



## ESTUDO COMPARATIVO DE REGIME TRANSITÓRIO DE CONTROLADORES ADAPTATIVOS

Priscilla Caroline Moutinho Dinau

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Ramon Romankevicius Costa

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2012

ESTUDO COMPARATIVO DE REGIME TRANSITÓRIO DE  
CONTROLADORES ADAPTATIVOS

Priscilla Caroline Moutinho Dinau

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

---

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc.

---

Prof. Eduardo Vieira Leão Nunes, D.Sc.

---

Prof. Marco Antonio Meggiolaro, Ph.D

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
DEZEMBRO DE 2012

Dinau, Priscilla Caroline Moutinho

Estudo Comparativo de Regime Transitório de Controladores Adaptativos/Priscilla Caroline Moutinho Dinau. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

XIV, 101 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Ramon Romankevicius Costa

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 89 – 94.

1. Controle Adaptativo. 2. MRAC. 3. Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ . 4. Estrutura Variável. 5. Análise de Transitório. I. Costa, Ramon Romankevicius. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*À minha mãe Angela Maria da  
Conceição Moutinho*

# Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, à Nossa Senhora das Graças e à Santa Catarina de Sena por me dar força e coragem para enfrentar os obstáculos e superar as dificuldades durante o mestrado.

À minha mãe Angela Moutinho e meu irmão Bruno Dinau, pelo apoio, incentivo, carinho, compreensão e força, principalmente nos momentos mais difíceis, nunca me deixando desistir.

A todos os meus familiares, pela confiança e carinho.

Ao meu namorado Reinaldo Rodrigues, cujo apoio, compreensão, carinho e companheirismo foram de especial importância na etapa final da dissertação.

Ao professor e orientador Ramon Costa, pelo conhecimento compartilhado, pela colaboração, paciência e confiança em meu trabalho.

Aos professores Fernando Lizarralde, Liu Hsu, João Carlos Basílio, Afonso Celso Gomes, Amit Bhaya e todos aqueles que me passaram um pouco do seu grande conhecimento durante o mestrado, me incentivando sempre a buscar mais.

Aos professores Eduardo Nunes e Marco Antonio Meggiolaro, pela participação na minha banca, pela cuidadosa leitura desta dissertação e pelas sugestões fornecidas.

A todos os amigos do mestrado, pelo companheirismo nos momentos complicados, carinho e momentos de distração. Em especial a Andrei, Thiago e Camila.

Aos colegas da PETROBRAS pelo apoio e incentivo, em especial à Leda Cabello, Felipe Clark e Marcelo Brandão.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## ESTUDO COMPARATIVO DE REGIME TRANSITÓRIO DE CONTROLADORES ADAPTATIVOS

Priscilla Caroline Moutinho Dinau

Dezembro/2012

Orientador: Ramon Romankevicius Costa

Programa: Engenharia Elétrica

Controle Adaptativo consiste em uma das estratégias mais utilizadas para lidar com modelagem inadequada ou insuficiente, incertezas paramétricas, dinâmica não modelada e perturbações. Tendo em vista a utilização desta classe de controle em plantas reais, é de fundamental importância reduzir ao máximo o comportamento indesejado durante o processo de adaptação. Assim sendo, o objetivo desta dissertação consiste em apresentar um estudo do algoritmo recente, denominado Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ , em comparação com alguns algoritmos de controle adaptativo por modelo de referência propostos na literatura, identificando suas vantagens e desvantagens, limitações, similaridades e diferenças com foco no comportamento transitório. Adicionalmente, é apresentado um novo algoritmo que, além de melhorar o desempenho transitório, propõe uma alternativa na busca de solução para o problema de conhecimento de um limitante superior para a incerteza da planta.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## COMPARATIVE STUDY OF THE TRANSIENT BEHAVIOR OF ADAPTIVE CONTROLLERS

Priscilla Caroline Moutinho Dinau

December/2012

Advisor: Ramon Romankevicius Costa

Department: Electrical Engineering

Adaptive control is one of the most employed strategies to deal with inappropriate or insufficient plant modeling, parametric uncertainties, unmodeled dynamics and disturbances. Due to its wide use in real applications, it is of fundamental importance to minimize the undesired initial transient behavior during the adaptation process. Therefore, the objective of this dissertation is to present a study of the recent algorithm, called  $\mathcal{L}_1$  Adaptive Control, in comparison with some model-reference adaptive control algorithms proposed in the literature, identifying their advantages and disadvantages, limitations, similarities and differences with a focus on the transient behavior. Additionally, it is presented a new algorithm that, besides improving the transient performance, proposes an alternative solution to the problem of knowledge of an upper bound to the plant uncertainty.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	2
1.2 Objetivos . . . . .	2
1.3 Revisão bibliográfica . . . . .	3
1.4 Organização dos capítulos . . . . .	6
<b>2 Algoritmos analisados</b>	<b>7</b>
2.1 <i>MRAC</i> tradicional . . . . .	7
2.1.1 Estrutura geral de estratégias <i>MRAC</i> . . . . .	8
2.1.2 Lei de adaptação do <i>MRAC</i> tradicional . . . . .	11
2.1.3 Estabilidade do <i>MRAC</i> tradicional . . . . .	12
2.1.4 Observações sobre o <i>MRAC</i> . . . . .	13
2.2 Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ . . . . .	13
2.2.1 Realimentação de estados - Estrutura <i>CMAC</i> . . . . .	14
2.2.2 Realimentação de saída . . . . .	17
2.2.3 Estabilidade do Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ . . . . .	22
2.2.4 Observações sobre o Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ . . . . .	23
2.3 Algoritmo <i>VS-MRAC</i> . . . . .	25
2.3.1 Lei de adaptação do <i>VS-MRAC</i> . . . . .	25
2.3.2 Estabilidade do <i>VS-MRAC</i> . . . . .	26
2.3.3 Observações sobre o <i>VS-MRAC</i> . . . . .	28
2.4 Algoritmo <i>B-MRAC</i> . . . . .	28
2.4.1 Lei de adaptação do <i>B-MRAC</i> . . . . .	29
2.4.2 Estabilidade do <i>B-MRAC</i> . . . . .	29
2.4.3 Observações sobre o <i>B-MRAC</i> . . . . .	30
2.5 Algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . . . .	31
2.5.1 Lei de Adaptação do $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . . . .	31



2.5.2	Estabilidade do $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . . . .	33
2.5.3	Transitório do $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . . . .	34
2.5.4	Observações sobre o $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Comparação de desempenho transitório</b>	<b>38</b>
3.1	Comportamento transitório do <i>MRAC</i> . . . . .	39
3.2	Comportamento transitório do Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ . . . . .	45
3.3	Comportamento transitório do <i>VS-MRAC</i> . . . . .	47
3.4	Comportamento transitório do <i>B-MRAC</i> . . . . .	55
3.5	Comportamento transitório do $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . . . .	62
3.6	Comparativo entre os algoritmos . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Contribuição ao <i>VS-MRAC</i>: o algoritmo <i>VS-MRAC</i> modificado</b>	<b>73</b>
4.1	Lei de adaptação do <i>VS-MRAC</i> modificado . . . . .	74
4.2	Estabilidade do <i>VS-MRAC</i> modificado . . . . .	74
4.3	Simulações do <i>VS-MRAC</i> modificado . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>84</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Base matemática</b>	<b>95</b>
A.1	Normas de vetores . . . . .	95
A.2	Função Estritamente Positiva Real . . . . .	95
A.3	Norma $\mathcal{L}_1$ de funções de transferência <i>SISO</i> . . . . .	96
A.4	Conjuntos convexos e projeção . . . . .	96
A.5	Teoremas e lemas de estabilidade . . . . .	98

# Lista de Figuras

2.1	Diagrama de blocos representativo do <i>MRAC</i> . . . . .	8
2.2	Estrutura completa do <i>MRAC</i> com realimentação de saída. . . . .	10
2.3	Sistema de referência em malha fechada (estados). . . . .	16
2.4	Diagrama de blocos do Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ (estados). . . . .	17
2.5	Sistema de referência em malha fechada (saída). . . . .	21
2.6	Diagrama de blocos do Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ (saída). . . . .	22
2.7	Diagrama de blocos do algoritmo <i>VS-MRAC</i> . . . . .	27
2.8	Projeção utilizada no <i>B-MRAC</i> . . . . .	29
2.9	Diagrama de blocos do $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . . . .	32
2.10	Diagrama de blocos mostrando a relação de $f^*$ para $\hat{f}$ . . . . .	33
3.1	Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo <i>MRAC</i> . . . . .	40
3.2	Resultados da simulação para o caso 2 com o algoritmo <i>MRAC</i> . . . . .	42
3.3	Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo <i>MRAC</i> . . . . .	43
3.4	Resultados da simulação para o caso 4 com o algoritmo <i>MRAC</i> . . . . .	44
3.5	Resultados da simulação para o caso 1 com o Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ . . . . .	46
3.6	Resultados da simulação para o caso 1 com o Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ - Erro de predição. . . . .	46
3.7	Resultados da Simulação para o caso 2 com o Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ . . . . .	48
3.8	Resultados da simulação para o caso 2 com o Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ - Erro de predição. . . . .	48
3.9	Resultados da Simulação para o caso 3 com o Controle $\mathcal{L}_1$ . . . . .	49
3.10	Resultados da simulação para o caso 3 com o Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ - Erro de predição. . . . .	49
3.11	Resultados da Simulação para o caso 4 com o Controle $\mathcal{L}_1$ . . . . .	50
3.12	Resultados da simulação para o caso 4 com o Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ - Erro de predição. . . . .	51
3.13	Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> . . . . .	53
3.14	Resultados da simulação para o caso 2 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> . . . . .	54
3.15	Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> . . . . .	56
3.16	Resultados da simulação para o caso 4 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> . . . . .	57

3.17	Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo <i>B-MRAC</i> . . .	59
3.18	Resultados da simulação para o caso 2 com o algoritmo <i>B-MRAC</i> . . .	60
3.19	Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo <i>B-MRAC</i> . . .	61
3.20	Resultados da simulação para o caso 4 com o algoritmo <i>B-MRAC</i> . . .	62
3.21	Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . .	64
3.22	Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> - mudança de $\alpha$ . . . . .	66
3.23	Resultados da simulação para o caso 2 com o algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . .	67
3.24	Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . .	69
3.25	Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> - mudança de $\hat{e}_0(0)$ . . . . .	70
3.26	Resultados da simulação para o caso 4 com o algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . .	71
4.1	Diagrama de blocos do algoritmo adaptativo proposto. . . . .	76
4.2	Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> . . .	78
4.3	Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> modificado sem e com zona morta. . . . .	79
4.4	Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> modificado com e sem zona morta - (2). . . . .	80
4.5	Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> . . .	81
4.6	Resultados da Simulação para o caso 3 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> modificado sem e com zona morta. . . . .	82
4.7	Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> modificado com e sem zona morta - (2). . . . .	83
5.1	Diagrama geral dos algoritmos apresentados na dissertação. . . . .	86
A.1	Exemplos de conjunto convexo e não convexo. . . . .	96
A.2	Exemplo de função convexa. . . . .	97
A.3	Descrição geométrica da projeção. . . . .	99
A.4	Sistema interconectado. . . . .	101

# Lista de Tabelas

3.1	Algoritmo <i>MRAC</i> . . . . .	39
3.2	Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo <i>MRAC</i> . . . . .	39
3.3	Dados para a simulação do caso 1 com o algoritmo <i>MRAC</i> . . . . .	40
3.4	Dados para a simulação do caso 2 com o algoritmo <i>MRAC</i> . . . . .	41
3.5	Dados para a simulação do caso 3 com o algoritmo <i>MRAC</i> . . . . .	41
3.6	Dados para a simulação do caso 4 com o algoritmo <i>MRAC</i> . . . . .	42
3.7	Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ . . . . .	45
3.8	Dados para a simulação do caso 1 com o Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ . . . . .	45
3.9	Dados para a simulação do caso 2 com o Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ . . . . .	47
3.10	Dados para a simulação do caso 3 com o algoritmo $\mathcal{L}_1$ . . . . .	47
3.11	Dados para a simulação do caso 4 com o algoritmo $\mathcal{L}_1$ . . . . .	50
3.12	Algoritmo <i>VS-MRAC</i> . . . . .	51
3.13	Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo <i>VS-MRAC</i> - caso 1. . . . .	52
3.14	Dados para a simulação do caso 1 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> . . . . .	52
3.15	Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo <i>VS-MRAC</i> - caso 2. . . . .	52
3.16	Dados para a simulação do caso 2 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> . . . . .	53
3.17	Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo <i>VS-MRAC</i> - caso 3. . . . .	55
3.18	Dados para a simulação do caso 3 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> . . . . .	55
3.19	Dados para a simulação do caso 4 com o algoritmo <i>VS-MRAC</i> . . . . .	55
3.20	Algoritmo <i>B-MRAC</i> . . . . .	56
3.21	Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo <i>B-MRAC</i> - caso 1. . . . .	58
3.22	Dados para a simulação do caso 1 com o algoritmo <i>B-MRAC</i> . . . . .	58
3.23	Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo <i>B-MRAC</i> - caso 2. . . . .	58
3.24	Dados para a simulação do caso 2 com o algoritmo <i>B-MRAC</i> . . . . .	59

3.25	Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo <i>B-MRAC</i> - caso 3. . . . .	59
3.26	Dados para a simulação do caso 3 com o algoritmo <i>B-MRAC</i> . . . . .	59
3.27	Dados para a simulação do caso 4 com o algoritmo <i>B-MRAC</i> . . . . .	62
3.28	Algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . . . .	63
3.29	Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> - caso 1. . . . .	63
3.30	Dados para a simulação do caso 1 com o algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . . . .	63
3.31	Dados para a simulação do caso 1 com o algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> - Mudança de $\alpha$ . . . . .	65
3.32	Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> - caso 2. . . . .	65
3.33	Dados para a simulação do caso 2 com o algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . . . .	65
3.34	Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> - caso 3. . . . .	68
3.35	Dados para a simulação do caso 3 com o algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . . . .	68
3.36	Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> - caso 3 - mudança de $\hat{e}_0(0)$ . . . . .	68
3.37	Dados para a simulação do caso 3 com o algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> - mudança de $\hat{e}_0(0)$ . . . . .	69
3.38	Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> - caso 4. . . . .	69
3.39	Dados para a simulação do caso 4 com o algoritmo $\alpha$ - <i>MRAC</i> . . . . .	70
4.1	Condições iniciais utilizadas no caso 1 do algoritmo <i>VS-MRAC</i> modificado. . . . .	77
4.2	Dados para a simulação do caso 1 com o controlador <i>VS-MRAC</i> modificado. . . . .	77
4.3	Condições iniciais utilizadas no caso 3 do algoritmo <i>VS-MRAC</i> modificado. . . . .	78
4.4	Dados para a simulação do caso 1 com o controlador <i>VS-MRAC</i> modificado. . . . .	78
5.1	Tabela comparativa (Caso entrada / saída) . . . . .	88

## Lista de Acrônimos

- B-MRAC** .. *Binary Model Reference Adaptive Control*, Controle Adaptativo por Modelo de Referência Binário
- COPPE**.... Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa de Engenharia
- FP** ..... Fator de Projeção
- LTI**..... *Linear Time Invariant*, Linear Invariante no Tempo
- MCE** ..... *Modified Certainty Equivalence*, Equivalência Certa Modificada
- MRAC** .... *Model Reference Adaptive Control*, Controle Adaptativo por Modelo de Referência
- MRC** ..... *Model Reference Control*, Controle por Modelo de Referência
- PE** ..... *Persistently Excitation*, Excitação Persistente
- PI**..... Proporcional Integral
- SISO** ..... *Single-Input-Single-Output*, Uma Entrada e Uma Saída
- SMC** ..... *Sliding Mode Control*, Controle por Modos deslizantes
- SPR**..... *Strictly Positive Real*, Estritamente Positiva Real
- SVF** ..... *State Variable Filter*, Filtro de Variáveis de Estado
- UAV**..... *Unmanned Aerial Vehicle*, Veículo Aéreo não Tripulado
- UFRJ** ..... Universidade Federal do Rio de Janeiro
- VSC**..... *Variable Structure Control*, Controle a Estrutura Variável
- VS-MRAC**. *Variable Structure Model Reference Adaptive Control*, Controle Adaptativo por Modelo de Referência a Estrutura Variável

# Capítulo 1

## Introdução

Controle adaptativo consiste em uma das estratégias mais utilizadas para lidar com modelagem inadequada ou insuficiente, incertezas paramétricas, dinâmica não modelada e perturbações. Diferentemente de outras estratégias de controle, cujos projetos são feitos baseados em parâmetros conhecidos do sistema, os controladores adaptativos não necessitam deste conhecimento.

Com o objetivo de garantir comportamento satisfatório, o controle adaptativo utiliza informações em tempo real do desempenho do erro (Tao 2003), ajustando seus parâmetros para adequar-se às diversas características apresentadas pelo sistema (Nunes 2004).

Existem dois tipos de abordagem desta classe de controle: o método indireto, no qual os parâmetros desconhecidos da planta são identificados e o controle é obtido com esta informação e o método direto, no qual os parâmetros do controlador são estimados através de uma lei de adaptação sem identificação explícita dos parâmetros da planta.

Verificando a literatura de controle adaptativo, nota-se grande destaque da técnica de Controle Adaptativo por Modelo de Referência (*Model Reference Adaptive Control - MRAC*) como uma das mais utilizadas para controlar sistemas lineares e invariantes no tempo com incertezas estruturais e/ou paramétricas (Mareels & Pol-derman 1996). O objetivo consiste em rastrear a resposta de um modelo que define o comportamento desejado (modelo de referência) além de estabilizar o sistema em malha fechada.

O princípio básico consiste na obtenção de um sinal de controle que, a partir da estimação de parâmetros desconhecidos, atua em malha fechada promovendo um auto-ajuste das características do sistema no qual é aplicado, capaz de garantir uma condição desejada pré-estabelecida (modelo de referência).

Embora o sistema de controle adaptativo possa utilizar tanto realimentação de estado como realimentação de saída (*I/O MRAC* – Controle Adaptativo por Modelo de Referência utilizando somente as medidas da entrada e da saída da planta), a

segunda alternativa mostra-se mais promissora em aplicações práticas, em que a disponibilidade de todos os estados na maior parte das vezes é inviável.

Existem diversas aplicações de Controle Adaptativo tais como: controle da dinâmica de navios, controle de UAVs (*Unmanned Aerial Vehicle* - Veículo Aéreo não Tripulado), controle de colunas de destilação, de reatores químicos, de fornos, controle de pH, de sistemas de potência, de manipuladores robóticos, controle de pressão arterial e de dispositivos de assistência ventricular e controle muscular (Åström & Wittenmark 2008, Hovakimyan & Cao 2010, Narendra & Annaswamy 2005).

## 1.1 Motivação

Uma das questões em aberto na área de controle adaptativo consiste na tentativa de melhorar o desempenho transitório. Para a aplicação desta classe de controle em plantas reais, é de fundamental importância reduzir ao máximo o comportamento indesejado durante o processo de adaptação.

Os principais problemas desta abordagem consistem no fato de o desempenho durante o transitório de adaptação não ser uniforme em relação às condições iniciais e da convergência do erro de rastreamento para zero poder ser muito lenta (Hsu & Costa 1987, Narendra 1994).

Vários esforços vem sendo aplicados na busca de solução para tais problemas. Uma abordagem recente, apresentada em diversos artigos e em livro (Hovakimyan & Cao 2010), é o algoritmo Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ , o qual vem sendo utilizado em muitas aplicações e é tema de bastante discussão entre a comunidade de controle na atualidade. Assim sendo, é de grande interesse a investigação crítica e comparativa da teoria proposta em relação a outros algoritmos com o mesmo propósito de melhoria de comportamento transitório.

## 1.2 Objetivos

O objetivo principal desta dissertação consiste em apresentar um estudo do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  em comparação com alguns algoritmos de controle adaptativo por modelo de referência propostos na literatura, identificando suas vantagens e desvantagens, limitações, similaridades e diferenças com foco na melhoria de comportamento transitório. Como contribuição adicional, é apresentado um novo algoritmo que, além de melhorar o desempenho transitório, propõe uma alternativa na busca de solução para o problema do conhecimento de um limitante superior para incerteza da planta, apresentado no CBA 2012, assim como uma correção da análise de transitório do  $\alpha$ -MRAC.

As etapas a serem cumpridas para atingir este objetivo são:



- Estudar o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ ;
- Apresentar alguns algoritmos de Controle Adaptativo por Modelo de Referência;
- Realizar testes de desempenho transitório através de simulações;
- Analisar os resultados de forma comparativa;
- Identificar pontos positivos e negativos de cada método, assim como similaridades e diferenças.

### 1.3 Revisão bibliográfica

Várias abordagens encontradas na literatura buscam melhorar o transitório do Controle Adaptativo. Uma das primeiras ideias refere-se ao uso do conceito de riqueza dominante do sinal de referência e alto nível de Excitação Persistente (*Persistently Excitation* - PE) em relação ao nível do sinal do erro de modelagem (Ioannou & Tao 1989).

Uma das grandes vantagens deste método é a garantia de estabilidade global com erro de rastreamento pequeno sem ocorrência do fenômeno de *bursting* (intervalos de tempo pequenos porém cíclicos em que os sinais de erro atingem valores elevados (Ksakalis 1997) com posterior retorno aos valores normais). Em contrapartida, a aplicação de um sinal PE é o grande obstáculo desta abordagem, já que também provoca efeitos indesejáveis durante o transitório, principalmente se o sinal de referência desejado não é “rico”.

Uma abordagem bastante interessante é a que utiliza a teoria de Controle a Estrutura Variável (*Variable Structure Control* - VSC) e modos deslizantes (Utkin 1978). Esta proposta utiliza funções de chaveamento das variáveis de estado para manter as trajetórias do sistema restritas a uma superfície de deslizamento, garantindo a dinâmica desejada e, ao mesmo tempo, robustez a variações paramétricas.

O algoritmo denominado *VS-MRAC* (*Variable Structure - MRAC*) (Hsu & Costa 1989) propõe a utilização de estrutura variável em conjunto com o *MRAC* sem a necessidade de conhecer o estado completo. Uma vantagem deste algoritmo é a garantia de estabilidade global ao sistema em malha fechada, com o erro tendendo a zero ao menos exponencialmente independente de excitação persistente além de um bom desempenho transitório. Outra propriedade do algoritmo é a sua capacidade de rejeição de perturbações com transitório de adaptação finito além de evitar *infinite parameter drift* (fenômeno em que a estimativa do parâmetro evolui sem limites (Hill & Ydstie 2004)).

