; (d) $\tilde{K}_\Theta = K_\Theta - K_\Theta^*$ . . . . .	63
4.21	Controle B-MRAC com passivação e $\gamma = 10$ : (a) Erros de rastreamento ( $e_L$ ); (b) Norma do vetor de parâmetros modificado $\ \vartheta\ $ . . . .	64
4.22	Parâmetros de adaptação do B-MRAC com passivação e $\gamma = 10$ : (a) $\tilde{\Theta}_u = \Theta_u - \Theta_u^*$ ; (b) $\tilde{\Theta}_y = \Theta_y - \Theta_y^*$ ; (c) $\tilde{\Theta}_0 = \Theta_0 - \Theta_0^*$ ; (d) $\tilde{K}_\Theta = K_\Theta - K_\Theta^*$ . . . . .	64
4.23	Controle B-MRAC com passivação e $\gamma = 100$ : (a) Erros de rastreamento ( $e_L$ ); (b) Norma do vetor de parâmetros modificado $\ \vartheta\ $ . . . .	65
4.24	Parâmetros de adaptação do B-MRAC com passivação e $\gamma = 100$ : (a) $\tilde{\Theta}_u = \Theta_u - \Theta_u^*$ ; (b) $\tilde{\Theta}_y = \Theta_y - \Theta_y^*$ ; (c) $\tilde{\Theta}_0 = \Theta_0 - \Theta_0^*$ ; (d) $\tilde{K}_\Theta = K_\Theta - K_\Theta^*$ . . . . .	65
D.1	Rotina para o problema SISO de uma planta de dois pólos. . . . .	91
D.2	Rotina para o problema SISO de uma planta de três pólos. . . . .	92
D.3	Rotina do primeiro problema MIMO. . . . .	95
D.4	Rotina do segundo problema MIMO. . . . .	98

# Abreviaturas

<b>SISO:</b>	Uma entrada e uma saída - Monovariável <i>(Single-input-single-output)</i>
<b>MIMO:</b>	Múltiplas entradas e múltiplas saídas - Multivariável <i>(Multiple-input-multiple-output)</i>
<b>PR</b>	Real Positivo <i>(Positive Real)</i>
<b>PDJ</b>	Forma de Jordan diagonal com autovalores reais e positivos <i>(Positive real Diagonal Jordan form)</i>
<b>PDS</b>	Positiva Definida Simétrica <i>(Positive Definite Symmetric)</i>
<b>SPR</b>	Estritamente Real Positivo <i>(Strictly Positive Real)</i>
<b>WSPR</b>	W-Estritamente Real Positivo <i>(W-Strictly Positive Real)</i>
<b>MRC</b>	Controle por Modelo de Referência <i>(Model Reference Control)</i>
<b>MRAC</b>	Controle Adaptativo por Modelo de Referência <i>(Model Reference Adaptive Control)</i>
<b>SMC</b>	Controle por Modos Deslizantes <i>(Sliding Mode Control)</i>
<b>VSC</b>	Controle a Estrutura Variável <i>(Variable Structure Control)</i>
<b>VS-MRAC</b>	Controle Adaptativo por Modelo de Referência a Estrutura Variável <i>(Variable Structure MRAC)</i>
<b>UVC</b>	Controle Vetorial Unitário <i>(Unit Vector Control)</i>
<b>LTI</b>	Linear Invariante no Tempo <i>(Linear Time Invariant)</i>
<b>HFG</b>	Ganho de Alta Frequência <i>(High Frequency Gain)</i>

# Capítulo 1

## Introdução

Nesta dissertação, é proposta uma extensão para sistemas MIMO da estratégia de controle adaptativo por modelo de referência binário (B-MRAC), originalmente proposta em [1, 2] para sistemas SISO.

O B-MRAC consiste na lei do gradiente convencional do controle adaptativo por modelo de referência (MRAC) modificada pela projeção de parâmetros combinada com um ganho de adaptação suficientemente alto.

Esta estratégia permite atenuar os problemas de falta de robustez e transitório de adaptação insatisfatório que o MRAC apresenta, por meio da projeção de parâmetros combinada com um ganho de adaptação suficientemente alto, obtendo um controlador robusto com bom comportamento transitório.

### 1.1 Breve histórico do Controle Adaptativo

O seguinte histórico é uma síntese dos históricos apresentados nos livros de Narendra e Annaswamy [3], Astrom e Wittenmark [4], Ioannou e Sun [5] e Ioannou e Fidan [6].

O termo de controle adaptativo, foi formalmente introduzido na literatura de controle em 1957 por Drenick e Shahbender [7] como sistemas de controle que monitoram seu próprio desempenho ajustando seus parâmetros para melhorá-lo, e podem ser aplicados a sistemas incertos ou aqueles cujas características podem variar por diversos motivos [3].

A motivação inicial para a pesquisa em controle adaptativo foi o problema de projetar pilotos automáticos para aeronaves de alto-rendimento. As aeronaves operam em um intervalo vasto de velocidade e altitude, não sendo possível controlá-las utilizando apenas um controlador com ganhos constantes [5].

A estratégia de Controle Adaptativo por Modelo de Referência (MRAC) foi sugerida em 1958 por Whitaker et al em [8] e [9]. Os métodos de Sensibilidade [10–12] e a Regra do MIT foram usados para projetar estimadores em tempo real ou leis

de adaptação de varias estratégias de controle adaptativo. A alocação adaptativa de pólos baseada no problema linear quadrático ótimo foi sugerida por Kalman em [13]. Mas a falta de provas de estabilidade e de compreensão das propriedades das estratégias adaptativas propostas, e a queda de uma aeronave, levaram à perda de interesse na pesquisa em controle adaptativo [6].

Na década de 1960 foram introduzidas as técnicas de espaço de estado e a teoria de estabilidade de Lyapunov. O desenvolvimento de técnicas como Programação Dinâmica em [14, 15], Controle Dual [16], Identificação de Sistemas e Estimação de Parâmetros foram importantes para reformular o Controle Adaptativo. Em 1966, Parks [17] e outros reprojeteram as leis de adaptação das estratégias MRAC obtidas pela Regra do MIT em 1950 aplicando o enfoque de projeto de Lyapunov. Aqueles trabalhos mostraram a importância de provas de estabilidade rigorosas para classes mais gerais de modelos, melhoraram o entendimento e contribuíram para fortalecer o interesse nesta área. Estes avanços possibilitaram o desenvolvimento de estratégias para classes de sistemas mais amplas com propriedades de estabilidade bem estabelecidas.

Mas em 1979, Egardt [18] mostrou que as estratégias adaptativas propostas nos anos 70 tornavam-se instáveis na presença de pequenos distúrbios. Ioannou [19, 20] e Rohrs [21] publicaram mais exemplos de falta de robustez na presença de dinâmicas não modeladas e distúrbios, o que estimulou os pesquisadores a entender os mecanismos de instabilidade e procurar formas para superá-los [6].

Estes trabalhos motivaram o interesse na pesquisa em Controle Adaptativo Robusto. Foram propostas modificações e novas estratégias com o objetivo de assegurar que os sinais em malha fechada sejam limitados na presença de classes de dinâmicas não modeladas e distúrbios limitados.

O uso de um sinal normalizador junto com a modificação de chaveamento  $\sigma$  permitiu provar estabilidade global na presença de dinâmicas não modeladas para plantas de tempo contínuo em [22].

O desenvolvimento do controle adaptativo para sistemas multivariáveis é um problema bastante desafiador. Em [23], foi introduzido o conceito de matriz interactor como um meio natural de estender a noção de grau relativo dos sistemas escalares para os sistemas MIMO. A matriz de ganho de alta frequência surge naturalmente da definição da matriz interactor como o análogo do ganho de alta frequência dos sistemas SISO [5].

A matriz de ganho de alta frequência tem um papel muito relevante para o desenvolvimento de controladores adaptativos para o caso MIMO. Desta forma, para motivar a importância desta matriz uma breve discussão é apresentada a seguir.

## 1.2 Importância do ganho de alta frequência

Nesta seção, a importância do ganho de alta frequência nos sistemas de controle adaptativo por modelo de referência será ilustrada. Para esta finalidade, considera-se um exemplo de rastreamento adaptativo de um sistema SISO.

Considere a planta de primeira ordem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax + k_p u, \\ y &= x,\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde  $a$  e  $k_p$  são desconhecidos, e o sinal de  $k_p$  é conhecido. O objetivo de controle é achar um sinal  $u$  tal que o estado  $x$  da planta rastreie o estado do modelo de referência  $x_m$  dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= -a_m x_m + b_m r, \\ y_m &= x_m,\end{aligned}\tag{1.2}$$

onde  $a_m > 0$  e  $b_m$  são conhecidos, para qualquer sinal  $r(t)$  contínuo por partes e limitado, i.e., conseguir que o erro de rastreamento  $e(t)$  dado por

$$e = x - x_m,$$

tenda assintoticamente para zero  $\forall t \geq 0$ .

A estrutura do sistema para o controlador MRAC é ilustrada na Figura 1.1 [24].

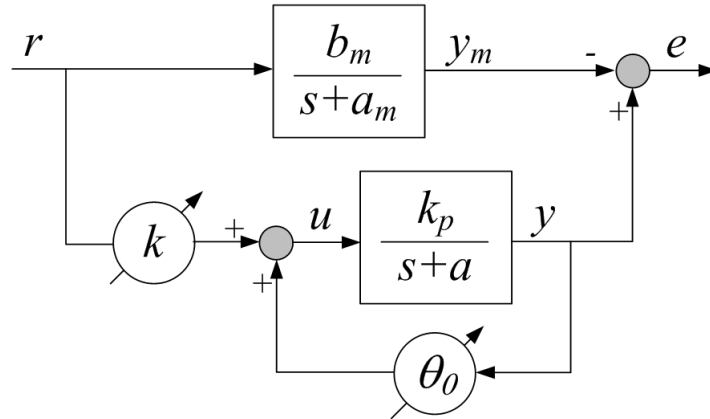


Figura 1.1: MRAC para uma planta de primeira ordem.

A seguinte lei de controle pode ser considerada

$$u = \theta^T \omega = \begin{bmatrix} \theta_0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ r \end{bmatrix} = \theta_0 x + kr,\tag{1.3}$$

onde  $\theta$  é o vetor de parâmetros estimados e  $\omega$  é o vetor regressor. Substituindo (1.3) em (1.1), subtraindo (1.2) e somando e subtraindo  $a_m x$ , obtém-se a equação dinâmica para o erro de rastreamento

$$\dot{e} = -a_m e + k_p \tilde{u}, \quad (1.4)$$

onde

$$\tilde{u} = \tilde{\theta}^T \omega, \quad \tilde{\theta} = \theta - \theta^*, \quad \theta^* = \begin{bmatrix} \theta_0^* \\ k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-a_m}{k_p} \\ \frac{b_m}{k_p} \end{bmatrix}.$$

Assim os parâmetros que satisfazem o objetivo de controle são  $\theta_0^{*T}$  e  $k^*$  os quais estão representados pelo vetor de parâmetros ideais  $\theta^*$ . Mas, como os parâmetros da planta são desconhecidos, a lei de controle ideal não pode ser implementada. Então pode-se considerar a seguinte lei de controle  $u(t) = \theta^T(t)\omega(t)$ , onde  $\theta(t)$  é uma estimativa de  $\theta^*$ , e procurar uma lei adaptativa para gerar  $\theta(t)$  em tempo real.

Pode-se aplicar a abordagem de Lyapunov [5] para projetar a lei de adaptação. Considere a seguinte função de Lyapunov [25]

$$V = \frac{1}{2} \left[ e^2 + \frac{1}{\gamma} |k_p| \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \right], \quad (1.5)$$

onde  $\gamma$  é uma constante positiva. A derivada temporal de (1.5) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e\dot{e} + \frac{1}{\gamma} |k_p| \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}, \\ &= -a_m e^2 + k_p \tilde{\theta}^T \omega e + \frac{1}{\gamma} |k_p| \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}, \\ &= -a_m e^2 + k_p \tilde{\theta}^T \left[ \omega e + \frac{1}{\gamma} \text{sign}(k_p) \dot{\tilde{\theta}} \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Para cancelar o segundo termo da equação (1.6), pode-se escolher a seguinte lei de adaptação paramétrica

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \text{sign}(k_p) e \omega,$$

com a qual tem-se que  $\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0$ .

Assim, o sistema de controle adaptativo é globalmente estável, i.e., os sinais de  $e$ ,  $\tilde{\theta}_0$  e  $\tilde{k}$  são uniformemente limitados. Além disso, a convergência assintótica do erro de rastreamento  $e(t)$  é garantida pelo lema de Barbalat<sup>1</sup>, porque a limitação de  $e$ ,  $\tilde{\theta}_0$  e  $\tilde{k}$  implica na limitação de  $\dot{e}$  (por (1.4)) e, por conseguinte, a continuidade uniforme de  $\dot{V}$  [24].

---

<sup>1</sup>O Lema de Barbalat é apresentado no Apêndice A.2



Para projetar a lei de adaptação do caso SISO, é necessário o conhecimento do sinal do ganho de alta frequência  $k_p$ . Esta é uma condição suave que é satisfeita na prática porque pode ser obtida com base no conhecimento físico do sistema [24].

Mas, no caso multivariável a generalização da condição do sinal representa uma dificuldade, uma vez que o ganho de alta frequência é uma matriz e não um escalar [26].

### 1.2.1 Projeto com a abordagem SPR-Lyapunov, caso SISO

Considerando um caso mais geral, pode-se projetar a lei de adaptação usando uma abordagem baseada em Lyapunov e aplicando o Lema de Kalman-Yakubovich (condição SPR), que é enunciado a seguir

**Lema 1.1 (Lema Kalman-Yakubovich SISO [24])** *Considere o sistema linear invariante no tempo controlável*

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1.7)$$

$$y = cx, \quad (1.8)$$

o sistema (1.7)-(1.8) é estritamente passivo (SP) e sua função de transferência é estritamente positiva real (SPR) se e só se existem matrizes simétricas positivas definidas  $P$  e  $Q$  ( $P = P^T > 0$  e  $Q = Q^T > 0$ ) que satisfazem

$$A^T P + PA = -Q, \quad (1.9)$$

$$Pb = c^T. \quad (1.10)$$

Note que a equação (1.10) requer que o ganho de alta frequência seja positivo, i.e.,  $k_p = cb > 0$ . Considere que a equação dinâmica do erro de rastreamento SISO seja estritamente positiva real (SPR), sendo dada por

$$\dot{x} = Ax + b \tilde{\theta}^T \omega, \quad (1.11)$$

$$e = cx, \quad (1.12)$$

Para projetar a lei de adaptação considere a seguinte função de Lyapunov

$$V = x^T P x + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}, \quad (1.13)$$

a derivada temporal de (1.13) é dada por

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + \frac{1}{\gamma} \dot{\tilde{\theta}}^T \tilde{\theta} + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}, \\ &= x^T (A^T P + P A) x + 2x^T P b \tilde{\theta}^T \omega + 2\frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}},\end{aligned}$$

como o sistema (1.11)-(1.12) é SPR, cumpre com as condições (1.9)-(1.10), tem-se

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2 e \tilde{\theta}^T \omega + 2\frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}.$$

Assim pode-se projetar a lei de adaptação

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma e \omega,$$

que torna o sistema estável.

Caso o ganho de alta frequência seja negativo  $k_p = cb < 0$  e se  $\{A, \bar{b}, c\}$  for SPR, onde  $\bar{b} = b \text{sign}(k_p)$ , pode-se projetar uma lei de adaptação que torna o sistema estável e requer o conhecimento do sinal de  $k_p$ .

Considere que a equação dinâmica do erro de rastreamento SISO seja estritamente positiva real (SPR), sendo dada por

$$\dot{x} = Ax + \bar{b} \text{sign}(k_p) \tilde{\theta}^T \omega, \quad (1.14)$$

$$e = cx, \quad (1.15)$$

Para projetar a lei de adaptação considere a seguinte função de Lyapunov

$$V = x^T P x + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}, \quad (1.16)$$

a derivada temporal de (1.16) é dada por

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + \frac{1}{\gamma} \dot{\tilde{\theta}}^T \tilde{\theta} + \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}, \\ &= x^T (A^T P + P A) x + 2x^T P \bar{b} \text{sign}(k_p) \tilde{\theta}^T \omega + 2\frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}},\end{aligned}$$

como o sistema (1.14)-(1.15) é SPR, cumpre com as condições (1.9)-(1.10), tem-se

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2 e \text{sign}(k_p) \tilde{\theta}^T \omega + 2\frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}}.$$

Assim pode-se projetar a lei de adaptação

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \text{sign}(k_p) e \omega,$$

que torna o sistema estável.

## 1.2.2 Projeto com a abordagem SPR-Lyapunov, caso MIMO

Para o caso MIMO pode-se aplicar também o Lema Kalman-Yakubovich (condição SPR), o qual será analisado no Capítulo 3, onde mostra-se que o Lema requer que o ganho de alta frequência  $K_p$  seja simétrico. Seja a equação dinâmica do erro de rastreamento MIMO estritamente positiva real (SPR)

$$\dot{x} = Ax + B\tilde{\Theta}^T\omega, \quad (1.17)$$

$$e = Cx, \quad (1.18)$$

onde  $\Theta$  é a matriz de parâmetros estimada. Para projetar a lei de adaptação considere a seguinte função de Lyapunov

$$V = x^T Px + \text{tr} \left[ \tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta} \right], \quad (1.19)$$

a derivada temporal de (1.19) é dada por <sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}^T Px + x^T P \dot{x} + \text{tr} \left[ \dot{\tilde{\Theta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} \right], \\ &= x^T (A^T P + PA)x + 2x^T P B \tilde{\Theta}^T \omega + 2 \text{tr} \left[ \tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} \right], \end{aligned}$$

como o sistema (1.17)-(1.18) é SPR, tem-se

$$\dot{V} = -x^T Qx + 2e^T \tilde{\Theta}^T \omega + 2 \text{tr} \left[ \tilde{\Theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}} \right],$$

e pode-se projetar a lei de adaptação

$$\dot{\tilde{\Theta}} = -\Gamma \omega e^T.$$

Assim, pode-se substituir e aplicar a propriedade  $\text{tr}(xy^T) = y^T x$ , com a qual pode-se verificar que  $\dot{V} \leq -x^T Qx$ . Logo é possível concluir que a lei de adaptação escolhida torna o sistema estável.

O conhecimento prévio do  $K_p$  tem sido o maior obstáculo para generalizar o MRAC para sistemas MIMO, inclusive para plantas de grau relativo um [27].

---

<sup>2</sup>As propriedades da traça são apresentadas no Apêndice A.1.

## 1.3 Controle adaptativo para sistemas MIMO

O projeto de sistemas adaptativos MIMO apresenta a dificuldade de requerer informação previa da planta desconhecida para a implementação dos algoritmos. As dificuldades no desenvolvimento de algoritmos MIMO incluem problemas como comutatividade, estabilidade, robustez, parametrização, entre outros, o que fez com que o desenvolvimento dos algoritmos MIMO não pudesse ser simplesmente uma extensão dos algoritmos SISO.

Algoritmos típicos de controle adaptativo de plantas SISO requerem o conhecimento do grau relativo da planta e do sinal (MRAC direto) ou de um limitante inferior da norma do ganho de alta frequência para sua implementação (MRAC indireto) [25]. Foi preciso procurar as condições equivalentes para o caso MIMO.

Muitos algoritmos de controle adaptativo multivariável foram propostos até meados dos anos 80, como por exemplo, algoritmos baseados na abordagem por modelo de referência, Monopoli e Hsing em [28], Goodwin e Long em [29], Elliott e Wolovich em [30], Johansson em [31] e Singh e Narendra em [32]; algoritmos baseados na abordagem de alocação de pólos, Prager e Wellstead em [33] e Elliott, Wolovich e Das em [34]; e algoritmos baseados na abordagem de otimização quadrática, Borison em [35] e Koivo em [36], entre outros. Estes trabalhos foram reunidos por Dugard e Dion em [37] e por Elliott e Wolovich em [38] e fazem parte de vários livros texto de Narendra e Annaswamy [3], Sastry e Bodson [39] e Ioannou e Sun [5].

Dentre eles, pode-se detalhar aqueles que abordam o controle adaptativo multivariável por modelo de referência. Em [28] foi proposto um controlador MRAC MIMO usando somente sinais de entrada e saída em lugar do vetor de estados completo; em [29] os resultados de Goodwin et al. [40] forem estendidos para uma classe de sistemas mais vasta; e em [30], forem discutidas as noções do ganho de alta frequência, zeros no semiplano lateral esquerdo e o papel do índice de observabilidade no projeto de estruturas de controle multivariável.

Uma completa generalização do controle adaptativo direto baseado em Lyapunov para sistemas MIMO não tinha sido alcançada, mesmo para o grau relativo 1, devido principalmente ao problema da matriz de alta frequência  $K_p$ . Muitas hipóteses restritivas sobre o conhecimento prévio de  $K_p$  foram feitas para superar a condição de simetria.

Em [5], Ioannou e Sun apresentaram uma lei de adaptação que fazia a hipótese restritiva de que uma matriz  $S_p$  é conhecida e usada na lei de adaptação, tal que

$$K_p S_p = (K_p S_p)^T > 0.$$

Esta hipótese restritiva tinha sido adotada por vários autores, dentre eles podem ser destacados os trabalhos de Tao em [41] onde foi proposta uma estratégia

que relaxa a hipótese de conhecimento da matriz interactor ao requerer somente um limitante superior do máximo grau de seus elementos; de Wu et al. em [42], onde foi proposta uma extensão dos critérios de MRAC descentralizado [43] para o caso MIMO; de Chien et al. em [44], onde o controlador baseado em estrutura variável proposto por Hsu em [45] foi estendido para o caso MIMO MRAC usando normalização de sinal.

Um algoritmo de chaveamento de histerese [46][47] foi proposto para mitigar a hipótese de simetria. Weller e Goodwin propuseram em [48] um controlador MRAC MIMO que mitigava a hipótese restritiva sobre  $K_p$  usando um controle de chaveamento de histerese, um número finito de estimadores de parâmetros em paralelo e um algoritmo de chaveamento para selecionar entre os estimadores candidatos baseado em seus erros de predição associados.

Logo Mathelin e Bodson mostraram em [49] que os algoritmos MRAC MIMO podem ser modificados usando também uma transformação de histerese nos parâmetros estimados, assumindo o conhecimento a priori da forma de Hermite e o conhecimento prévio de um limitante superior da norma de  $K_p$  [50].

Uma abordagem de controle adaptativo indireto foi proposta para controle de vôo por Bodson e Groszkiewicz em [51], onde é requerido que uma estimativa de  $K_p$  seja não singular o tempo todo.

Em [3], Narendra e Annaswamy propuseram um método baseado no controle adaptativo direto, no qual a hipótese menos restritiva do conhecimento de uma matriz simétrica  $\Gamma$  utilizada na lei de adaptação tal que

$$\Gamma K_p + K_p^T \Gamma = Q_o > 0,$$

mas foi mostrado por Liu e Aquino em [52] que a condição de simetria

$$\Gamma K_p = (\Gamma K_p)^T,$$

similar a aquela de [5] é requerida para garantir estabilidade [26].

Estas condições de simetria são muito restritivas, e qualquer perturbação em  $K_p$  pode destruí-las, não podendo ser aplicadas a sistemas com incertezas [53].

### 1.3.1 Fatoração do ganho de alta frequência

Na literatura foram introduzidas novas parametrizações para a planta nas quais a matriz do ganho de alta frequência  $K_p$  é fatorada.

Em Weller e Goodwin [48], foi introduzida para o MRAC indireto uma parametrização usando a fatoração

$$K_p = LU,$$

onde  $L$  é uma matriz triangular inferior unitária e  $U$  é uma matriz triangular superior, evitando a singularidade ao manter os elementos da diagonal da estimativa de  $U$  afastados de zero, para os quais é requerido conhecer seus limites inferiores.

Em [52, 54], Hsu et al. propuseram um problema de servo-visão de duas entradas e saídas que foi resolvido com um método baseado em controle hierárquico [55] que usava uma fatoração  $LU$  [26, 56]. O mesmo problema de servo-visão foi abordado por Zergeroglu et al. [57] usando uma fatoração

$$K_p = SU.$$

A hipótese comum entre as propostas anteriores foi o conhecimento dos sinais dos elementos da diagonal de  $U$  ou equivalentemente o conhecimento dos sinais dos menores principais líderes<sup>3</sup> de  $K_p$ , o qual é análogo à hipótese do conhecimento do sinal do  $k_p$  do caso MRAC SISO.

Em [27, 58], Hsu et al. empregaram a fatoração

$$K_p = SDU,$$

introduzida por Morse em [59], onde  $S$  é simétrica positiva definida,  $D$  é diagonal e  $U$  é triangular superior unitária, na qual também é necessário conhecer o sinal dos elementos de  $D$ , ou equivalentemente, os sinais dos menores principais líderes de  $K_p$ , conseguindo relaxar a condição  $K_p S_p = (K_p S_p)^T$ . O papel de  $S$  é assegurar que  $W_M(s)S$  seja SPR, onde  $W_M(s)$  é o modelo de referência desejado, e o papel de  $U$  é permitir sua absorção pela parametrização de controle.

Logo, em [60], Imai et al. propuseram mais duas parametrizações

$$K_p = LDU, \quad \text{e} \quad K_p = LDS,$$

com as quais foram derivadas leis de adaptação onde a única informação requerida são os sinais dos menores principais líderes da matriz  $D$ . Estes resultados foram estendidos para plantas com grau relativo superior a um ( $n^* > 1$ ) em [50], e reunidas e estendidas para o caso discreto por Tao em [61].

Sendo que todos os menores principais líderes do ganho de alta frequência  $K_p$  dados por  $\Delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , são  $\Delta_i \neq 0$ , pode-se definir as seguintes fatorações de  $K_p$ .

**Definição 1.1 (Fatoração  $LDU$  de  $K_p$  [61])** *A matriz de ganho de alta frequência  $K_p$  tem uma fatoração única*

$$K_p = LDU,$$

---

<sup>3</sup>A definição dos menores principais líderes é apresentada no Apêndice B.2

para algumas matrizes  $M \times M$  triangulares unitárias inferior  $L$ , superior  $U$  e

$$\begin{aligned} D &= \text{diag}\{d_1^*, d_2^*, \dots, d_M^*\}, \\ &= \text{diag}\left\{\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_M}{\Delta_{M-1}}\right\}, \end{aligned}$$

**Definição 1.2 (Fatoração SDU de  $K_p$  [61])** A matriz de ganho de alta frequência  $K_p$  tem uma fatoração não única

$$K_p = SD_s U_s,$$

onde  $S \in \mathbb{R}^{M \times M}$  tal que  $S = S^T > 0$ ,  $U_s$  é uma matriz triangular unitária superior, e

$$\begin{aligned} D_s &= \text{diag}\{s_1^*, s_2^*, \dots, s_M^*\}, \\ &= \text{diag}\left\{\text{sign}[\Delta_1] \gamma_1, \text{sign}\left[\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right] \gamma_2, \dots, \text{sign}\left[\frac{\Delta_M}{\Delta_{M-1}}\right] \gamma_M\right\}, \end{aligned}$$

tal que  $\gamma_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, M$  pode ser arbitrário. A fatoração SDU de  $K_p$  está relacionada com a fatoração LDU por  $S = L D D_s^{-1} L^T$  e  $U_s = D_s^{-1} L^{-T} D_s U$ , para um  $D_s$  com um conjunto de  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ . Assim, a escolha da matriz  $D_s$  não é única nesta fatoração.

**Definição 1.3 (Fatoração LDS de  $K_p$  [61])** A matriz de ganho de alta frequência  $K_p$  tem uma fatoração não única

$$K_p = L_s D_s S,$$

onde  $S \in \mathbb{R}^{M \times M}$  tal que  $S = S^T > 0$ ,  $L_s$  é uma matriz  $M \times M$  triangular unitária inferior,

$$\begin{aligned} D_s &= \text{diag}\{s_1^*, s_2^*, \dots, s_M^*\}, \\ &= \text{diag}\left\{\text{sign}[\Delta_1] \gamma_1, \text{sign}\left[\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right] \gamma_2, \dots, \text{sign}\left[\frac{\Delta_M}{\Delta_{M-1}}\right] \gamma_M\right\}, \end{aligned}$$

tal que  $\gamma_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, M$ , pode ser arbitrário. A fatoração LDS de  $K_p$  está relacionada com a fatoração LDU por  $L_s = L D_s U^{-T} D_s^{-1}$  e  $S = U^T D_s^{-1} D U$ , para um  $D_s$  com um conjunto de  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ . Assim, a escolha da matriz  $D_s$  não é única nesta fatoração.

A fatoração LDU foi empregada em diversas abordagens MRAC MIMO, entre elas, em [62], Xie et al. estudaram o problema do controle adaptativo por modelo de referência direto robusto para plantas mais gerais com dinâmicas não modeladas

e distúrbios; e em [63] por Lu et al., onde a fatoração foi usada para projetar o controlador discreto para o cache de um sistema de internet.

A fatoração *SDU* foi empregada por vários autores, entre eles por Costa et al. em [64], para estender o controle adaptativo backstepping para MIMO MRAC; e por Hsu et al. em [65], junto com a fatoração *LDU*, para adicionar termos estabilizantes ao algoritmo de controle hierárquico [26, 52, 54]. Os métodos baseados na fatoração *SDU* apresentam o problema de sobreparametrização, i.e., a introdução de parâmetros adicionais em comparação com a fatoração *LDU* [65].

A fatoração *LDS* também foi empregada em diversas abordagens MRAC MIMO. Em [66], Xie estudou o problema do controle adaptativo por modelo de referência direto robusto para sistemas com dinâmicas não modeladas, distúrbios limitados e grau relativo arbitrário; e em [67], Sang e Tao estudaram a extensão para sistemas MRAC MIMO do conceito de margem de ganho, originalmente definido para sistemas de controle LTI por Kuo e Golnaraghi em [68], e aplicado a sistemas MRAC SISO em [69]; em [70], Liu e Tao estenderam a estratégia MRAC com ganho de Nussbaum usando uma fatoração *LDS* para sistemas MIMO (que já tinha sido estendida com uma fatoração *LDU* por Imai et al. em [71]), e aplicado no controle de aeronaves com múltiplos danos; em [72], Sang e Tao estenderam para o caso MIMO a estratégia MRAC para sistemas lineares contínuos proposta em [73]; e em Guo et al. estudaram em [74] o MRAC MIMO aplicado a aeronaves sob condições de falhas e danos.

### 1.3.2 Extensão do conceito de Passividade

Uma abordagem com o ponto de vista da passividade, usando conceitos de extensão da condição de passividade introduzidos por Fradkov em [75] e [76], e estendidos por Fradkov em [77] e Peaucelle et al. em [78], foi proposta por Barkana et al. em [79] e por Liu et al. em [53], chamada WSRP e WASPR. Esta abordagem sugere que a condição de passividade WASPR pode ser obtida ao multiplicar o vetor de sinal de saída por uma matriz triangular.

Com esta abordagem, uma lei de adaptação simples pode ser conseguida, que é simplesmente a clássica (não normalizada) lei do gradiente baseada em Lyapunov sem a necessidade de uma superparametrização requerida pelos métodos de fatoração.

## 1.4 Organização da Dissertação

No presente capítulo 1, apresenta-se um histórico da evolução do controle adaptativo, e ressalta-se a restrição de conhecimento prévio da matriz de alta frequência



para o controle adaptativo do caso MIMO.