O *VS-MRAC*, no entanto, também apresenta algumas dificuldades para sua implementação. Uma delas é a necessidade de um limitante superior para a incerteza da planta, o qual nem sempre é um dado facilmente disponível. Este limitante equivale a um ganho estabilizante para o sistema em malha fechada.

Outra grande dificuldade é a possibilidade de ocorrência de *chattering* ao longo da superfície de deslizamento (oscilações de amplitude finita e alta frequência no sinal de controle - (Bartolini et al. 1998)), devido a imperfeições nos mecanismos de chaveamento tais como histerese, constantes de tempo pequenas, atrasos ou dinâmicas não modeladas da planta ou do relé (Hsu & Costa 1989, Peixoto 2002).

Em (Datta & Ioannou 1994, Sun 1993) foi apresentado o chamado princípio da equivalência certa modificada (*Modified Certainty Equivalence - MCE*). Nesta abordagem, o erro de identificação dos parâmetros é compensado através de um termo de realimentação adicional inserido na lei de controle, o qual é obtido utilizando-se um filtro de avanço de fase (*lead*) no erro de saída. A vantagem é a redução dos efeitos da imperfeição do método de estimação porém só funciona bem para processos de adaptação lenta, além do fato de ser necessário conhecer a relação entre os ganhos de alta frequência da planta e do modelo.

Outra abordagem para melhoria de transitório é a utilização de vários modelos de identificação e sua adequada comutação (Narendra & Balakrishnan 1994). A ideia proposta consiste em selecionar, a cada instante, o modelo que melhor se aproxima da planta para tentar compatibilizá-lo à evolução dos parâmetros garantindo adaptação mais rápida, ou seja, fazer com que o erro permaneça dentro de limites razoáveis e atinja um valor pequeno aceitável em um período de tempo razoável.

Os vários modelos apenas diferem na estimativa inicial dos parâmetros desconhecidos da planta e cada um isoladamente deve garantir estabilidade ao sistema. O sinal de controle é obtido com base no modelo mais adequado no instante do cálculo, isto é, aquele com o qual se obtém o erro de identificação que minimiza uma determinada função critério (função objetivo em otimização).

A vantagem é que a estabilidade independe do sistema de chaveamento entre os modelos, desde que o intervalo entre as sucessivas comutações esteja acima de um limitante inferior. Isso permite a liberdade de escolha do esquema de chaveamento em função do desempenho. A dificuldade deste método reside na escolha adequada da quantidade de modelos, da função a ser minimizada para a escolha do modelo adequado em cada instante e da própria estrutura de chaveamento.

Vale a pena destacar também a abordagem baseada em teoria de controle binário (em termos de (Emelyanov 1987)) e projeção paramétrica (Naik et al. 1992). O novo algoritmo denominado *B-MRAC* (*Binary-MRAC*) proposto em (Hsu & Costa 1990, 1994), combina *MRAC*, *VS-MRAC* e Controle Binário, utilizando adaptação com projeção paramétrica e ganho suficientemente alto (porém finito). É uma solução

que alivia o problema de *chattering*, presente no *VS-MRAC*, mas mantendo a boa invariância e o bom transitório característicos dos sistemas a estrutura variável (Hsu & Costa 1991).

Também pode-se citar o uso de ferramentas não-lineares como a teoria do *backstepping* apresentado em (Krstić et al. 1995, 1993, Zhang et al. 1996). É um método recursivo de obtenção do sinal de controle, através de passos de estabilização com a utilização de funções estabilizantes. A cada etapa há um “controle virtual” (estados como variáveis de controle) até chegar ao cálculo final do verdadeiro sinal de controle. Uma propriedade desta abordagem é que para parâmetros desconhecidos constantes, pode-se obter convergência do erro a zero. Uma desvantagem é a dependência de derivadas parciais, o que torna o sistema bastante complexo.

Em (Costa 1999) é proposta a incorporação de um filtro de avanço de fase na lei de adaptação do *MRAC* tradicional. Um filtro semelhante foi empregado no algoritmo *MCE* de (Sun 1993), porém, na lei de controle. A análise do algoritmo modificado, denominado  $\alpha$ -*MRAC*, mostrou que, para ganho de adaptação grande, o comportamento transitório do  $\alpha$ -*MRAC* é aproximadamente dado por uma exponencial com taxa de convergência que depende apenas de parâmetros de projeto. Além disso, o desempenho em regime transitório do  $\alpha$ -*MRAC* não necessita de qualquer tipo de riqueza do sinal de entrada (Costa 1999) nem se restringe à condição inicial zero da planta. A desvantagem é que não há restrições aos parâmetros, o que pode acarretar em fenômeno de *drifting* em presença de perturbações.

Um algoritmo relativamente recente para o problema do regime transitório, proposto em (Cao & Hovakimyan 2006b), é o denominado Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ . Inicialmente proposto para tratar o problema onde os estados da planta são medidos, o algoritmo propõe uma reparametrização do *MRAC*, com inclusão de um filtro passa-baixas na lei de controle que é entrada para a planta e o preditor e a utilização de projeção paramétrica. Uma análise mostra que o erro de predição (entre a planta e um modelo de predição) pode ser reduzido arbitrariamente com o aumento do ganho de adaptação (Cao & Hovakimyan 2006b). Como ponto positivo, o algoritmo promete o desacoplamento entre transitório e robustez porém uma dificuldade consiste em como projetar o filtro para permitir estabilidade e desempenho otimizado (Hovakimyan 2012). Posteriormente foi estendido para casos em que somente a saída do sistema está disponível, porém tem a restrição de ser apenas aplicável a sistemas estabilizáveis por um controlador Proporcional Integral (PI).

Um estudo mais recente mostra a modificação do modelo de referência com realimentação do sinal do erro de rastreamento (*Modified reference model MRAC - M-MRAC*) (Stepanyan & Krishnakumar 2010). O método evita oscilações de alta frequência para altas taxas de adaptação porém o ajuste do ganho de realimentação do erro de rastreamento é difícil de ser realizado.

Como um dos assuntos mais abordados atualmente na comunidade de controle adaptativo é a análise do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ , nesta dissertação, este algoritmo será estudado comparativamente com os algoritmos de controle adaptativo por modelo de referência *VS-MRAC*, *B-MRAC* e  $\alpha$ -*MRAC*, os quais conferem alguma similaridade com esta abordagem tais como alto ganho, aplicação de projeção e utilização de filtros, com o intuito de levantar diferenças e esclarecer pontos positivos e negativos.

## 1.4 Organização dos capítulos

Esta seção destina-se a apresentar a estrutura em que foi organizada a dissertação.

No capítulo 2, será descrita a teoria de Controle Adaptativo por Modelo de Referência e do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ , assim como os demais algoritmos analisados neste trabalho, com suas devidas particularidades, similaridades, vantagens e desvantagens. O apêndice A contém a base matemática necessária para a descrição e análise dos algoritmos apresentados nesta dissertação.

No capítulo 3 será apresentada a comparação entre os diversos algoritmos mostrados no capítulo 2, incluindo simulações para avaliar o desempenho transitório.

No capítulo 4, será descrita uma nova proposta de algoritmo na área de melhoria de transitório visando relaxar hipótese de conhecimento prévio de limitante superior para os parâmetros desconhecidos da planta, com análise de estabilidade e avaliação através de simulações.

Por fim, no capítulo 5 serão apresentadas as conclusões da dissertação assim como sugestões de trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Algoritmos analisados

Um dos grandes problemas do Controle Adaptativo por Modelo de Referência é o transitório de adaptação além do compromisso entre estabilidade e rastreamento. Conforme mencionado no capítulo 1, uma das abordagens mais recentes e bastante discutida entre a comunidade de controle, cujo o objetivo é trazer uma solução para tais problemas é o algoritmo Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ , que vem sendo utilizado em muitas aplicações. Outros exemplos são algumas alterações do *MRAC* tradicional, em busca de reduzir os efeitos do regime transitório tais como: *B-MRAC*, *VS-MRAC* e o  $\alpha$ -*MRAC*. Primeiramente é preciso apresentar a teoria do *MRAC*, cerne para todos os métodos descritos neste trabalho. Na sequência, o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  será descrito em detalhes. Para permitir uma avaliação comparativa, serão apresentadas algumas modificações feitas sobre o algoritmo base (*MRAC*) em busca de trazer benefícios ao método original, as quais conferem alguma similaridade com o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ . Portanto não foram incluídos métodos com múltiplos modelos de referência, com exigência de condição inicial nula ou hipótese de excitação persistente e nem com grau relativo maior que 1.

Neste trabalho serão considerados apenas o caso de sistemas contínuos com uma entrada e uma saída (SISO), lineares e invariantes no tempo (*LTI*).

### 2.1 *MRAC* tradicional

O Controle Adaptativo por Modelo de Referência consiste em uma estratégia que utiliza uma lei de adaptação para ajustar um controlador para sistemas com incertezas paramétricas e estruturais com o objetivo de garantir um desempenho desejado (Tao 2003).

A lei de controle é projetada de modo a permitir que a planta em malha fechada tenha função de transferência igual a de um modelo de referência. O perfeito casamento de funções de transferência garante que a planta se comporte como o modelo para qualquer sinal de referência (Ioannou & Fidan 2006).

O diagrama de blocos da figura 2.1 sintetiza a ideia do *MRAC*. Os parâmetros são atualizados com base na realimentação do erro de rastreamento ( $e_0 = y_p - y_m$ ) e o mecanismo de ajuste pode ser obtido de duas maneiras: utilizando o método do gradiente ou aplicando teoria de estabilidade de *Lyapunov* (Åström & Wittenmark 2008).

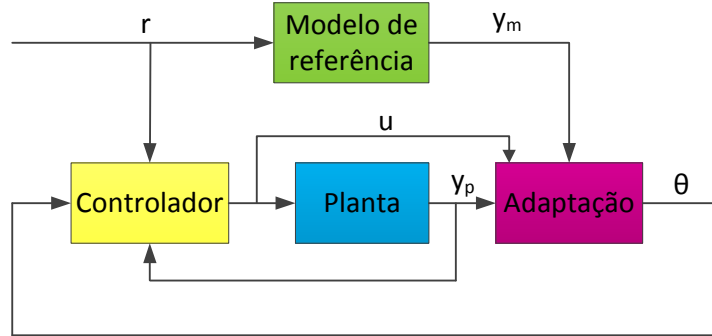


Figura 2.1: Diagrama de blocos representativo do *MRAC*.

### 2.1.1 Estrutura geral de estratégias *MRAC*

Os algoritmos de controle adaptativo por modelo de referência possuem a seguinte estrutura geral:

- Planta:

$$y_p = W(s)u, \quad W(s) = k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)}, \quad (2.1)$$

em que  $u$  é o sinal de controle e  $y_p$  é a saída. Os parâmetros da função de transferência  $W(s)$  são desconhecidos. Contudo, as seguintes hipóteses básicas resumem a informação prévia sobre  $W(s)$  (Narendra & Annaswamy 2005):

1. ordem da planta ( $n$ ) é conhecida;
  2. o grau relativo  $n^* = \text{grau}[D_p(s)] - \text{grau}[N_p(s)] = 1$ ;
  3.  $N_p(s)$  é Hurwitz, isto é,  $W(s)$  é de fase mínima;
  4. A planta é completamente controlável e observável: os polinômios mônicos ( $N_p, D_p$ ) são coprimos;
  5. o sinal do ganho de alta frequência  $k_p$  é conhecido.
- Modelo de referência estável e de fase mínima (de 1ª ordem por simplicidade):

$$y_m = M(s)r, \quad M(s) = \frac{k_m}{s + a_m}, \quad (2.2)$$

em que  $r$  é um sinal de referência contínuo por partes uniformemente limitado (Narendra & Annaswamy 2005) e  $y_m$  é a saída desejada. Sem perda de generalidade,  $k_m$  é considerado positivo.

- Erro de saída (erro de rastreamento):

$$e_0 = y_p - y_m. \quad (2.3)$$

- Lei de Controle:

$$u = \theta^T \omega, \quad (2.4)$$

em que  $\theta^T = [\theta_1 \quad \underbrace{\theta_2 \dots \theta_n}_{\theta_2^T} \quad \underbrace{\theta_{n+1} \dots \theta_{2n-1}}_{\theta_3^T} \quad \underbrace{\theta_{2n}}_{\theta_4}]$  é o vetor de parâmetros adaptativos e  $\omega \in \mathbf{R}^{2n}$  é o vetor regressor definido por

$$\omega^T \triangleq [y_p \quad w_1^T \quad w_2^T \quad r], \quad (2.5)$$

com  $\omega_1$  e  $\omega_2 \in \mathbf{R}^{n-1}$  obtidos através de Filtros de Variáveis de Estado (SVF's - *State Variable Filter*) da forma (Narendra & Annaswamy 2005)

$$\begin{aligned} F_1 : \dot{w}_1 &= \Lambda w_1 + gu \\ F_2 : \dot{w}_2 &= \Lambda w_2 + gy_p, \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que  $\{\Lambda, g\}$  é completamente controlável, sendo  $g \in \mathbf{R}^{n-1}$  um vetor constante e  $\Lambda \in \mathbf{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  é uma matriz *Hurwitz*.

Como os coeficientes do numerador e do denominador da planta são desconhecidos, os parâmetros do controlador não podem ser obtidos diretamente como no Controle por Modelo de Referência (MRC - *Model Reference Control*) (Ioannou & Sun 1996). Uma forma de contornar este problema, baseia-se no princípio da equivalência certa, o qual estabelece que os parâmetros do controlador são estimados e utilizados na lei de controle como se fossem os parâmetros ideais (Åström & Wittenmark 2008). A metodologia de projeto baseia-se na combinação de uma lei de controle com uma lei de adaptação que gera estimativas em tempo real dos parâmetros do controlador (método direto).

Tendo somente as medidas de entrada/saída da planta é preciso suprir a falta de informações dos estados na implementação da lei de controle através de, por exemplo, uma estrutura de filtros de entrada e saída (Ioannou & Sun 1996).

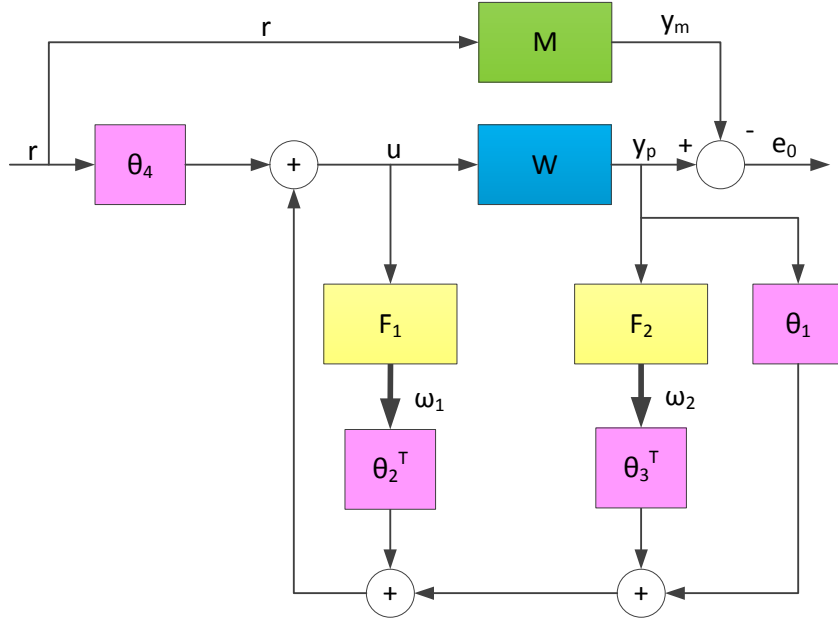


Figura 2.2: Estrutura completa do *MRAC* com realimentação de saída.

A estrutura final para o *MRAC* com a parametrização do controle e com os filtros encontra-se na figura 2.2, onde pode ser verificado, por inspeção, que a lei de controle  $u$  é composta pelas saídas dos filtros  $F_1$  e  $F_2$  e pela referência  $r$ , sendo dada por:

$$u = \theta_1 y_p + \theta_2^T \omega_1 + \theta_3^T \omega_2 + \theta_4 r \quad (2.7)$$

O objetivo do *MRAC*, portanto, consiste em encontrar uma lei de controle  $u(t)$  tal que  $\forall t \geq t_0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_p(t) - y_m(t)| = 0. \quad (2.8)$$

Esta parametrização do controlador juntamente com as hipóteses (1)–(3), garantem a existência de um único vetor constante  $\theta^{*T} = [\theta_1^* \quad \theta_2^{*T} \quad \theta_3^{*T} \quad \theta_4^*]$  tal que a função de transferência em malha fechada do sistema com a lei de controle ideal  $u^* = \theta^{*T} \omega$  se iguala a  $M(s)$  exatamente, isto é,  $y_p = W(s)u^* = M(s)r$  (Sastry & Bodson 1989).

Para que seja possível haver o casamento perfeito entre o modelo e a planta em malha fechada, o controlador, além de alocar os polos de malha fechada, deve cancelar os zeros da planta, substituindo-os pelos zeros do modelo. Este cancelamento de zeros exige que a planta seja de fase mínima para que não ocorra cancelamentos de zeros com parte real positiva.

O sistema em malha fechada (2.1), (2.4) e (2.6) pode ser reescrito como (Narendra & Annaswamy 2005):

$$y_p = M(s)r + M(s)k^*[u - \theta^{*T} \omega] + \varepsilon, \quad (2.9)$$



em que

$$k^* = (\theta_4^*)^{-1} = \frac{k_p}{k_m}, \quad (2.10)$$

e  $\varepsilon$  é um termo de decaimento exponencial devido às condições iniciais e que será omitido daqui para frente, uma vez que não é essencial para o desenvolvimento teórico. Então a equação do erro pode ser escrita como

$$e_0 = M(s)k^*[u - \theta^{*T}\omega]. \quad (2.11)$$

É conveniente definir o erro paramétrico  $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$  e o erro no sinal de controle  $\tilde{u} = \tilde{\theta}^T\omega$ . Relembrando que a ordem do sistema em malha fechada é  $3n - 2$  e sendo o vetor erro definido por  $e \in \mathbf{R}^{3n-2}$ , logo a representação de estados da equação (2.11), obtida em detalhes em (Narendra & Annaswamy 2005, pág. 195–196) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae + bk^*\tilde{u} \\ e_0 &= c^T e, \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que  $\{A, b, c^T\}$  é uma realização não-mínima de  $M(s)$  (Narendra & Annaswamy 2005). É importante lembrar que o controlador descrito possui uma estrutura que garante a controlabilidade de todos os  $3n - 2$  estados de malha fechada.

### 2.1.2 Lei de adaptação do *MRAC* tradicional

A primeira abordagem do controle adaptativo por modelo de referência foi a regra do MIT, interpretada como um método do gradiente para minimizar o erro entre a planta e o modelo (Åström & Wittenmark 2008). Atualmente o projeto da lei de adaptação com base na teoria de estabilidade de *Lyapunov* é mais comumente utilizado e será a abordagem adotada nesta dissertação.

Para encontrar uma lei de adaptação estável para  $\theta$ , a seguinte função de *Lyapunov* é considerada:

$$V(e, \tilde{\theta}) = e^T P e + \gamma^{-1} |k^*| \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \quad (2.13)$$

em que  $\gamma$  é uma constante positiva. Como a função de transferência do modelo de referência  $M(s)$  pode ser escolhida *SPR* (ver apêndice A) e considerando a constante  $\nu = 0$ , o Lema de Meyer–Kalman–Yakubovich (**Lema 6**, apêndice A) garante a existência de uma matriz  $P = P^T > 0$ , que satisfaz (Narendra & Annaswamy 2005, pág. 67)

$$A^T P + P A = -Q \quad (2.14)$$

$$P b = c, \quad (2.15)$$

em que  $Q = Q^T > 0$ .

Então, a derivada de  $V$  ao longo da trajetória da equação do erro (2.12) é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + \gamma^{-1} |k^*| \dot{\tilde{\theta}}^T \tilde{\theta} + \gamma^{-1} |k^*| \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \\ &= \left( A e + b k^* \tilde{\theta}^T \omega \right)^T P e + e^T P \left( A e + b k^* \tilde{\theta}^T \omega \right) + 2\gamma^{-1} |k^*| \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \\ &= e^T (A^T P + P A) e + 2e^T P b k^* \tilde{\theta}^T \omega + 2\gamma^{-1} |k^*| \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -e^T Q e + 2e_0 k^* \tilde{\theta}^T \omega + 2\gamma^{-1} |k^*| \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -e^T Q e + 2\gamma^{-1} |k^*| \tilde{\theta}^T \left[ \gamma \text{sign}(k^*) \omega e_0 + \dot{\tilde{\theta}} \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Sabendo que nem a lei de controle nem a adaptação podem depender explicitamente da incógnita  $\tilde{\theta}$ , uma estratégia consiste em eliminar  $\tilde{\theta}$  da análise, escolhendo a seguinte lei puramente integral (lei do gradiente) para a atualização dos parâmetros adaptativos (Narendra & Valavani 1978):

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} = -\gamma \text{sign}(k^*) \omega e_0. \quad (2.17)$$

em que  $\gamma$  é o ganho de adaptação. Observe que  $\text{sign}(k^*) = \text{sign}(k_p)$ .

### 2.1.3 Estabilidade do *MRAC* tradicional

A partir da seção 2.1.2, nota-se que a equação (2.17) reduz (2.16) para  $\dot{V} = -e^T Q e \leq 0$ . Como o sinal de referência  $r(t)$  é, por hipótese, limitado e contínuo por partes, a partir do Teorema de LaSalle-Yoshizawa (**Teorema 5**, apêndice A) segue que a lei de adaptação (2.17) garante a estabilidade uniforme global do sistema e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}^T \omega = 0. \quad (2.18)$$

Para alcançar convergência exponencial de  $e \rightarrow 0$  e de  $\tilde{\theta} \rightarrow 0$ , é necessário que a seguinte condição de Excitação Persistente seja satisfeita  $\forall t \geq t_0$  (para  $\dot{r}(t)$  limitado) (Boyd & Sastry 1986)

$$\int_t^{t+T} \omega(\tau) \omega^T(\tau) d\tau \geq \delta I \quad (2.19)$$

em que  $t_0$ ,  $T$  e  $\delta$  são constantes positivas. Note que  $\omega(\cdot)$  é um sinal interno do

sistema. A intuição por trás do conceito de Excitação Persistente é que o sinal de entrada deve ser suficientemente “rico” de forma a excitar todos os modos do sistema (Narendra & Annaswamy 2005).

#### 2.1.4 Observações sobre o *MRAC*

Um dos problemas do algoritmo *MRAC* tradicional é a falta de robustez à incertezas e perturbações externas. Este foi o tema focado pela comunidade de controle na década de 1980.

Outro grande problema é o fato de o desempenho do transitório de adaptação (enquanto  $\theta$  está distante de  $\theta^*$ ) não ser uniforme em relação às condições iniciais e da convergência de  $e(t)$  ou  $\tilde{\theta}(t)$  para zero poder ser muito lenta (Hsu & Costa 1987, Narendra 1994), cuja solução é ainda fonte de pesquisa nos dias atuais.

## 2.2 Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$

A teoria do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  apresentada em (Cao & Hovakimyan 2006b), foi desenvolvida com a proposta de obter uma abordagem que desacoplasse robustez e desempenho. Esta proposição pretende obter uma velocidade de adaptação limitada apenas por *hardware*, enquanto que uma solução para a robustez seria obtida através de métodos convencionais da teoria clássica e robusta de controle.

A ideia da arquitetura do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  seria garantir desempenho transitório e robustez na presença de adaptação rápida sem a necessidade de introduzir ou forçar persistência de excitação, sem nenhum *gain scheduling* para os parâmetros de controle e sem recorrer a alto ganho de realimentação (Hovakimyan & Cao 2010).

A arquitetura básica do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  é fundamentada no princípio do modelo interno (Francis & Wonhan 1976), sendo uma modificação do *MRAC* tradicional (Hovakimyan & Cao 2010). No lugar de um modelo de referência representando o desempenho desejado, o qual assumiria o cancelamento perfeito de incertezas, há um sistema em malha fechada linear invariante no tempo (*LTI - Linear Time-Invariant*) em que somente há o cancelamento das incertezas dentro da largura de banda do controlador.

Outra alteração consiste em uma reparametrização do *MRAC*, denominada Controle Adaptativo por Modelo Companheiro (*CMAC*) (Cao & Hovakimyan 2006b), o qual permite incorporar um filtro passa-baixas ao laço de realimentação. Esta estrutura com filtro permite garantir um sinal de controle de baixa frequência mesmo na presença de altos ganhos de adaptação (Pedersen 2009).

O termo  $\mathcal{L}_1$  atribuído ao nome deste algoritmo se deve ao fato de os limitantes

uniformes para o vetor de estados e do sinal de controle do sistema serem expressos em função da resposta ao impulso de funções de transferência próprias e estáveis, o que corresponde a normas  $\mathcal{L}_1$  destes sistemas (Cf. (Hovakimyan & Cao 2010)).

### 2.2.1 Realimentação de estados - Estrutura *CMAC*

A formulação do problema é mostrada a seguir.

- Planta parametrizada (CMAC):

$$\dot{x} = A_m x + b(u + \theta^T x), \quad x(0) = x_0 \quad (2.20)$$

$$y_p = c^T x, \quad (2.21)$$

em que  $x$  é o vetor de estado,  $A_m$  é uma matriz Hurwitz conhecida,  $b$ ,  $c$  são vetores conhecidos e  $y_p$  é a saída. A incerteza é caracterizada por um vetor de parâmetros desconhecidos  $\theta$ . A hipótese fundamental aqui é que  $\theta$  pertence a um conjunto compacto  $\Theta \subset \mathbf{R}^n$  conhecido.

A parametrização da planta em modelo companheiro pode ser vista como um sistema passa-baixas com  $u$  sendo o controle e  $\theta^T x$  sendo uma perturbação variante no tempo, para a qual não há nenhuma restrição a oscilações de alta frequência (Cao & Hovakimyan 2006c). O problema proposto seria encontrar uma lei de controle tal que a saída rastreie o sinal de referência, ou mais rigorosamente, o objetivo é garantir que  $y$  siga um comportamento desejado (Cao & Hovakimyan 2006c).

#### 2.2.1.1 Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ (estados)

Para evitar componentes de alta frequência, a lei de controle proposta pela arquitetura  $\mathcal{L}_1$  com realimentação de estado é dada por (Hovakimyan & Cao 2010)

$$\hat{\eta} \triangleq \hat{\theta}^T x, \quad (2.22)$$

$$u(s) = C(s)(-\hat{\eta}(s) + k_g r(s)). \quad (2.23)$$

em que  $\hat{\theta}$  é uma estimativa do parâmetro desconhecido  $\theta$ ,  $\hat{\eta}(s)$  e  $r(s)$  são as transformadas de Laplace de  $\hat{\eta}$  e de  $r$ , respectivamente.  $C(s)$  é uma função de transferência BIBO estável estritamente própria com ganho DC unitário ( $C(0) = 1$ ), representando um filtro passa-baixas. O ganho  $k_g$  é assim definido:

$$k_g \triangleq -\frac{1}{c^T A_m^{-1} b}. \quad (2.24)$$

### 2.2.1.2 Preditor de estado

O preditor é dado por

$$\dot{\hat{x}} = A_m \hat{x} + b \left( u + \hat{\theta}^T x \right), \quad \hat{x}(0) = x_0 \quad (2.25)$$

$$\hat{y} = c^T \hat{x}, \quad (2.26)$$

em que  $\hat{x}$  é o estado do preditor e  $\hat{\theta} \in \mathbf{R}^n$  é uma estimativa do parâmetro  $\theta$ .

A dinâmica do erro de predição  $\tilde{x} \triangleq \hat{x} - x$  pode ser obtida a partir das equações (2.20) e (2.25):

$$\dot{\tilde{x}} = A_m \tilde{x} + b \tilde{\theta}^T x, \quad \tilde{x}(0) = 0, \quad (2.27)$$

em que  $\tilde{\theta} \triangleq \hat{\theta} - \theta$ . Fazendo  $\tilde{\eta} \triangleq \tilde{\theta}^T x$ , com  $\tilde{\eta}(s)$  sendo sua transformada de Laplace, a dinâmica do erro em (2.27) pode ser escrita no domínio da frequência como

$$\tilde{x}(s) = H(s) \tilde{\eta}(s), \quad H(s) \triangleq (sI - A_m)^{-1} b. \quad (2.28)$$

O Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  possui uma arquitetura equivalente ao *MRAC* no sentido de que, para as mesmas condições iniciais, as duas arquiteturas possuem a mesma dinâmica de erro (Cao & Hovakimyan 2006b).

### 2.2.1.3 Requisito fundamental para o Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ (estados)

O sistema em malha fechada em (2.25) juntamente com o controle adaptativo em (2.23) pode ser visto como um sistema *LTI* com duas entradas  $r$  e  $\hat{\eta}$

$$\hat{x}(s) = \bar{G}(s) \hat{\eta}(s) + G(s) r(s) \quad (2.29)$$

$$\bar{G}(s) \triangleq H(s) (1 - C(s)) \quad (2.30)$$

$$G(s) \triangleq H(s) k_g C(s). \quad (2.31)$$

Definindo o termo  $L$  como

$$L \triangleq \max_{\theta \in \Theta} \|\theta\|_1, \quad (2.32)$$

o projeto de  $C(s)$  estritamente estável deve atender ao seguinte requisito:

**Condição de norma  $\mathcal{L}_1$ :**

(Vide Teorema 6 da seção A.5 do apêndice)

$$\lambda \triangleq \|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} L < 1. \quad (2.33)$$

### 2.2.1.4 Modelo de referência em malha fechada (estados)

O sistema de referência (modelo) do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  é uma versão não-adaptativa do sistema (2.20) e (2.23) como mostrado na figura 2.3 sendo dado por

$$\dot{x}_{ref} = A_m x_{ref} + b (\theta^T x_{ref} + u_{ref}), \quad x_m(0) = x_0, \quad (2.34)$$

$$u_{ref}(s) = C(s) (k_g r(s) - \theta^T x_{ref}(s)), \quad (2.35)$$

$$y_{ref} = c^T x_{ref}. \quad (2.36)$$

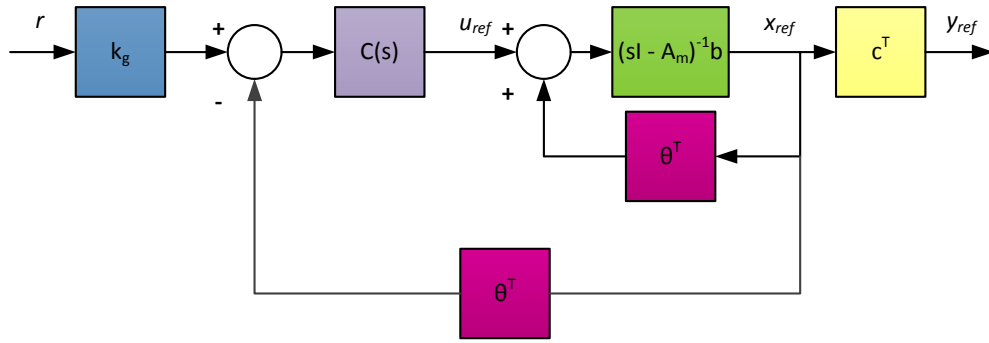


Figura 2.3: Sistema de referência em malha fechada (estados).

Se  $C(s) = 1$ , o modelo da arquitetura  $\mathcal{L}_1$  se reduz ao modelo do *MRAC* e o controlador ideal em (2.35) se resume ao controlador ideal convencional do *MRAC*  $u = -\theta^T x + k_g r$  (Cao & Hovakimyan 2006c).

O próximo lema estabelece a estabilidade do sistema de referência em malha fechada com realimentação de estados (2.34)–(2.36).

**Lema 1** *Se  $\|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} L < 1$ , então o sistema em 2.35 é BIBS estável (entrada limitada, estado limitado - Bounded Input Bounded State) com respeito a  $r$  e  $x_0$ .*

A prova do Lema 1 encontra-se em (Hovakimyan & Cao 2010). A figura 2.4 mostra o diagrama de blocos representativo do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  para realimentação de estados.

### 2.2.1.5 Adaptação para realimentação de estados

A adaptação do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  tanto para realimentação de estados quanto para realimentação de saída utiliza uma lei baseada em projeção. A definição da projeção encontra-se na seção A.4 do apêndice.

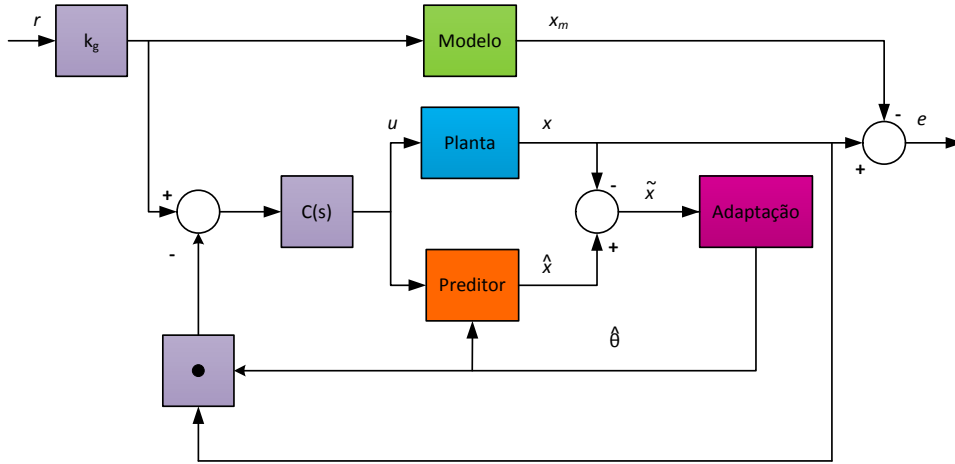


Figura 2.4: Diagrama de blocos do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  (estados).

Para o caso de realimentação de estados a lei de adaptação é dada por:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \text{Proj} \left( \hat{\theta}, -\tilde{x}^T P b x \right), \quad \hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_0 \in \Theta, \quad (2.37)$$

em que  $\gamma \in \mathbf{R}^+$  é o ganho de adaptação e  $P = P^T > 0$  é a solução da equação de Lyapunov  $A_m^T P + P A_m = -Q$  para  $Q = Q^T > 0$  arbitrária. Note que, devido à inicialização de  $\hat{\theta}(0) \in \Theta$  então  $\hat{\theta}(t) \in \Theta, \forall t$ .

## 2.2.2 Realimentação de saída

Para o caso desta dissertação, apenas o sinal da saída  $y_p(t)$  é medido e o que difere do caso descrito anteriormente é o fato de que a incerteza entra diretamente na função de transferência do sistema (Cao & Hovakimyan 2008):

$$y_p(s) = A(s) (u(s) + d(s)), \quad y_p(0) = 0, \quad (2.38)$$

sendo  $A(s)$  uma função de transferência estritamente própria desconhecida. Os sinais  $u(s)$ ,  $y_p(s)$  e  $d(s)$  representam as transformadas de Laplace da entrada  $u(t)$ , da saída  $y_p(t)$  e das incertezas e perturbações não lineares variantes no tempo  $d(t) \triangleq f(t, y_p(t))$  com  $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  sendo um mapeamento desconhecido sujeito às seguintes hipóteses:

**Hipótese 1** (*Continuidade Lipschitz*):

(Hovakimyan & Cao 2010)

Existem constantes  $L_{Lip} > 0$  e  $L_{Lip0} > 0$ , com possibilidade de valores arbitrariamente grandes, tais que as seguintes desigualdades se mantêm uniformes em  $t$ :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L_{Lip} |y_1 - y_2|, \quad |f(t, y)| \leq L_{Lip} |y| + L_{Lip0}. \quad (2.39)$$

**Hipótese 2** (*Limitante uniforme da taxa de variação das incertezas*):

(Hovakimyan & Cao 2010)

Existem constantes  $L_1 > 0$ ,  $L_2 > 0$  e  $L_3 > 0$ , possivelmente arbitrariamente grandes, tais que para todo  $t \geq 0$ ,

$$\left| \dot{d}(t) \right| \leq L_1 |\dot{y}_p(t)| + L_2 |y_p(t)| + L_3. \quad (2.40)$$

Como neste trabalho não consideramos perturbações externas, já que o foco central da dissertação é estudo do desempenho transitório, daqui em diante assume-se  $d(t) \equiv 0$ . Nota-se que o sistema definido em (2.38) tem uma restrição importante que consiste em estabelecer condição inicial zero para o sinal de saída.

O sistema em (2.38) pode ser reescrito em termos do modelo  $M(s)$  (aqui substituindo  $k_m$  e  $a_m$  por  $m$ ) adicionando e subtraindo  $M(s)u(s)$  em (2.38):

$$y_p(s) = A(s)u(s) + M(s)u(s) - M(s)u(s), \quad (2.41)$$

em que a incerteza  $A(s)$  é considerada no sinal  $\sigma(s)$  que é dado por:

$$\sigma(s) = \frac{(A(s) - M(s))u(s)}{M(s)}, \quad (2.42)$$

obtendo-se

$$y_p(s) = M(s)(u(s) + \sigma(s)). \quad (2.43)$$

### 2.2.2.1 Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ (saída)

A lei de controle para o sistema com realimentação de saída é calculada a partir da equação:

$$u(s) = C(s)(-\hat{\sigma}(s) + r(s)). \quad (2.44)$$

em que  $\hat{\sigma}(s)$  é uma estimativa de  $\sigma$  e  $C(s)$  é um filtro estritamente próprio.

Para avaliar esta formulação, considere o caso em que o controle e o sinal  $\sigma$  assumem seus valores reais  $u^*$  e  $\sigma^*$ . Voltando em (2.44):

$$u^*(s) = C(s)(-\sigma^*(s) + r(s)). \quad (2.45)$$

Isolando  $\sigma^*$ :

$$\sigma^*(s) = \frac{C(s)r(s) - u^*(s)}{C(s)} \quad (2.46)$$



Substituindo (2.46) em (2.42):

$$\begin{aligned}\frac{C(s)r(s) - u^*(s)}{C(s)} &= \frac{(A(s) - M(s))u^*(s)}{M(s)} \\ M(s)C(s)r(s) - M(s)u^*(s) &= C(s)(A(s) - M(s))u^*(s) \\ [M(s) + C(s)(A(s) - M(s))]u^*(s) &= M(s)C(s)r(s),\end{aligned}$$

resulta em

$$u^*(s) = \frac{C(s)M(s)}{M(s) + C(s)(A(s) - M(s))}r(s). \quad (2.47)$$

Nota-se que neste caso sem a adaptação, o controle é claramente do tipo *feed-forward*, já que a equação só envolve o sinal de referência e não a realimentação do sinal de saída. Seguindo o raciocínio, o sinal de saída fica dado por:

$$y_p^*(s) = A(s)u^*(s) = \frac{A(s)C(s)M(s)}{M(s) + C(s)(A(s) - M(s))}r(s). \quad (2.48)$$

Adicionalmente, para que haja o casamento perfeito com o modelo  $M(s)$  então a seguinte condição deve valer

$$\frac{A(s)C(s)M(s)}{M(s) + C(s)(A(s) - M(s))} = M(s), \quad (2.49)$$

cuja solução é  $C(s) = 1$ , o que contradiz a hipótese feita que  $C(s)$  é estritamente própria. Aqui conclui-se que com a formulação apresentada não haverá casamento (*matching*) nem mesmo no caso de todos os parâmetros conhecidos.

Em resumo, no caso ideal em que  $\hat{\sigma} = \sigma$ , temos

$$y_p(s) = C(s)M(s)r(s).$$

### 2.2.2.2 Preditor de saída

Por simplicidade utiliza-se um preditor de primeira ordem dado por

$$\dot{\hat{y}} = -m\hat{y} + m(u + \hat{\sigma}), \quad \hat{y}(0) = 0, \quad (2.50)$$

em que  $\hat{\sigma}$  é a estimativa adaptativa cuja transformada de Laplace é dada por (2.42).

Novamente fazendo a análise para os parâmetros conhecidos em termos de Laplace tem-se que:

$$\begin{aligned}
s\hat{y}(s) &= -m\hat{y}(s) + m u^*(s) + m \sigma^*(s) \\
(s+m)\hat{y}(s) &= m u^*(s) + m \sigma^*(s) \\
\hat{y}(s) &= M(s) (u^*(s) + \sigma^*(s)) \\
\hat{y}(s) &= M(s) (-C(s)\sigma^*(s) + C(s)r(s) + \sigma^*(s)) ,
\end{aligned}$$

resultando em

$$\hat{y}(s) = M(s)(1 - C(s))\sigma^*(s) + C(s)M(s)r(s). \quad (2.51)$$

Nota-se que a partir de (2.51), se  $C(s) = 1$ , o preditor é o próprio modelo de referência do *MRAC*.

Utilizando transformada de Laplace, a equação (2.50) pode ser escrita como

$$\hat{y}(s) = M(s)(u(s) + \hat{\sigma}(s)) \quad (2.52)$$

A dinâmica do erro de predição ( $\tilde{y} \triangleq \hat{y} - y_p$ ) pode ser obtida a partir das equações (2.43) e (2.52) como

$$\tilde{y}(s) = M(s)\tilde{\sigma}(s), \quad (2.53)$$

sendo  $\tilde{\sigma}(s) \triangleq \hat{\sigma}(s) - \sigma(s)$ .

### 2.2.2.3 Requisito fundamental para o Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$ (saída)

O projeto do controlador é realizado considerando que  $M(s)$  e  $C(s)$  devem garantir que

$$H(s) \triangleq \frac{A(s)M(s)}{C(s)A(s) + (1 - C(s))M(s)} \quad (2.54)$$

seja estável e a condição de norma  $\mathcal{L}_1$  (2.55) seja atendida. Note que para  $C(s) = 1$ ,  $H(s) = M(s)$ .

#### Condição de norma $\mathcal{L}_1$ :

$$\|G(s)\|_{\mathcal{L}_1} L < 1, \quad \text{com } G(s) \triangleq H(s)(1 - C(s)). \quad (2.55)$$

Uma restrição para satisfazer esta condição é a hipótese de que a planta é estabilizável por um controlador PI (Proporcional Integral), já que a estabilização de  $H(s)$  equivale a uma estabilização por este tipo de controle (Cao & Hovakimyan 2008).

### 2.2.2.4 Modelo de referência em malha fechada (saída)

O modelo do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  com realimentação de saída é dado por

$$M(s) = \frac{m}{s + m}, \quad m > 0. \quad (2.56)$$

Então o sistema de referência em malha fechada é dado por:

$$y_{ref} = M(s) (u_{ref}(s) + \sigma_{ref}(s)) \quad (2.57)$$

$$u_{ref} = C(s) (r(s) - \sigma_{ref}(s)), \quad (2.58)$$

$$\sigma_{ref} = \frac{(A(s) - M(s)) u_{ref}}{M(s)}, \quad (2.59)$$

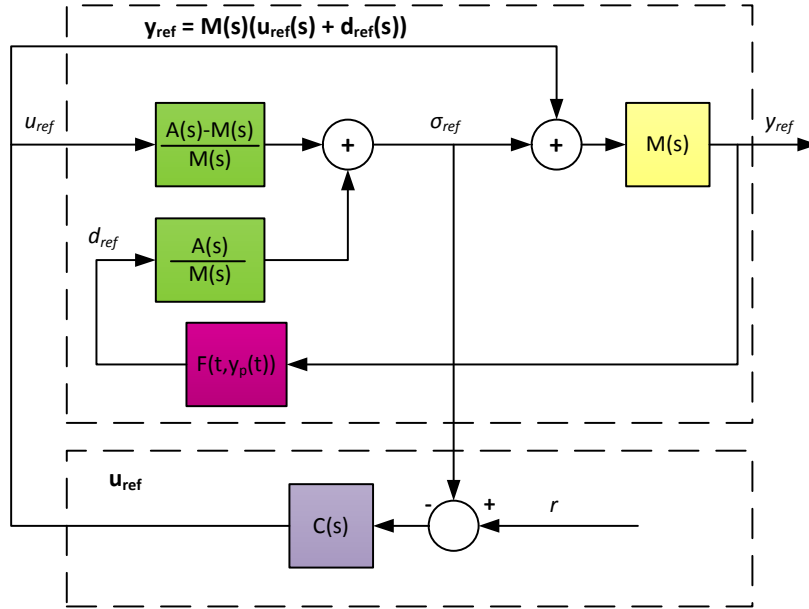


Figura 2.5: Sistema de referência em malha fechada (saída).