No capítulo 2 será apresentada uma revisão dos conceitos principais dos sistemas multivariáveis, especialmente aqueles que permitem conhecer se uma planta cumpre com as restrições que serão enunciadas no capítulo 4.

No capítulo 3, apresenta-se um novo enfoque proposto recentemente em [79] e [53] para superar a hipótese de simetria da matriz do ganho de alta frequência (HFG) dos sistemas MIMO, baseado em uma generalização do conceito de passividade.

No capítulo 4, a definição do problema de controle adaptativo é apresentada, assim como uma breve revisão de algumas estratégias existentes. Além disso, uma extensão do controlador B-MRAC para sistemas MIMO é proposta.

No capítulo 5, são apresentadas as conclusões do trabalho e propostas para trabalhos futuros. Para facilitar a leitura, algumas provas e detalhes técnicos são apresentadas nos apêndices.

# Capítulo 2

## Sistemas Multivariáveis

Neste capítulo serão apresentados conceitos básicos sobre sistemas multivariáveis que são necessários para a compreensão dos sistemas de controle adaptativo MIMO.

### 2.1 Representação matemática de um sistema

Considere um sistema linear invariante no tempo (SLIT) descrito por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2.2)$$

onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de estado,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  é a matriz de entrada,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  é a matriz de saída,  $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$  é a matriz de transmissão direita. Além disso  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado do sistema,  $u \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de entrada e  $y \in \mathbb{R}^q$  o vetor de saída.

### 2.2 Pólos e Zeros de uma Matriz de Função de Transferência

Uma Matriz de Função de Transferência é representada por uma matriz racional  $G(s)$  de  $q$  linhas e  $p$  colunas, que é uma matriz cujos elementos são funções racionais de  $s$ , e pode ser expressa da seguinte forma

$$G(s) = \frac{1}{m(s)}M(s), \quad (2.3)$$

onde  $m(s)$  é um polinômio em função de  $s$  que é o mínimo múltiplo comum dos denominadores dos elementos de  $G(s)$ , e  $M(s)$  é uma matriz polinomial, i.e., aquela cujos elementos são polinômios em função de  $s$ .

**Definição 2.1 (Classificação de Matrizes Racionais.)** *Uma matriz racional é chamada de:*

1. *Imprópria, quando  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$  não existe.*
2. *Própria, quando  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$  existe.*
3. *Estritamente Própria, quando  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$ .*

A localização dos pólos de uma matriz de função de transferência  $G(s)$  está disponível por inspeção das funções de transferência individuais (os elementos da matriz), mas o número total deles e sua multiplicidade não está disponível diretamente. Assim mesmo, a localização dos zeros, ou inclusive sua existência, não pode ser determinada pela inspeção dos elementos de  $G(s)$ .

É possível achar o polinômio característico de uma matriz racional da seguinte forma

**Definição 2.2** *O polinômio característico da matriz  $G(s)$ , racional própria com  $q$  linhas e  $p$  colunas, denotado por  $\Delta_G(s)$ , é o mínimo múltiplo comum dos denominadores de todos os menores da matriz<sup>1</sup>.*

Os pólos de uma matriz racional  $G(s)$  podem ser achados das raízes de seu polinômio característico  $\Delta_G(s) = 0$ .

**Exemplo 2.1** *Seja a matriz racional própria*

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+1)}{s(s+2)} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

*Os menores de ordem 1 são os mesmos elementos de  $G(s)$ , cujos denominadores são  $s(s+2)$ ,  $s+2$ ,  $s$ , e  $s+1$ , e o único menor de ordem 2 é o determinante de  $G(s)$ , cujo denominador é  $s(s+2)$ , assim tem-se que a equação característica de  $G(s)$  é dada por*

$$\Delta_G(s) = s(s+1)(s+2),$$

*e os pólos são dados pelas raízes de  $\Delta_G(s)$  e são 0,  $-1$  e  $-2$ .*

A procura dos zeros é mais complicada. A seguir são apresentadas três formas para calculá-los: através da forma de Smith MacMillan, da fração matricial irreduzível ou da matriz de Rosenbrock.

<sup>1</sup>A definição dos menores de uma matriz é apresentada no Apêndice B.1.

### 2.2.1 Forma de Smith MacMillan

Uma matriz polinomial  $M(s)$ , com  $q$  linhas,  $p$  colunas e posto  $r$ , pode ser diagonalizada por meio de multiplicações pela esquerda e pela direita por matrizes unimodulares<sup>2</sup> apropriadas. Esta forma diagonal é chamada de Forma de Smith de  $M(s)$ , e os elementos de sua diagonal são os  $r$  polinômios invariantes de  $M(s)$ . A menos da ordem de aparecimento destes polinômios na diagonal, e da multiplicação deles por constantes reais não nulas, a forma de Smith é única.

A forma de Smith de uma matriz polinomial  $M(s)$  pode ser encontrada calculando seus polinômios invariantes<sup>3</sup> (através dos máximos divisores comuns (mdc) dos menores de  $M(s)$ ).

A partir da forma de Smith da matriz polinomial  $M(s)$  de uma matriz racional  $G(s)$  (2.3), pode-se enunciar uma forma que revele os pólos e os zeros da matriz racional  $G(s)$ , usando o seguinte teorema

**Teorema 2.1 (Forma de Smith MacMillan.)** *Dada uma matriz racional própria  $G(s)$  com  $q$  linhas,  $p$  colunas e posto  $r$ , existem matrizes polinomiais unimodulares  $V(s) \in \mathbb{R}^{q \times q}$  e  $W(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}$  tais que*

$$G(s) = V(s)S_M(s)W(s), \quad (2.5)$$

$$S_M(s) = \begin{bmatrix} \sigma_1(s) & & & & & \\ & \sigma_2(s) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \sigma_r(s) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

Esta matriz diagonal  $S_M(s)$  recebe o nome de Forma de Smith-MacMillan de  $G(s)$  e é caracterizada por

1. Os primeiros elementos da sua diagonal são não nulos.
2. Os  $r$  primeiros destes elementos são funções racionais irredutíveis

$$\sigma_i(s) = \frac{\epsilon_i(s)}{\psi_i(s)}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r.$$

3. Cada denominador  $\psi_i(s)$  para  $i = 1, 2, \dots, r - 1$  é múltiplo do denominador  $\psi_{i+1}(s)$  que o sucede ( $\psi_{i+1}$  divide  $\psi_i$ ).

<sup>2</sup>A definição das matrizes unimodulares é apresentada no Apêndice B.4.

<sup>3</sup>A definição dos polinômios invariantes de uma matriz é apresentada no Apêndice B.3.

4. Cada numerador  $\epsilon_i(s)$  para  $i = 2, \dots, r$  é múltiplo do numerador  $\epsilon_{i-1}(s)$  que o antecede ( $\epsilon_{i-1}$  divide  $\epsilon_i$ ).

A menos de multiplicações por constantes reais nos polinômios envolvidos, a forma de Smith-MacMillan é única, os denominadores  $\psi_i(s)$  são chamados de polinômios invariantes de  $G(s)$ .

As raízes dos polinômios invariantes  $\psi_i(s)$  são os pólos de  $G(s)$  e as raízes dos polinômios  $\epsilon_i(s)$  são os zeros da matriz racional  $G(s)$ .

Considerando que a matriz polinomial  $M(s)$  de (2.3) e sua forma de Smith  $S(M)$  são equivalentes, i.e., tem os mesmos polinômios invariantes, a matriz racional  $G(s)$  pode ser escrita da seguinte forma

$$G(s) = \frac{1}{m(s)}M(s) = V(s)\frac{S(M)}{m(s)}W(s), \quad (2.6)$$

onde  $V(s)$  e  $W(s)$  são matrizes unimodulares. Pode-se observar que (2.6) tem a mesma forma que (2.5), e assim, verifica-se que a forma de Smith MacMillan pode ser obtida fazendo

$$S_M(s) = \frac{S(M)}{m(s)},$$

**Exemplo 2.2** Seja a matriz racional própria (2.4), a qual pode ser escrita como

$$G(s) = \frac{1}{m(s)}M(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 2(s+1)^2 & s(s+1) \\ (s+1)(s+2) & s(s+2) \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

Para encontrar a forma de Smith de  $M(s)$  pode-se proceder da seguinte forma. Por convenção o máximo divisor comum (mdc) de ordem 0 é  $\Delta_0(s) = 1$ . Os elementos de ordem 1 são os mesmos elementos de  $M(s)$ , e o mdc deles é  $\Delta_1(s) = 1$ . O único elemento de ordem 2 é o determinante de  $M(s)$  e seu mdc é ele mesmo ( $\Delta_2(s) = \det M(s)$ ), assim os polinômios invariantes são dados por

$$\sigma_1(s) = \frac{\Delta_1(s)}{\Delta_0(s)} = 1, \quad \sigma_2(s) = \frac{\Delta_2(s)}{\Delta_1(s)} = s(s+2)(s+1)^2,$$

Portanto, a forma de Smith de  $M(s)$  denotada por  $S(M)$  é dada por

$$S(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s(s+1)^2(s+2) \end{bmatrix},$$

A forma de Smith MacMillan será dada por

$$\begin{aligned} S_M(s) &= \frac{1}{m(s)} S(M), \\ &= \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s(s+1)^2(s+2) \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $\prod \psi_i(s) = s(s+1)(s+2)$  e  $\prod \epsilon_i(s) = s+1$ . Assim, os pólos de  $G(s)$  são 0,  $-1$  e  $-2$  e o zero é  $-1$ .

## 2.2.2 Descrição por frações matriciais

Uma matriz racional  $G(s)$  de  $q$  linhas e  $p$  colunas pode ser expressa da seguinte forma

$$G(s) = \frac{1}{m(s)} M(s) = m(s)^{-1} M(s) = M(s) m(s)^{-1},$$

Mas pode-se multiplicar o polinômio  $m(s)^{-1}$  por uma matriz identidade de dimensão adequada, da seguinte forma

$$G(s) = (m(s)I_q)^{-1} M(s) = M(s) (m(s)I_p)^{-1},$$

onde  $I_q$  é a matriz identidade ( $q \times q$ ) e  $I_p$  é a matriz identidade ( $p \times p$ ). Assim pode-se estabelecer o seguinte

**Lema 2.1** *Dada a matriz racional  $G(s)$  com  $q$  linhas e  $p$  colunas, é sempre possível expressá-la como uma fração matricial à esquerda da forma*

$$G(s) = D_E^{-1}(s) N_E(s),$$

onde  $D_E(s)$  é uma matriz polinomial ( $q \times q$ ) e  $N_E(s)$  é uma matriz ( $q \times p$ ); ou como uma fração matricial à direita da forma

$$G(s) = N_D(s) D_D^{-1}(s),$$

onde  $D_D(s)$  é uma matriz polinomial ( $p \times p$ ) e  $N_D(s)$  é uma matriz ( $q \times p$ ).

Doravante, somente as frações matriciais à direita  $N_D(s) D_D^{-1}(s)$  serão consideradas sendo escritas como  $N(s) D^{-1}(s)$ . Embora os conceitos também possam ser aplicados da mesma forma para as frações matriciais à esquerda  $D_E^{-1}(s) N_E(s)$ .

Dada uma fração matricial ( $G(s) = N(s) D(s)^{-1}$ ), outra fração matricial à direita pode ser obtida multiplicando-se à direita de  $N(s)$  e de  $D(s)$  por uma matriz

polinomial não singular  $Q(s)$ , ou seja se  $(N(s)D^{-1}(s))$  é fração matricial à direita de  $G(s)$ , então  $(\hat{N}(s)\hat{D}^{-1}(s))$  também é fração matricial à direita de  $G(s)$ , onde  $\hat{N}(s) = N(s)Q(s)$  e  $\hat{D}(s) = D(s)Q(s)$

$$N(s)D^{-1}(s) = N(s)Q(s)(D(s)Q(s))^{-1} = \hat{N}\hat{D}^{-1}(s).$$

Pode-se definir uma matriz  $R(s)$  que seja o máximo divisor comum entre  $N(s)$  e  $D(s)$ , com o qual é possível extrair os fatores comuns entre eles.

**Definição 2.3 (Máximo divisor comum pela direita.)** Para  $N(s)$  ( $q \times p$ ) e  $D(s)$  ( $p \times p$ ), polinomiais, a matriz polinomial  $R(s)$  ( $p \times p$ ) é um máximo divisor comum pela direita de  $N(s)$  e  $D(s)$  se e somente se

1.  $R(s)$  é um divisor comum pela direita, ou seja, existem matrizes polinomiais  $\bar{N}(s)$  e  $\bar{D}(s)$  tais que  $N(s) = \bar{N}(s)R(s)$  e  $D(s) = \bar{D}(s)R(s)$ .
2. Se  $Q(s)$  é um divisor comum pela direita qualquer de  $N(s)$  e de  $D(s)$ , então  $Q(s)$  é um divisor pela direita de  $R(s)$ , ou seja, existe uma matriz polinomial  $\bar{R}(s)$  tal que  $R(s) = \bar{R}(s)Q(s)$ .

Da definição é possível notar que  $R(s)$  não é único. Então, outras matrizes podem satisfazer os requisitos, mas todas elas são equivalentes<sup>4</sup>. Podem ser determinadas da seguinte forma

**Teorema 2.2 (Máximo divisor comum.)** Dadas  $N(s)$  ( $q \times p$ ) e  $D(s)$  ( $p \times p$ ), polinomiais, seja  $U(s)$  [ $(q+p) \times (q+p)$ ] uma matriz polinomial unimodular tal que

$$U(s) \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix},$$

A matriz polinomial  $R(s)$  ( $p \times p$ ) é um máximo divisor comum pela direita de  $N(s)$  e  $D(s)$ .

Conhecendo o máximo divisor comum  $R(s)$  de uma fração matricial  $N(s)D^{-1}(s)$ , é possível fazer a seguinte operação

$$N_r(s) = N(s)R^{-1}(s) \quad \text{e} \quad D_r(s) = D(s)R^{-1}(s),$$

com a qual obtém-se uma fração matricial irredutível  $N_r(s)D_r^{-1}(s)$ . Mas, como será visto adiante, se  $R(s)$  é unimodular então a fração já é irredutível.

---

<sup>4</sup>A definição das matrizes polinomiais equivalentes é apresentada no Apêndice B.5.

**Definição 2.4 (Fração matricial irredutível.)** Uma fração matricial pela direita  $N(s)D^{-1}(s)$  é irredutível pela direita caso  $N(s)$  e  $D(s)$  sejam coprimas pela direita, i.e., quando admitem como divisores comuns pela direita apenas matrizes unimodulares. Dada uma matriz racional  $G(s)$  ( $q \times p$ ), é sempre possível expressá-la como uma fração matricial irredutível.

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s),$$

Assim, os pólos e os zeros de uma matriz racional  $G(s)$  expressa como uma fração matricial irredutível podem ser achados da seguinte forma:

**Propriedade 2.1 (Polinômio característico.)** Considere a matriz racional  $G(s) = N(s)D^{-1}(s)$ , o determinante de  $D(s)$  é o polinômio característico de  $G(s)$ .

$$\Delta_G(s) = \det D(s),$$

se e somente se  $N(s)D^{-1}(s)$  for irredutível.

**Propriedade 2.2 (Pólos e zeros.)** Sendo a matriz racional  $G(s)$  expressa por uma fração matricial irredutível  $N(s)D^{-1}(s)$ :

- a) Os seus zeros são as raízes dos polinômios invariantes de  $N(s)$ ,
- b) Os seus pólos são as raízes dos polinômios invariantes de  $D(s)$ .

**Exemplo 2.3** Seja a matriz racional própria (2.4), que pode ser escrita como

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s),$$

onde

$$N(s) = \begin{bmatrix} 2(s+1)^2 & s(s+1) \\ (s+1)(s+2) & s(s+2) \end{bmatrix},$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} s(s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & s(s+1)(s+2) \end{bmatrix}.$$

Para obter um máximo divisor comum, pode-se utilizar o seguinte procedimento. Seja a matriz

$$\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & s(s+1)(s+2) \\ 2(s+1)^2 & s(s+1) \\ (s+1)(s+2) & s(s+2) \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$



Seja  $f_i$  a linha  $i$  de (2.8), realizando as seguintes operações

$$f_1 - sf_4, \quad f_3 - 2f_4, \quad f_4 - (s/2)f_3, \quad f_4 + f_3.$$

A matriz passa a ter a seguinte forma

$$\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & s^3 + 2s^2 \\ 0 & s^3 + 3s^2 + 2s \\ -2s - 2 & -s^2 - 3s \\ 0 & -\frac{1}{2}(s^3 + 3s^2 + s) \end{bmatrix}.$$

Agora, efetuando as seguintes operações

$$f_1 + f_2, \quad f_4 + \frac{1}{2}f_2, \quad f_2 - sf_1, \quad f_1 \leftrightarrow f_3.$$

Pode-se verificar, aplicando o Teorema 2.2, que o máximo divisor comum  $R(s)$  é dado por

$$R(s) = \begin{bmatrix} -2(s+1) & -s(s+3) \\ 0 & s(s+2) \end{bmatrix}.$$

É fácil mostrar que  $R(s)$  não é Unimodular. Então,  $R(s)$  pode ser usado para obter a fração matricial irredutível, da seguinte forma

$$N_r(s) = N(s)R^{-1}(s) = \begin{bmatrix} -(s+1) & -(s+1) \\ -\frac{1}{2}(s+2) & -\frac{1}{2}(s+1) \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$D_r(s) = D(s)R^{-1}(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}s(s+2) & -\frac{1}{2}s(s+3) \\ 0 & (s+1) \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Dos polinômios característicos de  $N_r(s)$  e  $D_r(s)$ , pode-se determinar os pólos  $\{0, -1, -2\}$  e os zeros  $\{-1\}$  de  $G(s)$ .

### 2.2.3 Matriz de Rosenbrock

Considere o sistema linear invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.11)$$

$$y = Cx, \quad (2.12)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de entrada,  $y \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de saída,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de estado,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de entrada e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz de saída.

Como o sistema (2.11)-(2.12) tem o mesmo número de entradas e saídas, é pos-

sível achar os zeros do sistema encontrando as raízes do polinômio dado por

$$\det(Ro(s)) = 0,$$

onde  $Ro(s)$  é chamada de matriz de Rosenbrock [81] e é dada por

$$Ro(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

## 2.3 Matriz interactor

A extensão do conceito de grau relativo de funções de transferência para matrizes de função de transferência não é trivial e deve levar em conta as interações em alta-frequência entre diferentes entradas e saídas. A ideia de matriz interactor segue do seguinte conceito para funções de transferência escalar: o conhecimento do grau relativo de uma função de transferência escalar  $G(s) \in \mathbb{R}_{p,0}(s)$ <sup>5</sup> é equivalente ao conhecimento de um polinômio mônico  $\xi(s)$  tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi(s)G(s) = k_p \neq 0.$$

Então, o grau relativo de  $G(s)$  é igual ao grau de  $\xi(s)$ . O escalar  $k_p$  é chamado de ganho de alta frequência da planta  $G(s)$  [39].

Analogamente, o comportamento em alta frequência para plantas MIMO é determinado por uma matriz polinomial que satisfaz

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi(s)G(s) = K_p \neq 0, \text{ onde } K_p \text{ é não singular.}$$

Assuma que  $G(s)$  não é singular. A matriz interactor  $\xi(s)$  não é única, a menos que sua estrutura seja restrita. Em [23] foi provado que só existe uma matriz  $\xi(s)$  satisfazendo as seguintes condições:

**Definição 2.5 ([39])** *A matriz interactor de uma planta  $G(s) \in \mathbb{R}_P^{m \times m}(s)$ <sup>6</sup>, não singular, é definida como a única matriz  $\xi(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$  tal que*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi(s)G(s) = K_p, \text{ onde } K_p \text{ é não singular,}$$

$$\xi(s) = H(s)\hat{\Delta}(s),$$

<sup>5</sup> $G(s) \in \mathbb{R}_{p,0}(s)$  se  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 0$ .

<sup>6</sup> $G(s) \in \mathbb{R}_p(s)$  se  $\lim_{s \rightarrow \infty} G(s)$  existe.

onde  $\hat{\Delta}(s) = \text{diag}\{s^{\rho_i}\}$  e  $H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \varsigma_{21} & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ \varsigma_{31} & \varsigma_{32} & 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \varsigma_{m1} & \varsigma_{m2} & \varsigma_{m3} & \vdots & 1 \end{bmatrix}$  sendo  $\varsigma_{ij}(s)$  qualquer polinômio divisível por  $s$  ou igual a zero.

A matriz  $K_p$  é chamada de matriz de ganho de alta frequência da planta  $G(s)$ . Os inteiros  $\rho_i$  estendem a noção de grau relativo  $n^*$  de uma função de transferência SISO. A matriz  $H(s)$ , que é igual a 1 no caso SISO, descreve as interconexões de alta frequência entre as diferentes entradas e saídas da planta.

**Definição 2.6 ([39])** A matriz interactor modificada de uma planta  $G(s) \in \mathbb{R}_P^{m \times m}(s)$ , não singular, é definida como a matriz  $\xi_m(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}(s)$  tal que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_m(s)G(s) = K_p, \text{ onde } K_p \text{ é não singular,}$$

$\xi_m(s)$  é definida substituindo-se  $s$  em  $\xi(s)$  por  $s + a$ ,  $a > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

## 2.4 Controlabilidade e Observabilidade

Uma realização é dita como sendo controlável se existir uma entrada  $u(t)$  capaz de transferir qualquer estado inicial  $x(0)$  para qualquer estado final  $x(t)$ , em um tempo finito  $t$ . Uma realização é observável se é possível determinar de forma única o estado inicial  $x(0)$ , através do conhecimento de  $u(t)$  e  $y(t)$ ,  $t \geq 0$  [82].

Considerando o sistema MIMO LTI descrito pela equação de espaço estado (2.1)-(2.2), as matrizes de Controlabilidade  $U_C \in \mathbb{R}^{n \times np}$  e de Observabilidade  $U_O \in \mathbb{R}^{nq \times n}$  são dadas por

$$U_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

$$U_O = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}^T,$$

O sistema é controlável se e somente se  $U_C$  tem posto completo ( $\text{posto}(U_C) = n$ ) e observável se e somente se  $U_O$  tem posto completo ( $\text{posto}(U_O) = n$ ).

O índice de observabilidade  $\nu$  é o mínimo inteiro que satisfaz

$$\text{posto} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{\nu-1} C^T \end{bmatrix}^T = n. \quad (2.14)$$

# Capítulo 3

## Passivação de Sistemas MIMO

As técnicas baseadas em passividade têm um papel importante em sistemas de controle linear e não linear devido à simplicidade e significado físico do projeto e boas propriedades de robustez dos controladores resultantes. Um dos mais poderosos métodos de projeto baseados em passivação é achar uma realimentação de saída que faça com que o sistema em malha fechada seja passivo, o qual é chamado de passivação. Entre as aplicações da passivação estão o controle adaptativo, o controle de sistemas compostos parcialmente lineares, controle de voo e controle de processos, dentre outras [78].

### 3.1 Passividade

Um sistema é dito passivo se a energia absorvida por ele por um período de tempo  $[0, t]$  é maior que ou igual ao incremento na energia armazenada no sistema durante o mesmo período de tempo. Seja  $V(x)$  uma função de armazenamento de energia de um sistema  $y = h(t, u)$ , onde  $u$  é a entrada e  $y$  é a saída do sistema, tem-se a inequação

$$\int_0^t u(s)y(s)ds \geq V(x(t)) - V(x(0)), \quad (3.1)$$

e como (3.1) deve se manter para todo  $t \geq 0$ , a inequação instantânea de energia

$$u(t)y(t) \geq \dot{V}(x(t), u(t)),$$

deve se manter para todo  $t$ . Então, o fluxo de energia entrando no sistema deve ser maior que ou igual à taxa de variação da energia armazenada no sistema [83].

Uma função de Lyapunov pode ser relacionada com a noção de energia para sistemas estáveis: se ela é dissipada continuamente, então o sistema eventualmente chega a um ponto de equilíbrio [24].

O mesmo ocorre com um sistema dissipativo, que dissipando energia volta ao

ponto de equilíbrio. Um sistema dissipativo é um tipo de sistema passivo. A relação básica que exprime a lei de conservação de energia é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \text{Energia} \\ \text{Armazenada} \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{Potencia} \\ \text{Externa} \\ \text{de Entrada} \end{matrix} + \begin{matrix} \text{Potencia} \\ \text{de Geração} \\ \text{Interna} \end{matrix},$$

a qual nos permite considerar passivos os sistemas que verifiquem equações da forma  $\dot{V}(t) = y^T u - \psi(t)$ , onde  $V(t)$  e  $\psi(t)$  são funções escalares do tempo, e  $u$  e  $y$  são a entrada e a saída do sistema [24].

Então, um sistema linear invariante no tempo (SLIT) dado pela realização mínima

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (3.2)$$

$$y = Cx, \quad (3.3)$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$  é dito passivo se existe uma função positiva definida continuamente diferenciável  $V(x)$  (chamada de função de armazenamento) tal que

$$u^T y \geq \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + Bu), \quad \forall(x, u),$$

Além disso, é dito estritamente passivo, se  $u^T y \geq \dot{V} + \psi(x)$  para alguma função positiva definida  $\psi$  e para todo  $(x, u)$ .

### 3.1.1 Positividade e Passividade de sistemas lineares

Uma função de transferência  $h(s)$  é estritamente real positiva (SPR) se e só se  $h(s)$  é estritamente estável e se a parte real de  $h(s)$  é estritamente positiva no eixo  $j\omega$ , i.e.  $\forall \omega \geq 0, \text{Re}[h(j\omega)] > 0$ . Isto implica que  $h(s)$  tem grau relativo 0 ou 1 e é estritamente de fase mínima. [24]

Uma matriz de função de transferência própria racional  $p \times p$   $H(s)$  é chamada de real positiva (PR) se

- Os pólos de todos os elementos de  $H(s)$  estão em  $\text{Re}[s] \leq 0$ .
- Para todo  $\omega$  real para o qual  $j\omega$  não é um pólo de algum elemento de  $H(s)$ , a matriz  $H(j\omega) + H^T(-j\omega)$  é positiva semidefinida.
- Qualquer pólo imaginário puro  $j\omega$  de qualquer elemento de  $H(s)$  é um pólo simples e a matriz resíduo  $\lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega) H(s)$  é positiva semidefinida Hermitiana.

$H(s)$  é dita estritamente positiva real (SPR) se  $H(s - \varepsilon)$  é real positiva (PR) para algum  $\varepsilon > 0$  [83].

A relação entre passividade e a condição de PR e SPR, é dada da seguinte forma. Seja  $G(s)$  a função de transferência do sistema (3.2)-(3.3) dada por

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B, \quad (3.4)$$

o sistema é dito passivo se  $G(s)$  é real positiva (PR) e é estritamente passivo (SP) se  $G(s)$  é estritamente real positiva (SPR) [53].

### 3.1.2 Lema de Kalman-Yakubovich

A relação entre a propriedade SPR (Strictly Positive Real) e uma realização de estado foi proposta no Lema de Kalman-Yakubovich ou Lema de positividade real, o qual diz o seguinte.

**Lema 3.1 ([83])** *Considere o sistema (3.2)-(3.3), onde  $(A,B)$  é controlável e  $(A,C)$  é observável. O sistema é Estritamente Passivo (SP) e sua matriz de transferência (3.4) é Estritamente Real Positiva (SPR) se e só se existem matrizes simétricas definidas positivas  $P$  e  $Q$  ( $P = P^T > 0$  e  $Q = Q^T > 0$ ) que satisfazem*

$$A^T P + PA = -Q, \quad (3.5)$$

$$PB = C^T. \quad (3.6)$$

A relação (3.5) é a equação de Lyapunov, e mostra que o sistema é assintoticamente estável. A relação (3.6) revela que o produto  $CB$  é positivo definido simétrico (PDS), o qual pode-se mostrar multiplicando ambos lados de (3.6) por  $B^T$  obtendo

$$B^T P B = B^T C^T = CB.$$

Assim, se o sistema tem grau relativo  $n^* = 1$ , tem-se que

$$K_p = CB = B^T C^T > 0 \quad (3.7)$$

onde a matriz  $K_p$  é a matriz de ganho de alta frequência.

A propriedade SPR tem um papel muito importante para garantir estabilidade de sistemas com incertezas [84], e em controle adaptativo [85], [86].

### 3.1.3 Realimentação de saída

Considere a realimentação de saída  $K$  do sistema (3.2)-(3.3) apresentada na Figura 3.1, onde o sinal de entrada  $u$  é dado por

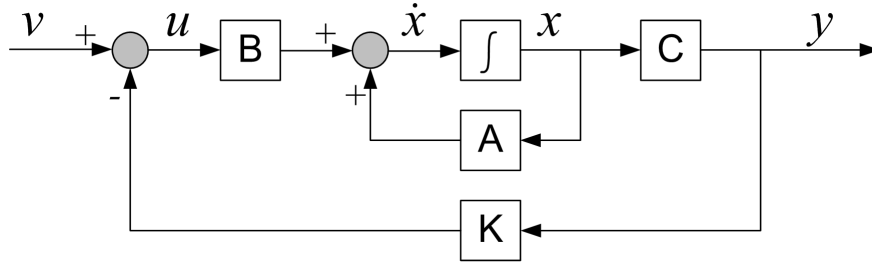


Figura 3.1: Esquema de realimentação de saída.

$$u = v - Ky = v - KCx, \quad (3.8)$$

com o qual a derivada do vetor de estados  $\dot{x}$  tem a forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(v - KCx), \\ &= (A - BKC)x + Bv. \end{aligned}$$

Logo, a equação no espaço estado do sistema realimentado é dada por

$$\dot{x} = A_K x + Bv, \quad (3.9)$$

$$y = Cx, \quad (3.10)$$

onde  $A_K = A - BKC$ , e sua função de transferência  $T(s)$  é dada por

$$T(s) = C[sI - A_K]^{-1}B.$$

Se o sistema (3.2)-(3.3) é SPR, i.e., satisfaz as relações (3.5)-(3.6), o sistema realimentado (3.9)-(3.10) seguirá sendo SPR para qualquer ganho positivo definido arbitrário.

Como uma realimentação de saída  $K$  afeta os pólos mas não os zeros do sistema, segue que o novo sistema  $\{A_K, B, C\}$  pode ser instável mas suas matrizes de entrada  $B$  e saída  $C$  são as mesmas, e a relação  $CB > 0$  se mantém. Os sistemas que requerem uma realimentação de saída para serem estritamente reais positivos (SPR) são chamados ASPR (Almost-SPR) [85], [86], [87], [88], [89].

Assim, o seguinte teorema foi formulado.

**Teorema 3.1 (ASPR [87])** *Qualquer sistema  $\{A, B, C\}$  estritamente próprio e estritamente de fase mínima, onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , com a função de transferência  $T(s) = C(sI - A)^{-1}B$ , e com  $CB$  simétrica positiva definida pode tornar-se estritamente positivo real via realimentação de saída constante.*

Foi indicado por Barkana em [87] que o teorema ASPR já estava disponível na literatura russa desde as publicações de Fradkov para sistemas SISO em [75] e para

sistemas MIMO em [76], mas nesse tempo foi pouco conhecido e sua importância não foi apreciada na literatura ocidental [77].

Algumas provas parciais baseadas em lugar de raízes forem publicadas no contexto de sistemas SISO por Barkana em [90], e por Steinberg em [91], e as primeiras provas do caso geral multivariável foram desenvolvidas por Owens et al. em [92] usando lugar de raízes multivariável e por Teixeira em [93] usando representações de espaço-estado.

Provas baseadas em representações no espaço de estado que fornecem condições necessárias e suficientes para que um sistema seja ASPR forem desenvolvidas por Gu em [94] e por Huang et al. em [95].

Além disso, Huang et al. em [95] mostrou que se não existe uma matriz de realimentação de saída constante  $K$  que torne a função de transferência  $T(s)$  SPR, então não existe um controlador dinâmico com uma matriz de transferência adequada que torne a função de transferência  $T(s)$  SPR.

Isto pode ser aplicado para desenvolver uma estratégia de controle que estabilize e regule a saída para zero de qualquer planta com ordem arbitrária e desconhecida e parâmetros incertos, assumindo a existência de uma matriz  $K^*$ , com a qual a função de transferência  $T(s)$  seja SPR [53], [79], [85].

## 3.2 Mitigação da condição de simetria

A relação (3.5)-(3.6) do Lema de Kalman-Yakubovich tem sido muito útil para aplicações de controle não linear, particularmente em controle com incertezas [84] e controle adaptativo [85], onde os parâmetros da planta são desconhecidos [79].

Mas, a condição de simetria (3.6) de  $K_p$  não é genérica, é dificilmente satisfeita por sistemas reais, e pequenas perturbações paramétricas podem destruí-la. Assim, condições que possibilitem que um sistema seja passivo, i.e., que passivem o sistema, por meio de uma realimentação de estado ou de saída foram procuradas [77], [96], [97], [98] [99].

Para estender o conceito de SPR, um conceito generalizado de passividade chamado G-Passivity foi sugerido por Steinberg e Corless em [84], introduzido por Fradkov em [77] e estendido para sistemas incertos por Peaucelle et al. em [78] (passivação robusta), de acordo com as seguintes definições.

**Definição 3.1 ([77])** *O sistema (3.2)-(3.3) é chamado de G-passivo se existe uma função escalar não negativa  $V(s)$  (função de armazenamento) tal que*

$$V(x) \leq V(x_0) + \int_0^t u(t)^T G y(t) dt,$$



para qualquer solução do sistema (3.2)-(3.3) satisfazendo  $x(0) = x_0$ ,  $x(t) = x$ .

**Definição 3.2** ([77]) *O sistema (3.2)-(3.3) é chamado de estritamente G-passivo se existe uma função escalar não negativa  $V(s)$  e uma função escalar  $\mu(x) > 0$  tal que*

$$V(x) \leq V(x_0) + \int_0^t [u(t)^T G y(t) - \mu(x(t))] dt,$$

para qualquer solução do sistema (3.2)-(3.3) satisfazendo  $x(0) = x_0$ ,  $x(t) = x$ .

Estas definições forem aproveitadas por Barkana et al. em [79] e Liu et al. em [53], e aplicadas para o controle adaptativo multivariável, explorando o conceito de passividade associada com a condição WSPR, definida logo a seguir, em conjunto com a condição WASPR (“W-almost SPR”), e alguns resultados básicos relacionados com tais condições, onde W-Passivity é um nome distinto para G-Passivity.

**Definição 3.3 (WSPR [53, 79])** Um sistema linear invariante no tempo com a realização  $\{A, B, C\}$ , onde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , e  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é dito como sendo *W-Strictly-Passive (WSP)* e sua função de transferência  $C(sI - A)^{-1}B$  é dita *W-Strictly Positive Real (WSPR)* (Fig. 3.2), se existirem matrizes simétricas e positivas definidas  $P$ ,  $Q$ , e  $W$  tal que

$$A^T P + P A = -Q, \quad (3.11)$$

$$P B = C^T W. \quad (3.12)$$

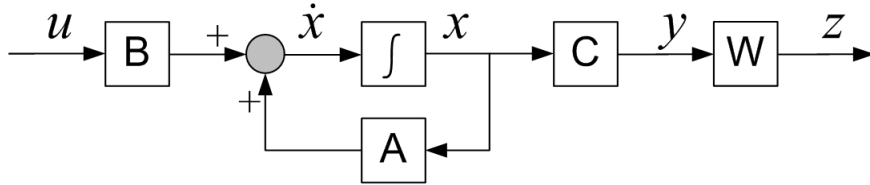


Figura 3.2: Sistema WSPR.

Em [53], observa-se que, ao contrário da condição SPR, a equação (3.12) não requer mais a condição de simetria de  $CB$ , e sim a de  $W(CB)$ . A matriz  $W$  não é requerida para a lei de adaptação, mas sua existência deve ser garantida para provar a estabilidade do sistema em malha fechada.

**Lema 3.2** [53, 79] *Dada uma matriz  $CB \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , então existe uma matriz  $\bar{W} = \bar{W}^T > 0$ ,  $\bar{W} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tal que*

$$\bar{W}(CB) = (CB)^T \bar{W} > 0, \quad (3.13)$$

se e somente se  $CB$  tem autovalores reais e positivos e sua forma de Jordan é diagonal (PDJ).

**Prova:** Como a matriz  $\bar{W}$  é positiva definida simétrica (PDS), i.e.  $\bar{W} = \bar{W}^T > 0$ , existe uma matriz  $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$  não singular tal que  $\bar{W} = T^T T$ . Assim, de (3.13) tem-se

$$T^T T(CB) = (CB)^T T^T T > 0. \quad (3.14)$$

Se pré-multiplicamos (3.14) por  $T^{-T}$  e pós-multiplicamos por  $T^{-1}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} T^{-T} T^T T(CB) T^{-1} &= T^{-T} (CB)^T T^T T T^{-1}, \\ \rightarrow T(CB) T^{-1} &= T^{-T} (CB)^T T^T, \end{aligned}$$

o qual é uma transformação de congruência, que preserva os sinais dos autovalores. Assim, obtém-se as seguintes relações

$$T(CB) T^{-1} = T^{-T} (CB)^T T^T = [T(CB) T^{-1}]^T > 0. \quad (3.15)$$

Agora, de (3.15), a matriz  $T(CB) T^{-1}$  é similar a  $CB$ , e como  $T(CB) T^{-1}$  é simétrica, os autovalores de ambas são reais e positivos e sua forma de Jordan é diagonal (PDJ). ■

**Definição 3.4 (WASPR [53, 79])** *Um sistema linear invariante no tempo com realização  $\{A, B, C\}$ , é dito WASPR se pode ser tornado WSPR através de uma realimentação estática de saída, i.e., se existe  $K \in \mathbb{R}^{m \times m}$  tal que  $C(sI - A_K)^{-1} B$  seja WSPR, com  $A_K = A - BKC$ .*

**Teorema 3.2 (Teorema WASPR [53])** *Todo sistema estritamente próprio e de fase mínima  $\{A, B, C\}$ , com  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e com a matriz de função de transferência  $C(sI - A)^{-1} B$ , pode ser tornado WSPR por meio de uma realimentação de saída adequada, se e somente se  $K_p$  possuir autovalores reais e positivos e sua forma de Jordan for diagonal (PDJ) (Fig. 3.3).*

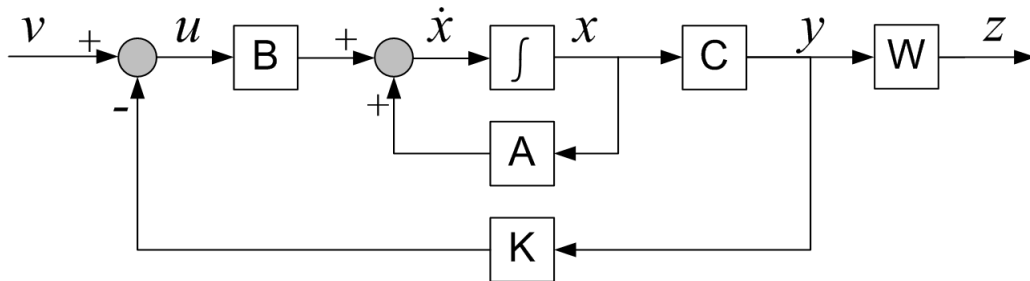


Figura 3.3: Sistema WASPR.

Assim, os conceitos de WSPR e WASPR serão aplicados no controle adaptativo por modelo de referência (MRAC) MIMO para propor uma matriz de ganho de

saída  $L$  que faz com que o sistema seja WSPR ou WASPR, i.e. que  $LK_p$  possua autovalores reais e positivos e sua forma de Jordan seja diagonal (PDJ), através de uma fatoração LDU da matriz de ganho de alta frequência.

## Capítulo 4

# Controladores Adaptativos por Modelo de Referência

O controle adaptativo por modelo de referência (MRAC) é uma estratégia de controle adaptativo que tem como objetivo conseguir que o conjunto formado pela planta  $G(s)$  de parâmetros desconhecidos e pela lei de controle de realimentação rastreiem o comportamento de um modelo de referência  $W_M(s)$ , conseguindo que, para o mesmo sinal de referência  $r$ , o sinal de saída da planta  $y_p$  seja igual ao sinal de saída do modelo  $y_M$ . A lei de controle muda a dinâmica da planta  $G(s)$  para que seu comportamento de entrada - saída (I/O) seja igual ao do modelo de referência  $W_M(s)$ . A estrutura do MRAC é mostrada na Figura 4.1.

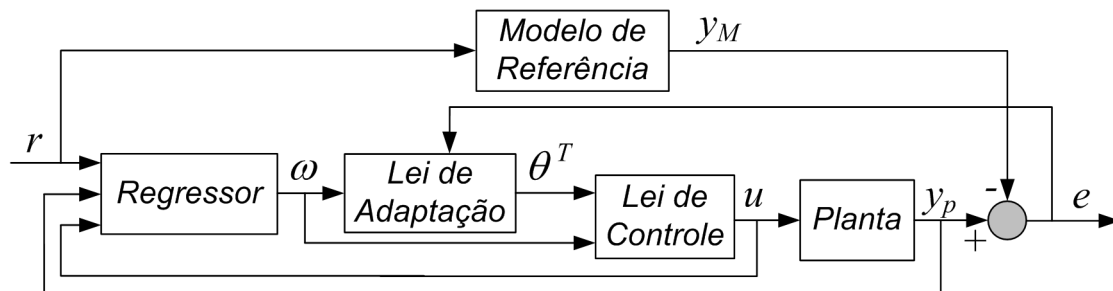


Figura 4.1: Estrutura do controle adaptativo por modelo de referência (MRAC).

O MRAC tem uma estrutura de controle similar a do controle por modelo de referência (MRC), onde os parâmetros da planta  $G(s)$  são conhecidos e são usados para calcular os parâmetros de controle  $\theta$  que são necessários para a implementação da lei de controle  $u$ . Como no MRAC os parâmetros da planta são desconhecidos, os parâmetros de controle são estimados em tempo real mediante uma lei de adaptação que procura parâmetros que fazem com que o erro de rastreamento  $e$  convirja assintoticamente para zero. É preciso ter conhecimento prévio da planta, mas não todos os parâmetros, i.e., a quantidade de pólos e zeros, mas não sua localização.

## 4.1 Definição do problema MIMO

Considere uma planta linear invariante no tempo (LTI) multivariável (MIMO) descrita por

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u, \quad (4.1)$$

$$y_p = C_p x_p, \quad (4.2)$$

onde  $x_p \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é a entrada,  $y_p \in \mathbb{R}^m$  é a saída. As matrizes  $A_p$ ,  $B_p$  and  $C_p$  são matrizes incertas constantes. Assume-se que todos os parâmetros incertos pertencem a um conjunto compacto  $\Upsilon$  conhecido, de forma que os limitantes para as incertezas estejam disponíveis para o projeto do controlador. O modelo entrada-saída da planta é dado por

$$y_p = G(s)u, \quad G(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p.$$

Assume-se que as seguintes hipóteses sobre o sistema são satisfeitas:

- (A1)  $G(s)$  é de fase mínima e tem posto completo, i.e., os zeros de transmissão de  $G(s)$  têm parte real negativa.
- (A2) O índice de observabilidade  $\nu$  de  $G(s)$ , ou um limitante superior de  $\nu$ , é conhecido.
- (A3)  $G(s)$  tem grau relativo uniforme igual a 1, i.e.,  $\lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = K_p$  ou  $\det(C_p B_p) \neq 0$ , onde a matriz não singular  $K_p$  é referida como a matriz de ganho de alta frequência (High Frequency Gain - HFG).
- (A4) Os menores principais<sup>1</sup> líderes de  $K_p$  são não nulos.

A hipótese (A1) é uma consequência do objetivo de controle que é conseguir uma lei de controle MRC que cancele os zeros da planta e os substitua com aqueles do modelo de referência forçando que a matriz de transferência em malha fechada de  $r$  para  $y_p$  seja igual ao modelo  $W_M$ . Estes cancelamentos devem ocorrer em  $\mathbb{C}^-$  [5], [100].

A hipótese (A2) é necessária para o projeto dos filtros do sistema. Porém, projetar a lei de adaptação com um índice de observabilidade  $\nu$  maior incrementaria a ordem dos filtros e o número dos parâmetros adaptados [60], [100].

A hipótese (A3) restringe a classe de sistemas abordada nesta dissertação considerando apenas sistemas com grau relativo uniforme e unitário. Embora, esta

---

<sup>1</sup>A definição dos menores principais é apresentada no Apêndice B.2.

condição possa ser verificada em aplicações praticas tais como controle de helicópteros [101] e fornos [102]. O caso em que o grau relativo é maior que 1 ( $\det(C_p B_p) = 0$ ) é mais complexo [100].

A hipótese (A4) é a correspondente para o caso MIMO do conhecimento do sinal do ganho de alta frequência  $K_p$  do caso SISO. Neste caso, é necessária para garantir a existência de uma fatoração LDU de  $K_p$  que permitirá relaxar a condição de simetria que requer que o sistema seja SPR.

O objetivo de controle é encontrar uma lei de controle  $u(t)$  tal que o erro de saída

$$e(t) = y_p(t) - y_M(t),$$

tenda para zero assintoticamente para condições iniciais arbitrárias, onde  $y_M \in \mathbb{R}^m$  é a saída do modelo de referência

$$y_M = W_M(s) r, \quad W_M(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s+a}, \dots, \frac{1}{s+a} \right\}, \quad (4.3)$$

onde  $a > 0$  e  $r \in \mathbb{R}^m$  é um sinal de referência arbitrário, limitado e contínuo por partes.

Quando a planta é conhecida, a lei de controle que assegura o casamento entre a matriz de transferência do sistema em malha fechada e  $W_M(s)$  é dada por

$$u^* = \Theta^{*T} \omega, \quad (4.4)$$

onde a matriz de parâmetros é escrita como

$$\Theta^* = [\Theta_u^{*T} \ \Theta_y^{*T} \ \Theta_0^{*T} \ K_\Theta^{*T}]^T, \quad (4.5)$$

com  $\Theta_u^*, \Theta_y^* \in \mathbb{R}^{m(\nu-1) \times m}$ ,  $\Theta_0^*, K_\Theta^* \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e o vetor regressor

$$\omega = [\omega_u^T \ \omega_y^T \ y_p^T \ r^T]^T, \quad (4.6)$$

sendo que  $\omega_u$  e  $\omega_y \in \mathbb{R}^{m(\nu-1)}$ , são obtidos dos filtros de entrada e saída dados por

$$\omega_u = F(s)u, \quad \omega_y = F(s)y_p, \quad (4.7)$$

onde

$$F(s) = \Psi(s)\Lambda^{-1}(s), \quad \Psi(s) = [Is^{\nu-2} \ Is^{\nu-3} \ \dots \ Is \ I]^T, \quad \Lambda(s) = \lambda(s)I, \quad (4.8)$$

sendo  $\lambda(s)$  um polinômio mônico Hurwitz de grau  $\nu - 1$ . As condições de casamento

requerem que

$$K_{\Theta}^{*T} = K_p^{-1}. \quad (4.9)$$

A equação do erro  $x_e$  pode ser obtida seguindo a abordagem usual para o SISO MRAC [5, 103]. Considere a seguinte realização de (4.7)

$$\dot{\omega}_u = \Phi\omega_u + \Gamma u, \quad (4.10)$$

$$\dot{\omega}_y = \Phi\omega_y + \Gamma y_p, \quad (4.11)$$

onde  $\Gamma \in \mathbb{R}^{m(\nu-1) \times m}$  e  $\Phi \in \mathbb{R}^{m(\nu-1) \times m(\nu-1)}$  com  $\det(sI - \Phi) = \det(\Lambda(s)) = [\lambda(s)]^m$ . Substituindo (4.2) em (4.11), e com (4.1) e (4.10) pode-se formar um sistema equivalente da planta e dos filtros com dinâmica descrita por

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u, \quad y_p = C_0 x, \quad (4.12)$$

onde o vetor de estado é dado por

$$x = \begin{bmatrix} x_p \\ \omega_u \\ \omega_y \end{bmatrix}$$

e as matrizes do sistema são dadas por

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & \Phi & 0 \\ \Gamma C_p & 0 & \Phi \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} B_p \\ \Gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} C_p & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notando que a matriz de parâmetros  $\Theta^*$  determinada em (4.5) e o vetor regressor  $\omega$  determinado em (4.6) podem ser escritos como

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_r \\ r \end{bmatrix}, \quad \Theta^* = \begin{bmatrix} \Theta_r^* \\ K_{\Theta}^* \end{bmatrix},$$

onde  $\omega_r$  e  $\Theta_r^*$  são dados por

$$\omega_r = \begin{bmatrix} \omega_u \\ \omega_y \\ y_p \end{bmatrix}, \quad \Theta_r^* = \begin{bmatrix} \Theta_u^* \\ \Theta_y^* \\ \Theta_0^* \end{bmatrix},$$

e, o vetor  $\omega_r$  pode ser reescrito como

$$\omega_r = \omega_0 x = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ C_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ \omega_u \\ \omega_y \end{bmatrix}.$$

Assim tem-se que  $\Theta^{*T}\omega$  pode ser reescrito como

$$\Theta^{*T}\omega = \Theta_r^{*T}\omega_0 x + K_{\Theta}^{*T}r. \quad (4.13)$$

Logo, somando e subtraindo  $B_0 u^*$  em (4.12) tem-se

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u + B_0 u^* - B_0 u^*, \quad (4.14)$$

e, substituindo (4.4) e (4.13) em (4.14) tem-se

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u + B_0(\Theta_r^{*T}\omega_0 x + K_{\Theta}^{*T}r) - B_0 u^*.$$

Agrupando os termos, obtém-se

$$\dot{x} = (A_0 + B_0 \Theta_r^{*T} \omega_0) x + B_0 (u - u^*) + B_0 K_{\Theta}^{*T} r,$$

substituindo (4.9), o sistema equivalente da planta e dos filtros pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_c x + B_c K_p [u - u^*] + B_c r, \\ y_p &= C_0 x, \end{aligned}$$

onde  $A_c = A_0 + B_0 \Theta_r^{*T} \omega_0$  e  $B_c = B_0 K_{\Theta}^{*T} = B_0 K_p^{-1}$  por (4.9).

Note que  $(A_c, B_c, C_0)$  é uma realização não mínima de  $W_M(s)$  e  $A_c$  é Hurwitz, dado que o modelo de referência  $W_M$  é BIBO estável.

O modelo de referência pode ser descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= A_c x_M + B_c r, \\ y_M &= C_0 x_M, \end{aligned}$$

então, a equação dinâmica do estado do erro ( $x_e = x - x_M$ ) é dada por

$$\dot{x}_e = A_c x_e + B_c K_p [u - u^*], \quad (4.15)$$

$$e = y_p - y_M = C_0 x_e. \quad (4.16)$$

Além disso, como  $\{A_c, B_c, C_0\}$  é uma realização de  $W_M(s)$ , a equação do erro



pode ser reescrita na forma de entrada-saída como

$$e = W_M(s)K_p [u - u^*].$$

Como a planta é incerta, a matriz de parâmetros  $\Theta^*$  é desconhecida. Assim, pode-se considerar a seguinte parametrização de controle

$$u(t) = \Theta^T(t)\omega(t),$$

onde o parâmetro  $\Theta(t)$  é adaptado a fim de conseguir o objetivo de controle. Estratégias para adaptar este parâmetro serão discutidas adiante.

## 4.2 Aplicação da passivação no MRAC MIMO

Os conceitos de passivação WSPR e WASPR, vistos no Capítulo 3, podem ser aplicados na equação do erro (4.15)-(4.16), para que torne-se passivo. Considere a equação do erro modificado

$$\dot{x}_e = A_K x_e + B_c K_p [u - u^*], \quad (4.17)$$

$$e_L = L e, \quad (e = C_0 x_e), \quad (4.18)$$

onde  $A_K = A_c - B_c K_p K L C_0$  e  $K$  é um ganho de realimentação de saída estática. O multiplicador passivador  $L$  é escolhido de modo que o sistema modificado  $\{A_K, B_c K_p, L C_0\}$  satisfaça a condição PDJ do Teorema 3.2 e seja WASPR. Uma forma de determinar  $L$  é a seguinte.

Assuma que os menores principais de  $K_p$  são distintos de zero. Em seguida, considere a fatoração  $LDU$  de  $K_p = L_p D_p U_p$ , onde  $L_p$  é triangular inferior unitária,  $D_p$  é diagonal e  $U_p$  é triangular superior unitária. Escolhendo a matriz diagonal  $D_0$  com elementos diagonais positivos e distintos e utilizando as matrizes  $L_p$  e  $D_p$  da fatoração  $LDU$  de  $K_p$ , a matriz multiplicadora triangular inferior

$$L = D_0 (L_p D_p)^{-1},$$

pode ser obtida de tal forma que a matriz

$$\bar{K}_p = L K_p = D_0 (L_p D_p)^{-1} (L_p D_p) U_p = D_0 U_p,$$

seja triangular superior com elementos diagonais e autovalores reais positivos e distintos. Assim, do Lema 1 existe uma matriz  $W$  tal que  $W L K_p$  é SPD. Deste modo,

é possível concluir que o sistema do erro modificado

$$e_L = W_M(s)LK_p\tilde{u}, \quad \tilde{u} = u - u^*,$$

é WSPR, uma vez que  $W_M(s) = \frac{1}{s+a}I$  e  $LK_p$  tem autovalores positivos e reais e sua forma de Jordan é diagonal. Assim, é possível fazer  $K = 0$  e portanto  $A_K = A$  neste caso.

**Comentário 4.1** *Modelo de Referência Geral*

*É possível considerar modelos de referência mais gerais  $W_M$ , mas então  $W_M(s)LK_p$  só poderia ser WASPR. Deste modo, alguma realimentação estática de saída  $-Ke = -K(y - y_M)$  deveria ser adicionada ao vetor de controle  $u$  de forma que a equação do erro anterior torne-se WSPR. Como o ganho  $K$  é desconhecido, ele poderia ser incorporado no vetor de parâmetros e o sinal  $y_M$  deveria então ser incorporado ao vetor regressor  $\omega$ . Note que  $y$  já está presente no regressor  $\omega$ .*

### 4.3 Controle Adaptativo por Estrutura Variável

O controle a estrutura variável por modos deslizantes, ou simplesmente controle por modos deslizantes é uma técnica muito eficiente para controlar sistemas incertos. Consiste em aplicar uma lei de controle que chaveia entre sistemas com estruturas diferentes criando uma “superfície de deslizamento” que mantém a dinâmica da trajetória do sistema restrita a uma superfície, gerando um novo tipo de movimento denominado modo deslizante. Quando o modo deslizante é alcançado o sistema torna-se de um certo modo insensível a incertezas e perturbações externas [104], [105].

Uma abordagem do VSC para sistemas SISO MRAC usando somente medidas de entrada e saída chamada Controle Adaptativo por Modelo de Referência a Estrutura Variável (VS-MRAC) foi proposta por Hsu e Costa em [106] para plantas com grau relativo  $n^* = 1$  e logo estendido para plantas com grau relativo arbitrário  $n^* > 1$  em [45]. O VS-MRAC mantém as mesmas equações dinâmicas do MRAC mas muda a implementação da lei de adaptação dos parâmetros.

O VS-MRAC apresenta propriedades de estabilidade exponencial global, capacidade de rejeição de distúrbios e robustez a dinâmicas não modeladas [107], [108]. A diferença é que o MRAC usa uma lei de adaptação paramétrica enquanto o VS-MRAC usa uma lei de controle de síntese de sinal.

Controladores MRAC usando estrutura variável para sistemas multivariáveis foram propostos, como por exemplo, por Tao e Ioannou em [109] e por Chien e Fu em [110], mas limitados a uma classe de plantas multivariáveis; por Edwards e Spurgeon em [111], mas dependendo de observadores não lineares; e por Chien et al. em [112]

para plantas incertas baseado na definição de grau relativo generalizado (GRD). Em [113], Hsu et al. propuseram o controlador vetorial unitário adaptativo por modelo de referência (UV-MRAC), e foi estendido para plantas com grau relativo arbitrário por Peixoto et al. em [114].

A lei do controle vetorial unitário (UVC), originalmente proposta por Gutman et al. em [116] e [117], é dada por

$$u = -\varrho(x, t) \frac{v(x)}{\|v(x)\|}, \quad (4.19)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $v(x)$  é uma função vetorial do estado (parcial) do sistema e  $\varrho(\cdot)$  é a função de modulação do UVC [100]. A condição necessária e suficiente para que o UVC garanta estabilidade global e convergência do erro de rastreamento para zero é que a matriz do ganho de alta frequência  $K_p$  seja anti-Hurwitz [118], [119].

O controle por Modo Deslizante (SMC) tem importantes desvantagens que limitam sua aplicação prática, como o chattering [24] ou sensibilidade ao ruído.

## 4.4 Método do fator de modificação $\sigma$

A lei do gradiente do MRAC convencional dada por

$$\dot{\theta} = -\gamma e_L \omega,$$

pode apresentar falta de robustez e tornar-se instável na presença de perturbações limitadas de pequena amplitude [120] e também na presença de dinâmicas não modeladas [121], [122].

Existem diversas técnicas que garantem uma lei adaptativa robusta na presença de distúrbios externos e/ou dinâmicas não-modeladas [123]. Dentre elas pode-se destacar: o método de modificação- $\sigma$  fixo [121], o da modificação- $\sigma$  descontínuo [22] e os métodos baseados em projeção paramétrica usados em [124] e [125].

### 4.4.1 Método da Modificação- $\sigma$ Fixo

Este método foi proposto inicialmente em [121] e consiste em introduzir um fator constante, denominado de fator  $\sigma$ , na lei de adaptação, da forma

$$\dot{\theta} = -\sigma\theta - \gamma e_L \omega, \quad (4.20)$$

onde  $\sigma > 0; \forall t \geq 0$ . Com esta modificação na lei de adaptação, garante-se que todos os sinais são limitados e que o erro de saída tende a um conjunto residual da ordem

do distúrbio.

Um problema deste método é que mesmo quando o distúrbio deixa de atuar no sistema e o sinal de referência possui persistência de excitação, o erro de saída não converge para zero. Além disso, pode ocorrer o fenômeno conhecido como Bursting [126], que resulta em surtos oscilatórios de grande amplitude e de curta duração separados por intervalos de tempo de aparente estabilidade. Uma das maneiras de evitar Bursting é garantir que os sinais do sistema sejam persistentemente excitados ou através da utilização de uma zona-morta no erro de saída.

#### 4.4.2 Método da Modificação- $\sigma$ Descontínuo

No caso anterior, se os parâmetros estimados estiverem próximos dos valores desejados, o termo com o fator  $\sigma$  da lei de adaptação (4.20) pode ser feito nulo. Esta estratégia sugere um fator  $\sigma$  descontínuo da forma [121]:

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } \|\theta\| < M_\theta, \\ \sigma_0, & \text{se } \|\theta\| \geq M_\theta, \end{cases}$$

onde  $\sigma_0 > 0$  e  $M_\theta > 0$  são parâmetros de projeto, onde a condição  $M_\theta > \|\theta^*\|$  deve ser assegurada. Neste método, como a lei de adaptação é descontínua, não se garante a existência de solução para  $\theta$ , além de existir a possibilidade de oscilações na superfície  $\|\theta\| = M_\theta$ . Uma forma de resolver este problema é utilizar uma transição contínua para o fator  $\sigma$ , da forma

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } \|\theta\| < M_\theta, \\ \sigma_0 \left( \frac{\|\theta\|}{M_\theta} - 1 \right), & \text{se } M_\theta \leq \|\theta\| \leq 2M_\theta, \\ \sigma_0, & \text{se } \|\theta\| > 2M_\theta, \end{cases}$$

Esta modificação na lei de adaptação, garante que todos os sinais são limitados e que o erro de saída tende a um conjunto residual da ordem do distúrbio. Ao contrário do método em que o fator  $\sigma$  é fixo, quando a perturbação deixar de atuar o erro de saída converge para zero. Entretanto, um problema deste método é a necessidade de se conhecer os parâmetros de projeto  $M_\theta$  e  $\sigma_0$ . O drift na condição  $\|\theta\| < M_\theta$  causado por distúrbios continua sendo uma possível fraqueza do método.

### 4.5 Controle Adaptativo por Modelo de Referência Binário

O controle MRAC, baseado em adaptação de parâmetros (PA) por meio de uma lei de adaptação de gradiente puro, sofre de falta de robustez e pode apresentar um

transitório de adaptação insatisfatório [127].

Por outro lado, o MRAC a Estrutura Variável (VS-MRAC) proposto em [106], baseado em síntese de sinal, mostra propriedades de invariância, robustez e convergência, mas requer frequência de chaveamento “infinita” do sinal de controle, fato que dificulta sua implementação.

Tomando isto em consideração, em [1] foi proposto o controlador MRAC Binário (B-MRAC), que atua como ponte entre o controlador MRAC e o controlador VS-MRAC, combinando suas melhores características, tais como bom comportamento transitório, capacidade de rejeição de distúrbios, insensibilidade a variações de parâmetros, robustez com respeito a dinâmicas não modeladas e um sinal de controle contínuo.

A teoria de Controle Binário, baseada no chamado Princípio Binário, foi introduzida por Emelyanov em [128]. Os algoritmos binários tem a importante característica de que o controle gerado é contínuo ou contínuo por partes.

O B-MRAC consiste no MRAC convencional (lei de adaptação do gradiente) com uma projeção paramétrica [129] combinada com um ganho de adaptação suficientemente alto. A projeção paramétrica, representada por um fator de projeção  $\sigma$ , é a projeção da lei do gradiente contrária ao sentido de  $\theta$ , e tem por objetivo anular a componente do gradiente (no sentido de  $\theta$ ) que faz com que o vetor de parâmetros  $\theta$  saia de uma bola finita de raio constante  $M_\theta > \|\theta^*\|$  (Fig. 4.2), onde  $\theta^*$  é o valor de  $\theta$  que consegue o controle ideal.

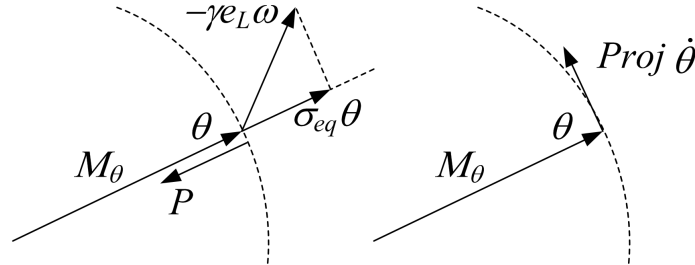


Figura 4.2: Resultado da ação da projeção da lei do gradiente contrária ao sentido de  $\theta$ .