O lema a seguir define a estabilidade do sistema de referência em malha fechada com realimentação de saída (2.57)–(2.58). A prova pode ser encontrada em (Hovakimyan & Cao 2010).

**Lema 2** *Se  $C(s)$  e  $M(s)$  verificam a condição de norma  $\mathcal{L}_1$  (2.55) então o sistema de referência em malha fechada (2.57)–(2.58) é BIBO estável (entrada limitada, saída limitada - Bounded Input Bounded Output).*

A prova do Lema 2 encontra-se em (Hovakimyan & Cao 2010). A figura 2.6 mostra o diagrama de blocos representativo do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  para realimentação de saída.

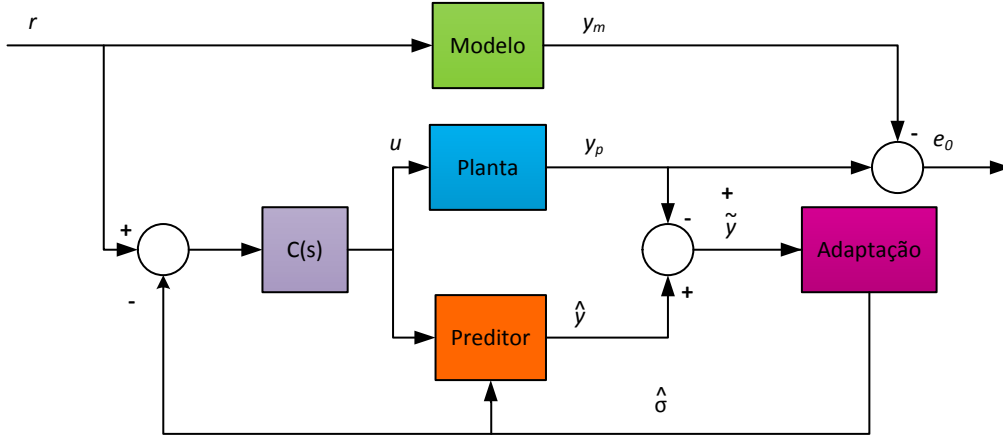


Figura 2.6: Diagrama de blocos do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  (saída).

### 2.2.2.5 Adaptação para realimentação de saída

Para o caso de realimentação de saída, a lei de adaptação fica dada por:

$$\dot{\hat{\sigma}} = \gamma \text{Proj}(\hat{\sigma}, -m P \tilde{y}), \quad \hat{\sigma}(0) = 0, \quad (2.60)$$

em que  $\gamma \in \mathbf{R}^+$  é o ganho de adaptação conforme em (2.37), submetido a um limitante inferior (Hovakimyan & Cao 2010) e a projeção garante que

$$|\hat{\sigma}| \leq \Delta, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.61)$$

Note que na região linear,

$$\dot{\hat{\sigma}} = -m \gamma \tilde{y} \quad \text{e} \quad u = C(s)r + m \gamma \frac{C(s)}{s} \tilde{y}.$$

## 2.2.3 Estabilidade do Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$

### Realimentação de estados

Considere a candidata a função de Lyapunov (Cao & Hovakimyan 2006c):

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}^T(t) P \tilde{x}(t) + \tilde{\theta}^T(t) \gamma^{-1} \tilde{\theta}(t), \quad (2.62)$$

em que  $P$  e  $\gamma$  foram introduzidos em (2.37). A partir de (2.27), tem-se que:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \dot{\tilde{x}}^T(t) P \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) P \dot{\tilde{x}}(t) + 2\tilde{\theta}^T \gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\
&= \left( A \tilde{x}(t) + b \tilde{\theta}^T x(t) \right)^T P \tilde{x}(t) + \tilde{x}^T(t) P \left( A \tilde{x} + b \tilde{\theta}^T x(t) \right) \\
&\quad + 2\tilde{\theta}^T \gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\
&= \tilde{x}^T(t) (A^T P + P A) \tilde{x}(t) + 2\tilde{x}^T(t) P b \tilde{\theta}^T x(t) + 2\tilde{\theta}^T \gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\
&= -\tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + 2\tilde{x}^T(t) P b \tilde{\theta}^T x(t) + 2\tilde{\theta}^T \gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}. \tag{2.63}
\end{aligned}$$

Com a lei de adaptação dada em (2.37), tem-se que:

$$\dot{V}(t) \leq -\tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) \leq 0. \tag{2.64}$$

Para garantir estabilidade é preciso provar adicionalmente que com o controlador adaptativo  $\mathcal{L}_1$  o estado do modelo companheiro mantém-se limitado, o que é mostrado com o Teorema 1.

**Teorema 1** : *Dados o sistema em (2.21) e o controlador adaptativo definido por (2.26), (2.37), (2.23) sujeito a condição (2.33) (Teorema 6) então o erro de estimação  $\tilde{x}$  converge para zero assintoticamente.*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0. \tag{2.65}$$

A prova deste Teorema em (Hovakimyan & Cao 2010) se baseia no fato de  $\hat{x}$  sujeito a (2.23) se manter uniformemente limitado com a projeção na lei de adaptação, o que permite a utilização do Lema de Barbalat (Lema 7, apêndice A) para concluir a convergência assintótica.

## Realimentação de saída

Neste caso não foi utilizada a teoria de Lyapunov e não há garantia de estabilidade assintótica. Para mostrar a estabilidade do sistema com realimentação de saída, os autores de (Cao & Hovakimyan 2008) argumentam que, se a condição em (2.55) for satisfeita e se o ganho de adaptação for escolhido acima de um dado limitante inferior, então as normas  $\|y_p - y_{ref}\|_{\mathcal{L}_1}$  e  $\|u - u_{ref}\|_{\mathcal{L}_1}$  são mantidas uniformemente limitadas e inversamente proporcionais a  $\sqrt{\gamma}$  (Kharisov et al. 2011).

### 2.2.4 Observações sobre o Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$

O objetivo deste algoritmo é manter desempenho aceitável e robustez. Porém, neste compromisso de desacoplar estes dois aspectos, perde-se a garantia de con-

vergência assintótica do erro de rastreamento, tendo o ônus de ter erro em regime permanente. Apenas o erro de predição pode ser minimizado com um alto ganho do controlador, o qual é semelhante a um chaveamento, como no caso de outros algoritmos baseados em Estrutura Variável. Como semelhança com o *B-MRAC* (apresentado na seção 2.4), algoritmo também utiliza projeção para limitar a evolução dos parâmetros.

Para o caso de realimentação de saída, o algoritmo apenas se aplica a uma classe bastante restrita de sistemas: aqueles que podem ser estabilizados por um controlador *PI*, o que já traz restrições a sua utilização como por exemplo em relação a ordem dos sistemas, o que não acontece com os demais algoritmos abordados nesta dissertação.

Outra questão importante é o fato de que este algoritmo, ainda que não mencionado em sua formulação, também necessita de conhecimento prévio do sinal do ganho de alta frequência do sistema, assim como os demais algoritmos do tipo *MRAC*. Também é necessário conhecer um filtro capaz de estabilizar o sistema, informação que também aparece no caso do algoritmo descrito na seção 2.3, porém para uma classe mais geral de sistemas.

Em um artigo submetido em março de 2012 ao *IEEE Transactions on Automatic Control* (Ioannou et al. 2012), e amplamente divulgado entre a comunidade de controle, os autores apontam vários problemas neste algoritmo como a questão da condição inicial não nula e da inclusão do filtro, fazendo com que o erro de rastreamento não seja zero em regime permanente. Outra questão apontada refere-se à margem de estabilidade, a qual, segundo os autores, é reduzida com a inclusão do filtro proposto.

Em relação a realimentação de saída, os autores atentam para o fato de que a forma proposta pode ser considerada apenas como um controlador *PI* com solução *anti-windup*, descaracterizando uma estrutura adaptativa. Este artigo mostra que a comunidade de controle ainda está investigando as propriedades e a formulação do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ .

Em resposta, o artigo (Hovakimyan 2012) busca esclarecer os problemas apontados em (Ioannou et al. 2012). Em relação a erro de rastreamento não zero, a autora menciona que a saída do sistema tende ao valor de referência quando esta é um valor constante e que para referências variantes no tempo, o algoritmo proposto não garante rastreamento assintótico.

No que tange a margem de estabilidade, a autora apenas diz que o controlador utilizado para a análise não correspondia a realidade, e o argumento baseia-se na arquitetura implementada pelo  $\mathcal{L}_1$ , com o filtro alocado em uma posição particular. Para a realimentação de saída, a autora admite que a estrutura pode ser reduzida a um controlador *PI*, mencionando que não seria um caso geral, porém torna a

destacar a importância da arquitetura do algoritmo proposto.

## 2.3 Algoritmo *VS-MRAC*

Uma abordagem muito bem sucedida para o controle robusto de sistemas incertos é baseada em controle a estrutura variável e modos deslizantes (Edwards & Spurgeon 1998, Sabanovic et al. 2004, Utkin 1978). A proposta utiliza funções de chaveamento das variáveis de estado, projetadas de modo a criar uma superfície deslizante responsável por restringir a dinâmica das trajetórias do sistema.

Quando as trajetórias atingem e são mantidas nesta superfície (superfície de deslizamento), inicia-se o um novo tipo de movimento chamado modo deslizante (*SMC - Sliding Mode Control*). Através deste movimento, garante-se a dinâmica desejada do sistema em malha fechada além de conferir insensibilidade a variações dos parâmetros e não-linearidades (Hsu & Costa 1989), conhecido como princípio da invariância (Nunes 2004).

Uma dificuldade em aplicar a teoria do *VSC* consiste na necessidade de conhecer completamente o vetor de estados. Uma técnica para tentar contornar a necessidade de medir todos os estados é a utilização de controle adaptativo por modelo de referência juntamente com estrutura variável. Uma primeira abordagem foi feita em (Ambrosino et al. 1984), porém o sinal de controle era definido por uma função implícita, o que não é globalmente definida em relação a variáveis independentes (Hsu & Costa 1989).

Utilizando a mesma técnica, o algoritmo *VS-MRAC* (*Variable Structure Model Reference Adaptive Control*), apresentado em (Hsu 1990, Hsu & Costa 1989), considera apenas medidas de entrada e saída do sistema e propõe um controlador *MRAC* com estrutura variável que estabiliza globalmente o sistema em malha fechada, com tempo de adaptação finito, rejeita perturbações e evita *parameter drift*.

### 2.3.1 Lei de adaptação do *VS-MRAC*

A abordagem de estrutura variável combinada com a estratégia *MRAC* apresentada na seção 2.1 é usada nesta seção para construir o algoritmo *VS-MRAC* baseado apenas em medidas da entrada e saída da planta.

A planta, as hipóteses e o modelo são os mesmos indicados na seção 2.1.1. O controlador é modificado, substituindo-se  $\theta^T$  por  $\Psi^T$ :

$$u = \Psi^T \omega, \quad (2.66)$$

em que  $\Psi^T = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \dots \Psi_{2n}]$  e  $\Psi_i$  são funções de chaveamento projetadas de acordo com a teoria de *VSC* conforme será mostrado a seguir.

De acordo com (Hsu & Costa 1989), a equação do erro é dada por

$$\dot{e} = Ae + bk^* [u - \theta^{*T} \omega] \quad (2.67)$$

em que  $\theta^*$  é definido como na seção 2.1.1.

Para projetar as funções de chaveamento  $\Psi_i$  considera-se a função de Lyapunov

$$V(e) = e^T P e \quad (2.68)$$

em que  $P = P^T > 0$  satisfaz (2.14).

Tirando a derivada com respeito a (2.67), obtém,-se

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ &= [Ae + bk^* (u - \theta^{*T} \omega)]^T P e + e^T P [Ae + bk^* (u - \theta^{*T} \omega)] \\ &= e^T (A^T P + P A) e + 2e^T P b k^* (u - \theta^{*T} \omega) \\ &= -e^T Q e + 2e_0 k^* \tilde{\theta}^T \omega \\ &= -e^T Q e + 2k^* (\Psi - \theta^*)^T \omega e_0 \\ &= -e^T Q e + 2k^* \sum_{i=1}^{2n} (\Psi_i - \theta_i^*) \omega_i e_0. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Para a análise é preciso incluir mais uma hipótese além das já apresentadas na seção 2.1.1.

### Hipótese adicional:

6. Um limitante superior para a incerteza da planta  $\theta_i^*$  encontra-se disponível, ou seja,

$$\bar{\theta}_i > |\theta_i^*|, \quad \forall i. \quad (2.70)$$

Então, sob esta condição, escolhe-se a seguinte lei de adaptação (função de chaveamento) (Hsu & Costa 1989)

$$\Psi_i = -\bar{\theta}_i \text{sign}(\omega_i e_0), \quad (2.71)$$

### 2.3.2 Estabilidade do VS-MRAC

A partir de (2.71), a equação (2.69) fica dada por

$$\dot{V} = -e^T Q e - 2k^* \sum_{i=1}^{2n} (\bar{\theta}_i |\omega_i e_0| + \theta_i^* \omega_i e_0). \quad (2.72)$$



Sabendo que o somatório em (2.72) é sempre positivo (Hsu & Costa 1989), tem-se que

$$\dot{V} < -e^T Q e < 0. \quad (2.73)$$

Das equações (2.68) e (2.73) pode-se concluir que  $\|e(t)\|$  decresce no mínimo exponencialmente. Diferentemente do *MRAC* tradicional, no *VS-MRAC*, a estabilidade exponencial do erro a zero é obtida sem requerer persistência de excitação, com taxa de convergência podendo ser limitada inferiormente por  $\lambda_{\min}(P^{-1}Q)$  (equação (2.14)), independentemente da excitação. Os resultados de convergência são resumidos no Teorema 2 cuja prova encontra-se em (Hsu & Costa 1989).

**Teorema 2 (Teorema de convergência do *VS-MRAC*)** (Hsu & Costa 1989): *Considere o sistema definido por (2.1)–(2.3), (2.6) sub as hipóteses (1)–(5) da seção 2.1.1 regido pela lei de controle (2.66) e (2.71). Então, todos os sinais do sistema são limitados e  $e_0(t)$  tende a zero com no mínimo uma taxa exponencial que é independente da excitação  $r(t)$ . Além disso, se  $\|\omega(t)\| > c$  para alguma constante positiva  $c$  e  $\forall t > t_0$  ( $t_0$  finito), então  $e_0(t)$  tende a zero em um tempo finito  $t_1 > t_0$  e permanece em zero  $\forall t > t_1$  em modo deslizante na superfície  $e^T e = e_0 = 0$ .*

A lei de controle resultante, obtida de (2.66) e (2.71), é dada por

$$u = - \sum_{i=1}^{2n} \bar{\theta}_i |\omega_i| \text{sign}(e_0) = -f_{VS} \text{sign}(e_0), \quad (2.74)$$

em que  $f_{VS} = \bar{\theta}^T |\omega|$  é uma função de modulação,  $\bar{\theta}^T = [\bar{\theta}_1 \ \bar{\theta}_2 \ \dots \ \bar{\theta}_{2n}]$  e  $|\omega| = [|\omega_1| \ |\omega_2| \ \dots \ |\omega_{2n}|]^T$ . A figura 2.7 mostra o diagrama de blocos do sistema.

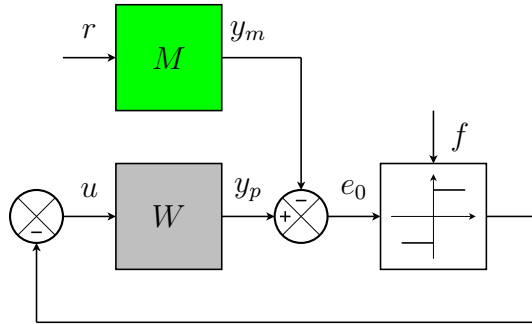


Figura 2.7: Diagrama de blocos do algoritmo *VS-MRAC*.

A hipótese 6. garante que a função de modulação satisfaz

$$f_{VS} > |\theta^{*T} \omega|, \quad \forall t.$$

### 2.3.3 Observações sobre o *VS-MRAC*

O algoritmo *VS-MRAC* garante a estabilidade exponencial global do sistema em malha fechada, com rastreamento do modelo em tempo finito, rejeição de perturbações e evita *parameter drift*.

Um dos problemas do *VS-MRAC* é a necessidade de conhecimento de um limitante superior para o vetor de parâmetros ( $\bar{\theta}$ ), o que equivale ao conhecimento de um alto ganho capaz de estabilizar o sistema. O algoritmo que será apresentado na seção 4, apresenta uma solução para este problema.

Ainda como consequência de um alto ganho, o *VS-MRAC*, gera um esforço de controle elevado além de poder causar o efeito indesejado de *chattering*, inerente de estruturas *VSC*.

## 2.4 Algoritmo *B-MRAC*

O algoritmo *B-MRAC* (*Binary Model Reference Adaptive Control*) apresentado em (Hsu & Costa 1990), combina ideias de três abordagens diferentes: *MRAC*, *VS-MRAC* e Controle Binário (proposto por (Emelyanov 1987)). Basicamente consiste em um algoritmo *MRAC* com aplicação de projeção paramétrica na atualização do vetor de parâmetros e com ganho de adaptação suficientemente grande, aliviando o problema de *chattering*, mas mantendo a boa invariância e o bom transitório característicos dos sistemas a estrutura variável (Hsu & Costa 1991). O controle ainda carrega a grande motivação de algoritmos binários: o fato de o sinal de controle ser contínuo ou uma função do tempo contínua por partes.

Para evitar perda de uniformidade no comportamento transitório, em (Hsu & Costa 1987) foi proposta uma lei de adaptação baseada em um fator de projeção (*FP*) descontínuo  $\sigma_{proj}$ , o qual é equivalente a uma lei do gradiente com projeção do vetor de atualização no hiperplano de suporte para alguma esfera finita em  $\theta$ .

O *B-MRAC* com comportamento transitório previsível e uniforme pode ser obtido do *MRAC* com *FP* através do aumento da velocidade de adaptação, mantendo o vetor de parâmetros  $\theta$  dentro de uma bola de raio apropriado (Hsu & Costa 1990). O fator de projeção descrito em (Costa & Hsu 1990) é dado por:

$$\sigma_{proj} = \begin{cases} 0, & \text{se } \|\theta\| < M_\theta \text{ ou } \sigma_{eq} < 0 \\ \sigma_{eq}, & \text{se } \|\theta\| \geq M_\theta \text{ e } \sigma_{eq} \geq 0 \end{cases}, \quad \sigma_{eq} = -\frac{\gamma e_0 \theta^T \omega}{\|\theta\|^2}, \quad (2.75)$$

em que  $M_\theta > \|\theta^*\|$  é uma constante, representando um limitante uniforme para o vetor de parâmetros.

A interpretação geométrica é: se o vetor de atualização  $\gamma e_0 \omega$  na fronteira da

esfera  $\|\theta\| \leq M_\theta$  aponta para fora então ele é projetado em um plano tangente a esfera no ponto  $\theta$  e caso aponte para dentro, permanece inalterado. A ideia é mostrada na figura 2.8. Isso indica que a lei de adaptação trabalha em um conjunto compacto invariante, uma semelhança com o controle binário de (Emelyanov 1987).

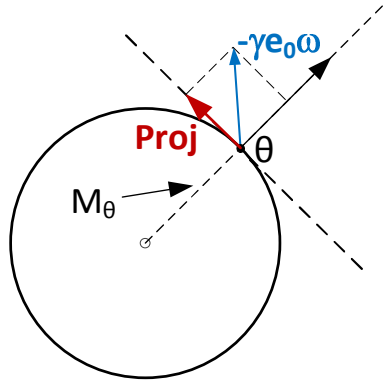


Figura 2.8: Projeção utilizada no *B-MRAC*.

### 2.4.1 Lei de adaptação do *B-MRAC*

A adaptação é baseada na lei do gradiente convencional do *MRAC* (Ioannou & Kokotovic 1984) modificada pela projeção de parâmetros  $\sigma_{proj}$  com um ganho suficientemente alto:

$$\dot{\theta} = -\sigma_{proj}\theta - \gamma e_0 \omega. \quad (2.76)$$

A lei de controle é dada por:

$$u = \theta^T \omega. \quad (2.77)$$

Então, o controle adaptativo binário (*B-MRAC*) é definido pela lei de controle (2.77), com lei de adaptação (2.76) e (2.75).

### 2.4.2 Estabilidade do *B-MRAC*

O Teorema 3 (apresentado e provado em (Hsu & Costa 1990)) mostra que  $\|e(t)\|^2$  tende exponencialmente rápido para um valor residual de ordem  $O\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$ :

**Teorema 3** : Considerando o sistema (2.77), (2.76) e (2.75) e supondo  $\|\theta(0)\| \leq M_\theta$ , com a constante  $M_\theta > \|\theta^*\|$ . Então:

1.  $\|\theta(t)\| \leq M_\theta, \forall t \geq 0$ ;
2.  $\|e(t)\|^2 \leq c_1 e^{-\lambda_1 t} \|e(0)\|^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right), \forall t \geq 0$  e constantes positivas  $c_1$  e  $\lambda_1$ .

Este resultado garante que o sistema é exponencialmente estável, mas o erro não tende a zero, sendo apenas suficientemente pequeno.

Considerando a seguinte função de *Lyapunov*

$$V(e, \tilde{\theta}) = e^T P e + |k^*| \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}, \quad (2.78)$$

a sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + 2k^* \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \\ &= \left( A e + b k^* \tilde{\theta}^{*T} \omega \right)^T P e + e^T P \left( A e + b k^* \tilde{\theta}^{*T} \omega \right) + k^* \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \\ &= e^T (A^T P + P A) e + 2e^T P b k^* \tilde{\theta}^T \omega + 2k^* \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T (-\sigma \theta - \gamma e_0 \omega) \\ &= -e^T Q e + 2k^* e_0 \tilde{\theta}^T \omega - 2\sigma k^* \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T \theta - 2k^* e_0 \tilde{\theta}^T \omega \\ &= -e^T Q e - 2\sigma k^* \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T (\tilde{\theta} + \theta^*). \end{aligned} \quad (2.79)$$

A partir de (2.75) e lembrando que  $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$  e  $M_\theta > \|\theta^*\|$  por hipótese, pode ser mostrado que o termo  $-2\sigma k^* \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T (\tilde{\theta} + \theta^*)$  é não positivo. Logo,

$$\dot{V} \leq -e^T Q e \leq 0. \quad (2.80)$$

Desta forma, usando o Lema de Barbalat, é possível mostrar que (Yanque et al. 2012) o erro tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ .

### 2.4.3 Observações sobre o *B-MRAC*

Assim como o *VS-MRAC*, o algoritmo *B-MRAC* possui como vantagens rejeição de perturbações, insensibilidade a variações paramétricas e robustez a dinâmicas não modeladas (Hsu & Costa 1994). Já diferentemente do *VS-MRAC*, o *B-MRAC* tem como ponto positivo o fato de o controle gerado ser contínuo ou contínuo por partes.

Outros pontos a serem destacados são a capacidade de restringir a taxa de mudança dos parâmetros ajustáveis, evitando a frequência infinita requerida no *VS-MRAC* e a minimização do efeito de *chattering* com esta formulação (Hsu & Costa 1994).

O *B-MRAC*, assim como o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  utiliza uma formulação baseada em projeção como forma de garantir que os parâmetros mantenham-se uniformemente limitados. Também é necessário conhecer um limitante superior para o vetor de parâmetros, assim como no controle  $\mathcal{L}_1$  e no *VS-MRAC*.

## 2.5 Algoritmo $\alpha$ -*MRAC*

O algoritmo proposto em (Costa 1999) é uma modificação do algoritmo original *MRAC*, que utiliza um filtro de avanço de fase (*lead*) similar ao proposto na estratégia *MCE* de (Sun 1993). A diferença consiste no fato de que em (Sun 1993), aplica-se uma inversa aproximada do modelo de referência para filtrar o erro de saída e este filtro é incluído como um termo extra na lei de controle e, no  $\alpha$ -*MRAC*, o filtro é aplicado na lei de adaptação.

As vantagens do  $\alpha$ -*MRAC* em relação ao *MCE* apontadas no artigo (Costa 1999) são:

1. Evita dificuldades com a utilização de ganho de alta frequência desconhecido;
2. A melhoria de transitório não se restringe a condição inicial zero da planta.

Comparadas ao *MRAC* tradicional, a estabilidade e as propriedades do rastreamento em regime transitório do  $\alpha$ -*MRAC* são consideravelmente superiores. Utilizando o método das perturbações singulares (Khalil 1992, Kokotović et al. 1999), é mostrado que se o ganho de adaptação é suficientemente alto, então o comportamento transitório do  $\alpha$ -*MRAC* é aproximadamente dado por uma exponencial com taxa de convergência que depende apenas de parâmetros de projeto. Esta análise será mostrada na seção 3.5. Além disso, o desempenho em regime transitório do  $\alpha$ -*MRAC* não necessita de qualquer tipo de riqueza do sinal de entrada (Costa 1999), não há *chattering*, nem é necessário conhecer um limitante para o vetor de parâmetros.

### 2.5.1 Lei de Adaptação do $\alpha$ -*MRAC*

Nesta seção será mostrada a modificação feita no *MRAC* para obter o  $\alpha$ -*MRAC*. Primeiramente define-se o sinal

$$f^* = k^* \tilde{\theta}^T \omega. \quad (2.81)$$

Supondo que o sinal  $\dot{e}_0$  seja mensurável, pode-se obter  $f^*$  a partir da equação  $e_0 = M k^* \tilde{\theta}^T \omega = M f^*$  como

$$f^* = M^{-1} e_0 = \frac{\dot{e}_0 + a_m e_0}{k_m}, \quad (2.82)$$

o qual não depende de qualquer conhecimento prévio de  $k^*$  ou  $\tilde{\theta}$ . Então (Costa 1999) propõe a nova lei de adaptação

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} = -\gamma \text{sign}(k^*) [e_0 + \alpha f^*] \omega, \quad (2.83)$$

sendo  $\alpha$  uma constante positiva.

Para contornar o problema da medida de  $\dot{e}_0$ , na prática não disponível na maior parte das vezes, utiliza-se, assim como no algoritmo MCE, um filtro de avanço de fase da forma

$$\tau \dot{\hat{e}}_0 = -\hat{e}_0 + e_0, \quad (2.84)$$

em que  $\hat{e}_0$  é a estimativa de  $e_0$ . Então, a estimativa de  $f^*$  é obtida a partir de

$$\hat{f} = \frac{M^{-1}}{\tau s + 1} e_0 = M^{-1} \hat{e}_0 = \frac{\dot{\hat{e}}_0 + a_m \hat{e}_0}{k_m}, \quad (2.85)$$

em que  $M(s)$  é o modelo definido em (2.2), na seção 2.1.1.

Substituindo o sinal  $f^*$  em (2.83) pela sua estimativa  $\hat{f}$ , obtém-se

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} = -\gamma \text{sign}(k^*) [e_0 + \alpha \hat{f}] \omega. \quad (2.86)$$

A Figura 2.9 mostra o diagrama de blocos do sistema proposto em (Costa 1999).

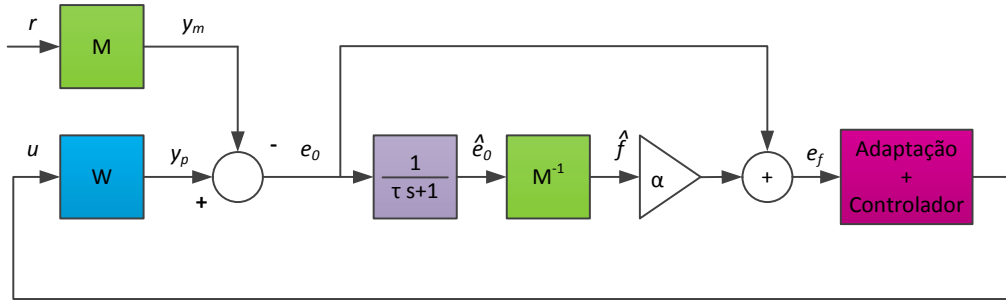


Figura 2.9: Diagrama de blocos do  $\alpha$ -MRAC.

A partir das equações (2.84) e (2.85) pode-se verificar que

$$\hat{f} = \frac{\tau \dot{\hat{e}}_0 + \tau a_m \hat{e}_0}{\tau k_m} = \frac{e_0 + (\tau a_m - 1) \hat{e}_0}{\tau k_m}. \quad (2.87)$$

Se  $\tau a_m = 1$ , então o filtro de avanço de fase é cancelado, ou seja,

$$\hat{f} = \frac{1}{\tau k_m} e_0 = \frac{a_m}{k_m} e_0 \quad (2.88)$$

e o algoritmo  $\alpha$ -MRAC se reduz ao MRAC tradicional

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} = -\gamma \text{sign}(k^*) \left( 1 + \frac{a_m}{k_m} \right) e_0 \omega = -\gamma' \text{sign}(k^*) e_0 \omega. \quad (2.89)$$

## 2.5.2 Estabilidade do $\alpha$ -MRAC

Considerando a equação do erro (2.12) e o filtro de avanço de fase (2.84) e (2.85), a figura 2.10 mostra o diagrama correspondente.

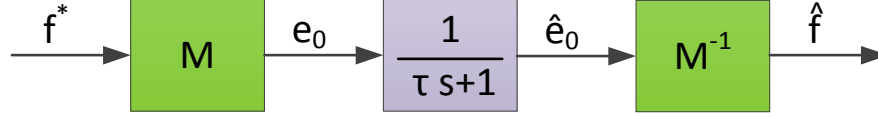


Figura 2.10: Diagrama de blocos mostrando a relação de  $f^*$  para  $\hat{f}$ .

Para o desenvolvimento de uma prova simples de estabilidade do  $\alpha$ -MRAC é necessário derivar uma equação diferencial para a estimativa de  $\hat{f}$ . O lema a seguir, cuja prova pode ser encontrada em (Costa 1999) e detalhes em (Kailath 1980), permite chegar a este objetivo.

**Lema 3** Se  $\tau a_m \neq 1$ , então a dinâmica de  $\hat{f}$  é dada por

$$\tau \dot{\hat{f}} = -\hat{f} + f^* . \quad (2.90)$$

Por conveniência, as equações diferenciais que regem a dinâmica do sistema como um todo podem ser escritas como

$$\dot{e} = Ae + bf^* \quad e \in \mathbf{R}^{3n-2} \quad (2.91)$$

$$\tau \dot{\hat{f}} = -\hat{f} + f^* \quad \hat{f} \in \mathbf{R} \quad (2.92)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} = -\gamma \text{sign}(k^*) [e_0 + \alpha \hat{f}] \omega \quad \tilde{\theta} \in \mathbf{R}^{2n} . \quad (2.93)$$

A equação (2.92) foi introduzida apenas para análise. Como  $f^*$  não é conhecida, ela não pode ser implementada. Considerando a seguinte função de *Lyapunov*

$$V(e, \hat{f}, \tilde{\theta}) = e^T P e + \alpha \tau \hat{f}^2 + \gamma^{-1} |k^*| \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \quad (2.94)$$

e utilizando (2.14), a derivada de (2.94) ao longo das trajetórias de (2.91)-(2.93)

resulta em

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + 2\alpha\tau \hat{f} \dot{\hat{f}} + 2\gamma^{-1} |k^*| \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \\
&= (Ae + bf^*)^T P e + e^T P (Ae + bf^*) + 2\alpha\hat{f} \left( -\hat{f} + f^* \right) + \\
&\quad + 2\gamma^{-1} |k^*| \tilde{\theta}^T \left\{ -\gamma \operatorname{sign}(k^*) \left[ e_0 + \alpha\hat{f} \right] \omega \right\} \\
&= e^T (A^T P + PA) e + 2e^T P b f^* + 2\alpha\hat{f} \left( -\hat{f} + f^* \right) - 2k^* \tilde{\theta}^T \left( e_0 + \alpha\hat{f} \right) \omega \\
&= -e^T Q e + 2e_0 f^* - 2\alpha\hat{f}^2 + 2\alpha\hat{f} f^* - 2e_0 f^* - 2\alpha\hat{f} f^* \\
&= -e^T Q e - 2\alpha\hat{f}^2, \tag{2.95}
\end{aligned}$$

a qual é (negativa) semi-definida no espaço  $(e, \hat{f}, \tilde{\theta})$ . Portanto, do Teorema de LaSalle-Yoshizawa, segue que o algoritmo proposto  $\alpha$ -MRAC é globalmente uniformemente estável para qualquer  $\tau \geq 0$ ,  $\alpha \geq 0$  e  $\gamma > 0$ , e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e = 0 \qquad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{f} = 0 \qquad \lim_{t \rightarrow \infty} f^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}^T \omega = 0$$

O caso  $\tau = 0$  corresponde ao caso limite em que  $\hat{f} = f^*$ .

### 2.5.3 Transitório do $\alpha$ -MRAC

Esta seção mostra uma correção de um erro na análise do comportamento transitório feita em (Costa 1999). O problema encontrado relaciona-se com o fato de o sistema não ter sido apresentado na forma adequada para a aplicação do método das perturbações singulares, impossibilitando obter solução algébrica.

Para fazer a análise do sistema não-linear (2.91)-(2.93) será utilizado o método das perturbações singulares (*singular perturbation method*) (Khalil 2002, Kokotović et al. 1986) citado anteriormente. Perturbações singulares causam a separação do comportamento de sistemas dinâmicos em duas escalas de tempo em função da presença de transitórios rápidos e lentos. O método das perturbações singulares permite encontrar uma descrição aproximada da trajetória dos estados.

A dinâmica lenta é aproximada por um modelo de ordem reduzida, também conhecido como modelo em estado quase estacionário (*quasi-steady-state model*), enquanto que a discrepância entre a resposta do modelo reduzido e a solução exata é o transitório rápido, o qual é aproximadamente descrito pelo modelo da camada limite (*boundary-layer model*).

Na seção 2.5.2 já foi mostrado que o  $\alpha$ -MRAC é uniformemente globalmente estável para todo  $\tau \geq 0$ ,  $\alpha \geq 0$  e  $\gamma > 0$ . Nesta seção, um modelo reduzido para o comportamento do rastreamento durante o transitório do  $\alpha$ -MRAC será desenvolvido.



A análise é simplificada considerando-se apenas a realização mínima para a equação do erro (2.91). De fato, somente o modo  $-a_m$  é observável. Para tanto, o conjunto de equações a serem consideradas para a análise é descrito a seguir

$$\dot{e}_0 = -a_m e_0 + k_m f^* \quad e_0 \in \mathbf{R} \quad (2.96)$$

$$\tau \dot{\hat{f}} = -\hat{f} + f^* \quad \hat{f} \in \mathbf{R} \quad (2.97)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} = -\gamma(e_0 + \alpha \hat{f})\omega \quad \tilde{\theta} \in \mathbf{R}^{2n}, \quad (2.98)$$

em que, sem perda de generalidade, assume-se que  $k^*$  é positiva. Para aplicar o método das perturbações singulares, a equação (2.98) é reescrita como

$$\gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} = -(e_0 + \alpha \hat{f})\omega \quad (2.99)$$

Fazendo formalmente  $\gamma^{-1} = \tau = 0$ , e desprezando as condições iniciais para  $\tilde{\theta}$  and  $\hat{f}$ , as equações diferenciais (2.97) e (2.99) são transformadas em equações algébricas:

$$0 = -\hat{f} + f^* \quad (2.100)$$

$$0 = -(\mathbf{e}_0 + \alpha \hat{\mathbf{f}})\omega \quad (2.101)$$

em que os termos em negrito indicam que a variável pertence a um sistema com  $\gamma^{-1} = \tau = 0$ . É importante enfatizar neste ponto que as dinâmicas rápidas são eliminadas simultaneamente. Em outras palavras, ao se considerar um modelo aproximado com ganho  $\gamma$  grande porém finito, deve-se observar que

$$\tau\gamma = 1.$$

Para encontrar um modelo reduzido para estimar o comportamento do rastreamento durante o transitório do  $\alpha$ -*MRAC*, o seguinte conjunto de equações deve ser resolvido:

$$\dot{\mathbf{e}}_0 = -a_m \mathbf{e}_0 + k_m \mathbf{f}^* \quad (2.102)$$

$$\mathbf{f}^* = \hat{\mathbf{f}} \quad (2.103)$$

$$\alpha \hat{\mathbf{f}} = -\mathbf{e}_0 \quad (2.104)$$

com a condição inicial  $\mathbf{e}_0(0) = e_0(0)$ . A equação (2.104) vem da equação (2.101) observando que  $\omega \neq 0$ , em geral.

Substituindo a equação (2.104) em (2.103) tem-se que:

$$\mathbf{f}^* = -\frac{\mathbf{e}_0}{\alpha}. \quad (2.105)$$

Então uma raiz real isolada pode ser obtida para a equação modificada (2.105) da forma

$$\mathbf{f}^* = h(t, \mathbf{e}_0, \hat{\mathbf{f}}). \quad (2.106)$$

O sistema compreendido pelas equações (2.96)-(2.98) está na forma padrão (*standard form* em (Kokotović et al. 1986)) e então é possível determinar o estado quase estacionário  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ . Como será visto na sequência, um modelo reduzido unidimensional bem definido pode ser obtido.

Eliminando a variável  $\mathbf{f}^*$  das equações (2.103)-(2.104), pode ser encontrada uma equação diferencial linear unidimensional:

$$\dot{\mathbf{e}}_0 = -a_m \mathbf{e}_0 - \frac{k_m}{\alpha} \mathbf{e}_0. \quad (2.107)$$

Resolvendo a equação (2.107) pode-se obter a seguinte equação que prevê aproximadamente o comportamento do rastreamento durante o transitório do algoritmo  $\alpha$ -MRAC:

$$\mathbf{e}_0(t) = e^{-a_0 t} \mathbf{e}_0(0). \quad (2.108)$$

Logo, pode-se concluir que para  $\gamma$  suficientemente grande e  $\tau$  suficientemente pequeno, o erro de rastreamento inicial converge para zero exponencialmente rápido com uma taxa que depende apenas dos parâmetros de projeto  $a_m$ ,  $k_m$ ,  $\alpha$ , e da condição inicial do filtro de avanço de fase  $\hat{\mathbf{e}}_0(0)$ . Isto ocorre independentemente de qualquer riqueza ou condição de excitação persistente do sinal de entrada.

A partir das equações (2.105) e (2.108), pode-se concluir que  $\mathbf{f}^* \rightarrow 0$  e a partir da equação (2.81) tem-se que  $\tilde{u} \rightarrow 0$  e  $u \rightarrow u^*$  exponencialmente rápido. Em outras palavras, o algoritmo pode (de forma exponencialmente rápida) sintetizar  $u^*$  sem ter identificado os parâmetros de casamento (*matching*)  $\theta^*$  e sem qualquer riqueza e/ou condição de persistência de excitação. Esta característica sugere que o  $\alpha$ -MRAC também pode ser visto como um esquema adaptativo de síntese de sinais.

Fazendo  $\alpha = 0$ , o  $\alpha$ -MRAC se reduz ao MRAC tradicional. Neste caso, a estimativa do transitório é dada por  $\mathbf{e}_0(t) = 0$ . Ou seja, o algoritmo de adaptação tradicional ajusta os parâmetros tentando alcançar um pequeno erro instantâneo de rastreamento. Como resultado, podem ocorrer grandes excursões nos parâmetros adaptativos. Em outras palavras, o preço a ser pago em busca de um pequeno erro instantâneo de rastreamento consiste, eventualmente, em um grande esforço de controle juntamente com grandes alterações (“saltos”) nos parâmetros  $\theta$ , que precisam ser tratados para o transitório rápido.

Caso tenha-se inicialmente  $\hat{\mathbf{e}}_0(0) = 0$ , ou seja, se o objetivo é que o  $\alpha$ -MRAC tenha um pequeno erro instantâneo de rastreamento, o comportamento transitório terá grandes saltos em  $\theta$ . Portanto, a inicialização correta de  $\hat{\mathbf{e}}_0$  é um mecanismo

para suavização de  $\theta$  e, conseqüentemente, para melhorar o desempenho transitório. Esta observação está de acordo com o modo de operação da maioria das modificações tais como projeção de parâmetros, saturação, normalização, pequeno ganho de adaptação, etc., as quais foram empregadas no mecanismo de adaptação com a esperança de impor limites em  $\dot{\theta}$  e suas conseqüências.

#### 2.5.4 Observações sobre o $\alpha$ -*MRAC*

Nota-se que a estabilidade e as propriedades de rastreamento do  $\alpha$ -*MRAC* são superiores ao algoritmo original.

Uma vantagem é que a melhoria de transitório não se restringe a condição inicial zero da planta e não necessita de qualquer riqueza de sinal. Outro ponto positivo é que, diferentemente dos algoritmos anteriores, a convergência é garantida sem necessidade de conhecimento de limitante superior ou alto ganho, sem grande esforço de controle ou *chattering*.

Uma desvantagem é que não há restrições aos parâmetros, o que pode acarretar em fenômeno de *drifting* em presença de perturbações, além de não haver garantia de insensibilidade a variação paramétrica ou robustez a dinâmica não modelada.

# Capítulo 3

## Comparação de desempenho transitório

Neste capítulo serão apresentadas algumas simulações para comparar o desempenho dos diversos algoritmos descritos nesta dissertação no que se refere ao comportamento transitório. As simulações foram realizadas para os casos descritos a seguir.

**Caso 1:** Planta de primeira ordem com 1 parâmetro desconhecido.

$$W = \frac{k_p}{s + 1} = \frac{0.5}{s + 1} \quad (3.1)$$

Parâmetros ideais:  $\theta^* = 2$ ;  $k^* = 0.5$ .

**Caso 2:** Planta de primeira ordem com 2 parâmetros desconhecidos.

$$W = \frac{k_p}{s + a_p} = \frac{0.5}{s} \quad (3.2)$$

Parâmetros ideais:  $\theta^{*T} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}$ ;  $\|\theta^*\| = 2.8284$ ;  $k^* = 0.5$ .

**Caso 3:** Planta de segunda ordem com 4 parâmetros desconhecidos.

$$W = \frac{k_p(s + b_0)}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{(s + 6)}{s(s - 1)} \quad (3.3)$$

Parâmetros ideais:  $\theta^{*T} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $\|\theta^*\| = 6.245$ ;  $k^* = 1$ .

**Caso 4:** Planta de terceira ordem com 6 parâmetros desconhecidos.

$$W = \frac{k_p(s^2 + b_1s + b_0)}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} = \frac{(s + 0.5)(s + 2)}{(s - 0.1)^3} \quad (3.4)$$

Parâmetros ideais:  $\theta^{*T} = [0 \quad -0.5 \quad -3.3 \quad 2.299 \quad 3.63 \quad 1]$ ;  $\|\theta^*\| = 5.5319$ ;  $k^* = 1$ .

Em todos os casos, o modelo de referência utilizado é dado por

$$M = \frac{k_m}{s + a_m} = \frac{1}{s + 1} \quad (3.5)$$

### 3.1 Comportamento transitório do *MRAC*

Para fazer uma avaliação do regime transitório do algoritmo *MRAC*, serão apresentados alguns resultados de simulação baseados nos 4 casos descritos no início deste capítulo.

A Tabela 3.1 abaixo mostra um resumo do algoritmo *MRAC*.

Tabela 3.1: Algoritmo *MRAC*

Erro de saída	$e_0 = y_p - y_m$
Regressor	$\dot{w}_1 = \Lambda w_1 + gu$
	$\dot{w}_2 = \Lambda w_2 + gy_p$
	$\omega^T = [y_p \quad w_1^T \quad w_2^T \quad r]$
Lei de adaptação	$\dot{\theta} = -\gamma \text{sign}(k^*) \omega e_0$
Lei de controle	$u = \theta^T \omega$

A Tabela 3.2 mostra as condições iniciais utilizadas nas simulações realizadas nesta seção com o algoritmo *MRAC*. Nos casos em que forem utilizadas condições diferentes, estas serão explicitamente indicadas nos dados das simulações correspondentes.

Tabela 3.2: Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo *MRAC*.

Planta	$y_p(0) = 2$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$
Parâmetro adaptado	$\theta(0) = 0$

#### Caso 1:

Os dados utilizados para a simulação estão indicados na tabela 3.3 e os resultados são mostrados na figura 3.1. Este é o exemplo mais simples possível. Aqui apenas o ganho de alta frequência é desconhecido. Contudo, mesmo assim, observa-se grandes oscilações transitórias tanto em  $e_0$  quanto em  $\theta$ . Observa-se também que o aumento de  $\gamma$  altera a frequência da oscilação.

Tabela 3.3: Dados para a simulação do caso 1 com o algoritmo *MRAC*.