A projeção  $P$  da lei do gradiente  $-\gamma e_L \omega$  contrária ao sentido de  $\theta$  [130] é dada por

$$P = -\frac{\theta^T (-\gamma e_L \omega)}{\theta^T \theta} \theta,$$

como o ganho de adaptação  $\gamma$  e o erro de rastreamento  $e_L$  são escalares, tem-se

$$P = -\left(\frac{-\gamma e_L \theta^T \omega}{\|\theta\|^2}\right) \theta \quad \longrightarrow \quad \sigma_{eq} = \frac{-\gamma e_L \theta^T \omega}{\|\theta\|^2},$$

onde  $\sigma_{eq}$  é o fator de projeção que atua somente quando o vetor de parâmetros  $\theta$

tenta sair da bola da raio  $M_\theta$ .

Assim, quando  $\theta$  esta na superfície da bola de raio  $M_\theta$ , o fator  $\sigma$  faz com que o gradiente seja projetado em um plano ortogonal tangente à bola, evitando que  $\theta$  saia da mesma.

É possível mostrar que no limite, quando o ganho de adaptação  $\gamma$  tende para infinito, o controle atua como um controle por modos deslizantes (SMC).

#### 4.5.1 B-MRAC SISO

A estratégia do B-MRAC para sistemas SISO foi proposta para o caso  $n^* = 1$  em [1], tem forma similar ao usado no MRAC mas com uma lei de adaptação distinta que consiste em uma modificação  $\sigma$  da lei de adaptação do gradiente, dada por

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\theta\sigma - \gamma e_L \omega, \\ \sigma &= \begin{cases} 0, & \text{se } \|\theta\| < M_\theta \text{ ou } \sigma_{eq} < 0, \\ \sigma_{eq}, & \text{se } \|\theta\| \geq M_\theta \text{ e } \sigma_{eq} \geq 0, \end{cases} \\ \sigma_{eq} &= \frac{-\gamma \theta^T \omega e_L}{\|\theta\|^2},\end{aligned}$$

onde  $\gamma$  é o ganho de adaptação e  $M_\theta > \|\theta^*\|$  é uma constante. Se  $\|\theta(0)\| \leq M_\theta$ , então pode-se mostrar que  $\|\theta(t)\| \leq M_\theta, \forall t \geq 0$ .

#### 4.5.2 B-MRAC MIMO

A lei de adaptação B-MRAC foi proposta em [1] para sistemas SISO, onde os parâmetros de adaptação são representados pelo vetor de parâmetros  $\theta \in \mathbb{R}^{2n}$  ( $m = 1$ ), formado pelos parâmetros constantes  $\theta_u, \theta_y, \in \mathbb{R}^{n-1}$  e  $\theta_0, k \in \mathbb{R}$ . No caso MIMO, os parâmetros são representados por uma matriz de parâmetros  $\Theta \in \mathbb{R}^{N \times m}$  ( $m > 1$ ).

Desta forma, para estender o B-MRAC para o caso MIMO, numa forma mais natural, ao invés de utilizar a matriz de parâmetros  $\Theta$ , considera-se um vetor modificado  $\vartheta$ , e no lugar do vetor regressor  $\omega$ , utiliza-se uma matriz regressora modificada  $\Omega$ . A projeção de um vetor é uma operação mais natural do que a projeção de uma matriz.

A matriz regressora modificada  $\Omega \in \mathbb{R}^{Nm \times m}$  e o vetor de parâmetros modificados  $\vartheta \in \mathbb{R}^{Nm}$  são dados por<sup>2</sup>

$$\Omega = I_m \otimes \omega = \begin{bmatrix} \omega & & \\ & \ddots & \\ & & \omega \end{bmatrix}, \quad \vartheta = \text{vec}(\Theta) = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

<sup>2</sup>A função  $\text{vec}$  e o produto de Kronecker são apresentados no Apêndice A.1.

onde  $N$  é o número de parâmetros do vetor regressor  $\omega$  e  $\theta_i$  corresponde à  $i$ -ésima coluna da matriz de parâmetros  $\Theta$ , como foi definida em (4.5). A lei de adaptação MIMO B-MRAC é dada por

$$\dot{\vartheta} = -\vartheta\sigma - \gamma\Omega e_L, \quad (4.22)$$

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } \|\vartheta\| < M_\vartheta \text{ ou } \sigma_{eq} < 0, \\ \sigma_{eq}, & \text{se } \|\vartheta\| \geq M_\vartheta \text{ e } \sigma_{eq} \geq 0, \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\sigma_{eq} = \frac{-\gamma\vartheta^T\Omega e_L}{\|\vartheta\|^2}, \quad (4.24)$$

onde  $M_\vartheta > \|\vartheta^*\|$ . Como no caso SISO, se  $\|\vartheta(0)\| \leq M_\vartheta$ , então segue que  $\|\vartheta(t)\| \leq M_\vartheta, \forall t \geq 0$ . Daqui em adiante, assume-se que  $\|\vartheta(0)\| \leq M_\vartheta$ . Além disso, note que a lei de controle, previamente parametrizada em termos de  $\Theta$  e  $\omega$  pode ser reescrita como

$$u(t) = \Theta^T(t)\omega(t) = \Omega^T(t)\vartheta(t). \quad (4.25)$$

### 4.5.3 Conexão entre o B-MRAC e o Controle Vetorial Unitário

O controle vetorial unitário (4.19) está relacionado com a estratégia B-MRAC da seguinte forma. Considere a lei de adaptação (4.22), reescrita como

$$\gamma^{-1}\dot{\vartheta} = -\vartheta\tilde{\sigma} - \Omega e_L, \quad \tilde{\sigma} = \gamma^{-1}\sigma_{eq},$$

onde  $\tilde{\sigma}$  é um escalar e  $\sigma_{eq}$  é definido em (4.24). No limite, quando o ganho de adaptação  $\gamma \rightarrow \infty$  ( $\gamma^{-1} \rightarrow 0$ ),  $\vartheta$  é a solução de  $\vartheta\tilde{\sigma} + \Omega e_L = 0$ .

De (4.24), pode-se verificar que para  $\Omega e_L \neq 0$  a equação

$$\vartheta \left( \frac{\vartheta^T \Omega e_L}{M_\vartheta^2} \right) = \Omega e_L,$$

deve ser satisfeita. Assim,  $\vartheta$  é colinear com o vetor  $\Omega e_L$ , e portanto  $\vartheta$  pode ser expresso por

$$\vartheta = -M_\vartheta \frac{\Omega e_L}{\|\Omega e_L\|}.$$

Notando que  $\|\Omega e_L\| = \|\omega\| \|e_L\|$ , segue que

$$\vartheta = -M_\vartheta \frac{\Omega}{\|\omega\|} \frac{e_L}{\|e_L\|}, \quad (4.26)$$

onde o sinal negativo é devido ao fato de que  $\sigma \neq 0$ , só se  $\sigma_{eq} > 0$ . Substituindo

(4.26) em (4.25) e como  $\Omega^T \Omega = \|\omega\|^2$ , tem-se que

$$u = -M_\vartheta \|\omega\| \frac{e_L}{\|e_L\|}, \quad (4.27)$$

que é a lei do UVC com uma função de modulação  $\varrho = M_\vartheta \|\omega\|$ .

#### 4.5.4 Análise de estabilidade do controlador B-MRAC

Em [2] foi demonstrado que no caso SISO o B-MRAC tem excelentes propriedades de adaptação para ganhos de adaptação  $\gamma$  suficientemente grandes. Isto resulta do fato que, se  $M_\vartheta > \|\vartheta^*\|$ , então  $\|x_e(t)\|^2$  tende exponencialmente rápido para um valor residual de ordem  $\mathcal{O}(\gamma^{-1})$ . Um resultado posterior importante é que a estabilidade global (uniforme) também pode ser garantida para o B-MRAC.

As propriedades de estabilidade e de convergência do MIMO B-MRAC são formalizadas no seguinte teorema.

**Teorema 4.1 (Teorema de estabilidade do B-MRAC)** *Considere a planta (4.1)-(4.2) e o modelo de referência (4.3). Suponha que as hipóteses (A1)-(A4) sejam satisfeitas. Considere o sistema do erro (4.17)-(4.18) onde  $L$  é uma matriz passivadora com lei de adaptação dada por (4.21)-(4.24) e com lei de controle definida em (4.25). Assuma que  $\|\vartheta(0)\| \leq M_\vartheta$  sendo que a constante  $M_\vartheta > \|\vartheta^*\|$ . Então,*

- (i)  $\|\vartheta(t)\| \leq M_\vartheta, \forall t \geq 0$ ;
- (ii)  $\|x_e(t)\|^2 \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \|x_e(0)\|^2 + \mathcal{O}(\gamma^{-1}), \forall t \geq 0$  e algumas constantes positivas  $c_1$  e  $\lambda_1$ ;
- (iii) *O erro de rastreamento  $e(t)$  bem como o estado do erro  $x_e(t)$  tendem assintoticamente para zero.*

Inicialmente, a prova foi feita considerando a matriz de parâmetros  $\Theta$  e o vetor regressor  $\omega$ , como é mostrado no Apêndice C. Posteriormente, a prova foi feita considerando o vetor de parâmetros modificado  $\vartheta$  e a matriz regressora modificada  $\Omega$ , da seguinte forma.

**Prova:** A propriedade (i) é facilmente obtida considerando a função de Lyapunov

$$2V_\vartheta = \vartheta^T \vartheta = \|\vartheta\|^2, \quad (4.28)$$

a derivada temporal de (4.28) é dada por

$$2\dot{V}_\vartheta = \dot{\vartheta}^T \vartheta + \vartheta^T \dot{\vartheta}, \quad (4.29)$$



e, substituindo (4.22) em (4.29) tem-se

$$\begin{aligned} 2\dot{V}_\vartheta &= (-\vartheta\sigma - \gamma\Omega e_L)^T \vartheta + \vartheta^T (-\vartheta\sigma - \gamma\Omega e_L), \\ &= -2\sigma\vartheta^T \vartheta - \gamma(\Omega e_L)^T \vartheta - \gamma\vartheta^T \Omega e_L. \end{aligned}$$

Pode-se notar que  $\vartheta^T \Omega e_L$  é escalar e, portanto, igual a sua transposta. De (4.24) segue que

$$\begin{aligned} 2\dot{V}_\vartheta &= -2\sigma\|\vartheta\|^2 + 2\sigma_{eq}\|\vartheta\|^2, \\ \dot{V}_\vartheta &= (\sigma_{eq} - \sigma)\|\vartheta\|^2 = 2(\sigma_{eq} - \sigma)V_\vartheta, \end{aligned}$$

e  $(\sigma_{eq} - \sigma) \leq 0$  para  $\|\vartheta\| \geq M_\vartheta$ . Assim, o conjunto  $\|\vartheta\| \leq M_\vartheta$  é positivamente invariante e portanto  $\tilde{\vartheta}^T \tilde{\vartheta}$  é uniformemente limitado por uma constante.

Considere a seguinte candidata a função de Lyapunov

$$V = x_e^T P x_e + \frac{1}{\gamma} \tilde{\vartheta}^T W_N \tilde{\vartheta}, \quad (4.30)$$

onde  $W_N \in \mathbb{R}^{Nm \times Nm}$  é positiva definida simétrica ( $W_N = W_N^T > 0$ ), pode ser reescrita como<sup>3</sup>

$$W_N = W \otimes I_N,$$

onde  $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é positiva definida simétrica ( $W = W^T > 0$ ) e  $I_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$  é a matriz identidade.

A derivada temporal de (4.30) pode ser determinada da seguinte forma (para simplificar o cálculo os termos são separados).

$$V = k_1 + k_2, \quad k_1 = x_e^T P x_e, \quad k_2 = \frac{1}{\gamma} \tilde{\vartheta}^T W_N \tilde{\vartheta},$$

A derivada temporal de  $k_1$  é dada por

$$\dot{k}_1 = x_e^T P \dot{x}_e + \dot{x}_e^T P x_e, \quad (4.31)$$

pode-se substituir (4.17) e (4.25) em (4.31), tem-se

$$\dot{k}_1 = x_e^T P (A_K x_e + B_c K_p \Omega^T \tilde{\vartheta}) + (A_K x_e + B_c K_p \Omega^T \tilde{\vartheta})^T P x_e, \quad (4.32)$$

substituindo (4.17) e (4.18) em (3.12), obtém-se  $P B_c K_p = (L C_0)^T W$ . Logo substituindo em (4.32), tem-se

$$\dot{k}_1 = x_e^T (P A_K + A_K^T P) x_e + e_L^T W \Omega^T \tilde{\vartheta} + \tilde{\vartheta}^T \Omega W e_L, \quad (4.33)$$

---

<sup>3</sup>As propriedades do produto de Kronecker são apresentadas no Apêndice A.1.

substituindo (3.11) em (4.33), note que  $\tilde{\vartheta}^T \Omega W e_L$  é escalar e igual a sua transposta, tem-se que

$$\dot{k}_1 = -x_e^T Q x_e + 2\tilde{\vartheta}^T \Omega W e_L. \quad (4.34)$$

A derivada temporal de  $k_2$  é dada por

$$\dot{k}_2 = \frac{1}{\gamma} \left[ \dot{\tilde{\vartheta}}^T W_N \tilde{\vartheta} + \tilde{\vartheta}^T W_N \dot{\tilde{\vartheta}} \right]. \quad (4.35)$$

Como  $\tilde{\vartheta} = \vartheta - \vartheta^*$ , tem-se que  $\dot{\tilde{\vartheta}} = \dot{\vartheta}$  já que  $\vartheta^*$  tem valor constante. Assim, substituindo (4.22) em (4.35) segue que

$$\begin{aligned} \dot{k}_2 &= \frac{1}{\gamma} \left[ (-\vartheta\sigma - \gamma\Omega e_L)^T W_N \tilde{\vartheta} + \tilde{\vartheta}^T W_N (-\vartheta\sigma - \gamma\Omega e_L) \right], \\ &= -\frac{\sigma}{\gamma} \vartheta^T W_N \tilde{\vartheta} - e_L^T \Omega^T W_N \tilde{\vartheta} - \frac{\sigma}{\gamma} \tilde{\vartheta}^T W_N \vartheta - \tilde{\vartheta}^T W_N \Omega e_L. \end{aligned}$$

Pode-se notar que  $\vartheta^T W_N \tilde{\vartheta}$  e  $\tilde{\vartheta}^T W_N \Omega e_L$  são escalares e iguais a suas transpostas, segue que

$$\dot{k}_2 = -2\frac{\sigma}{\gamma} \vartheta^T W_N \tilde{\vartheta} - 2\tilde{\vartheta}^T W_N \Omega e_L, \quad (4.36)$$

assim, somando (4.34) e (4.36) tem-se

$$\dot{V} = -x_e^T Q x_e + 2\tilde{\vartheta}^T \Omega W e_L - 2\frac{\sigma}{\gamma} \vartheta^T W_N \tilde{\vartheta} - 2\tilde{\vartheta}^T W_N \Omega e_L, \quad (4.37)$$

pode-se mostrar que  $\Omega W$  pode ser reescrita da seguinte forma<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \Omega W &= (I_m \otimes \omega)(W \otimes 1) = I_m W \otimes \omega, \\ &= W I_m \otimes I_N \omega = (W \otimes I_N)(I_m \otimes \omega) = W_N \Omega, \end{aligned}$$

deste modo pode-se simplificar (4.37), e assim a derivada temporal de  $V$  é dada por

$$\dot{V} = -x_e^T Q x_e - 2\frac{\sigma}{\gamma} \vartheta^T W_N \tilde{\vartheta},$$

Como a norma de  $\vartheta$  é uniformemente limitada, tem-se

$$V \leq x_e^T P x_e + \mathcal{O}(\gamma^{-1}).$$

Sendo  $\mathcal{O}(\gamma^{-1})$  uma constante positiva da ordem de  $\gamma^{-1}$ . Usando as desigualdades

---

<sup>4</sup>As propriedades do produto de Kronecker são apresentadas no Apêndice A.1.

de Rayleigh-Ritz, tem-se

$$\begin{aligned} V - \mathcal{O}(\gamma^{-1}) &\leq x_e^T P x_e \leq \lambda_{max}(P) x_e^T x_e, \\ \rightarrow x_e^T x_e &\geq \frac{[V - \mathcal{O}(\gamma^{-1})]}{\lambda_{max}(P)}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} - \mathcal{O}(\gamma^{-1}) &\leq -x_e^T Q x_e \leq -\lambda_{min}(Q) x_e^T x_e, \\ \rightarrow \dot{V} &\leq -\lambda_{min}(Q) x_e^T x_e + \mathcal{O}(\gamma^{-1}), \end{aligned} \quad (4.39)$$

substituindo (4.38) em (4.39), tem-se

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)} [V - \mathcal{O}(\gamma^{-1})] + \mathcal{O}(\gamma^{-1}),$$

simplificando, obtém-se

$$\dot{V} \leq -\lambda_1 [V - \mathcal{O}(\gamma^{-1})],$$

onde  $\lambda_1 = \lambda_{min}(Q)/\lambda_{max}(P)$  com os autovalores máximos e mínimos das matrizes  $Q = Q^T > 0$  e  $P = P^T > 0$  denotados por  $\lambda_{min}(Q)$  e  $\lambda_{max}(P)$ , respectivamente. Isto implica a propriedade **(ii)** por um lema de comparação para desigualdades diferenciais (ver Lema 3.4 de [83]).

De (4.23) e como  $\tilde{\vartheta} = \vartheta - \vartheta^*$  e  $M_{\vartheta} \geq \|\vartheta^*\|$  por hipótese, pode ser mostrado que o termo  $-2\tilde{\sigma} \text{tr} [\tilde{\vartheta} W \vartheta^T]$  é não-positivo. Assim, segue que  $\dot{V} \leq -x_e^T Q x_e \leq 0$ .

Desta forma, usando o Lema de Barbalat<sup>5</sup>, é possível mostrar que  $x_e(t) \rightarrow 0$  e  $e_L(t), e(t) \rightarrow 0$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ . ■

Isto mostra que o transitório de adaptação do controlador proposto é de fato exponencialmente convergente para um conjunto residual de ordem  $\gamma^{-1}$ . Além disso, pode ser argumentado que o controlador binário estabelece um ponte entre o controle adaptativo e o controle por modo deslizante através do ganho de adaptação  $\gamma$ . Portanto, tal ganho pode ser ajustado/sintonizado para obter o melhor de ambas estratégias, mas evitando as desvantagens, e.g., chattering, mal transitório ou falta de robustez (veja [131] para um análise de robustez obtida com projeção paramétrica). Note que esse resultado não depende da riqueza de excitação como no sistema de controle adaptativo tradicional.

<sup>5</sup>O Lema de Barbalat é apresentado no Apêndice A.2

## 4.6 Aplicação do Controle Adaptativo B-MRAC

Conforme visto anteriormente a estratégia de controle B-MRAC, proposta originalmente para sistemas SISO, e estendida para sistemas MIMO, representa uma ponte entre o controle adaptativo e o controle por modos deslizantes e permite incrementar o ganho de adaptação obtendo um melhor comportamento transitório e robustez.

Além disso, foi visto que um sistema MIMO é passivo se sua matriz de ganho de alta frequência é simétrica positiva definida (SPD), e que essa restrição pode ser relaxada usando um multiplicador passivador  $L$  obtido pela fatoração  $LDU$  de forma que  $LK_p$  tenha autovalores reais positivos e sua forma de Jordan seja diagonal (PDJ), fazendo com que o sistema seja WASPR.

Assim, a equação do erro equivalente  $e$  do caso MIMO pode ser passivada por meio de uma realimentação  $L$  que faz com que a nova equação do erro  $e_L$  seja passiva, com a qual obtém-se uma lei de adaptação que assegura que o erro tenda assintoticamente para zero.

Nesta seção a aplicação da combinação da estratégia MIMO B-MRAC com a matriz multiplicadora  $L$  que passiva o sistema é ilustrada através de dois exemplos.

### 4.6.1 Exemplo de Projeto 1: Problema do Rastreamento Visual

Considera-se o problema de servovisão adaptativo direto de manipuladores planares usando uma câmera fixa (planta) com um eixo óptico ortogonal ao espaço de trabalho do robô quando a orientação da câmera é incerta com respeito às coordenadas do espaço de trabalho do robô [53], [56], [57].

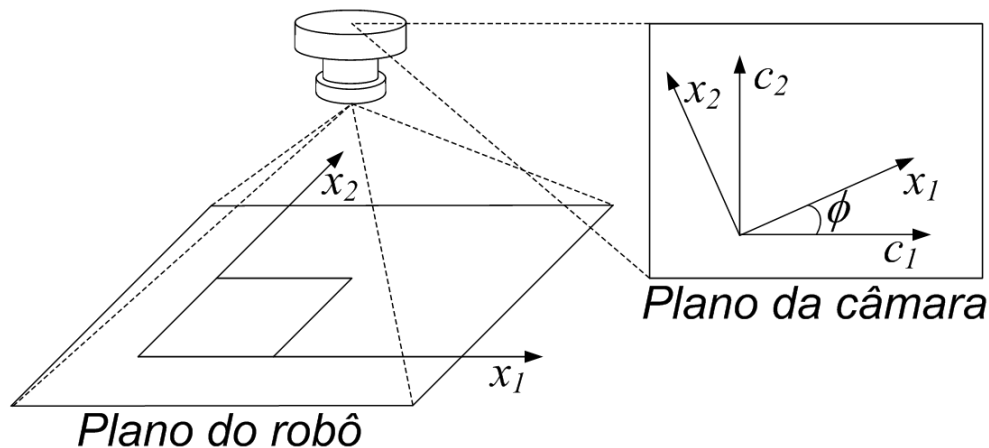


Figura 4.3: Representação esquemática do sistema câmera-robô.

O objetivo é controlar o robô para conseguir que a imagem do efetuador consiga rastrear a trajetória desejada no plano imagem. O diagrama de blocos de controle é representado na Fig. 4.4.

A motivação para escolher este exemplo é que a matriz HFG é essencialmente uma matriz de rotação, que não é simétrica a exceção dos casos triviais. Além disso, os autovalores da matriz HFG são complexos (quando a orientação da câmara é  $\phi \neq 0^\circ$ ), necessitando, assim, um multiplicador de passivação para obter a condição WSPR.

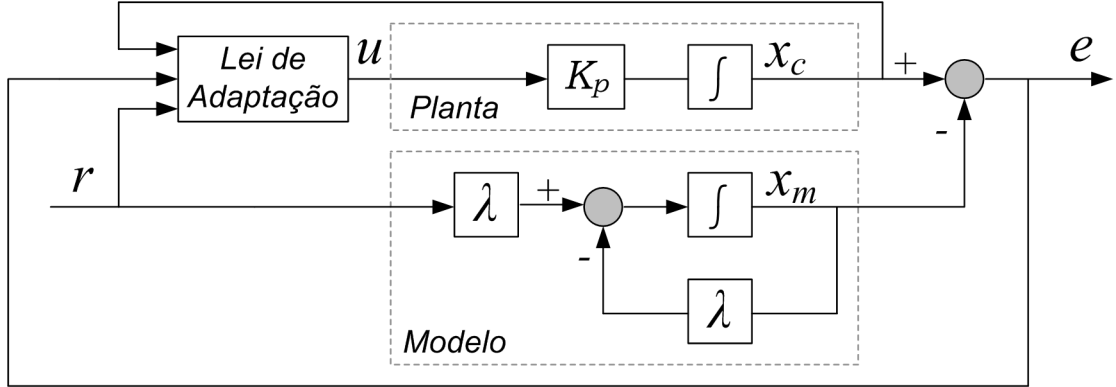


Figura 4.4: Problema de rastreamento visual adaptativo.

O problema de controle cartesiano nas coordenadas da imagem da câmara é descrito por:

$$\dot{x}_c = K_p u, \quad K_p = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix},$$

onde  $x_c \in \mathbb{R}^2$  representa as coordenadas do efetuador final no plano imagem,  $u \in \mathbb{R}^2$  é a lei de controle cartesiana do robô e  $K_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  é a matriz de rotação que representa a relação entre o espaço imagem e o espaço de trabalho do robô (um fator de escala unitário é assumido).

A trajetória desejada no plano imagem é gerada pelo modelo de referência especificado por

$$\dot{x}_m = -\lambda x_m + \lambda r(t),$$

onde a constante  $\lambda$  é positiva e  $r(t) \in \mathbb{R}^2$  é um sinal de referência arbitrário, contínuo por partes e limitado.

Então, o objetivo é achar uma lei de controle  $u$  tal que o erro de rastreamento  $e = x_c - x_m$ , tenda assintoticamente para zero para condições iniciais arbitrárias.

A equação do erro de rastreamento é dada por

$$\dot{e} = -\lambda e + K_p u - \lambda \omega.$$

A lei de controle ideal que assegura o casamento entre o modelo e o sistema em

malha fechada é dada por  $u^* = \Theta^{*T}\omega$ , onde  $\Theta^{*T} = \lambda K_p^{-1}$  e  $\omega = r(t) - x_c$ .

### Determinação da matriz passivadora $L$

Para tornar o sistema do erro WASPR é necessário achar uma matriz  $L$  constante tal que os autovalores de  $LK_p$  sejam *PDJ* em um intervalo aberto de incerteza de  $\phi$ . Para esta finalidade, adota-se o procedimento proposto em [53].

A decomposição *LDU* de  $K_p$  é dada por

$$K_p = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s/c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -s/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $c = \cos(\phi)$ ,  $s = \sin(\phi)$  e

$$L_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s/c & 1 \end{bmatrix}, \quad D_p = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1/c \end{bmatrix}.$$

Definindo

$$D_0 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix},$$

e substituindo em  $L = D_0(L_p D_p)^{-1}$ , tem-se

$$L = \begin{bmatrix} \alpha/c & 0 \\ -\beta s & \beta c \end{bmatrix}.$$

Pode-se avaliar  $L$  para alguns valores nominais de  $\phi$ , fixando  $\beta = 1$  e permitindo que o parâmetro  $\alpha$  possa variar livremente. A tabela apresentada em [53] mostra as faixas de valores do ângulo  $\phi$  para as quais a condição WASPR é preservada ( $LK_p$  tem autovalores reais positivos e é diagonalizável) com  $L$  calculado usando o valor nominal  $\phi = \phi_{nom}$ .

$\alpha$ ( $\beta = 1$ )	$\phi_{nom} = 0$	$\phi_{nom} = 45^\circ$
$\alpha = 2$	$-18^\circ < \phi < 19^\circ$	$-27^\circ < \phi < 49^\circ$
$\alpha = 5$	$-41^\circ < \phi < 41^\circ$	$-48^\circ < \phi < 60.1^\circ$
$\alpha = 20$	$-64^\circ < \phi < 64^\circ$	$-71^\circ < \phi < 73^\circ$

**Tabela 1:** Domínios de incerteza de  $\phi$  para preservar a condição WASPR.

### Simulações

Para realizar as simulações, considera-se que o ângulo de orientação da câmara é  $\phi = -30^\circ$ , de forma que os autovalores da matriz de ganho de alta frequência  $K_p$

sejam  $\{0.86 \pm 0.5i\}$  e as seguintes condições iniciais  $x_c(0) = \begin{bmatrix} 5 & 5 \end{bmatrix}^T$ .

O modelo e o sinal de referência são escolhidos como  $\lambda = 1$  e

$$r(t) = \begin{bmatrix} 10 \sin(3t) \\ 10 \sin(0.5t) \end{bmatrix}$$

Note que este sinal de referência é suficientemente rico para garantir a convergência paramétrica.

Para o projeto do controlador utiliza-se o seguinte valor nominal para o ângulo da câmera  $\phi_{nom} = 45^\circ$ , e as constantes  $\alpha = 5$  e  $\beta = 1$ , para obter a matriz passivadora  $L$ . Para  $\phi = -30^\circ$ , os autovalores de  $LK_p$  são  $\{5.46; 0.91\}$  e a condição WASPR é satisfeita, i.e.  $LK_p$  tem forma de Jordan diagonal e autovalores reais e positivos. Na lei de adaptação do B-MRAC escolhe-se  $M_\vartheta = 3$ , que é um limitante superior da norma do vetor de parâmetros modificados ideais ( $\|\vartheta^*\| = \sqrt{2}$ ).

### Resultados com a estratégia MRAC convencional

Quando o ganho de adaptação é ( $\gamma = 5$ ) e o multiplicador passivador  $L$  não é aplicado, o MRAC não é capaz de garantir a convergência do erro de rastreamento para zero e nem a convergência dos parâmetros adaptativos (Fig. 4.5).

No entanto, quando  $L$  é aplicado a convergência do erro e dos parâmetros é obtida apesar do mal comportamento no transitório. Além disso, conforme pode ser observado na Figura 4.6 o sinal de controle  $u$  apresenta picos e um desempenho transitório insatisfatório.

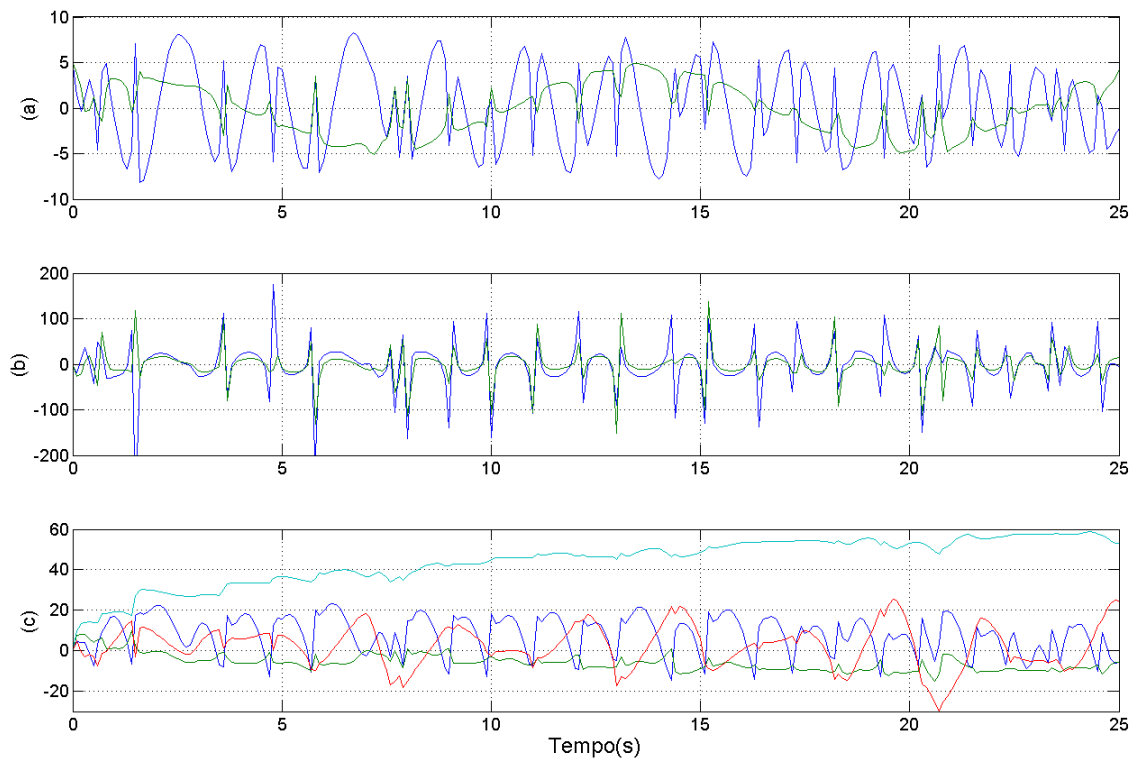


Figura 4.5: Controle MRAC sem passivação e  $\gamma = 5$ : (a) Erros de rastreamento  $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta  $u$ ; (c) Parâmetros adaptados  $\Theta$ .

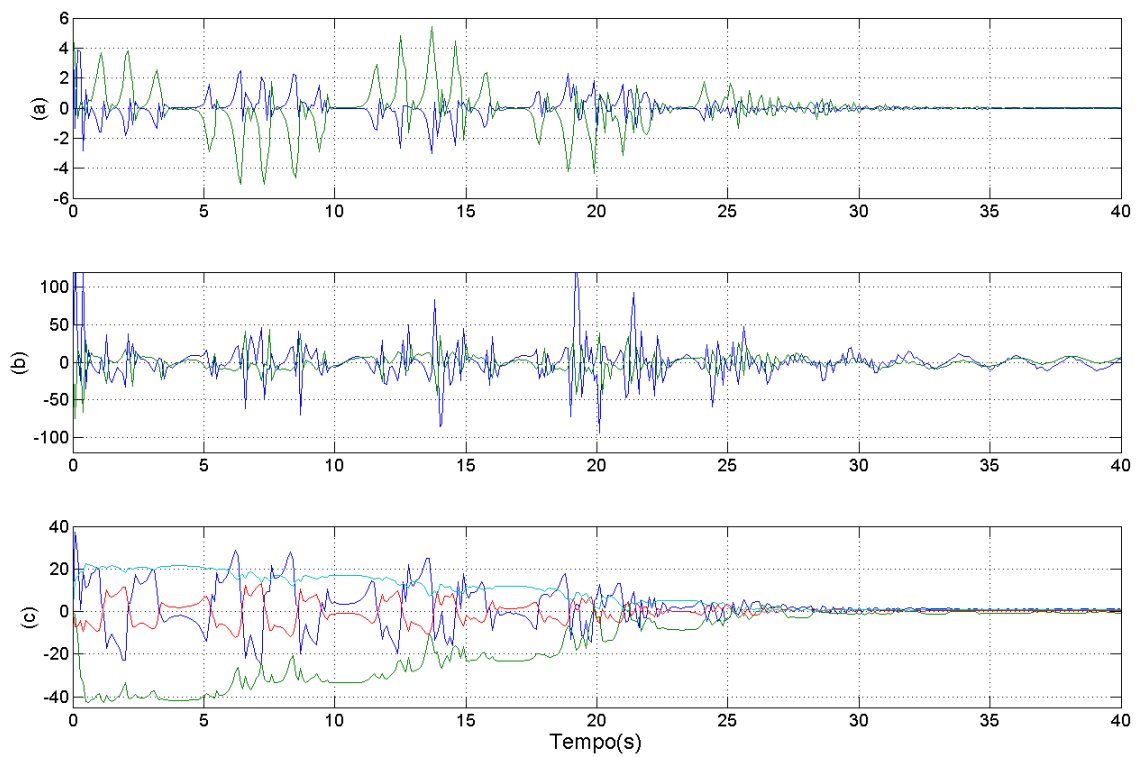


Figura 4.6: Controle MRAC com passivação e  $\gamma = 5$ : (a) Erros de rastreamento  $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta  $u$ ; (c) Parâmetros adaptados  $\Theta$ .



## Resultados com a estratégia B-MRAC

Quando a matriz passivadora  $L$  não é aplicada, o B-MRAC também não é capaz de garantir rastreamento assintótico e convergência paramétrica. Entretanto, comparado com o MRAC convencional os erros de rastreamento são menores. O sinal de controle apresenta grandes oscilações mesmo em estado estacionário (Fig. 4.7).

Mas quando  $L$  é aplicada, uma diferença notável de desempenho é observada: o B-MRAC consegue garantir a convergência dos parâmetros em um tempo muito menor (Fig. 4.8) do que o tempo necessário para o MRAC convencional com passivação, além disso o B-MRAC obtém erros de rastreamento menores no transitório e com uma convergência mais rápida para zero.

Utilizando um ganho de adaptação maior ( $\gamma = 20$ ) é possível reduzir os erros de rastreamento e o *overshoot* inicial, mas a convergência paramétrica torna-se mais lenta e o sinal de controle apresenta um *chattering* maior (Fig. 4.9). Pode-se notar que os parâmetros requerem um tempo de simulação maior ( $t \approx 100s$ ) para convergir (Fig. 4.10).

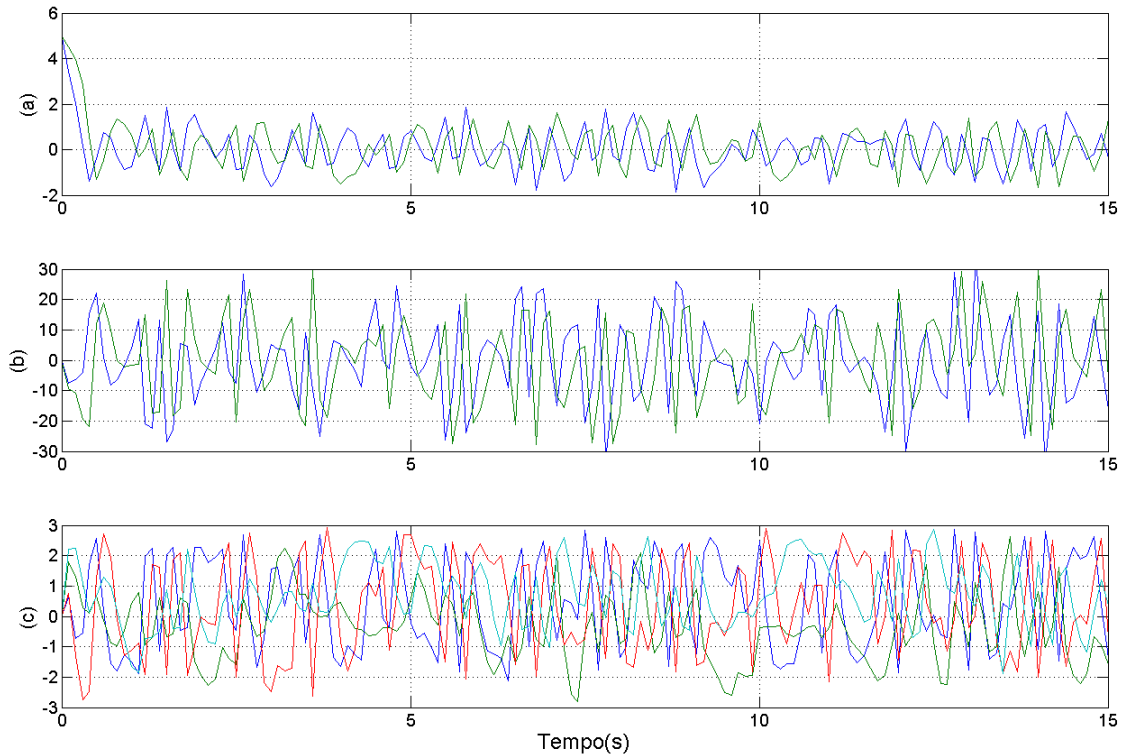


Figura 4.7: Controle B-MRAC sem passivação e  $\gamma = 5$ : (a) Erros de rastreamento  $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta  $u$ ; (c) Parâmetros adaptados  $\Theta$ .

## Comparação dos resultados entre UVC e B-MRAC

Para ilustrar a conexão entre o UVC e o B-MRAC discutida na Seção (4.5.3), a lei do UVC apresentada em (4.27) é implementada, e em seguida os resultados

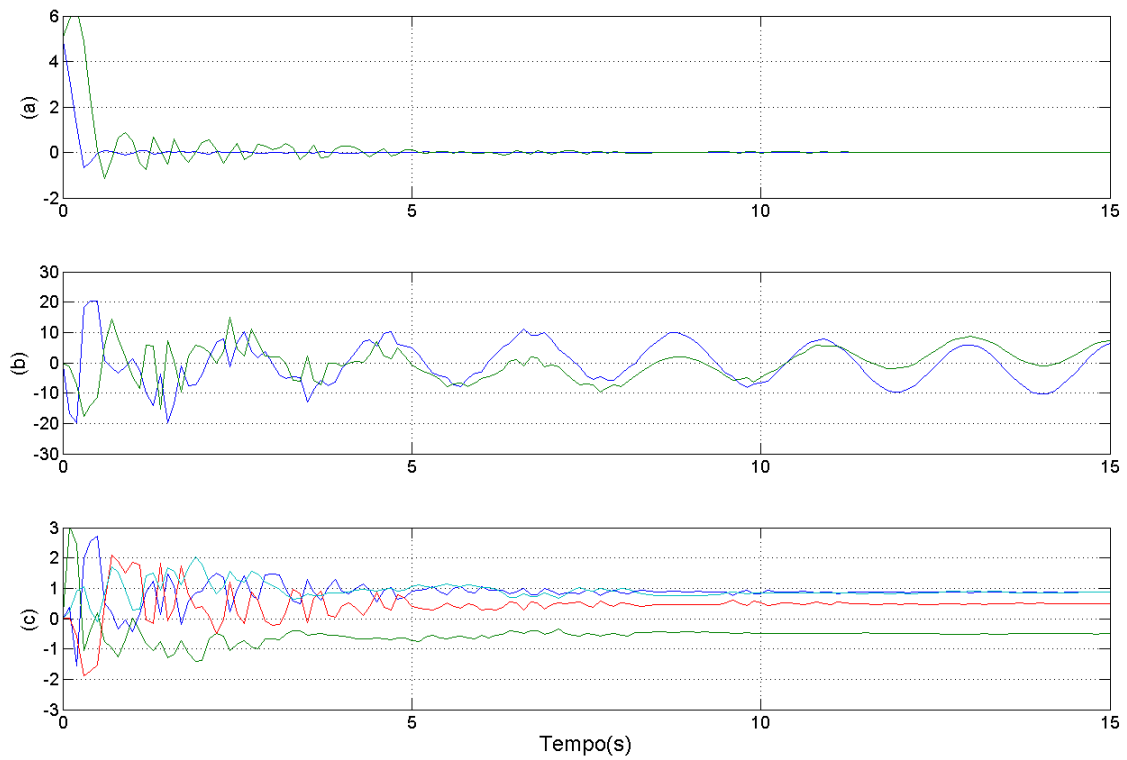


Figura 4.8: Controle B-MRAC com passivação e  $\gamma = 5$ : (a) Erros de rastreamento  $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta  $u$ ; (c) Parâmetros adaptados  $\Theta$ .

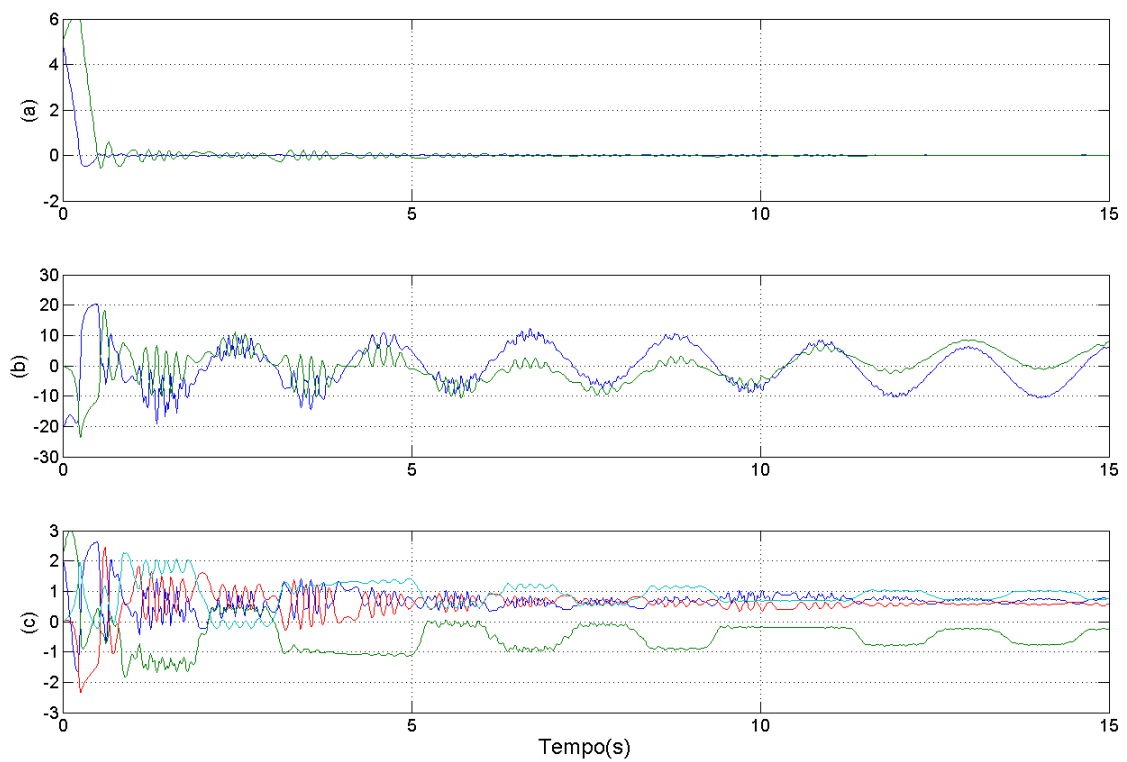


Figura 4.9: Controle B-MRAC com passivação e  $\gamma = 20$ : (a) Erros de rastreamento  $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta  $u$ ; (c) Parâmetros adaptados  $\Theta$ .

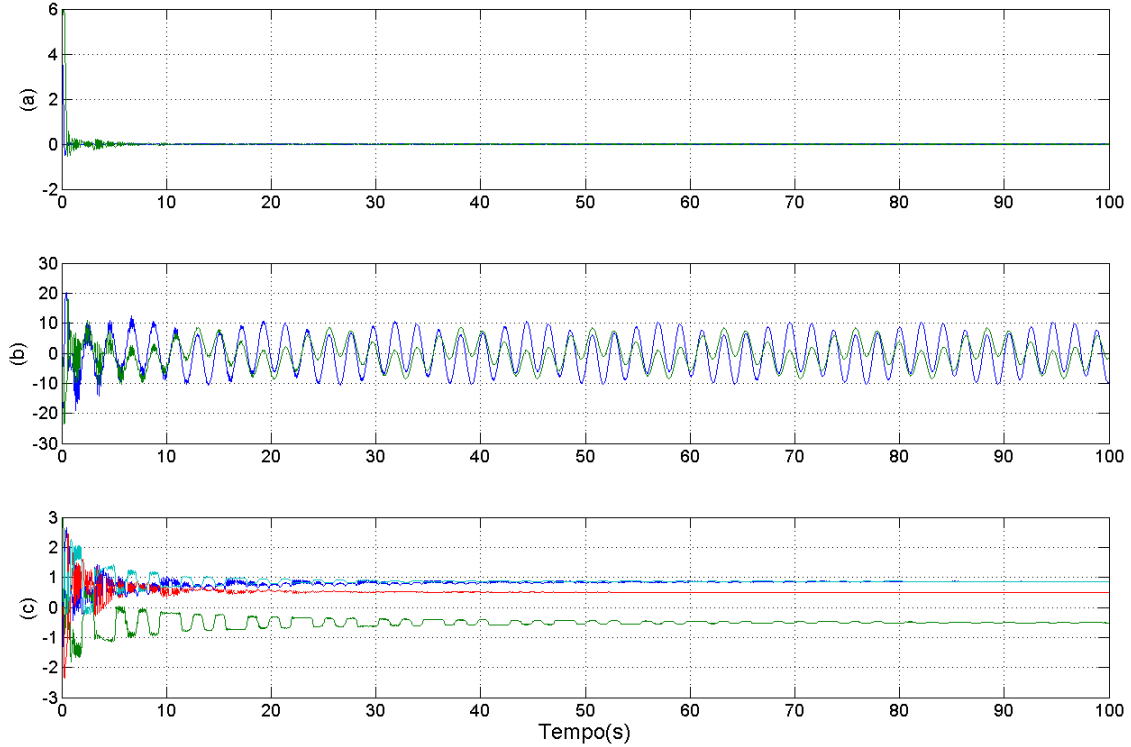


Figura 4.10: Controle B-MRAC com passivação e  $\gamma = 20$  (escala de tempo ate convergência de parâmetros): (a) Erros de rastreamento  $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta  $u$ ; (c) Parâmetros adaptados  $\Theta$ .

obtidos são comparados com os do B-MRAC utilizando um ganho de adaptação  $\gamma = 100$ . Inicialmente, a passivação não é utilizada em ambos os casos.

Observando as Figuras 4.11 e 4.12, pode-se verificar que ambas estratégias apresentam resultados similares, como era esperado. Entretanto, o chattering de controle é significativo. Por outro lado, quando um multiplicador passivador é usado a transição do B-MRAC para o UVC é mais suave, uma vez que o *chattering* de controle tende a ser muito menor (compare a Fig. 4.12 com a Fig. 4.13), mesmo para ganhos de adaptação grandes. Pode-se notar que os parâmetros requerem um tempo de simulação maior ( $t \approx 1000s$ ) para convergir (Fig. 4.14).

Isto ilustra a diferença entre as duas condições sobre  $K_p$  para o MIMO B-MRAC ( $LK_p$  é diagonalizável e possui autovalores reais e positivos) e para o UVC ( $K_p$  possui autovalores com parte real positiva). No limite quando  $\gamma \rightarrow \infty$ , o B-MRAC tende a se comportar como o UVC, com ou sem passivação. No entanto, à medida que o ganho  $\gamma$  é aumentado, o *chattering* do sinal de controle pode ser reduzido utilizando o multiplicador passivador  $L$ .

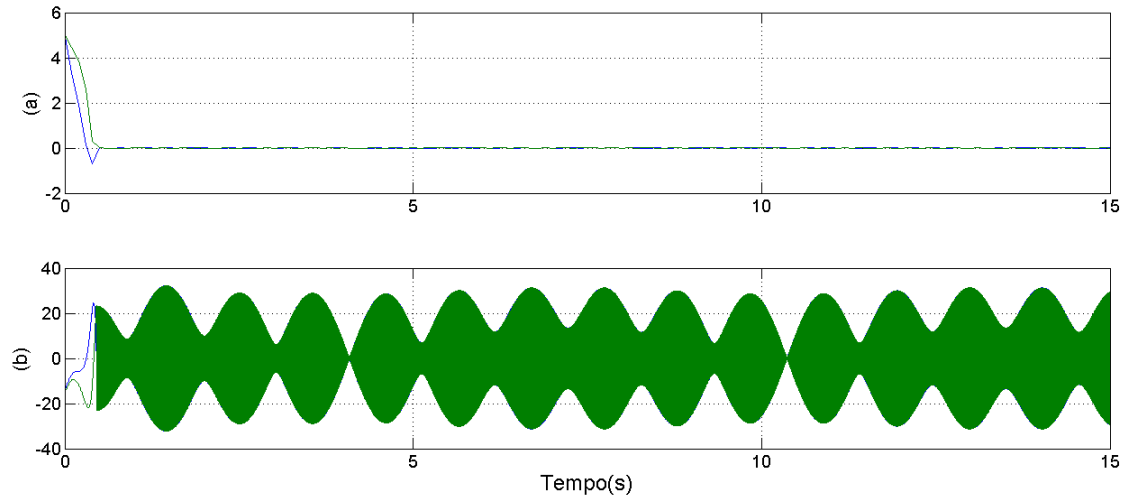


Figura 4.11: Controle UVC sem passivação: (a) Erros de rastreamento  $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta  $u$ .

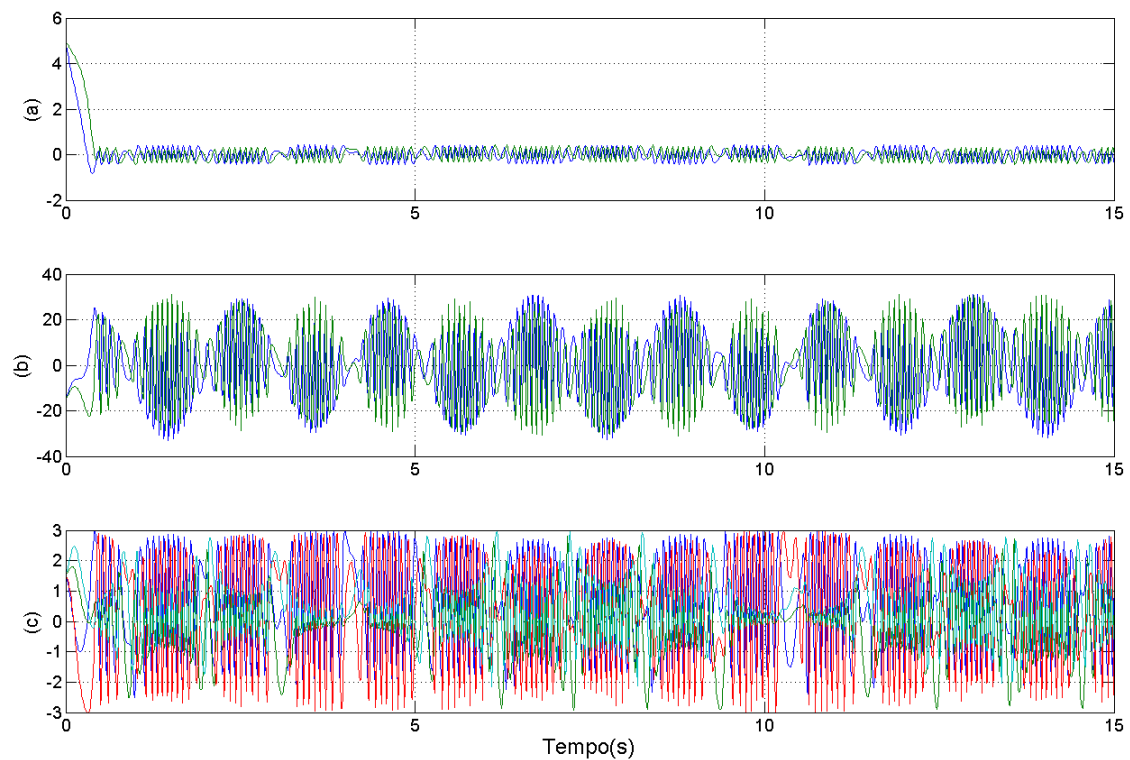


Figura 4.12: Controle B-MRAC sem passivação e  $\gamma = 100$ : (a) Erros de rastreamento  $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta  $u$ ; (c) Parâmetros adaptados  $\Theta$ .

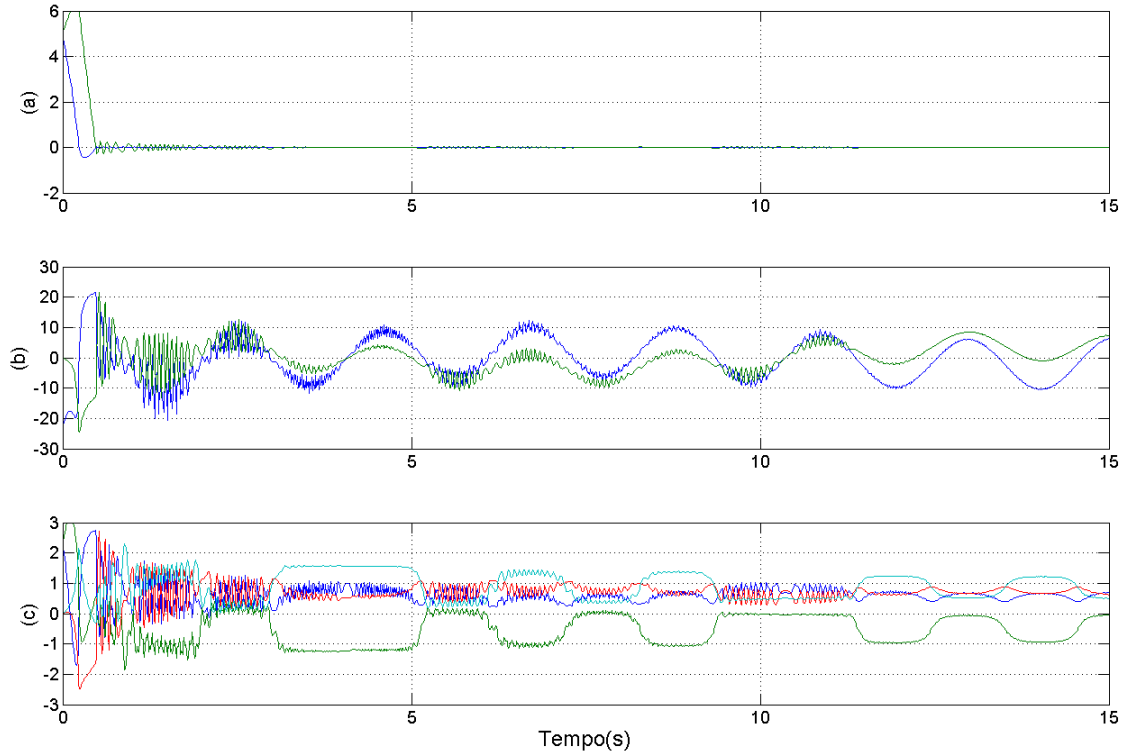


Figura 4.13: Controle B-MRAC com passivação e  $\gamma = 100$ : (a) Erros de rastreamento  $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta  $u$ ; (c) Parâmetros adaptados  $\Theta$ .

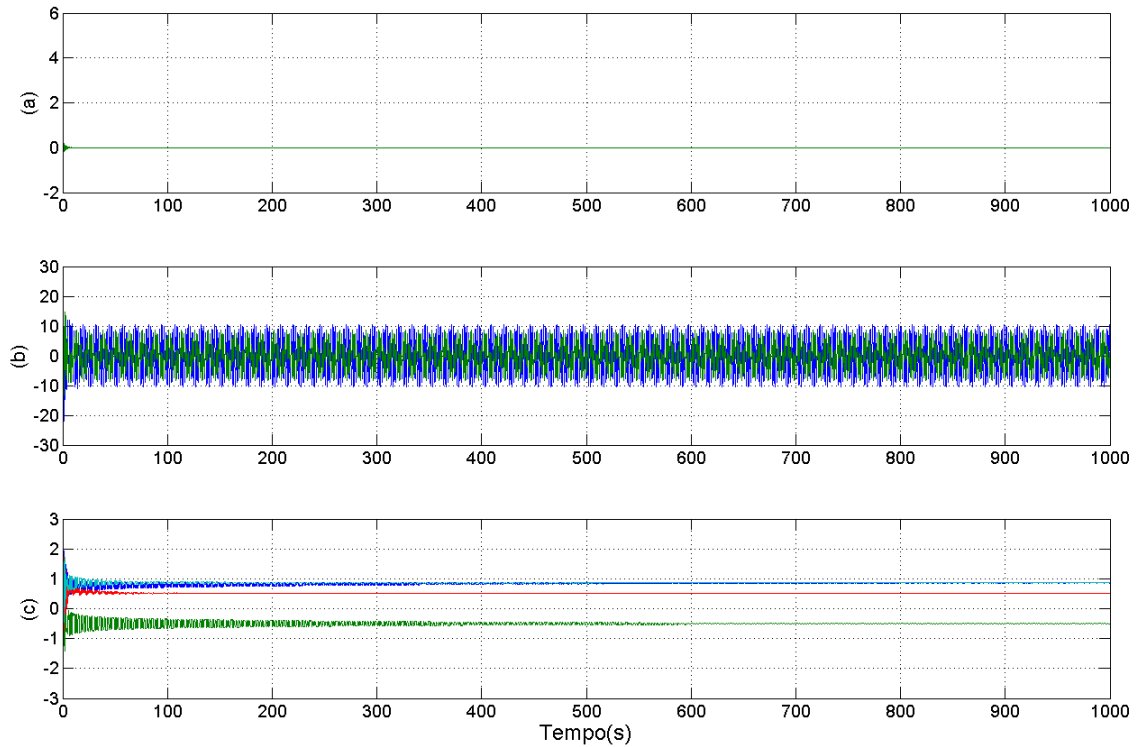


Figura 4.14: Controle B-MRAC com passivação e  $\gamma = 100$  (escala de tempo até convergência de parâmetros): (a) Erros de rastreamento  $e_L$ ; (b) Sinais de controle da planta  $u$ ; (c) Parâmetros adaptados  $\Theta$ .

## Comparação com um sistema de rastreamento visual com regressor distinto

No artigo [53] de Hsu et al., foi considerado também um sistema de rastreamento visual. Aquele sistema tinha como única diferença o vetor regressor. No sistema desta dissertação, o regressor é dado por  $\omega = r(t) - x_c$ , de outro lado, o regressor do sistema do artigo de Liu et al. [53] é dado por  $\omega = r(t)$ .

O comportamento daquele sistema com e sem passivação ou projeção foi similar ao desta dissertação, mas com a importante diferença de que sem passivação e sem projeção o sistema instabiliza (Fig. 4.15).

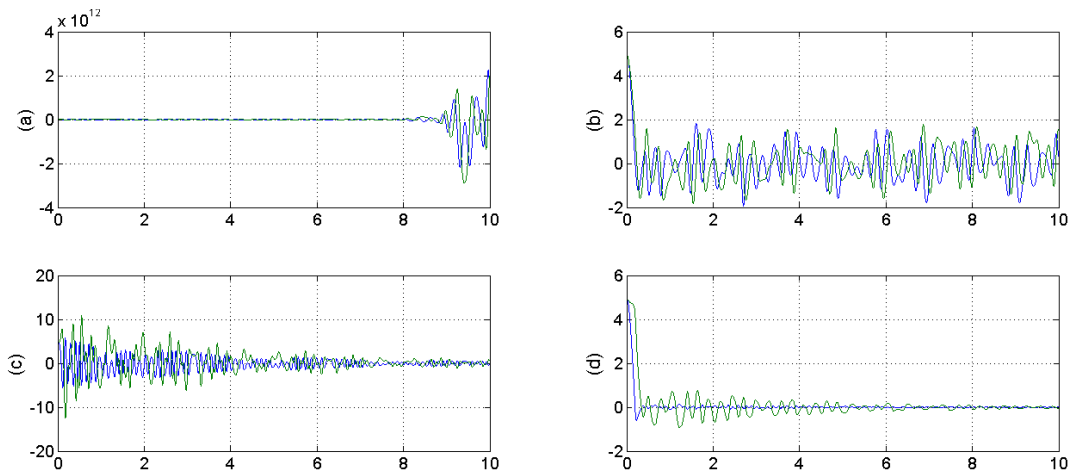


Figura 4.15: Erros de rastreamento com  $\omega = r(t)$ : (a) MRAC sem passivação; (b) B-MRAC sem passivação; (c) MRAC com passivação; (d) B-MRAC com Passivação.

Além disso, foi notado que um ganho de adaptação  $\gamma$  menor consegue controlar ambos sistemas sem requerer passivação. Para mostrar isso, foi feita uma simulação de ambos casos com um ganho de adaptação de  $\gamma = 0.1$  (Fig. 4.16).