Ganho de adaptação	$\gamma = \{10, 100\}$
Sinal de referência	$r(t) = 1$

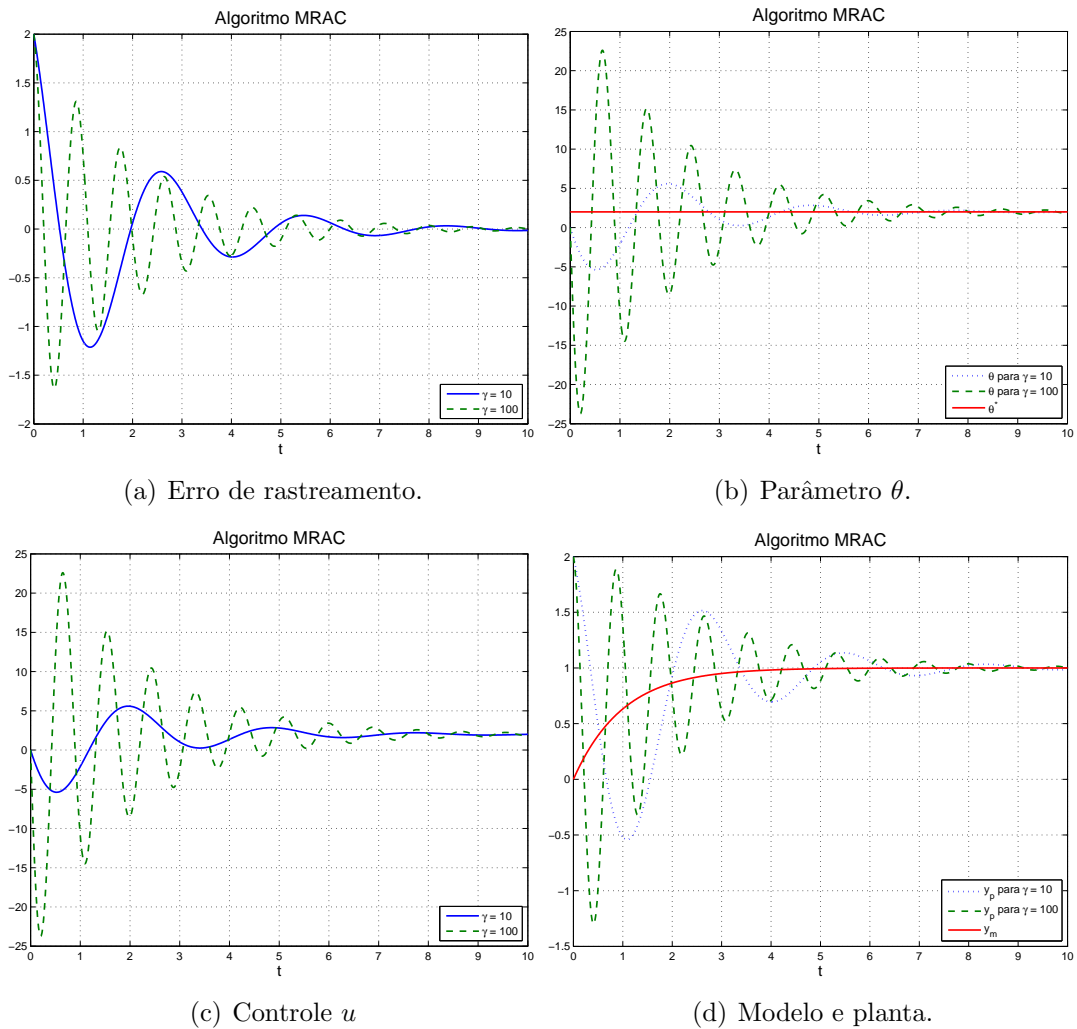


Figura 3.1: Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo *MRAC*.

### Caso 2:

Os dados utilizados para a simulação estão indicados na tabela 3.4 e os resultados são mostrados na figura 3.2. Mesmo para este caso simples de primeira ordem, esta simulação ilustra claramente a não-uniformidade no regime transitório do sistema com respeito às condições iniciais. Para  $e_0(0) = 2$ , a convergência é rápida e os parâmetros são praticamente identificados após 10 s. Porém, com  $e_0(0) = 10$ , a convergência torna-se muito mais lenta e o comportamento transitório é consideravelmente degradado, mesmo na presença de excitação persistente.

Tabela 3.4: Dados para a simulação do caso 2 com o algoritmo *MRAC*.

Condições iniciais	$y_p(0) = \{2, 10\}$
Ganho de adaptação	$\gamma = 10$
Sinal de referência	$r(t) = \text{sqw}(t/100) + \sin(t)$

**Obs.** A  $\text{sqw}(t/T)$  representa uma onda quadrada de amplitude  $A$  e período  $T$ .

### Caso 3:

Os dados utilizados para a simulação estão indicados na tabela 3.5 e os resultados são mostrados na figura 3.3. Neste exemplo são adaptados 4 parâmetros. Como o sinal de referência não é suficientemente rico, praticamente não se observa convergência de  $\theta$ . Pode-se observar que o aumento de  $\gamma$  apenas causa um maior salto inicial de  $\|\theta\|$ .

Tabela 3.5: Dados para a simulação do caso 3 com o algoritmo *MRAC*.

Ganho de adaptação	$\gamma = \{10, 100\}$
Sinal de referência	$r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10)$

### Caso 4:

A tabela 3.6 mostra os dados utilizados. Este é um exemplo que ilustra bem o fraco desempenho transitório do algoritmo *MRAC*. A partir da figura 3.4, nota-se que mesmo com um sinal de referência relativamente rico, a convergência dos parâmetros é muito lenta e o sistema controlado não consegue rastrear o modelo de referência.

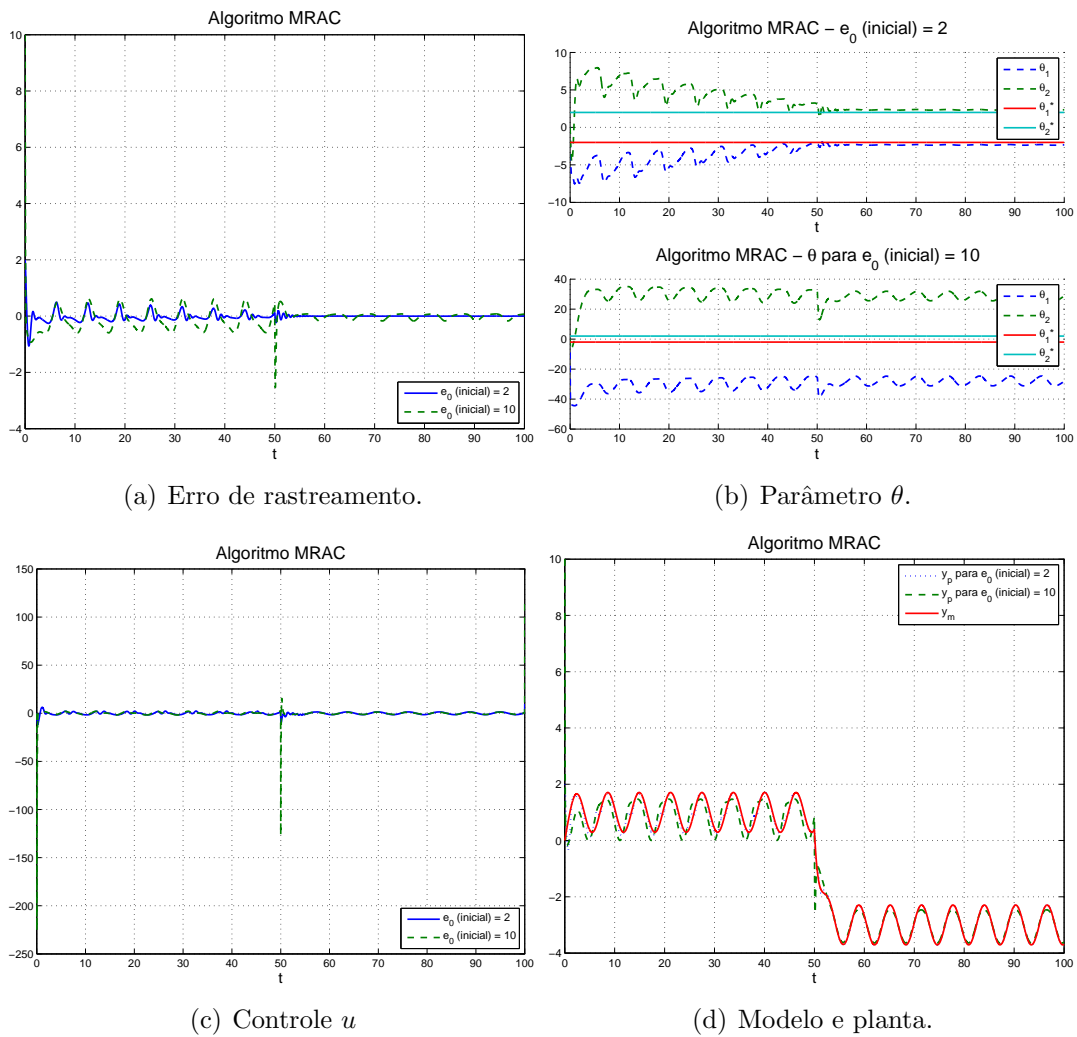
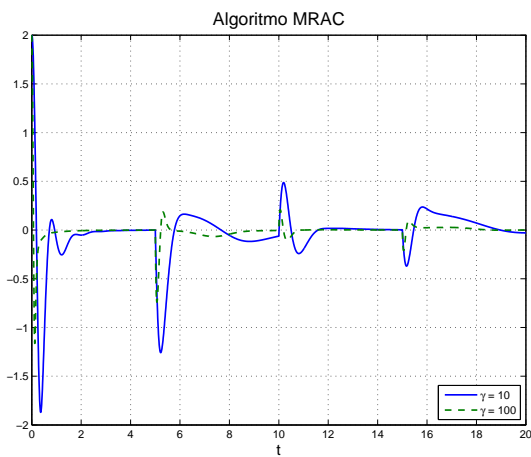


Figura 3.2: Resultados da simulação para o caso 2 com o algoritmo *MRAC*.

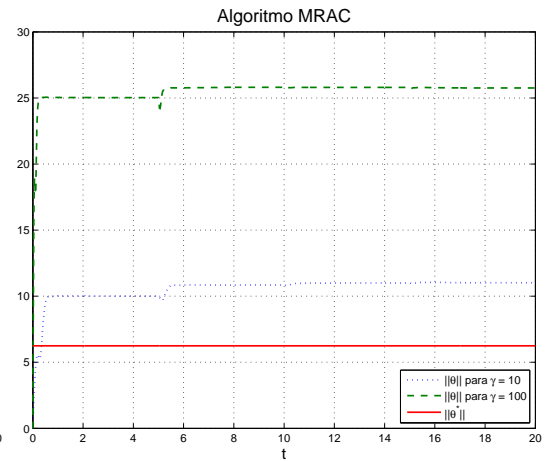
Tabela 3.6: Dados para a simulação do caso 4 com o algoritmo *MRAC*.

Ganho de adaptação	$\gamma = \{10, 100\}$
Sinal de referência	$r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10) + 1.5 \sin(10t)$

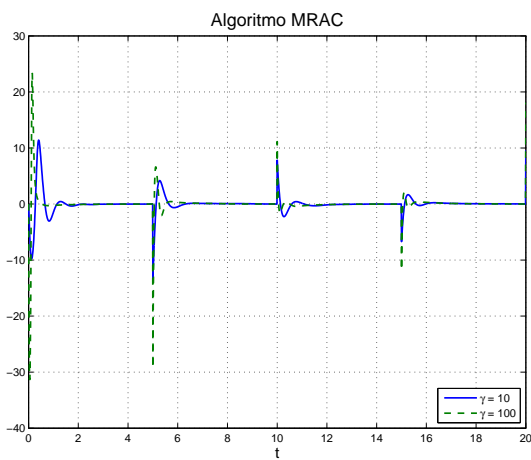




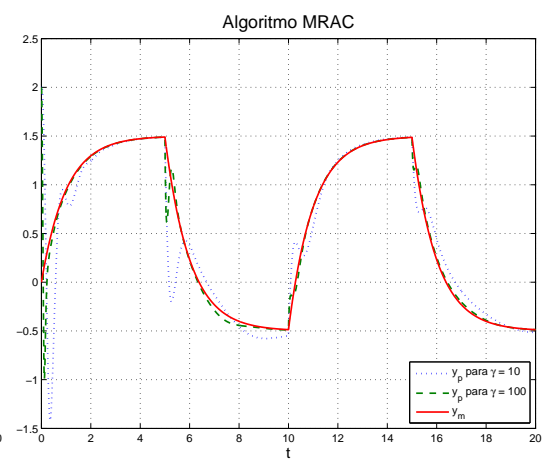
(a) Erro de rastreamento.



(b) Parâmetro  $\theta$ .



(c) Controle  $u$



(d) Modelo e planta.

Figura 3.3: Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo *MRAC*.

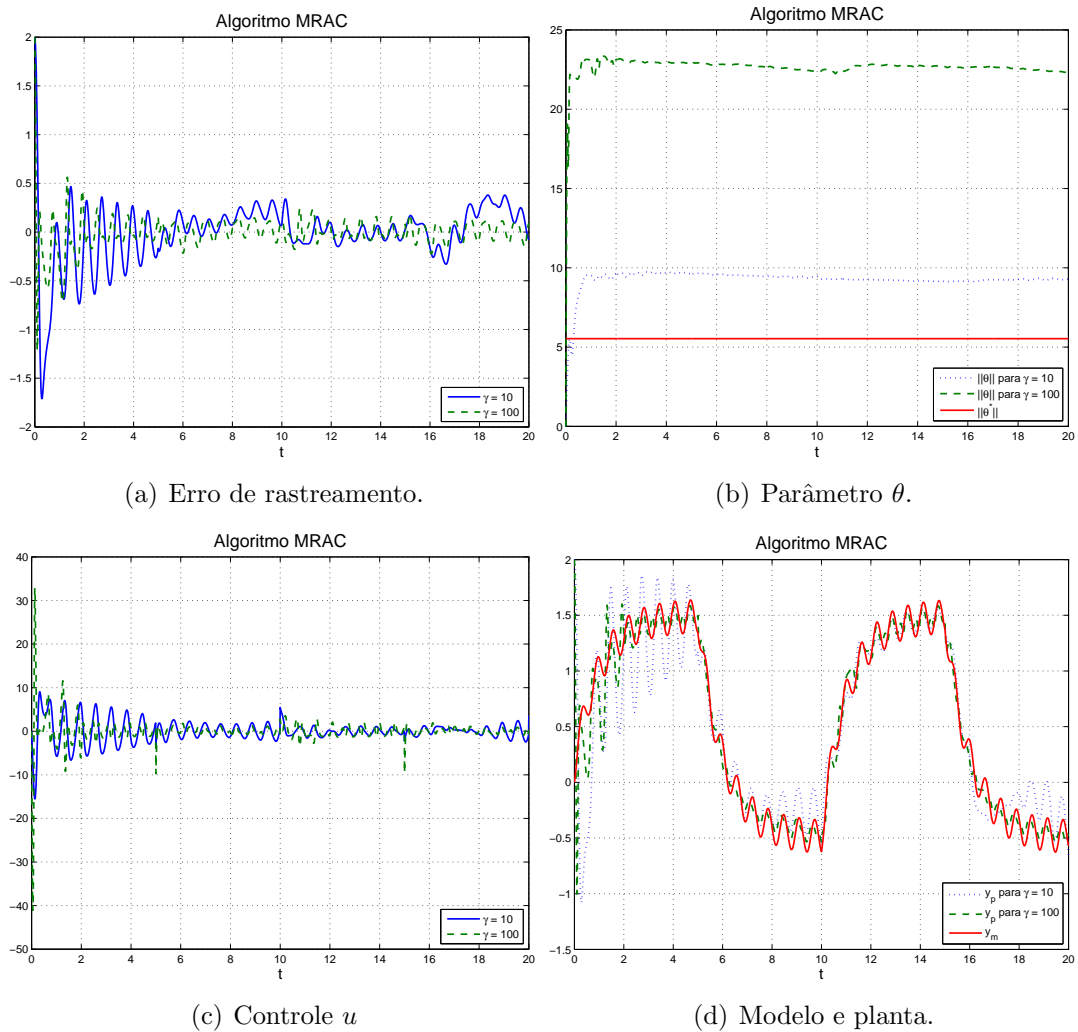


Figura 3.4: Resultados da simulação para o caso 4 com o algoritmo *MRAC*.

## 3.2 Comportamento transitório do Controle Adaptativo $\mathcal{L}_1$

Para avaliar o desempenho do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ , serão mostradas algumas simulações. A Tabela 3.7 abaixo mostra um resumo deste algoritmo. Todas as condições iniciais são nulas.

Tabela 3.7: Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$

Saída	$y(s) = A(s)u(s)$
Erro de saída	$e_0 = y - y_m$
Erro de predição	$\tilde{y} = \hat{y} - y$
Estimador	$\dot{\hat{y}} = -m\hat{y} + m(u + \hat{\sigma})$
Lei de adaptação	$\dot{\hat{\sigma}} = \gamma Proj(\hat{\sigma}, -mP\tilde{y})$
Lei de controle	$u(s) = C(s)(-\hat{\sigma}(s) + r(s))$

### Caso 1:

Os dados utilizados encontram-se na tabela 3.8. Pode-se observar a partir de 3.5 e 3.6 que neste caso simples com referência constante, o sistema consegue um bom comportamento transitório, com erro de predição menor, quanto maior o ganho de adaptação. O erro de rastreamento tende a zero, já que o algoritmo se aplica bem a referências constantes.

Tabela 3.8: Dados para a simulação do caso 1 com o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ .

Ganho de adaptação	$\gamma = \{10, 100\}$
Sinal de referência	$r(t) = 1$
Filtro	$\frac{10}{s+10}$
Tolerância para projeção	$\epsilon = 0.3$
Limitante para a projeção	$\Delta = 2$

### Caso 2:

A tabela 3.9 mostra os dados desta simulação. A partir de 3.7 e 3.8, pode-se observar que neste caso de 1ª ordem e referência não constante, o sistema consegue

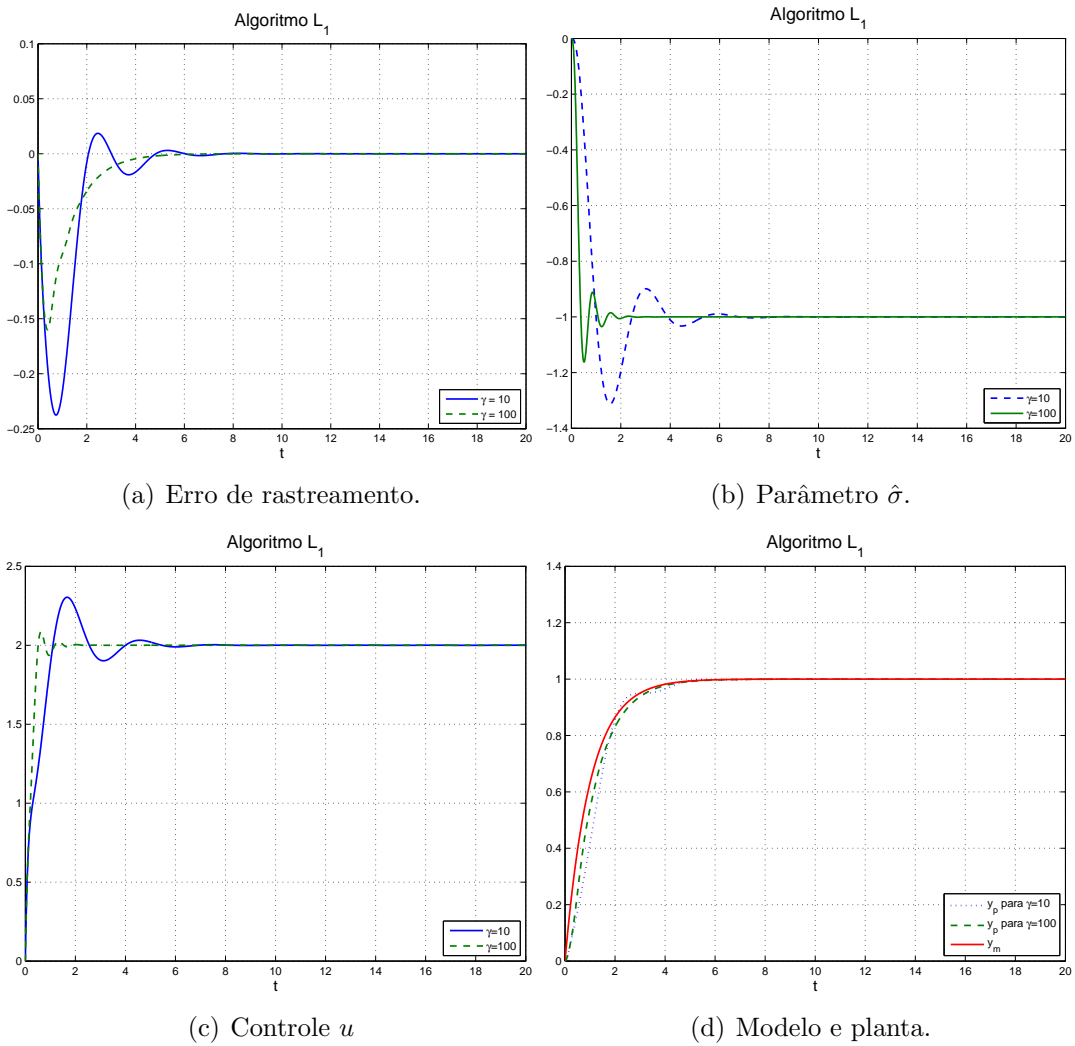


Figura 3.5: Resultados da simulação para o caso 1 com o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ .

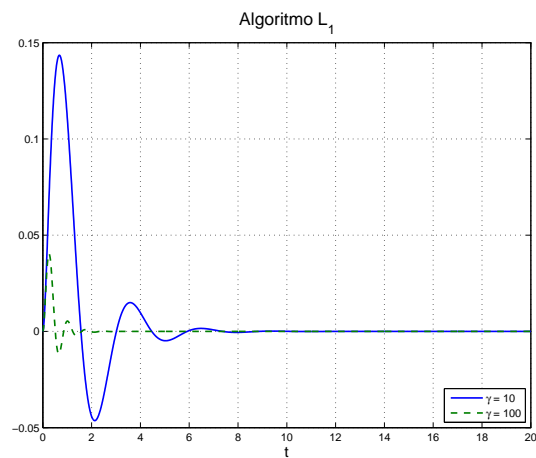


Figura 3.6: Resultados da simulação para o caso 1 com o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  - Erro de predição.

zerar o erro de predição com o aumento de  $\gamma$ . Porém, em relação ao erro de rastreamento, nota-se que o sistema não consegue rastrear o modelo devido ao filtro introduzido, mesmo com o aumento do ganho de adaptação.