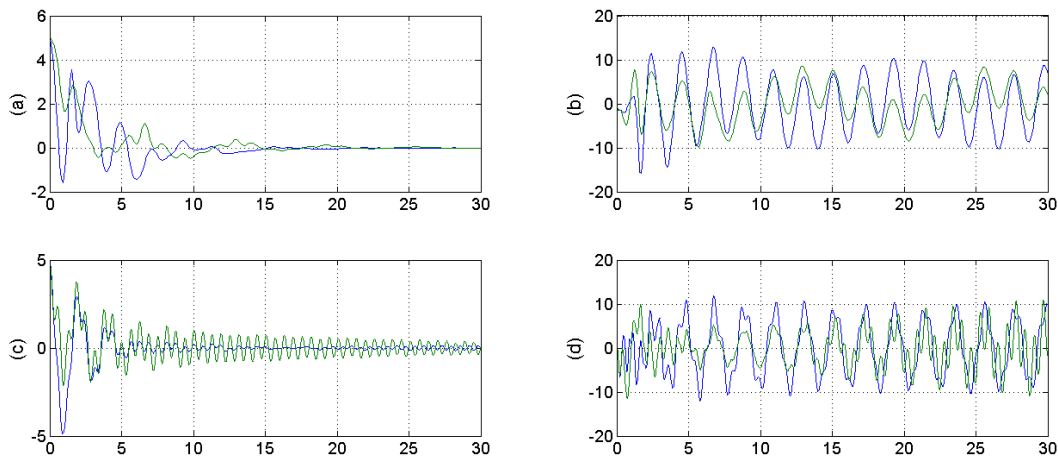


Figura 4.16: Rastreamento visual com MRAC sem passivação e  $\gamma = 0.1$ : (a) Erros de rastreamento com  $\omega = r(t) - x_c$ ; (b) Sinais de controle da planta  $\omega = r(t) - x_c$ ; (c) Erros de rastreamento com  $\omega = r(t)$ ; (d) Sinais de controle da planta  $\omega = r(t)$ .

## 4.6.2 Exemplo de Projeto 2: Problema de uma planta MIMO

Considere a planta  $G(s)$  dada por

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s-1} & \frac{1}{s+4} \\ \frac{-3}{s+3} & \frac{4}{s+2} \end{bmatrix}$$

a qual deve seguir o modelo de referência  $W_M(s)$ , dado por

$$W_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}$$

Uma realização  $\{A, B, C\}$  no espaço de estado do sistema pode ser obtida

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{aligned}$$

Pode-se verificar a hipótese (A1) usando a matriz de Rosenbrock (2.13), tem-se

$$Ro(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & s+3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s+4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(Ro(s)) = 11s^2 + 59s + 900 = 0$$

Assim, a planta tem zeros estáveis (com parte real negativa) em  $-2.68 \pm 0.99i$

Para satisfazer a hipótese (A2) e poder projetar os filtros, pode-se procurar o índice de observabilidade  $\nu$  com a equação (2.14), tem-se

$$\text{posto} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} = 4$$

Assim, o índice de observabilidade é  $\nu = 2$ . Escolhendo  $\lambda(s) = s + 5$ , pode-se aplicar a equação (4.8). Assim os filtros do sistema estão dados por

$$F(s) = \begin{bmatrix} \frac{5}{s+5} & 0 \\ 0 & \frac{5}{s+5} \end{bmatrix},$$

A hipótese (A3) pode ser verificada determinando se  $\det(CB) \neq 0$ , tem se

$$K_p = CB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\det(CB) = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = 11 \neq 0$$

Para verificar o cumprimento da hipótese (A4), pode-se calcular os menores principais líderes  $m_1$  e  $m_2$  do ganho de alta frequência  $K_p$ , tem-se

$$m_1 = \det[2] = 2 \neq 0, \quad m_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = 11 \neq 0,$$

assim, verifica-se que os menores principais líderes são não nulos.

### Determinação da matriz passivadora $L$

Da mesma forma como foi feito no exemplo anterior, uma matriz  $L$  constante tal que  $LK_p$  tenha autovalores reais positivos, tornando o sistema do erro WASRP, será procurada.

A decomposição  $LDU$  de uma matriz  $(2 \times 2)$  é dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{ad-cb}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a decomposição  $LDU$  de  $K_p$  é dada por

$$K_p = L_p D_p U_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definindo

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$



e substituindo em  $L = D_0(L_p D_p)^{-1}$ , tem-se

$$L = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.55 & 0.36 \end{bmatrix}.$$

## Simulações

Calculando a matriz de parâmetros ideais  $\Theta^*$ , pode-se determinar um valor para a constante  $M_\vartheta$ . A matriz de parâmetros ideais  $\Theta^*$  pode ser encontrada por meio da equação (D.13) do Apêndice D, sendo dada por

$$\Theta^* = \begin{bmatrix} \frac{17}{55} & \frac{16}{55} & \frac{24}{55} & \frac{-6}{55} & \frac{-20}{11} & \frac{4}{11} & \frac{4}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{-12}{55} & \frac{34}{55} & \frac{18}{55} & \frac{12}{55} & \frac{-15}{11} & \frac{-8}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}^T. \quad (4.40)$$

Então, de (4.40) determina-se a norma do vetor de parâmetros modificado  $\|\vartheta^*\| = 2.65$ , e assim, escolhe-se  $M_\vartheta = 5$  para as simulações.

Escolhe-se um ganho de adaptação  $\gamma = 10$  e a condição inicial do vetor de estados da planta  $x_{ini} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}^T$  para todas as simulações. O sinal de referência escolhido é

$$r = \begin{bmatrix} \sin 10t + 4(\cos 3t + \cos 7t) \\ 3 \cos 10t + 2(\sin 4t + \sin 8t) \end{bmatrix}$$

## Simulação com MRAC

Quando a passivação não é aplicada, o erro se mantém dentro de uma faixa de  $(-0.4, 0.8)$ , e os parâmetros não convergem no tempo da simulação (Fig. 4.17 e Fig. 4.18).

Após aplicar a matriz passivadora  $L$ , o esquema de controle tem um desempenho melhor e consegue estimar parâmetros de adaptação, mais próximos dos ideais, em um tempo menor (Fig. 4.19 e Fig. 4.20).

## Simulação com B-MRAC

Quando o sistema é passivado, o B-MRAC consegue adaptar parâmetros de controle mais próximos dos ideais (Fig. 4.21 e Fig. 4.22). Mas, a maior vantagem em comparação com o controle MRAC clássico é que pode-se usar um ganho de adaptação maior e conseguir convergência mais rápida do erro de rastreamento que o MRAC sem que os parâmetros se afastem muito dos ideais (Fig. 4.23 e Fig. 4.24).

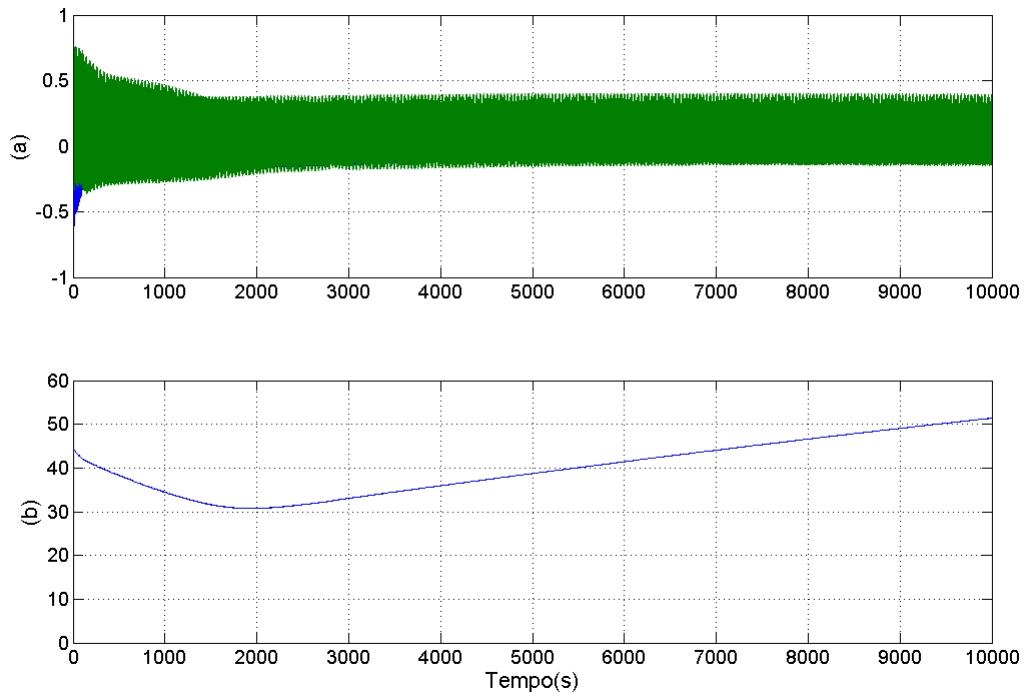


Figura 4.17: Controle MRAC sem passivação e  $\gamma = 10$ :  
 (a) Erros de rastreamento ( $e_L$ ); (b) Norma do vetor de parâmetros modificado  $\|\vartheta\|$ .

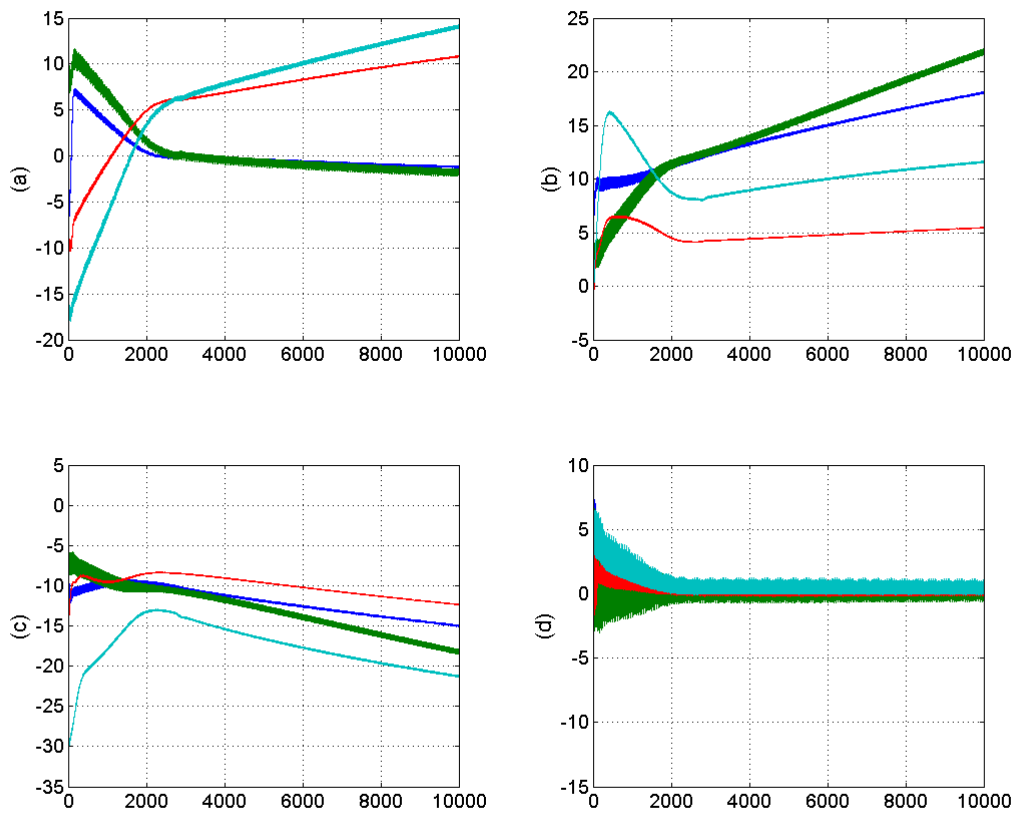


Figura 4.18: Parâmetros de adaptação do MRAC sem passivação e  $\gamma = 10$ :  
 (a)  $\tilde{\Theta}_u = \Theta_u - \Theta_u^*$ ; (b)  $\tilde{\Theta}_y = \Theta_y - \Theta_y^*$ ; (c)  $\tilde{\Theta}_0 = \Theta_0 - \Theta_0^*$ ; (d)  $\tilde{K}_\Theta = K_\Theta - K_\Theta^*$ .

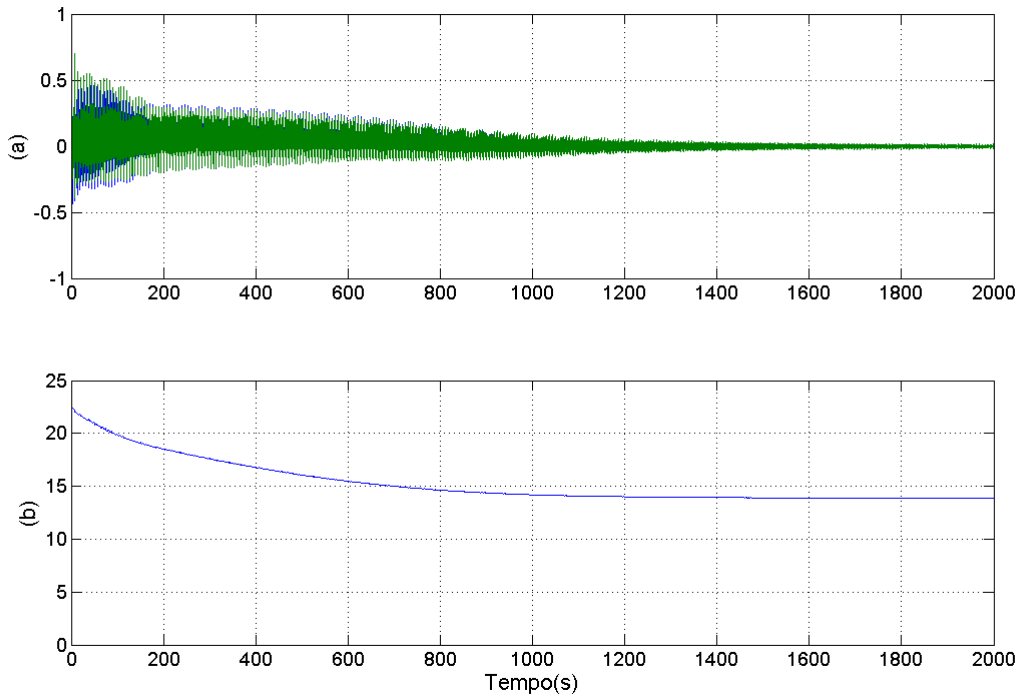


Figura 4.19: Controle MRAC com passivação e  $\gamma = 10$ :  
 (a) Erros de rastreamento ( $e_L$ ); (b) Norma do vetor de parâmetros modificado  $\|\vartheta\|$ .

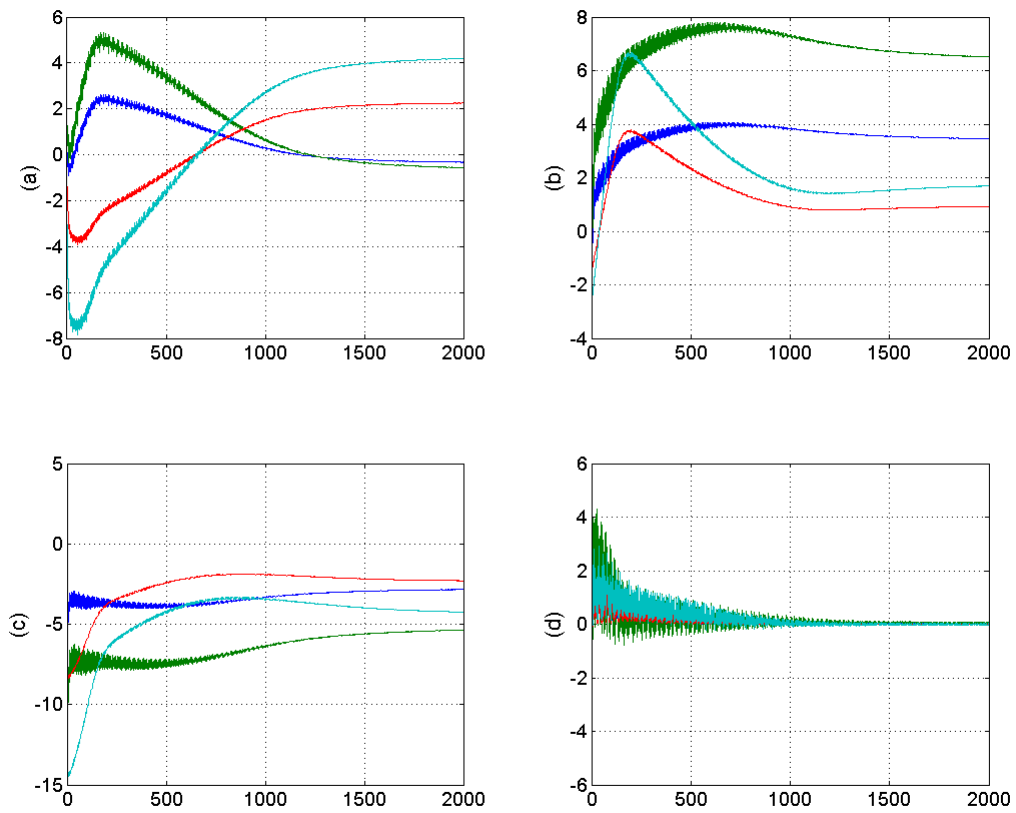


Figura 4.20: Parâmetros de adaptação do MRAC com passivação e  $\gamma = 10$ :  
 (a)  $\tilde{\Theta}_u = \Theta_u - \Theta_u^*$ ; (b)  $\tilde{\Theta}_y = \Theta_y - \Theta_y^*$ ; (c)  $\tilde{\Theta}_0 = \Theta_0 - \Theta_0^*$ ; (d)  $\tilde{K}_\Theta = K_\Theta - K_\Theta^*$ .

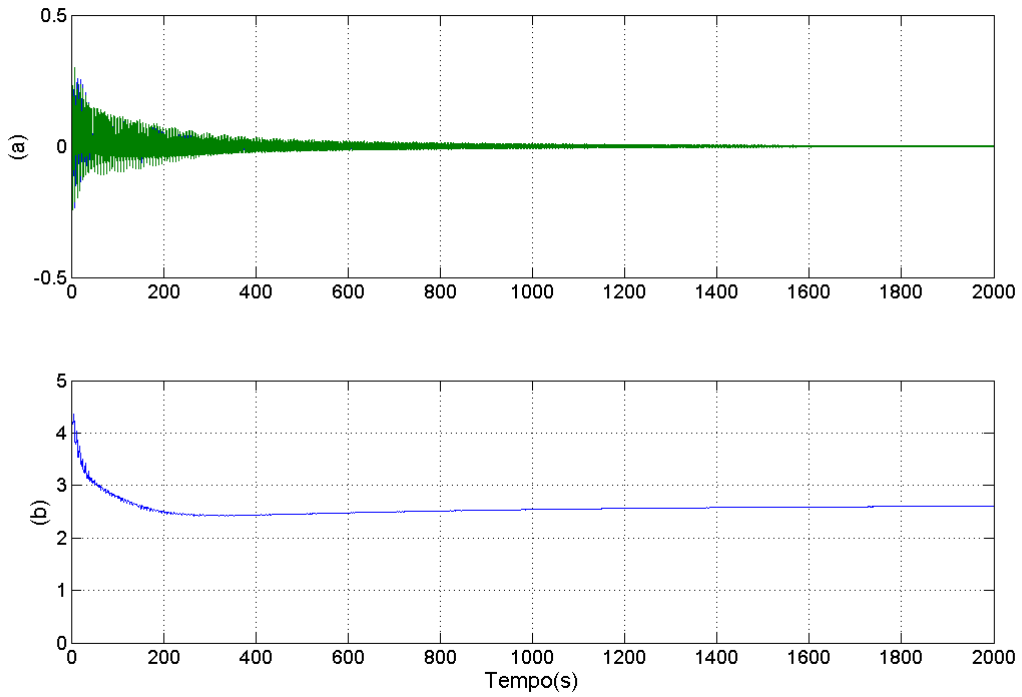


Figura 4.21: Controle B-MRAC com passivação e  $\gamma = 10$ :  
 (a) Erros de rastreamento ( $e_L$ ); (b) Norma do vetor de parâmetros modificado  $\|\vartheta\|$ .

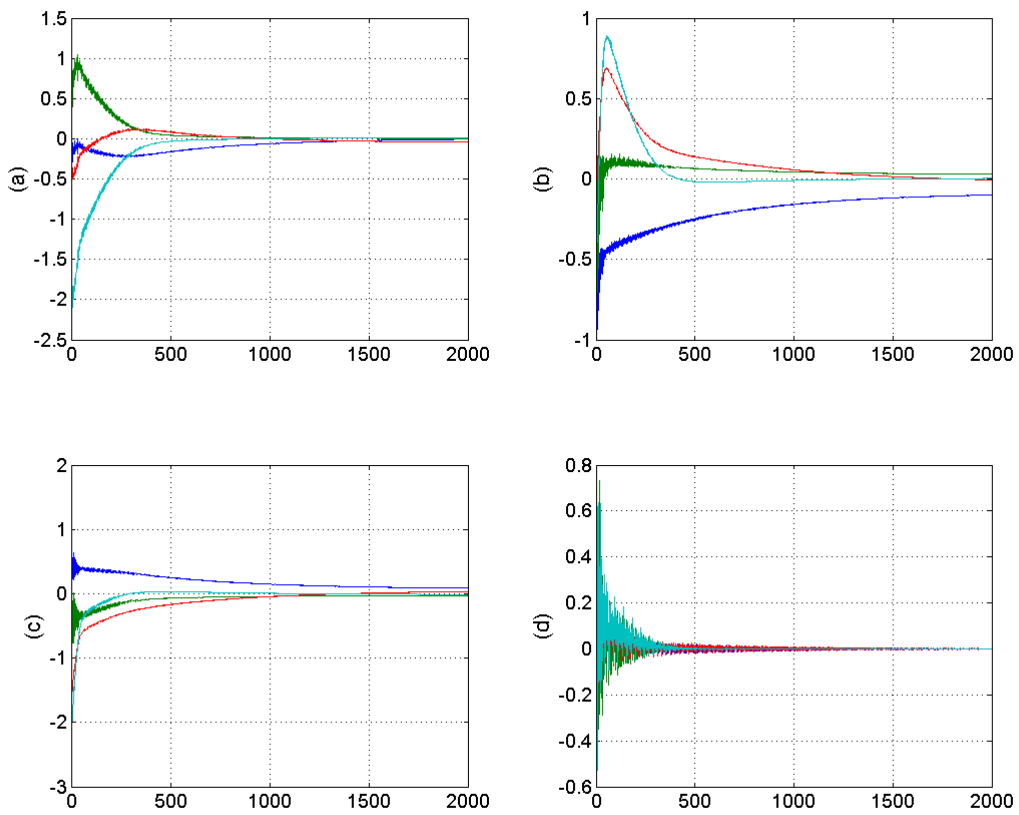


Figura 4.22: Parâmetros de adaptação do B-MRAC com passivação e  $\gamma = 10$ :  
 (a)  $\tilde{\Theta}_u = \Theta_u - \Theta_u^*$ ; (b)  $\tilde{\Theta}_y = \Theta_y - \Theta_y^*$ ; (c)  $\tilde{\Theta}_0 = \Theta_0 - \Theta_0^*$ ; (d)  $\tilde{K}_\Theta = K_\Theta - K_\Theta^*$ .

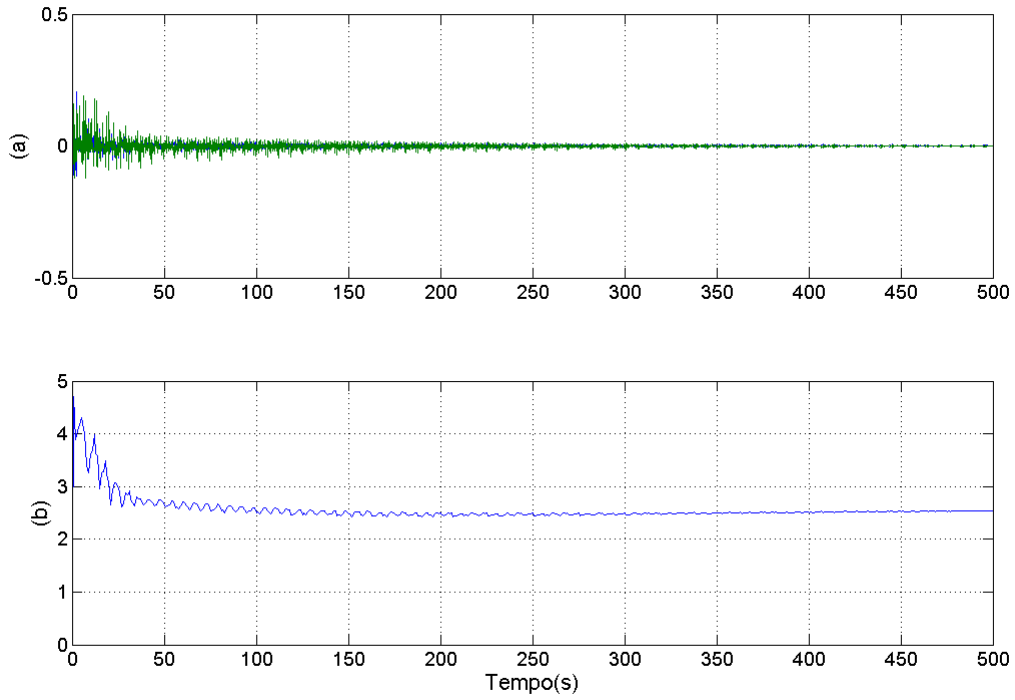


Figura 4.23: Controle B-MRAC com passivação e  $\gamma = 100$ :  
 (a) Erros de rastreamento ( $e_L$ ); (b) Norma do vetor de parâmetros modificado  $\|\vartheta\|$ .

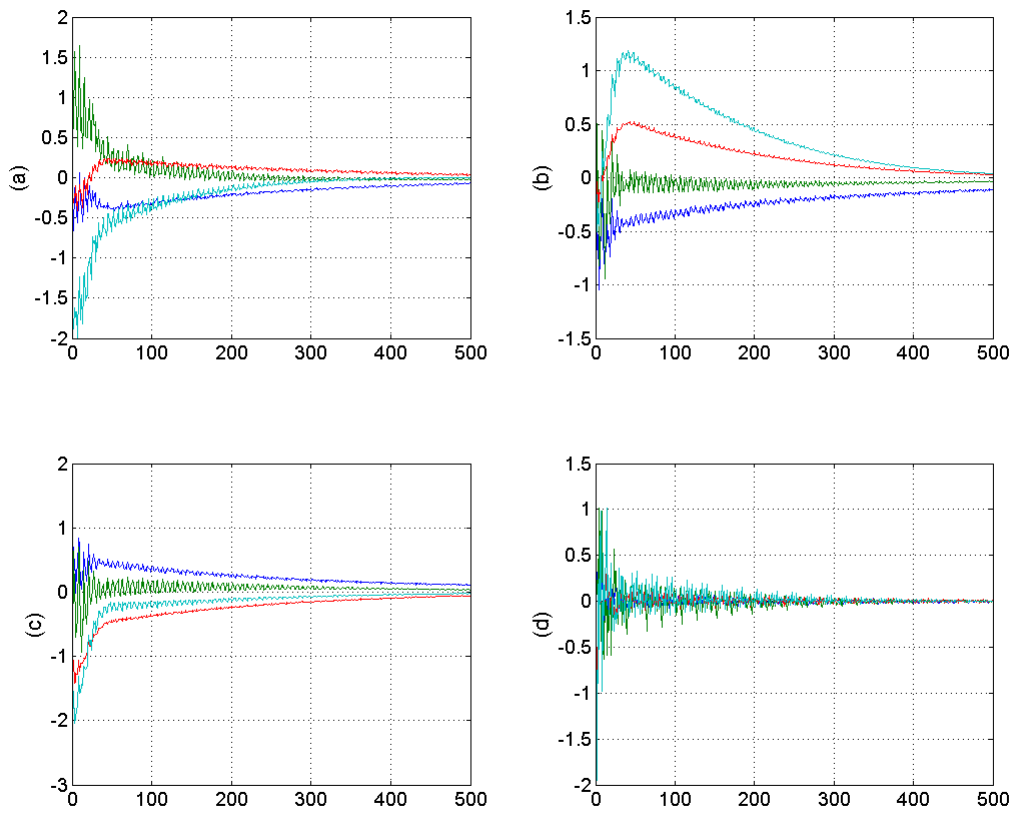


Figura 4.24: Parâmetros de adaptação do B-MRAC com passivação e  $\gamma = 100$ :  
 (a)  $\tilde{\Theta}_u = \Theta_u - \Theta_u^*$ ; (b)  $\tilde{\Theta}_y = \Theta_y - \Theta_y^*$ ; (c)  $\tilde{\Theta}_0 = \Theta_0 - \Theta_0^*$ ; (d)  $\tilde{K}_\Theta = K_\Theta - K_\Theta^*$ .

# Capítulo 5

## Conclusões e Trabalhos Futuros

### 5.1 Conclusões gerais

Nesta dissertação, o controlador B-MRAC foi estendido para sistemas MIMO usando os conceitos de passividade generalizada WSPR e WASPR. Um multiplicador passivador foi usado para assegurar que o sistema do erro seja WASPR, permitindo, assim, a prova de estabilidade e de convergência assintótica do erro de rastreamento do B-MRAC multivariável.

Os resultados de simulação confirmam que a utilização do multiplicador passivador melhora significativamente o desempenho do esquema de controle proposto.

Mostrou-se também que à medida que o ganho de adaptação é aumentado, o B-MRAC tende a se comportar como o Controle Vetorial Unitário (UVC). O B-MRAC permite melhorar o desempenho do MRAC convencional ajustando o ganho de adaptação, e a maior vantagem com respeito ao UVC é possuir um sinal de controle contínuo.

No limite, à medida que o ganho aumenta, as conhecidas vantagens do controle por modos deslizantes são conseguidas, i.e., bom comportamento transitório e robustez.

Entretanto, fica claro a partir dos resultados de simulação que o *chattering* de controle pode ser significativamente reduzido se a passivação for introduzida por meio de um multiplicador passivador. Desta forma, é possível conseguir uma transição suave do controle adaptativo para o controle por modos deslizantes.

Finalmente, cabe observar que seria possível mostrar a convergência paramétrica usando argumentos de riqueza de sinal, como feito nos trabalhos originais de B-MRAC para sistemas SISO.

## 5.2 Propostas para Trabalhos futuros

Com o objetivo de incentivar a pesquisa nos temas abordados neste trabalho, seguem algumas propostas que podem ser desenvolvidas no futuro

- A implementação da estratégia de controle B-MRAC para sistemas discretos, monovariáveis e multivariáveis.
- Estender o controle B-MRAC multivariável para sistemas com grau relativo vetorial arbitrário e não uniforme.
- Estender o controle B-MRAC para sistemas de  $m$  estradas e  $p$  saídas.
- Estudar o comportamento do B-MRAC multivariável frente a dinâmicas não modeladas, perturbações externas e atrasos.

Foi interessante notar que o sistema de rastreamento visual com ganho de adaptação  $\gamma = 5$  sem passivação e sem projeção não estabilizou (Fig. 4.5), mas também não instabilizou como o sistema de rastreamento visual apresentado em [53] (Fig. 4.15), onde a única diferença foi o regressor  $\omega$ .