Tabela 3.9: Dados para a simulação do caso 2 com o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ .

Ganho de adaptação	$\gamma = \{10, 100, 1000\}$
Sinal de referência	$r(t) = \text{sqw}(t/100) + \sin(t)$
Filtro	$\frac{10}{s+10}$
Tolerância para projeção	$\epsilon = 0.3$
Limitante para a projeção	$\Delta = 5$

### Caso 3:

A tabela 3.10 mostra os dados desta simulação. A partir de 3.9 e 3.10, pode-se observar que o erro é pequeno, sabendo que a referência é uma onda quadrada, pode-se interpretar como se o controle reagisse para um sinal constante durante o meio período da onda quadrada.

Tabela 3.10: Dados para a simulação do caso 3 com o algoritmo  $\mathcal{L}_1$ .

Ganho de adaptação	$\gamma = \{1000, 10000\}$
Sinal de referência	$r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10)$
Filtro	$\frac{10}{s+10}$
Tolerância para projeção	$\epsilon = 0.3$
Limitante para a projeção	$\Delta = 10$

### Caso 4:

A tabela 3.11 mostra os dados desta simulação. A partir de 3.11 e 3.12, pode-se observar que novamente o erro de predição pode ser menor quanto maior  $\gamma$ , porém o erro de rastreamento não.

## 3.3 Comportamento transitório do *VS-MRAC*

Para fazer uma avaliação do comportamento transitório do algoritmo *VS-MRAC*, serão apresentados resultados de simulação baseados nos mesmos casos utilizados nas seções anteriores.

A Tabela 3.12 resume o algoritmo utilizado.

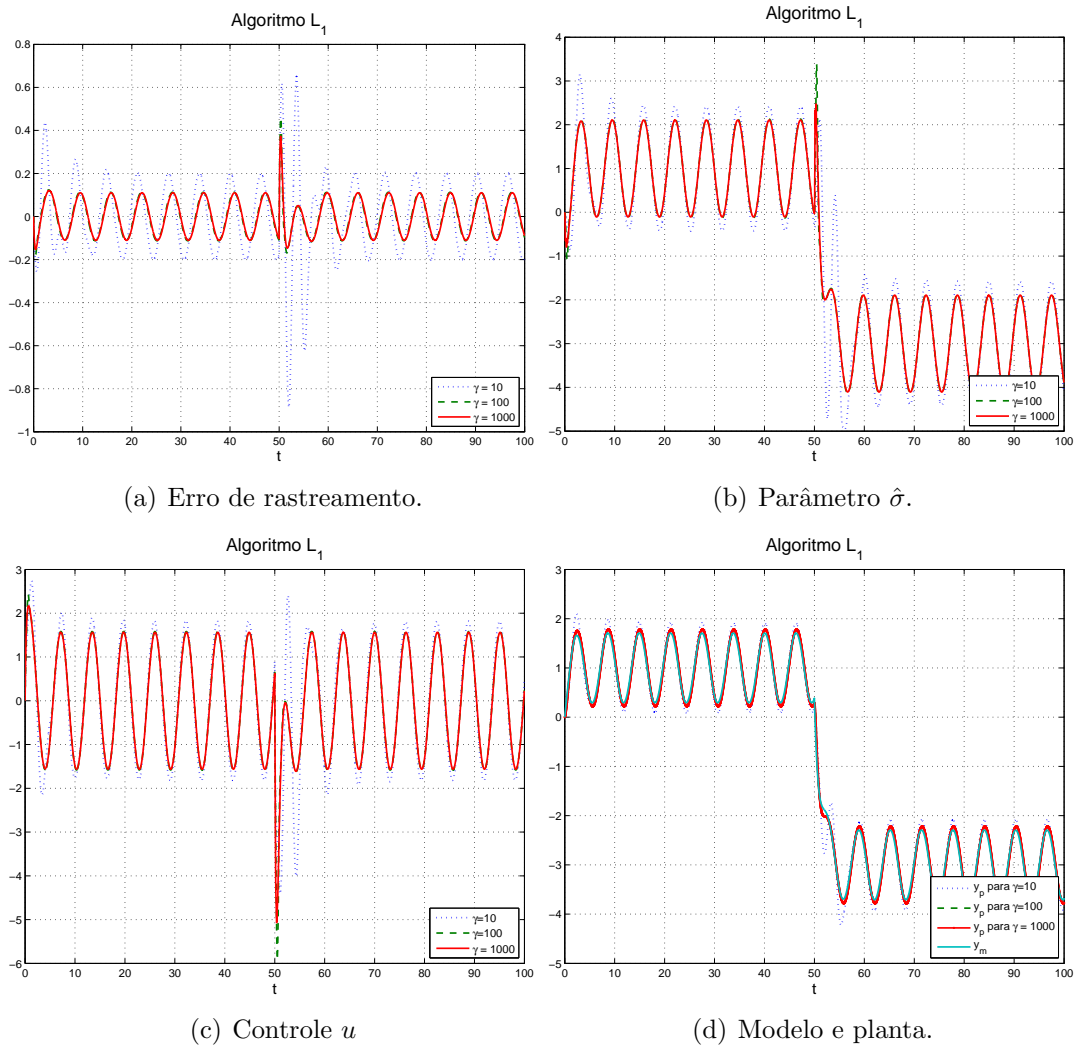


Figura 3.7: Resultados da Simulação para o caso 2 com o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ .

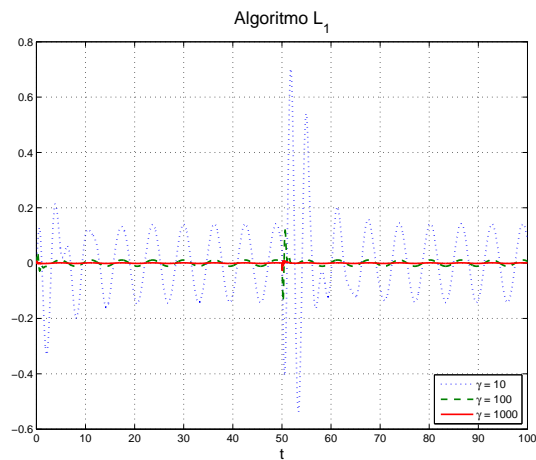


Figura 3.8: Resultados da simulação para o caso 2 com o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  - Erro de predição.

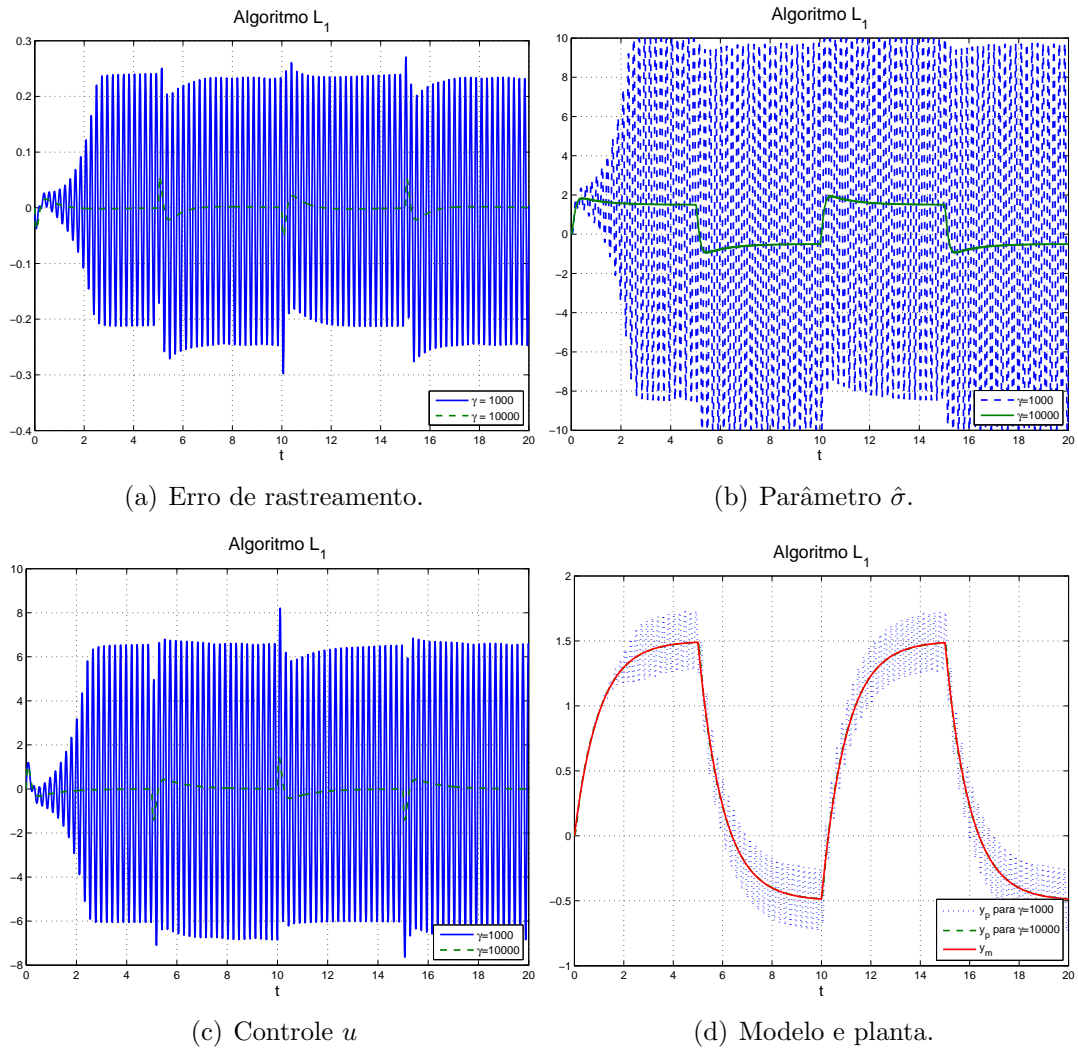


Figura 3.9: Resultados da Simulação para o caso 3 com o Controle  $\mathcal{L}_1$ .

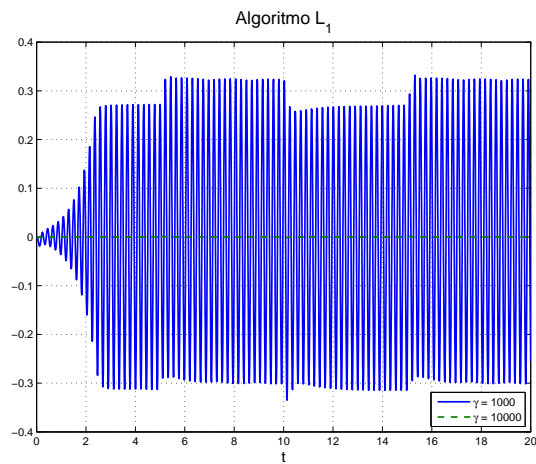


Figura 3.10: Resultados da simulação para o caso 3 com o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  - Erro de previsão.

Tabela 3.11: Dados para a simulação do caso 4 com o algoritmo  $\mathcal{L}_1$ .

Ganho de adaptação	$\gamma = \{100, 1000, 10000\}$
Sinal de referência	$r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10) + 1.5 \sin(10t)$
Filtro	$\frac{10}{s+10}$
Tolerância para projeção	$\epsilon = 0.3$
Limitante para a projeção	$\Delta = 10$

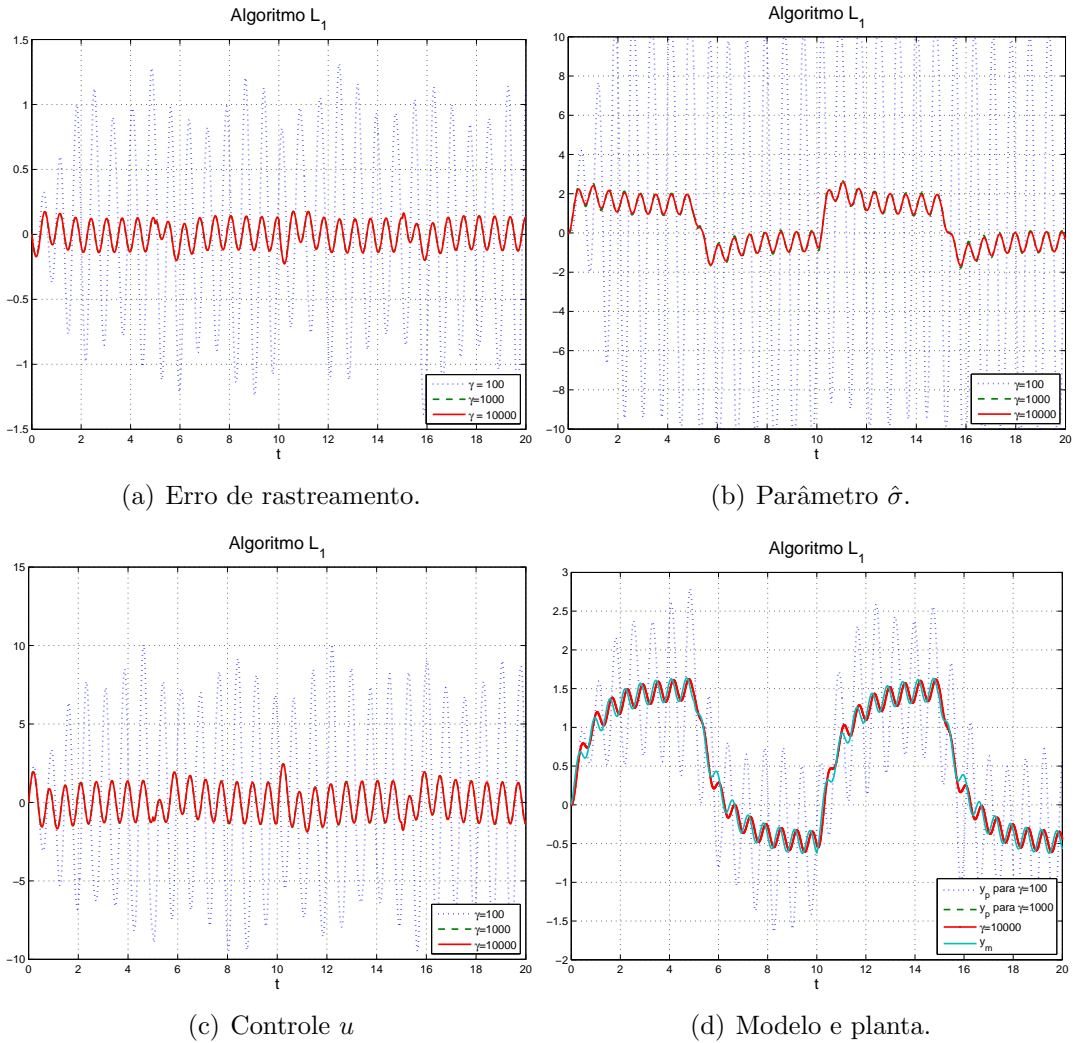


Figura 3.11: Resultados da Simulação para o caso 4 com o Controle  $\mathcal{L}_1$ .



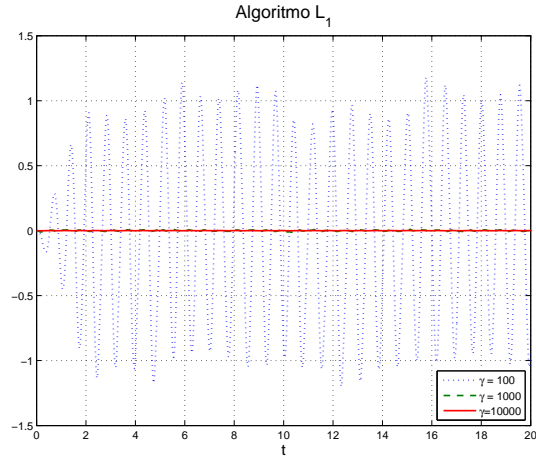


Figura 3.12: Resultados da simulação para o caso 4 com o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  - Erro de predição.

Tabela 3.12: Algoritmo *VS-MRAC*

Erro de saída	$e_0 = y_p - y_m$
Regressor	$\dot{w}_1 = \Lambda w_1 + gu$
	$\dot{w}_2 = \Lambda w_2 + gy_p$
	$\omega^T = [y_p \ w_1^T \ w_2^T \ r]$
Lei de adaptação	$\Psi_i = -\bar{\theta}_i \text{sign}(\omega_i e_0)$
Modulação	$f_{VS} = \bar{\theta}^T  \omega $
Lei de controle	$u = -f_{VS} \text{sign}(e_0)$

### Caso 1:

A implementação do chaveamento é feita através de um relé em série com um filtro. Os dados de simulação estão mostrados nas tabelas 3.13 e 3.14. A partir da figura 3.13, pode-se notar que, neste exemplo simples, o algoritmo é dependente do limitante superior  $\bar{\theta}$  e que  $\theta$  não atinge seu valor ideal, o que deixa claro que o processo de adaptação do *VS-MRAC* não é baseado em identificação de parâmetros e sim em síntese de sinais. Observa-se que a adaptação é rápida com oscilações até atingir a superfície deslizante.

Tabela 3.13: Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo *VS-MRAC* - caso 1.

Planta	$y_p(0) = 2$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$

Tabela 3.14: Dados para a simulação do caso 1 com o algoritmo *VS-MRAC*.

Limitante para o vetor de parâmetros	$\bar{\theta} = 5$
Sinal de referência	$r(t) = 1$
Relé	$\delta = 0.01$
Filtro (relé)	$\tau_1 = 0.1$

### Caso 2:

Os dados utilizados para a simulação estão indicados nas tabelas 3.15 e 3.16 e os resultados são mostrados na figura 3.14. Pode ser observado que a adaptação é bem rápida e se mantém mesmo após mudanças no sinal entrada em 50 s, não há uniformidade em relação às condições iniciais ao contrário do *MRAC* e o erro tende a zero diferente do mesmo caso para o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ .

Tabela 3.15: Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo *VS-MRAC* - caso 2.

Planta	$y_p(0) = 2, 10$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$

### Caso 3:

Os dados utilizados para a simulação estão indicados nas tabelas 3.17 e 3.18 e os resultados são mostrados na figura 3.15. Pode-se notar que a adaptação é rápida

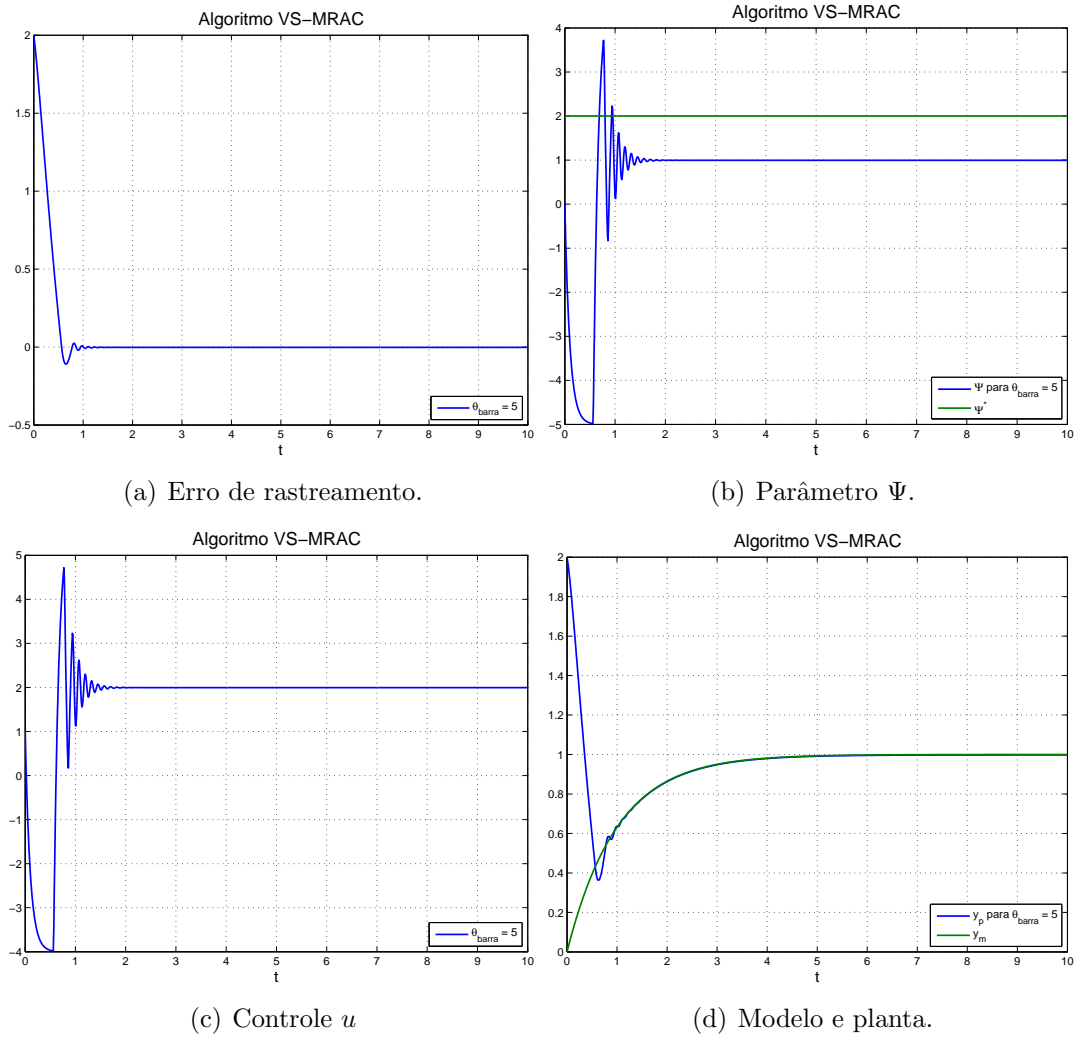
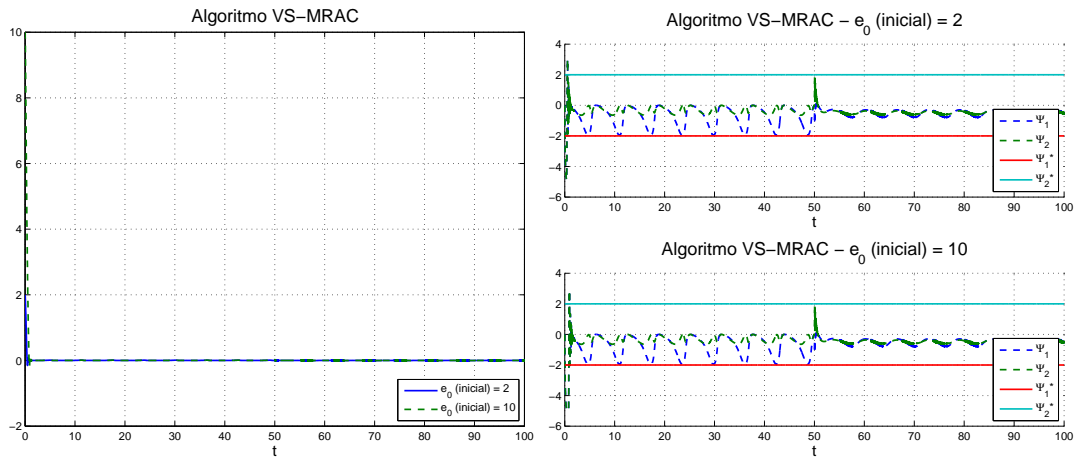


Figura 3.13: Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo *VS-MRAC*.