Por outro lado, com um ganho menor ( $\gamma = 0.1$ ) aplicado ao sistema de rastreamento visual sem usar passivação nem projeção, o B-MRAC consegue fazer com que o erro tenda para zero (Fig. 4.16), porém mais lentamente quando comparado com o sistema passivado e com projeção.

Um sistema de rastreamento visual similar foi abordado em [53], onde o regressor era somente o sinal de referência  $\omega = r(t)$ . Nesse caso foi verificada instabilidade quando o sistema não foi passivado.

Diante desses resultados seria interessante pesquisar o seguinte tópico.

- Analisar as condições que levam ou não à instabilidade quando a condição de WSRP não é satisfeita.

# Referências Bibliográficas

- [1] Ramon R. Costa and Liu Hsu. A binary control approach to design globally exponentially stable systems. In *Proceedings of the 7th International Conference on Systems Engineering*, Las Vegas, USA, 1990.
- [2] Liu Hsu and Ramon R. Costa. B-MRAC: Global exponential stability with a new model reference adaptive controller based on binary control theory. *C-TAT - Control-Theory and Advance Technology*, 10(04):649–668, December 1994. Special Issue on Sliding Mode Control (invited paper).
- [3] Kumpati S. Narendra and Anuradha M. Annaswamy. *Stable Adaptive Systems*. Prentice-Hall International, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [4] Karl Johan Astrom and Bjorn Wittenmark. *Adaptive Control*. Addison-Wesley Publishing Company, Boston, USA, 2 edition, 1995.
- [5] Petros A. Ioannou and Jing Sun. *Robust Adaptive Control*. Prentice Hall, Los Angeles, CA, 1996.
- [6] Petros A. Ioannou and Baris Fidan. *Adaptive Control Tutorial*. SIAM, Philadelphia, 2006.
- [7] R. F. Drenick and R. A. Shahbender. Adaptive servomechanisms. *AIEE Transactions*, 76:286–292, November 1957.
- [8] H. Philip Whitaker, Joseph Yamron, and Allen Kezer. Design of model reference adaptive control systems for aircraft. Report R-164, Instrumentation Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1958.
- [9] P. V. Osbourne, H. P. Whitaker, and A. Kezer. New developments in the design of model reference adaptive control systems. *Institute of aeronautical services*, Paper 61-39, 1961.
- [10] Petar Kokotović. Method of sensitivity points in the investigation and optimization of linear control systems. *Automation and Remote Control*, 25:1512–1518, 1964.



- [11] W. R. Perkins and J. B. Cruz. *Engineering of dynamic systems*. John Wiley, New York, 1969.
- [12] Jr. J. B. Cruz. *System sensitivity analysis*. Dowden, Hutchinson & Ross Inc., Stroudsburg, Pennsylvania, 1973.
- [13] R. E. Kalman. Design of a self-optimizing control system. *Transactions ASME* 80, pages 468–478, 1958.
- [14] R. E. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957.
- [15] R. E. Bellman. *Adaptive control processes: A guided tour*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1961.
- [16] A. A. Feldbaum. *Optimal Control Systems*. Academic Press, Inc., New York, 1965.
- [17] P. C. Parks. Lyapunov redesign of model reference adaptive control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11:362–367, 1966.
- [18] B. Egardt. Stability of adaptive controllers. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 20, 1979. Springer-Verlag, Berlin.
- [19] Petros A. Ioannou and Petar Kokotović. Adaptive systems with reduced models. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 47, 1983. Springer-Verlag, New York.
- [20] Petros A. Ioannou and Petar Kokotović. Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control. *Automatica*, 20:583–594, 1984.
- [21] C. E. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, and G. Stein. Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30:881–889, 1985.
- [22] Petros A. Ioannou and Kostas S. Tsakalis. A robust direct adaptive controller. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-31(11):1033–1043, November 1986.
- [23] W. A. Wolovich and P. L. Falb. Invariants and canonical forms under dynamic compensation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 14(6):996–1008, 1976.
- [24] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, Englewoods Cliffs, New Jersey, 1991.

- [25] Alvaro K. Imai. *Controle Adaptativo Multivariável usando a fatoração da matriz de ganho de alta frequência*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, 2003.
- [26] Liu Hsu and Ramon R. Costa. Mimo direct adaptive control with reduced prior knowledge of the high frequency gain. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3303–3308, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- [27] Ramon R. Costa, Liu Hsu, Alvaro K. Imai, and Petar Kokotović. Lyapunov-based adaptive control of MIMO systems. *Automatica*, 39(7):1251–1257, 2003.
- [28] R.V. Monopoli and C. C. Hsing. Parameter adaptive control of multivariable systems. *International Journal of Control*, 22(3):313–327, 1975.
- [29] G. Goodwin and R. Long. Generalization of results on multivariable adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(6):1241 – 1245, December 1980.
- [30] H. Elliott and W. Wolovich. A parameter adaptive control structure for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(2):340 – 352, apr 1982.
- [31] R. Johansson. Parametric models of linear multivariable systems for adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(4):303 – 313, apr 1987.
- [32] R. P. Singh and Kumpati S. Narendra. A globally stable adaptive controller for multivariable systems. Technical report, Center for Syst. Sci. Yale University, New Heaven, Coonecticut, 1982.
- [33] D.L. Prager and P.E. Wellstead. Multivariable pole-assignment self-tuning regulators. *IEE Proceedings D Control Theory and Applications*, 128(1):9, January 1981.
- [34] H. Elliott, W. Wolovich, and M. Das. Arbitrary adaptive pole placement for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29:221–229, 1984.
- [35] V. Borison. Self-tuning regulators for a class of multivariable systems. *Automatica*, 15:209–215, 1979.
- [36] H. Koivo. Multivariable self-tuning controller. *Automatica*, 83:95–108, 1980.

- [37] L. Dugard and J. M. Dion. Direct adaptive control for linear multivariable systems. *International Journal of Control*, 42:1251–1281, 1985.
- [38] H. Elliott and W. Wolovich. Parameterization issues in multivariable adaptive control. *Automatica*, 20(5):533–545, 1984.
- [39] Shankar Sastry and Marc Bodson. *Adaptive Control Stability, Convergence, and Robustness*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [40] G. Goodwin, P. Ramadge, and P. Caines. Discrete-time multivariable adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3):449 – 456, jun 1980.
- [41] G. Tao. Model reference adaptive control of multivariable plants with unknown interactor matrix. In *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2730 –2735 vol.5, Honolulu, Hawaii, USA, December 1990.
- [42] A-Cheng Wu, Li-chen Fu, and Chen-Fa Hsu. A new decentralized model reference adaptive control for a class of interconnected multivariable plants. In *Proceedings of the 1991 American Control Conference*, pages 1734 –1735, June 1991.
- [43] A.-C. Wu, Li-Chen Fu, and Chen-Fa Hsu. Decentralized model reference adaptive control of interconnected dynamic systems using variable structure design. In *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1149 –1150 vol.2, Honolulu, Hawaii, USA, December 1990.
- [44] Chiang-Ju Chien, A-Cheng Wu, Li-Chen Fu, and King-Chuan Sun. A robust model reference control using variable structure design the general case for multivariable plants. In *Proceedings of the 1992 American Control Conference*, pages 2730 –2734, June 1992.
- [45] Liu Hsu. Variable structure model reference adaptive control (VS-MRAC) using only input and output measurements: The general case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(11):1238–1243, 1990.
- [46] R.H. Middleton, G.C. Goodwin, D.J. Hill, and D.Q. Mayne. Design issues in adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(1):50–58, January 1988.
- [47] A.S. Morse, D.Q. Mayne, and G.C. Goodwin. Applications of hysteresis switching in parameter adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(9):1343 –1354, sep 1992.

- [48] S. R. Weller and G. C. Goodwin. Hysteresis switching adaptive control of linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(7):1360–1375, July 1994.
- [49] Michel de Mathelin and Marc Bodson. Multivariable model reference adaptive control without constraints on the high-frequency gain matrix. *Automatica*, 31:597–604, 1995.
- [50] Alvaro K. Imai, Ramon R. Costa, Liu Hsu, Gang Tao, and Petar Kokotović. Multivariable adaptive control using high-frequency gain matrix factorization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(7):1152–1157, July 2004.
- [51] R. Bodson and J.E. Groszkiewicz. Multivariable adaptive algorithms for reconfigurable flight control. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3330 –3335, Lake Buena Vista, Florida, USA, December 14-16 1994.
- [52] Liu Hsu and P.L.S. Aquino. Adaptive visual tracking with uncertain manipulator dynamics and uncalibrated camera. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1248–1253, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- [53] Liu Hsu, Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, Ramon Romankevicius Costa, and Edvaldo Assunção. Necessary and sufficient condition for generalized passivity, passification and application to multivariable adaptive systems. In *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, pages 3433–3438, Milan, Italy, 2011.
- [54] Liu Hsu, Ramon R. Costa, and Paulo L. S. Aquino. Stable adaptive visual servoing for moving targets. In *Proceedings of the 2000 American Control Conference*, pages 2008–2012, Chicago, USA, June 2000.
- [55] V. I. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [56] Liu Hsu and F. Lizarralde. Robust adaptive visual tracking control: Analysis and experiments. In *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Control Applications*, pages 874 –879, Anchorage, Alaska, USA, 2000.
- [57] E. Zergeroglu, D.M. Dawson, de M.S. Queiroz, and A. Behal. Vision-based nonlinear tracking controllers with uncertain robot-camera parameters.

*IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 6(3):322–337, September 2001.

- [58] Liu Hsu, Ramon R. Costa, Alvaro K. Imai, and Petar Kokotović. Lyapunov-based adaptive control of MIMO systems. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, pages 4808–4813, Arlington, Virginia, USA, July 2001.
- [59] A. S. Morse. A gain matrix decomposition and some of its applications. *Systems and Control Letters*, 21:1–10, 1993.
- [60] Alvaro K. Imai, Ramon R. Costa, Liu Hsu, Gang Tao, and Petar Kokotović. Multivariable MRAC using high frequency gain matrix factorization. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1193–1198, Orlando, Florida, USA, December 2001.
- [61] Gang Tao. A unification of multivariable mrac based on high frequency gain matrix decompositions. In *Proceedings of the 2003 American Control Conference*, volume 2, pages 945 – 950, June 4-6 2003.
- [62] Xue-Jun Xie and Zheng-Qiang Zhang. Robust direct model reference adaptive control using  $K_p = LDU$  factorization for multivariable plants. *International Journal of Control*, 78(10):762–772, July 2005.
- [63] Ying Lu, Gang Tao, and Tarek Abdelzaher. *ldu* parameterized discrete-time multivariable mrac and application to a web cache system. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 4492 – 4498, Las Vegas, Nevada, USA, December 2002.
- [64] Ramon R. Costa, Liu Hsu, Alvaro K. Imai, and Gang Tao. Adaptive backstepping control design for mimo plants using factorization. In *Proceedings of the 2002 American Control Conference*, volume 6, pages 4601 – 4606 vol.6, Anchorage, Alaska, USA, May 8-10 2002.
- [65] Liu Hsu, R.R. Costa, and A.K. Imai. Multivariable adaptive control with transient overparametrization. In *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 2728 – 2733, Maui, Hawaii, USA, December 2003.
- [66] Xue-Jun Xie. Stability and robustness analysis of MIMO MRAC using  $K_p = L_2D_2S_2$  factorization. *International Journal of Systems Science*, 39(3):265–278, March 2008.

- [67] Qian Sang and Gang Tao. Gain margins of multivariable MRAC systems. In *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 702–707, Cancun, Mexico, December 9-11 2008.
- [68] B. C. Kuo and F. Golnaraghi. *Automatic Control Systems*. John Wiley & Sons, New York, 2003.
- [69] Qian Sang and Gang Tao. Gain margins of model reference adaptive control systems. In *7th World Congress on Intelligent Control and Automation*, pages 2946–2951, Chongqing, China, June 2008.
- [70] Yu Liu and Gang Tao. Multivariable mrac using nussbaum gains for aircraft with abrupt damages. In *Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2600–2605, Cancun, Mexico, December 9-11 2008.
- [71] Alvaro K. Imai, Ramon R. Costa, and Liu Hsu. Multivariable MRAC using nussbaum gain. In *Proceedings of 2001 International Symposium on Adaptive and Intelligent Systems and Control*, Charlottesville, Virginia, USA, June 2001.
- [72] Qian Sang and Gang Tao. Multivariable state feedback for output tracking mrac for piecewise linear systems. In *Proceedings of the 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 1784–1789, Orlando, Florida, USA, December 12-15 2011.
- [73] Qian Sang and Gang Tao. Adaptive control of piecewise linear systems: The output tracking case. In *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, pages 2000–2005, O’Farrell Street, San Francisco, CA, USA, June 29 - July 01 2011.
- [74] Jiaying Guo, Gang Tao, and Yu Liu. A multivariable mrac design for aircraft systems under failure and damage conditions. In *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, pages 600–605, San Francisco, California, USA, June 29 - July 01 2011.
- [75] A. L. Fradkov. Synthesis of an adaptive system for linear plant stabilization. *Automatic Remote Control*, 35(12):1960–1966, 1974.
- [76] A. L. Fradkov. Quadratic lyapunov function in the adaptive stabilization problem of a linear dynamic plant. *Siberian Math. J.*, 2:341–348, 1976.

- [77] Alexander L. Fradkov. Passification of non-square linear systems and feedback Yakubovich-Kalman-Popov lemma. *European Journal of Control*, 6(1):573–582, 2003.
- [78] Dimitri Peaucelle, Alexander Fradkov, and Boris Andrievski. Robust passification via static output feedback - LMI results. In *Proceedings of the 16th Triennial IFAC World Congress*, Prague, June 2005.
- [79] Itzhak Barkana, Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, and Liu Hsu. Mitigation of symmetry condition in positive realness for adaptive control. *Automatica*, 42(9):1611–1616, 2006.
- [80] Afonso Celso. Notas de aula de controle linear, 2010.
- [81] Christopher Edwards and Sarah K. Spurgeon. *Sliding Mode Control - Theory and Applications*. Taylor & Francis, Gunpowder Square, London EC4A 3DE, 1998.
- [82] Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, New York, NY, 1999.
- [83] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems, 3rd Edition*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
- [84] A. Steinberg and M. Corless. Output-feedback stabilization of uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(10):1025–1027, 1985.
- [85] K. Sobel, H. Kaufman., and L. Mabijs. Implicit adaptive control for a class of mimo systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-18:576–590, Sept 1982.
- [86] Itzhak Barkana and Howard Kaufman. Global stability and performance of an adaptive control algorithm. *International Journal of Control*, 46(6):1491–1505, 1985.
- [87] I. Barkana. Comments on “Design of strictly positive real systems using constant output feedback”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(11):2091–2093, November 2004.
- [88] Howard Kaufman, Itzhak Barkana, and Kenneth Sobel. *Direct adaptive control algorithms: Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York, 2 edition, 1994.

- [89] Alexander L. Fradkov. Necessary and sufficient conditions for almost strict positive realness and their application to direct implicit adaptive control systems. In *Proceedings of the 1994 American Control Conference*, pages 1265–1266, Baltimore, Maryland, USA, June 1994.
- [90] Itzhak Barkana. Parallel feedforward and simplified adaptive control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1:95–109, 2 1987.
- [91] Avraham Steinberg. A sufficient condition for output feedback stabilization of uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(7):676–677, Jul 1988.
- [92] D. H. Owens, D. Pratzel-Wolters, and Achim Ilchmann. Positive-real structure and high-gain adaptive stabilization. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 4(2):167–181, 1987.
- [93] Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira. On strictly positive real matrices. Technical report, Pontificia Universidade Católica, Rio de Janeiro, Brasil, 1988.
- [94] Guoxiang Gu. Stabilizability conditions of multivariable uncertain systems via output feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(8):925–927, Aug 1990.
- [95] C.-H. Huang, Petros A. Ioannou, J. Maroulas, and M.G. Safonov. Design of strictly positive real systems using constant output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(3):569–573, Mar 1999.
- [96] C.I. Byrnes, A. Isidori, and J.C. Willems. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(11):1228–1240, November 1991.
- [97] Rogelio Lozano, Bernard Brogliato, Bernhard Maschke, and Olav Egeland. *Dissipative systems analysis and control: Theory and Applications*. Springer-Verlag, London, 2 edition, 2000.
- [98] G. Picci and S. Pinzoni. On feedback dissipative systems. *J. Math. Systems*, 2(1):1–30, 1992.
- [99] R. Sepulchre, M. Jankovic, and Petar Kokotović. *Constructive nonlinear control*. Springer, New York, 1 edition, 1996.



- [100] J.P.V.S. Cunha, Liu Hsu, R.R. Costa, and F. Lizarralde. Output-feedback model-reference sliding mode control of uncertain multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(12):2245–2250, December 2003.
- [101] S. K. Spurgeon, C. Edwards, and N. P. Foster. Robust model reference control using a sliding mode controller/observer scheme with application to a helicopter problem. In *Proceedings of the IEEE Workshop Variable Structure Systems*, pages 36–41, Roppongi, Tokyo, Japan, December 5-6 1996.
- [102] C. Edwards and S. K. Spurgeon. Sliding mode output tracking with application to a multivariable high temperature furnace problem. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 7:337–351, 1997.
- [103] Eduardo V. L. Nunes, Fernando Lizarralde, and Liu Hsu. Global exact tracking for uncertain systems using output-feedback sliding mode control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(5):1141–1147, 2009.
- [104] Eduardo V. L. Nunes. *Rastreamento global e exato para uma classe de sistemas não-lineares incertos*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, 2009.
- [105] Liu Hsu. Variable structure model-reference adaptive control (VS-MRAC) using only input and output measurements: Part ii. In *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2396–2401, Austin, Texas, USA, December 1988.
- [106] Liu Hsu and Ramon R. Costa. Variable structure model-reference adaptive control (VS-MRAC) using only input and output measurements: Part i. *International Journal of Control*, 49(2):399–416, 1989.
- [107] Ramon R. Costa and Liu Hsu. Robustness of VS-MRAC with respect to unmodeled dynamics and external disturbances. In *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 6, pages 3208–3213, Honolulu, Hawaii, USA, December 1990.
- [108] Liu Hsu, Fernando Lizarralde, and Aldayr D. de Araujo. New results on output-feedback variable structure model-reference adaptive control: design and stability analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(3):386–393, 1997.
- [109] Gang Tao and Petros A. Ioannou. A MRAC for multivariable plants with zero residual tracking error. In *Proceedings of the 28th IEEE Conference on*

- Decision and Control*, pages 1597–1600, Tampa, Florida, USA, December 1989.
- [110] C. J. Chien and L. C. Fu. A new robust model reference control with improved performance for a class of multivariable unknown plants. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 6:69–93, 1992.
- [111] Christopher Edwards and Sarah K. Spurgeon. Robust output tracking using a sliding-mode controller/observer scheme. *International Journal of Control*, 64:967–983, 1996.
- [112] Chiang-Ju Chien, King-Chuan Sun, A-Chen Wu, and Li-Chen Fu. A robust mrac using variable structure design for multivariable plants. *Automatica*, 32:833–848, 1996.
- [113] Liu Hsu, Ramon R. Costa, and José Paulo V. S. Cunha. Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems. *Asian Journal of Control*, 5:543–556, 4 2003.
- [114] Alessandro J. Peixoto, José Paulo V. S. Cunha, Liu Hsu, Ramon R. Costa, and Fernando Lizarralde. Unit vector control of uncertain multivariable nonlinear systems. In *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, 2005.
- [115] Gang Feng and Rogelio Lozano. *Adaptive Control Systems*. Newnes, Linacre House, Jordan Hill, Oxford, 1999.
- [116] S. Gutman and G. Leitmann. Stabilizing control for linear systems with bounded parameters and input uncertainty. In *Proceedings of the 7th IFIP Conference on Optimization Technique*, pages 8–14, Nice, France, 1975.
- [117] Shaul Gutman. Uncertain dynamical systems – a lyapunov min-max approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24:437–443, 1979.
- [118] S. V. Baida. Unit sliding mode control in continuous- and discrete-time systems. *International Journal of Control*, 57(5):1125–1132, 1993.
- [119] Liu Hsu, Jose Paulo Vilela Soares da Cunha, and Ramon R. Costa. Model-reference sliding mode control of uncertain multivariable systems. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 756–761, Orlando, Florida, USA, December 2001.
- [120] Kumpati S. Narendra and Benjamin B. Peterson. Bounded error adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Ac-27(6):1161–1168, December 1982.

- [121] Petros A. Ioannou and Petar Kokotović. Robust redesign of adaptive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-29(3):202–211, March 1984.
- [122] Charles E. Rohrs, Lena Valavani, Michael Athans, and Gunter Stein. Robustness of adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics. In *Proceedings of the 21st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3–11, Orlando, Florida, USA, December 8-10 1982.
- [123] Jose Augusto Furtado Real. *Controlador Adaptativo de Modo Dual com Redes Gaussianas*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE, 1999.
- [124] Sanjeev M. Naik, P.R. Kumar, and B. Erik Ydstie. Robust continuous-time adaptive control by parameter projection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(2):182–197, February 1992.
- [125] Liu Hsu and Ramon R. Costa. Adaptive control with discontinuous  $\sigma$ -factor and saturation for improved robustness. *International Journal of Control*, 45:843–859, 1987.
- [126] Liu Hsu and Ramon R. Costa. Bursting phenomena in continuous-time adaptive systems with a  $\sigma$ -modification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-32(1):84–86, 1987.
- [127] Ivanko Yanque, Eduardo V. L. Nunes, Ramon R. Costa, and Liu Hsu. Binary MIMO MRAC using a passifying multiplier - a smooth transition to sliding mode control. In *Proceedings of the 2012 American Control Conference*, Montréal, Canada, June 27-29 2012.
- [128] S. V. Emelyanov. *Binary Automatic Control Systems*. MIR Publishers, Moscow, Russia, 1987.
- [129] Liu Hsu and Ramon R. Costa. Adaptive control with discontinuous forgetting factor and saturation for improved robustness. In *Proceedings of the 1986 American Control Conference*, pages 1075–1080, Seattle, Washington, USA, 1986.
- [130] Gilbert Strang. *Linear Algebra and Its Applications*. Academic Press, Inc., New York, 2 edition, 1980.
- [131] Ramon R. Costa and Liu Hsu. Unmodeled dynamics in adaptive control revisited. *Systems and Control Letters*, 16:341–348, 1991.

- [132] Jan R. Magnus and Heinz Neudecker. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. John Wiley & Sons, West Sussex, England, 2007.
- [133] James E. Gentle. *Matrix Algebra: Theory, Computations, and Applications in Statistics*. Springer, New York, NY, 3 edition, 2007.
- [134] Eduardo V. L. Nunes, Alessandro J. Peixoto, Tiago Roux Oliveira, and Liu Hsu. Global exact tracking for uncertain multivariable linear systems by output feedback sliding mode control. In *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, pages 974–979, Marriott Waterfront, Baltimore, MD, USA, June 30 - July 02 2010.

# Apêndice A

## Conceitos Básicos

### A.1 Traço, Função Vec e Produto de Kronecker

Seja uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , onde seus elementos são dados por  $a_{ij}$ . O traço de  $A$ , denotado por  $\text{tr}(A)$ , é a soma dos elementos da diagonal de  $A$  [132], tal que

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

e algumas de suas propriedades são

- $\text{tr}(kA) = k\text{tr}(A)$  onde  $k$  um escalar,
- $\frac{d}{dt}\text{tr}(A) = \text{tr}\left(\frac{d}{dt}A\right)$ ,
- $\text{tr}(CD) = \text{tr}(DC)$  onde  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .
- $\text{tr}(xy^T) = y^T x$  onde  $x, y \in \mathbb{R}^m$ .
- $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$  onde  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$
- $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$

Seja uma matriz  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  onde  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são seus vetores coluna. A função  $\text{vec}$  ou função “pack”, denotada por  $\text{vec}(C) \in \mathbb{R}^{mn \times 1}$ , é um operador que transforma a matriz  $C$  em um vetor ao empilhar as colunas de  $C$  uma embaixo da outra, assim

$$\text{Se } C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}, \text{ então } \text{vec}(C) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Seja  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $E \in \mathbb{R}^{p \times q}$  uma matriz  $p \times q$ , o produto de Kronecker, denotado por  $C \otimes E$  [133], é a matriz  $mp \times nq$  definida por

$$C \otimes E = \begin{bmatrix} c_{11}E & \dots & c_{1n}E \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}E & \dots & c_{mn}E \end{bmatrix},$$

onde  $c_{ij}$  é o elemento da matriz  $C$  da linha  $i$  e da coluna  $j$ , e algumas de suas propriedades são

- $(kC) \otimes (gE) = kg(C \otimes E) = (kgC) \otimes E = C \otimes (kgE)$  onde  $k$  e  $g$  são escalares,
- $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ ,  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ ,
- $(E \otimes F)(G \otimes H) = EG \otimes FH$  se  $EG$  e  $FH$  existem.

## A.2 Lema de Barbalat

Seja  $\phi : R \rightarrow R$  uma função uniformemente contínua no intervalo  $[0, \infty)$ . Suponha que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau$  existe e é finito. Então,  $\phi(t) \rightarrow 0$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ .

# Apêndice B

## Definições complementares

**Definição B.1 (Menores de uma matriz.)** Dada uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  com elementos  $a_{ij}$ , um menor de  $A$  é o determinante de uma submatriz formada por seus elementos da seguinte forma. Sejam  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_p\}$  e  $L = \{l_1, l_2, \dots, l_p\}$  subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, n\}$  e  $\{1, 2, \dots, m\}$ , respectivamente. Os índices são escolhidos de forma que  $k_1 < k_2 < \dots < k_p$  e  $l_1 < l_2 < \dots < l_p$ . O menor de ordem  $p$  definido por  $K$  e  $L$  é o seguinte determinante

$$[A]_{KL} = \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1} & a_{k_1 l_2} & \dots & a_{k_1 l_p} \\ a_{k_2 l_1} & a_{k_2 l_2} & \dots & a_{k_2 l_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_p l_1} & a_{k_p l_2} & \dots & a_{k_p l_p} \end{vmatrix}.$$

Se  $p$  é maior que  $m$  ou  $n$ , então o menor é zero. Quando  $p = m = n$ , o menor é simplesmente o determinante da matriz  $A$ . Se  $K = L$ , então o menor é chamado principal.

**Definição B.2 (Menores principais e líderes principais de uma matriz.)**

O menor de ordem  $k$  de uma matriz  $A$  é principal se é obtido ao se retirar as  $n - k$  linhas e  $n - k$  colunas com os mesmos números. O menor principal líder de ordem  $k$  de  $A$  é o menor de ordem  $k$  obtido ao retirar as últimas  $n - k$  linhas e colunas.

**Definição B.3 (Polinômios invariantes.)** Seja uma matriz polinomial  $M(s)$  com posto  $r$ , onde  $\Delta_j(s)$  é o máximo divisor comum dos menores de ordem  $j$  de  $M(s)$ . Os polinômios invariantes de  $M(s)$  são dados por

$$\sigma_1(s) = \frac{\Delta_1(s)}{\Delta_0(s)} \quad \sigma_2(s) = \frac{\Delta_2(s)}{\Delta_1(s)}, \quad \dots, \quad \sigma_r(s) = \frac{\Delta_r(s)}{\Delta_{r-1}(s)},$$

onde por convenção  $\Delta_0(s) = 1$ .

**Definição B.4 (Matriz unimodular.)** *Uma matriz polinomial quadrada  $U(s)$  é chamada de unimodular se seu determinante ( $\det U(s)$ ) é não nulo e independente de  $s$ . As matrizes unimodulares são sempre invertíveis (não singulares), suas inversas são também polinomiais e unimodulares e o produto delas também é unimodular.*

**Definição B.5 (Matrizes polinomiais equivalentes.)** *As matrizes polinomiais  $M(s)$  e  $N(s)$  ambas com  $q$  linhas e  $p$  colunas são equivalentes se e somente se apresentarem os mesmos polinômios invariantes. Assim mesmo. Sejam  $E(s)$  e  $D(s)$  matrizes unimodulares, pode-se dizer que*

$$M(s) = E(s)N(s)D(s).$$



# Apêndice C

## Prova alternativa de estabilidade B-MRAC

Para desenvolver a análise de estabilidade considerando a matriz de parâmetros  $\Theta$  e o vetor regressor  $\omega$ , a lei de adaptação proposta pode ser reescrita como

$$\dot{\Theta} = -\sigma\Theta - \gamma\omega e_L^T, \quad (\text{C.1})$$

$$\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se } \|\Theta\|_F < M_\vartheta \text{ ou } \sigma_{eq} < 0, \\ \sigma_{eq}, & \text{se } \|\Theta\|_F \geq M_\vartheta \text{ e } \sigma_{eq} \geq 0, \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

$$\sigma_{eq} = \frac{-\gamma e_L^T \Theta^T \omega}{\|\Theta\|_F^2},$$

onde  $\|\cdot\|_F$  representa a norma de Frobenius, i.e.,  $\|\Theta\|_F = \sqrt{\text{tr}[\Theta^T \Theta]} = \sqrt{\vartheta^T \vartheta} = \|\vartheta\|$  e  $M_\vartheta > \|\Theta^*\|_F$ .

A propriedade (i) é obtida da mesma forma que na prova original.

Assim, o conjunto  $\|\vartheta\| \leq M_\vartheta$  é positivamente invariante e portanto  $\tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta}$  é uniformemente limitado por uma constante.

Usando a fatoração  $W = S^T S$ ,  $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$  não singular, a seguinte função de Lyapunov candidata pode ser considerada

$$V = x_e^T P x_e + \text{tr} \left[ \frac{1}{\gamma} S \tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta} S^T \right]. \quad (\text{C.3})$$

A derivada temporal de (C.3) pode ser determinada da seguinte forma, os termos são analisados separadamente para simplificar o cálculo

$$V = k_1 + k_2, \quad k_1 = x_e^T P x_e, \quad k_2 = \text{tr} \left[ \frac{1}{\gamma} S \tilde{\Theta}^T \tilde{\Theta} S^T \right],$$

Seguindo um desenvolvimento similar ao feito na prova original, pode-se determinar

que a derivada temporal de  $k_1$  é dada por

$$\dot{k}_1 = -x_e^T Q x_e + 2\omega^T \tilde{\Theta} W e_L, \quad (\text{C.4})$$

A derivada temporal de  $k_2$  é dada por<sup>1</sup>

$$\dot{k}_2 = \text{tr} \left[ \frac{1}{\gamma} S \dot{\tilde{\Theta}}^T \tilde{\Theta} S^T \right] + \text{tr} \left[ \frac{1}{\gamma} S \tilde{\Theta}^T \dot{\tilde{\Theta}} S^T \right], \quad (\text{C.5})$$

pode-se substituir (C.1) em (C.5), e como  $\tilde{\Theta} = \Theta - \Theta^*$ , segue que

$$\dot{k}_2 = -\text{tr} \left[ \frac{\sigma}{\gamma} S \Theta^T \tilde{\Theta} S^T \right] - \text{tr} \left[ \frac{\sigma}{\gamma} S \tilde{\Theta}^T \Theta S^T \right] - \text{tr} \left[ S e_L \omega^T \tilde{\Theta} S^T \right] - \text{tr} \left[ S \tilde{\Theta}^T \omega e_L^T S^T \right],$$

tem-se que  $\tilde{\Theta}^T \Theta = (\Theta^T \tilde{\Theta})^T$  e que  $\tilde{\Theta}^T \omega e_L^T = (e_L \omega^T \tilde{\Theta})^T$  assim aplicando-se as propriedades  $S A^T S^T = (S A S^T)^T$  e  $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T)$ , segue que

$$\dot{k}_2 = -2 \frac{\sigma}{\gamma} \text{tr} \left[ S \Theta^T \tilde{\Theta} S^T \right] - 2 \text{tr} \left[ S \tilde{\Theta}^T \omega e_L^T S^T \right], \quad (\text{C.6})$$

assim, somando (C.4) e (C.5), tem-se

$$\dot{V} = -x_e^T Q x_e + 2e_L^T S^T S \tilde{\Theta}^T \omega - 2 \frac{\sigma}{\gamma} \text{tr} \left[ S \Theta^T \tilde{\Theta} S^T \right] - 2 \text{tr} \left[ S \tilde{\Theta}^T \omega e_L^T S^T \right].$$

Como  $\text{tr}(xy^T) = y^T x$ , onde  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , pode-se verificar que

$$2e_L^T W \tilde{\Theta}^T \omega = 2e_L^T S^T S \tilde{\Theta}^T \omega = 2 \text{tr} \left[ S \tilde{\Theta}^T \omega e_L^T S^T \right],$$

portanto, depois de simplificar, tem-se que

$$\dot{V} = -x_e^T Q x_e - 2 \frac{\sigma}{\gamma} \text{tr} \left[ \tilde{\Theta} W \Theta^T \right].$$

Como a norma de  $\vartheta$  é uniformemente limitada,

$$V = x_e^T P x_e + \mathcal{O}(\gamma^{-1}).$$

Agora, pode-se concluir que

$$\dot{V} \leq -\lambda_1 [V - \mathcal{O}(\gamma^{-1})],$$

onde  $\lambda_1 = \lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)$  com os autovalores máximos e mínimos das matrizes  $Q = Q^T > 0$  e  $P = P^T > 0$  denotados por  $\lambda_{\min}(Q)$  e  $\lambda_{\max}(P)$ , respectivamente.

---

<sup>1</sup>As propriedades da traça são apresentadas no Apêndice A.1.

Isto implica a propriedade **(ii)** por um lema de comparação para desigualdades diferenciais (ver Lema 3.4 de [83]). De (C.2) e como  $\tilde{\Theta} = \Theta - \Theta^*$  e  $M_\theta \geq \|\Theta^*\|_F$  por hipótese, pode ser mostrado que o termo  $-2\tilde{\sigma}\text{tr}[\tilde{\Theta}W\Theta^T]$  é não-positivo. Assim, segue que  $\dot{V} \leq -x_e^T Q x_e \leq 0$ . Desta forma, usando o Lema de Barbalat, é possível mostrar que  $x_e(t) \rightarrow 0$  e  $e_L(t), e(t) \rightarrow 0$  à medida que  $t \rightarrow \infty$ .

# Apêndice D

## Parâmetros de adaptação ideais

Foi visto que para que a lei de adaptação B-MRAC possa ser aplicada é necessário conhecer o valor da constante  $M_\theta$ , que representa o raio da hipersfera dentro da qual estão contidos os parâmetros ideais, que são aqueles que conseguem um casamento perfeito entre a planta e o modelo para qualquer sinal de referência e podem ser estimados pelas leis de adaptação quando o sinal de referência é suficientemente rico.

Aqui será vista uma forma de calcular os parâmetros ideais representados por um vetor de parâmetros ideais  $\theta^*$  no caso SISO e por uma matriz de parâmetros ideais  $\Theta^*$  no caso MIMO, através da resolução de uma equação que pode ser aplicada para ambos casos.

Serão apresentados exemplos de cálculo de equações paramétricas dos parâmetros ideais de sistemas SISO de plantas de 2 e 3 pólos; e para o caso MIMO, o cálculo da equação paramétrica de um sistema cuja matriz  $\Theta^*$  tem 16 parâmetros e outra cuja matriz  $\Theta^*$  tem 24 parâmetros. É importante destacar que no segundo exemplo MIMO,  $\Theta^*$  tem infinitas soluções.

### D.1 Equação do casamento ideal do MRC

Sejam as funções de transferência da Planta  $G(s)$  e do Modelo  $W_M(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad W_M(s) = \frac{Y_M(s)}{R(s)}, \quad (\text{D.1})$$

onde  $y$  é o sinal de saída da planta,  $u$  é a lei de controle,  $y_M$  é o sinal de saída do modelo e  $r$  é o sinal de referência. Os sinais de saída dos filtros de entrada e saída  $\omega_u$  e  $\omega_y$  da planta são dados por

$$\omega_u = F(s)u, \quad \omega_y = F(s)y, \quad (\text{D.2})$$

onde  $F(s)$  é a função de transferência dos filtros, e a lei de controle  $u$  é dada por

$$u = \theta^T \omega = \theta_u^T \omega_u + \theta_y^T \omega_y + \theta_0^T y + k^T r.$$

A lei de controle ideal

$$u^* = \theta^{*T} \omega = \theta_u^{*T} \omega_u + \theta_y^{*T} \omega_y + \theta_0^{*T} y + k^{*T} r, \quad (\text{D.3})$$

é aquela que consegue que o sinal de saída da planta  $y$  seja igual ao sinal de saída do modelo  $y_M$ , obtendo um sinal de saída da planta ideal  $y^*$ . Tem-se de (D.1)

$$y^* = W_M(s)r, \quad u^* = G(s)^{-1}W_M(s)r, \quad (\text{D.4})$$

logo, os sinais filtrados ideais  $\omega_u^*$  e  $\omega_y^*$  da planta são obtidos substituindo (D.4) em (D.2), sendo dados por

$$\omega_u^* = F(s)G(s)^{-1}W_M(s)r, \quad \omega_y^* = F(s)W_M(s)r. \quad (\text{D.5})$$

Assim, substituindo (D.5) e (D.4) em (D.3), tem-se

$$G(s)^{-1}W_M(s)r = (\theta_u^T F(s)G(s)^{-1} + \theta_y^T F(s) + \theta_0^T + k^T W_M(s)^{-1}) W_M(s)r,$$

$$E_q = (\theta_u^T F(s) - I) G(s)^{-1} + \theta_y^T F(s) + \theta_0^T + k^T W_M(s)^{-1} = 0. \quad (\text{D.6})$$

Então, os parâmetros ideais  $\theta^*$  do caso SISO (ou  $\Theta^*$  do caso MIMO) são aqueles que conseguem resolver a equação (D.6), obtendo um casamento perfeito para qualquer sinal de referência  $r$ .

## D.2 Parâmetros ideais do caso MRAC SISO

### D.2.1 Definição do problema SISO

Seja a função de transferência de uma planta SISO de  $n$  pólos, dada por

$$G(s) = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)},$$

onde  $k_p$  é o ganho de alta frequência da planta e  $Z_p(s)$  e  $R_p(s)$  são polinômios mônicos de graus  $m_p$  e  $n_p$ , respectivamente, e a função de transferência de um modelo de referência SISO de  $p_m$  pólos, dada por

$$W_m(s) = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)},$$

onde  $k_m$  é o ganho de alta frequência do modelo e  $Z_m(s)$  e  $R_m(s)$  são polinômios mônicos de graus  $q_m$  e  $p_m$ , respectivamente.

A função de transferência do filtro é dada por

$$F(s) = \frac{\Psi(s)}{\Lambda(s)},$$

onde  $\Lambda(s)$  é um polinômio arbitrário Hurwitz de grau  $n - 1$  que contém  $Z_m(s)$  como fator, de forma que

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s)Z_m(s), \quad (\text{D.7})$$

onde  $\Lambda_0(s)$  é mônico, Hurwitz de grau  $n_0 = n - 1 - q_m$  e  $\Psi(s)$  é dado por

$$\Psi(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 1, \\ \begin{bmatrix} s^{n-2} & s^{n-3} & \dots & s^{n-n} \end{bmatrix}^T, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Se os graus de  $R_p(s)$ ,  $Z_p(s)$ ,  $\Lambda(s)$ ,  $\Lambda_0(s)$  e  $R_m(s)$  forem especificados, então a solução de  $\theta^*$  sempre existe. Além disso, se  $R_p(s)$  e  $Z_p(s)$  forem coprimos e  $n = n_p$ , então a solução de  $\theta^*$  é única [6].

Para plantas SISO, foi mostrado em [5] e [6] que os parâmetros ideais  $\theta^*$  podem ser achados resolvendo a seguinte equação diofantina

$$G(s) = \frac{k^* k_p Z_p(s) \Lambda^2(s)}{\Lambda(s) [(\Lambda(s) - \theta_u^{*T} \Psi(s)) R_p(s) - k_p Z_p(s) (\theta_y^{*T} \Psi(s) + \theta_0^{*T} \Lambda(s))]}, \quad (\text{D.8})$$

fazendo

$$k^* = k_m k_p^{-1}$$

e com (D.7) em (D.8) obtém-se

$$(\Lambda(s) - \theta_u^{*T} \Psi(s)) R_p(s) - k_p Z_p(s) (\theta_y^{*T} \Psi(s) + \theta_0^{*T} \Lambda(s)) = Z_p(s) \Lambda_0(s) R_m(s),$$

que é uma simplificação de (D.6) para o caso SISO.

## D.2.2 Exemplos de cálculo de parâmetros ideais de sistemas SISO

Como na literatura podem ser encontrados vários exemplos de cálculo dos parâmetros ideais  $\theta^*$ , nesta seção acharemos as equações paramétricas (com parâmetros simbólicos) de sistemas de grau relativo  $n^* = 1$ , com  $n_p = 2$  (2 pólos) e  $n_p = 3$  (3 pólos).

## Primeiro exemplo SISO

Considere um sistema com as funções de transferência da planta, do modelo e dos filtros dados por

$$G(s) = \frac{k_p(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)}, \quad W_M(s) = \frac{k_m}{s+p_m}, \quad F(s) = \frac{f}{s+f}, \quad (\text{D.9})$$

pode-se substituir (D.9) em (D.6), agrupando os termos em função da variável complexa de Laplace  $s$ , obtendo-se a seguinte equação

$$\frac{as^3 + bs^2 + cs + d}{e} = 0, \quad (\text{D.10})$$

onde:

$$\begin{aligned} a &= k_p k^* / k_m - 1, & b &= \theta_u^* f + \theta_0^* k_p - p_1 - p_2 - f + k^* k_p (f + p_m + z), \\ c &= \theta_u^* f (p_1 + p_2) + \theta_0^* k_p (f + z) + \theta_y^* f k_p + k^* k_p (f p_m + f z + p_m z) - f (p_1 + p_2) - p_1 p_2, \\ d &= f p_1 p_2 (\theta_u^* - 1) + f k_p z (\theta_0^* + \theta_y^* + k^* p_m), & e &= k_p (s + f) (s + z). \end{aligned}$$

Os parâmetros ideais  $\theta_u^*$ ,  $\theta_y^*$ ,  $\theta_0^*$ ,  $k^*$ , que fazem um casamento ideal  $e = y - y_m = 0$ , são aqueles que conseguem que os elementos  $a, b, c, d$  da equação (D.10) sejam iguais a zero. Do elemento  $a$  pode-se achar diretamente que o parâmetro  $k^*$  é o ganho do modelo  $k_m$  dividido pelo ganho da planta  $k_p$ . Os três elementos restantes  $b, c$  e  $d$  contêm os parâmetros  $\theta_u^*$ ,  $\theta_y^*$  e  $\theta_0^*$ , com os quais pode-se formar um sistema de três equações com três incógnitas, do qual obtém-se

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \theta_u^* \\ \theta_y^* \\ \theta_0^* \\ k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f-z) f^{-1} \\ (f-p_1)(f-p_2)(f k_p)^{-1} \\ (p_1+p_2-p_m-f) k_p^{-1} \\ k_m k_p^{-1} \end{bmatrix}.$$

A rotina do cálculo para o programa Wolfram Mathematica é apresentada na Figura D.1.

```
Clear["Global`*"]
G = kp * (s + z) / ((s + p1) * (s + p2));
Wm = km / (s + pm); F = (f / (s + f));
Eq = (Qu * F - 1) * 1 / G + Qy * F + Qo + K * 1 / Wm;
SystemEq = Collect[Numerator@Together@Eq, s];
Simplify@Solve[Thread[Flatten[Simplify@CoefficientList[SystemEq, s] == 0],
  Flatten[{Qu, Qy, Qo, K}]]
{{Qu -> 1 - z/f, Qy -> (f - p1) (f - p2) / (f kp), Qo -> (-f + p1 + p2 - pm) / kp, K1 -> km / kp}}
```

Figura D.1: Rotina para o problema SISO de uma planta de dois pólos.

## Segundo exemplo SISO

Sendo as funções de transferência da planta, do modelo e dos filtros dados por

$$G(s) = \frac{k_p(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)}, \quad W_M(s) = \frac{k_m(s + z_{m1})}{(s + p_{m1})(s + p_{m2})},$$

$$F(s) = \frac{f}{(s + f)(s + z_{m1})} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}, \quad (\text{D.11})$$

pode-se substituir igualmente (D.11) em (D.6) como no caso anterior e obter a equação paramétrica do vetor de parâmetros ideais  $\theta^*$ , dada por

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \theta_{u1}^* \\ \theta_{u2}^* \\ \theta_{y1}^* \\ \theta_{y2}^* \\ \theta_0^* \\ k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{m1} - z_1 z_2 f^{-1} \\ (f + z_{m1} - z_1 - z_2) f^{-1} \\ (p_1 p_2 p_3 - f \prod p_m - f z_{m1} (f - \sum p + \sum p_m)) (f k_p)^{-1} \\ (f^2 - f \sum p + \prod p + z_{m1} (\sum p_m - \sum p + f) - \prod p_m) (f k_p)^{-1} \\ (\sum p - \sum p_m - f) k_p^{-1} \\ k_m k_p^{-1} \end{bmatrix},$$

onde  $\sum p = p_1 + p_2 + p_3$ ,  $\sum p_m = p_{m1} + p_{m2}$ ,  $\prod p = p_1 p_2 + p_2 p_3 + p_1 p_3$  e  $\prod p_m = p_{m1} p_{m2}$ .

A rotina do cálculo para o programa Wolfram Mathematica é apresentada na Figura D.2.

```

Clear["Global`*"]
G = kp * (s + z1) * (s + z2) / ((s + p1) * (s + p2) * (s + p3));
Wm = km * (s + zm1) / ((s + pm1) * (s + pm2));
F = (f / ((s + zm1) * (s + f))) * s^Range[0, 1];
Qu = Partition[{Qu1, Qu2}, 1];
Qy = Partition[{Qy1, Qy2}, 1];
Qo = Qo;
K = K1;
Eq = (Transpose[Qu].F - 1) * 1 / G + Transpose[Qy].F + Qo + K * 1 / Wm;
SystemEq = Collect[Numerator@Together@Eq, s];
Simplify@Solve[Thread[Flatten[Simplify@CoefficientList[SystemEq, s]] == 0],
  Flatten[{Qu, Qy, Qo, K}]]

```

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned} Qu1 &\rightarrow -\frac{z_1 z_2}{f} + z_{m1}, & Qu2 &\rightarrow \frac{f - z_1 - z_2 + z_{m1}}{f}, \\ Qy1 &\rightarrow \frac{p_1 (p_2 p_3 - f z_{m1}) + f ((f - p_2 - p_3 + p_{m2}) z_{m1} + p_{m1} (-p_{m2} + z_{m1}))}{f k_p}, \\ Qy2 &\rightarrow \frac{1}{f k_p} (f^2 + p_2 p_3 - p_{m1} p_{m2} + p_1 (p_2 + p_3 - z_{m1}) - f (p_1 + p_2 + p_3 - z_{m1}) - p_2 z_{m1} - \\ & p_3 z_{m1} + p_{m1} z_{m1} + p_{m2} z_{m1}), & Qo &\rightarrow \frac{-f + p_1 + p_2 + p_3 - p_{m1} - p_{m2}}{k_p}, & K1 &\rightarrow \frac{k_m}{k_p} \end{aligned} \right\} \right\}$$

Figura D.2: Rotina para o problema SISO de uma planta de três pólos.

Quando a quantidade de parâmetros é maior ( $n_p > 3$ ), é mais complicado achar soluções na forma de equações paramétricas.



## D.3 Parâmetros ideais do caso MRAC MIMO

Os parâmetros ideais do controlador no caso MIMO, da mesma forma que no caso SISO, devem cumprir com a equação (D.6), mas agora com parâmetros matriciais. Sejam as matrizes de função de transferência  $m \times m$  da planta, do modelo e dos filtros dadas por

$$G(s) = [G_{ij}(s)], \quad W_M(s) = \text{diag}[M_i(s)], \quad F(s) = \Psi(s)\Lambda^{-1}(s), \quad (\text{D.12})$$

onde  $G_{ij}(s)$  e  $M_i(s)$  são as funções de transferência da planta e do modelo na linha  $i$  e na coluna  $j$ . Designaremos os elementos da inversa da matriz da função de transferência  $G(s)^{-1}$  como  $G_{Iij}(s)$ , e as funções de transferência dos filtros como

$$F_k = s^{k-1}\Lambda^{-1}(s),$$

onde ( $k = 1, \dots, \nu - 2$ ), e  $\nu$  é o índice de observabilidade.

Logo, substituindo (D.12) em (D.6) obtém-se uma matriz de funções polinomiais da forma  $E_q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , onde cada elemento tem a forma

$$E_{q_{ij}} = \sum_{p=1}^m \left[ G_{Ipj} \left( \sum_{h=0}^{\nu-2} F_{h+1} \Theta_{u(mh+p)i}^* \right) \right] + \sum_{h=0}^{\nu-2} F_{h+1} \Theta_{y(mh+j)i}^* + \Theta_{0ji}^* + M_j^{-1} K_{\Theta_{ji}}^* - W_{ij}, \quad (\text{D.13})$$

A matriz de parâmetros ideais  $\Theta^*$  é aquela que faz com que cada elemento (D.13) da matriz  $E_q$  (D.6) seja igual a zero, i.e., aqueles que resolvem as  $m \times m$  equações  $E_{q_{ij}}$ . Além disso, os elementos das linhas da matriz  $E_q$  compreendem parâmetros de  $\Theta_u^*$ . Se o índice de observabilidade  $\nu$  é maior que 2, também compreendem parâmetros  $\Theta_y^*$ .

### D.3.1 Exemplos de cálculo de parâmetros ideais de sistemas MIMO

Dois exemplos do cálculo da matriz de parâmetros ideais  $\Theta^*$  são propostos. O primeiro é um sistema com poucas variáveis simbólicas onde a matriz de parâmetros ideais  $\Theta^*$  tem 16 parâmetros. No segundo exemplo procuramos a matriz de parâmetros ideais  $\Theta^*$  do sistema proposto em [134], onde notaremos que existem infinitas matrizes  $\Theta^*$  que permitem obter o controle ideal nesse sistema. Nesse caso, a matriz de parâmetros  $\Theta^*$  cujo vetor de parâmetros modificado  $\vartheta^*$  tenha a menor norma é procurada, com o qual é possível determinar a menor constante  $M_\vartheta$  requerida pela lei B-MRAC.

## Primeiro exemplo MIMO

Sejam as funções de transferência matriciais da planta e do modelo

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{z_1}{s+p_1} & \frac{z_2}{s+p_2} \\ \frac{z_3}{s+p_3} & \frac{z_4}{s+p_4} \end{bmatrix}, \quad W_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{z_{m1}}{s+p_{m1}} & 0 \\ 0 & \frac{z_{m2}}{s+p_{m2}} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.14})$$

onde a matriz de alta frequência da planta  $K_p$  é não singular. Assumindo um índice de observabilidade  $\nu = 2$ , os filtros são dados por

$$F(s) = \frac{f}{s+f} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.15})$$

Assim, as matrizes de parâmetros ideais têm a seguinte forma

$$\begin{aligned} \Theta_u &= \begin{bmatrix} \theta_{u11} & \theta_{u12} \\ \theta_{u21} & \theta_{u22} \end{bmatrix}, & \Theta_y &= \begin{bmatrix} \theta_{y11} & \theta_{y12} \\ \theta_{y21} & \theta_{y22} \end{bmatrix}, \\ \Theta_0 &= \begin{bmatrix} \theta_{011} & \theta_{012} \\ \theta_{021} & \theta_{022} \end{bmatrix}, & K_\Theta &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

Procede-se a substituir (D.14), (D.15) e (D.16) em (D.6). Depois de resolver, tem-se que as equações paramétricas das matrizes de parâmetros ideais que formam  $\Theta^*$  são dadas por

$$\begin{aligned} \Theta_u^* &= \frac{1}{fD_K} \begin{bmatrix} z_2z_3(p_4 - f) - z_1z_4(p_2 - f) & -z_1z_3(p_4 - p_2) \\ -z_2z_4(p_1 - p_3) & z_2z_3(p_1 - f) - z_1z_4(p_3 - f) \end{bmatrix}, \\ \Theta_y^* &= \frac{1}{fD_K} \begin{bmatrix} z_4(p_1 - f)(p_2 - f) & -z_3(p_1 - f)(p_2 - f) \\ -z_2(p_3 - f)(p_4 - f) & z_1(p_3 - f)(p_4 - f) \end{bmatrix}, \\ \Theta_0^* &= \frac{1}{D_K} \begin{bmatrix} z_4(p_1 + p_2 - p_m - f) & -z_3(p_1 + p_2 - p_m - f) \\ -z_2(p_3 + p_4 - p_m - f) & z_1(p_3 + p_4 - p_m - f) \end{bmatrix}, \\ K_\Theta^* &= K_p^{-1} = \frac{1}{D_K} \begin{bmatrix} z_4 & -z_3 \\ -z_2 & z_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $D_K$  é o determinante da matriz de alta frequência  $K_p$  dado por

$$D_K = \det(K_p) = z_1z_4 - z_2z_3.$$

A rotina do cálculo para o programa Wolfram Mathematica é apresentada na Figura D.3.

```

Clear["Global`*"]

G = {{z1 / (s + p1), z2 / (s + p2)}, {z3 / (s + p3), z4 / (s + p4)}};
WM = {{1 / (s + pm1), 0}, {0, 1 / (s + pm2)}};
F = {{f / (s + f), 0}, {0, f / (s + f)}};
Qu = {{Qu11, Qu12}, {Qu21, Qu22}};
Qy = {{Qy11, Qy12}, {Qy21, Qy22}};
Qo = {{Qo11, Qo12}, {Qo21, Qo22}};
K = {{k11, k12}, {k21, k22}};
SystemEq =
  Collect[
    Numerator@
      Together@((Transpose[Qu].F - IdentityMatrix[2]).Inverse[G] +
        Transpose[Qy].F + Transpose[Qo] + Transpose[K].Inverse[WM]), s];
Simplify@Solve[Thread[Flatten[CoefficientList[SystemEq, s]] == 0],
  Flatten[{Qu, Qy, Qo, K}]]

```

$$\left\{ \left\{ \begin{aligned}
\text{Qu11} &\rightarrow \frac{f z_2 z_3 - p_4 z_2 z_3 - f z_1 z_4 + p_2 z_1 z_4}{f z_2 z_3 - f z_1 z_4}, & \text{Qu12} &\rightarrow -\frac{(p_2 - p_4) z_1 z_3}{f (z_2 z_3 - z_1 z_4)}, \\
\text{Qu21} &\rightarrow \frac{(p_1 - p_3) z_2 z_4}{f (z_2 z_3 - z_1 z_4)}, & \text{Qu22} &\rightarrow \frac{f z_2 z_3 - p_1 z_2 z_3 - f z_1 z_4 + p_3 z_1 z_4}{f z_2 z_3 - f z_1 z_4}, \\
\text{Qy11} &\rightarrow -\frac{(f - p_1) (f - p_2) z_4}{f (z_2 z_3 - z_1 z_4)}, & \text{Qy12} &\rightarrow \frac{(f - p_1) (f - p_2) z_3}{f (z_2 z_3 - z_1 z_4)}, \\
\text{Qy21} &\rightarrow \frac{(f - p_3) (f - p_4) z_2}{f (z_2 z_3 - z_1 z_4)}, & \text{Qy22} &\rightarrow -\frac{(f - p_3) (f - p_4) z_1}{f (z_2 z_3 - z_1 z_4)}, \\
\text{Qo11} &\rightarrow \frac{(-f + p_1 + p_2 - p_4) z_4}{-z_2 z_3 + z_1 z_4}, & \text{Qo12} &\rightarrow \frac{(f - p_1 - p_2 + p_4) z_3}{-z_2 z_3 + z_1 z_4}, \\
\text{Qo21} &\rightarrow \frac{(f - p_3 - p_4 + p_2) z_2}{-z_2 z_3 + z_1 z_4}, & \text{Qo22} &\rightarrow \frac{(-f + p_3 + p_4 - p_2) z_1}{-z_2 z_3 + z_1 z_4}, & k_{11} &\rightarrow \frac{z_4}{-z_2 z_3 + z_1 z_4}, \\
k_{12} &\rightarrow \frac{z_3}{z_2 z_3 - z_1 z_4}, & k_{21} &\rightarrow \frac{z_2}{z_2 z_3 - z_1 z_4}, & k_{22} &\rightarrow \frac{z_1}{-z_2 z_3 + z_1 z_4} \end{aligned} \right\} \right\}$$

Figura D.3: Rotina do primeiro problema MIMO.

## Segundo exemplo MIMO

Analisamos o sistema proposto em [134]. Seja a função de transferência matricial da planta

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+3)(s-1)(s+1)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+3)^2} & \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.17})$$

e a função de transferência matricial do modelo

$$W_M(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.18})$$

pode-se verificar que o valor do índice de observabilidade  $\nu$  mediante uma realização mínima de espaço de estado da planta, dada por

$$A_p = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & -11 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $A_p$  é a matriz de estados,  $B_p$  é a matriz de entrada e  $C_p$  é a matriz de saída da planta. De  $A_p$  pode-se observar que o sistema tem  $n = 5$  pólos. Agora, aplicando a equação (2.14), obtém-se

$$\text{posto} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -11 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix}^T = 5.$$

Assim, pode-se determinar que o índice de observabilidade é dado por

$$\nu - 1 = 2 \quad \rightarrow \quad \nu = 3.$$

Logo, de (4.8) e com  $\lambda(s) = (s+2)^2$  tem-se que a função de transferência matricial dos filtros é dada por

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)^2} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{D.19})$$

Assim, as matrizes de parâmetros ideais  $\Theta^* = [\Theta_u^{*T} \ \Theta_y^{*T} \ \Theta_0^{*T} \ K^{*T}]^T$  tem a seguinte

forma

$$\begin{aligned} \Theta_u &= \begin{bmatrix} \theta_{u11} & \theta_{u12} \\ \theta_{u21} & \theta_{u22} \\ \theta_{u31} & \theta_{u32} \\ \theta_{u41} & \theta_{u42} \end{bmatrix}, & \Theta_y &= \begin{bmatrix} \theta_{y11} & \theta_{y12} \\ \theta_{y21} & \theta_{y22} \\ \theta_{y31} & \theta_{y32} \\ \theta_{y41} & \theta_{y42} \end{bmatrix}, \\ \Theta_0 &= \begin{bmatrix} \theta_{011} & \theta_{012} \\ \theta_{021} & \theta_{022} \end{bmatrix}, & K_\Theta &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Procede-se a substituir (D.17), (D.18), (D.19) e (D.20) em (D.6), e assim, a matriz de parâmetros ideais  $\Theta^*$  obtida é a seguinte

$$\begin{aligned} \Theta_u^* &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}, & \Theta_y^* &= \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -7 \\ 14 & 8 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\alpha & 3\beta \\ -5\alpha & -5\beta \\ 9\alpha & 9\beta \\ -13\alpha & -13\beta \end{bmatrix}, \\ \Theta_0^* &= \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 2\alpha & 2\beta \end{bmatrix}, & K^* &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A rotina do cálculo para o programa Wolfram Mathematica é apresentada na Figura D.4.

Neste sistema a matriz de parâmetros ideais  $\Theta^*$  não é única, é uma família de matrizes de parâmetros ideais onde  $\alpha$  e  $\beta$  podem ter qualquer valor. Assim o valor da constante  $M_\vartheta$ , que é necessária para aplicar o controle B-MRAC, será maior ou igual ao mínimo valor de  $\vartheta^*$ , ou seja,  $M_\vartheta \geq \min(\|\vartheta^*\|)$ , onde  $\vartheta^* = \text{vec}(\Theta^*)$ .

Calculando  $\|\vartheta^*\|$  obtém-se

$$\|\vartheta^*\| = \sqrt{291\alpha^2 + 330\alpha + 291\beta^2 + 740\beta + 863}. \quad (\text{D.21})$$

Assim, o valor de  $\vartheta^*$  é mínimo quando  $(291\alpha^2 + 330\alpha)$  e  $(291\beta^2 + 740\beta)$  são mínimos, então minimizando ambas expressões (derivando e igualando a zero) obtém-se  $\alpha = -0.57$  e  $\beta = -1.27$ . Assim, substituindo em (D.21), obtém-se que  $M_\vartheta \geq 17.3$ .

```

Clear["Global`*"]

G = {{(s + 2) / ((s + 3) * (s - 1) * (s + 1)), 1 / ((s + 1) * (s + 2))},
      {1 / ((s - 1) * (s + 1) * (s + 3) * (s + 3)), 1 / ((s + 1) * (s + 2) * (s + 3))}};
WM = {{1 / ((s + 1) * (s + 1)), 0}, {0, 1 / ((s + 1) * (s + 1) * (s + 2))}};
F = {{s / ((s + 2) * (s + 2)), 0}, {0, s / ((s + 2) * (s + 2))},
      {1 / ((s + 2) * (s + 2)), 0}, {0, 1 / ((s + 2) * (s + 2))}};
Qu = {{Qu11, Qu12}, {Qu21, Qu22}, {Qu31, Qu32}, {Qu41, Qu42}};
Qy = {{Qy11, Qy12}, {Qy21, Qy22}, {Qy31, Qy32}, {Qy41, Qy42}};
Qo = {{Qo11, Qo12}, {Qo21, Qo22}}; K = {{k11, k12}, {k21, k22}};
SystemEq =
  Collect[
    Numerator@
      Together@
        ((Transpose[Qu].F - IdentityMatrix[Length[Transpose@F]]) .
          Inverse[G] + Transpose[Qy].F + Transpose[Qo] +
          Transpose[K].Inverse[WM]), s];
Simplify@Solve[Thread[Flatten[CoefficientList[SystemEq, s]] == 0],
  Flatten[{Qu, Qy, Qo, K}]]

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>

{{Qu11 -> 0, Qu12 -> -1, Qu21 -> -1, Qu22 -> 2, Qu41 -> 5 + Qu31,
  Qu42 -> 4 + Qu32, Qy11 -> 7 + 3 Qu31, Qy12 -> 1 + 3 Qu32, Qy21 -> -5 Qu31,
  Qy22 -> -7 - 5 Qu32, Qy31 -> 14 + 9 Qu31, Qy32 -> 8 + 9 Qu32, Qy41 -> -13 Qu31,
  Qy42 -> -20 - 13 Qu32, Qo11 -> -5 - Qu31, Qo12 -> -2 - Qu32,
  Qo21 -> -2 (2 + Qu31), Qo22 -> 3 - 2 Qu32, k11 -> 1, k12 -> 0, k21 -> -1, k22 -> 1}}

```

Figura D.4: Rotina do segundo problema MIMO.