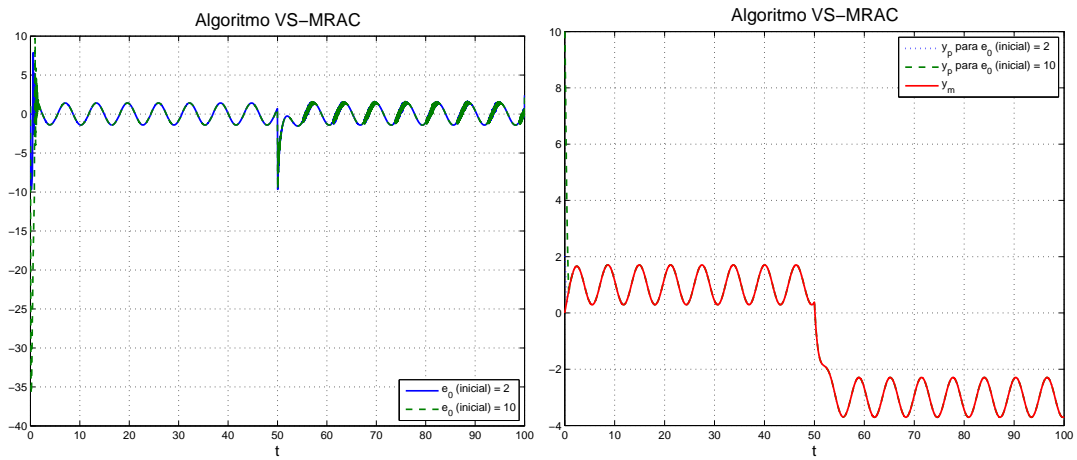
Tabela 3.16: Dados para a simulação do caso 2 com o algoritmo *VS-MRAC*.

Limitante para o vetor de parâmetros	$\bar{\theta}_i = 5$ para $i = 1..2$
Sinal de referência	$r(t) = \text{sqw}(t/100) + \sin(t)$
Relé	$\delta = 0.01$
Filtro (relé)	$\tau_1 = 0.1$



(a) Erro de rastreamento.

(b) Parâmetro  $\Psi$ .



(c) Controle  $u$

(d) Modelo e planta.

Figura 3.14: Resultados da simulação para o caso 2 com o algoritmo *VS-MRAC*.

(menor que 4 s) e que o sinal de controle já apresenta *chattering*.

Tabela 3.17: Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo *VS-MRAC* - caso 3.

Planta	$y_p(0) = 2$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$

Tabela 3.18: Dados para a simulação do caso 3 com o algoritmo *VS-MRAC*.

Limitante para o vetor de parâmetros	$\bar{\theta}_i = 5$ para $i = 1..4$
Sinal de referência	$r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10)$
Relé	$\delta = 0.01$
Filtro (relé)	$\tau_1 = 0.1$

#### Caso 4:

A tabela 3.19 contém os dados da simulação. As condições iniciais são as mesmas da simulação anterior. Com os resultados da figura 3.16, observa-se que mesmo com o sinal em senoide a adaptação é rápida e o erro de rastreamento tende a zero em menos de 2 s, diferentemente do mesmo caso para o controle  $\mathcal{L}_1$ .

Tabela 3.19: Dados para a simulação do caso 4 com o algoritmo *VS-MRAC*.

Limitante para o vetor de parâmetros	$\bar{\theta}_i = 5$ para $i = 1..6$
Sinal de referência	$r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10) + 1.5 \sin(10t)$
Relé	$\delta = 0.01$
Filtro (relé)	$\tau_1 = 0.1$

### 3.4 Comportamento transitório do *B-MRAC*

Para fazer a avaliação do transitório do *B-MRAC*, a abordagem será desenvolvida por simulação dos casos apresentados anteriormente.

A Tabela 3.20 resume o algoritmo utilizado.

#### Caso 1:

Os dados utilizados para a simulação estão indicados nas tabelas 3.21 e 3.22 e os resultados são mostrados na figura 3.17. Pode-se observar grandes oscilações

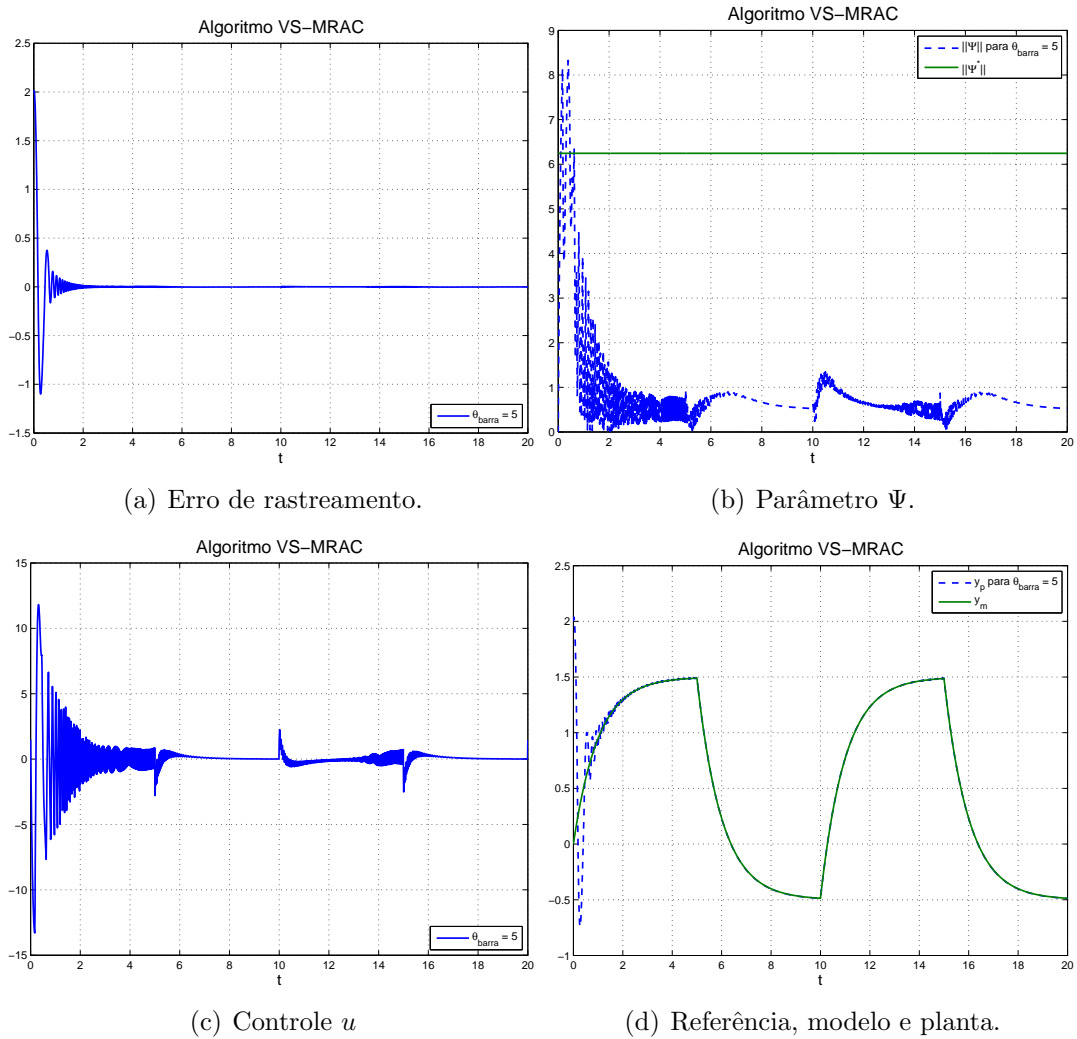


Figura 3.15: Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo *VS-MRAC*.

Tabela 3.20: Algoritmo *B-MRAC*

Erro de saída	$e_0 = y_p - y_m$
Projeção	$\sigma_{proj} = \begin{cases} 0, & \text{se } \ \theta\  < M_\theta \text{ ou } \sigma_{eq} < 0 \\ \sigma_{eq}, & \text{se } \ \theta\  \geq M_\theta \text{ e } \sigma_{eq} \geq 0 \end{cases}$ $\sigma_{eq} = -\frac{\gamma e_0 \theta^T \omega}{\ \theta\ ^2}$
Lei de adaptação	$\dot{\theta} = -\sigma_{proj} \theta - \gamma e_0 \omega$
Lei de controle	$u = \theta^T \omega$

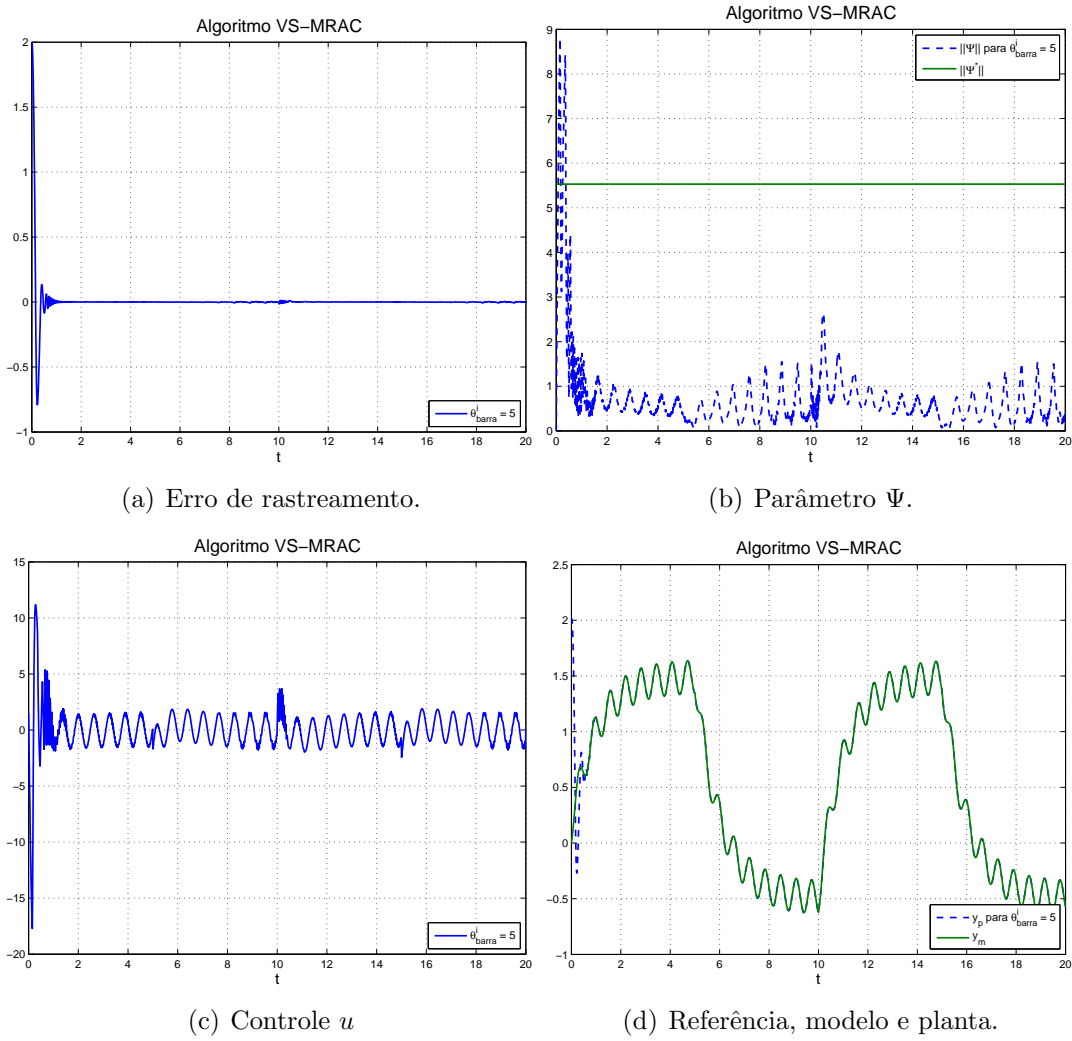


Figura 3.16: Resultados da simulação para o caso 4 com o algoritmo *VS-MRAC*.

tanto em  $e_0$  quanto em  $\theta$  e para a saída, somente com  $\gamma$  alto a adaptação é melhor. Observa-se também que o aumento de  $\gamma$  altera a frequência da oscilação.

Tabela 3.21: Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo *B-MRAC* - caso 1.

Planta	$y_p(0) = 2$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$

Tabela 3.22: Dados para a simulação do caso 1 com o algoritmo *B-MRAC*.

Ganho de adaptação	$\gamma = \{1, 10, 100, 1000\}$
Sinal de referência	$r(t) = 1$

### Caso 2:

Os dados utilizados para a simulação estão indicados nas tabelas 3.23 e 3.24 e os resultados são mostrados na figura 3.18. Pode-se observar que quanto maior a condição inicial, maior o tempo para o rastreamento. Novamente sem não uniformidades observa-se que o rastreamento é obtido porém não tão rápido como o *VS-MRAC*.

Tabela 3.23: Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo *B-MRAC* - caso 2.

Planta	$y_p(0) = \{2, 10\}$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$

### Caso 3:

Os dados utilizados para a simulação estão indicados nas tabelas 3.25 e 3.26 e os resultados são mostrados na figura 3.19. Quanto maior o ganho de adaptação menor a amplitude da oscilação no transitório e mais rápida é a adaptação e o rastreamento. Comparando com o *VS-MRAC*, observa-se que não ocorre *chattering*.

### Caso 4:

Os dados utilizados para a simulação estão indicados na tabela 3.27 e os resultados são mostrados na figura 3.20. As condições iniciais são as mesmas da simulação anterior. Observa-se que quanto maior o  $\gamma$  mais rápido o erro tende a zero. Pelas



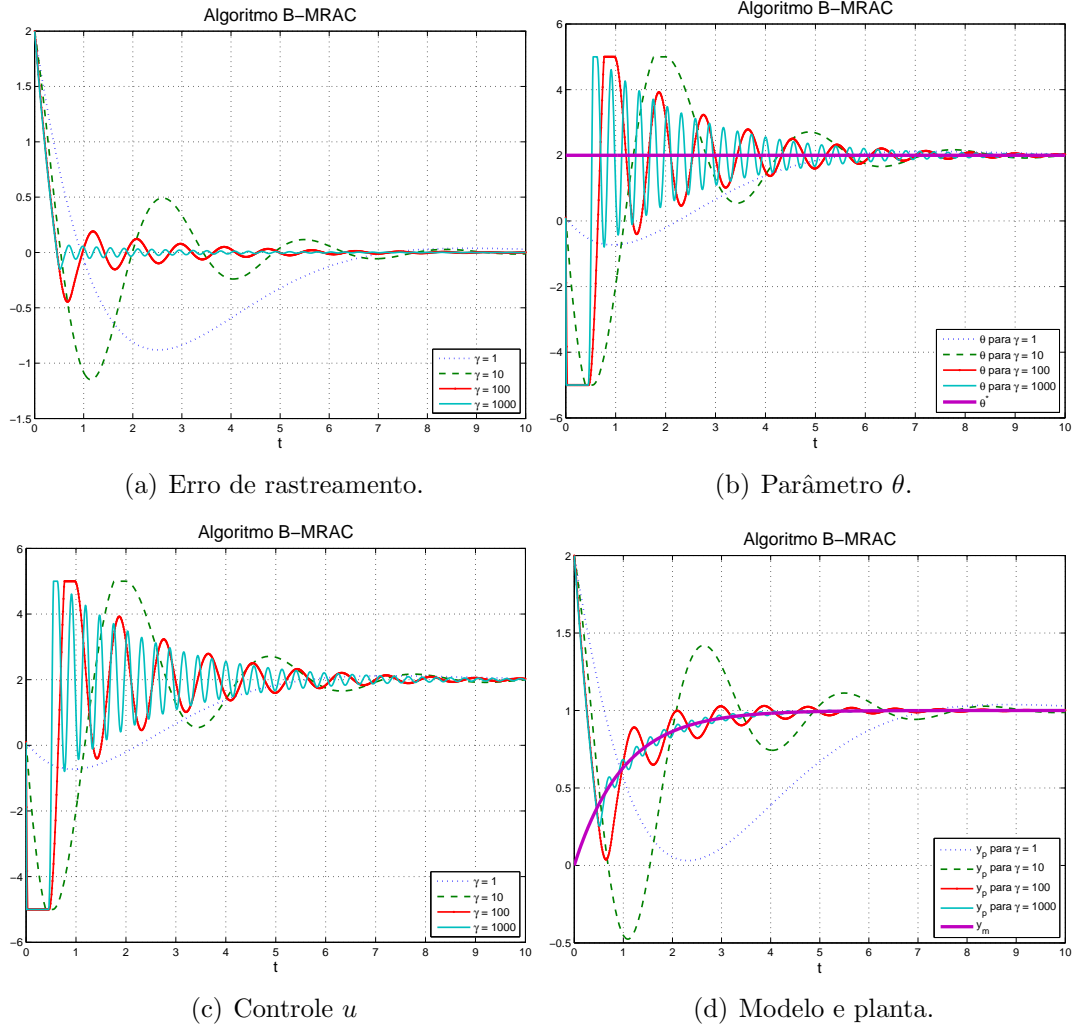


Figura 3.17: Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo *B-MRAC*.

Tabela 3.24: Dados para a simulação do caso 2 com o algoritmo *B-MRAC*.

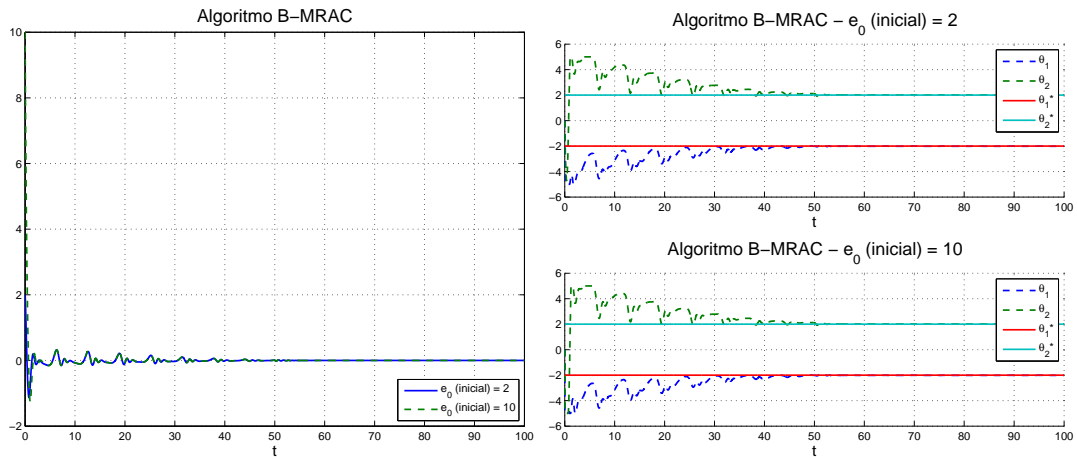
Ganho de adaptação	$\gamma = 10$
Sinal de referência	$r(t) = \text{sqw}(t/100) + \sin(t)$

Tabela 3.25: Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo *B-MRAC* - caso 3.

Planta	$y_p(0) = 2$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$

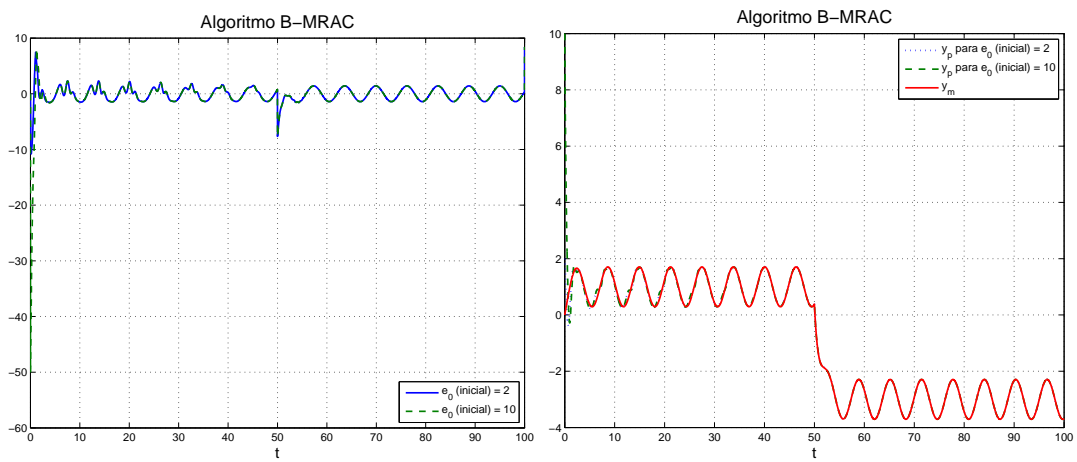
Tabela 3.26: Dados para a simulação do caso 3 com o algoritmo *B-MRAC*.

Ganho de adaptação	$\gamma = \{10, 100\}$
Sinal de referência	$r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10)$



(a) Erro de rastreamento.

(b) Parâmetro  $\theta$ .



(c) Controle  $u$

(d) Modelo e planta.

Figura 3.18: Resultados da simulação para o caso 2 com o algoritmo *B-MRAC*.

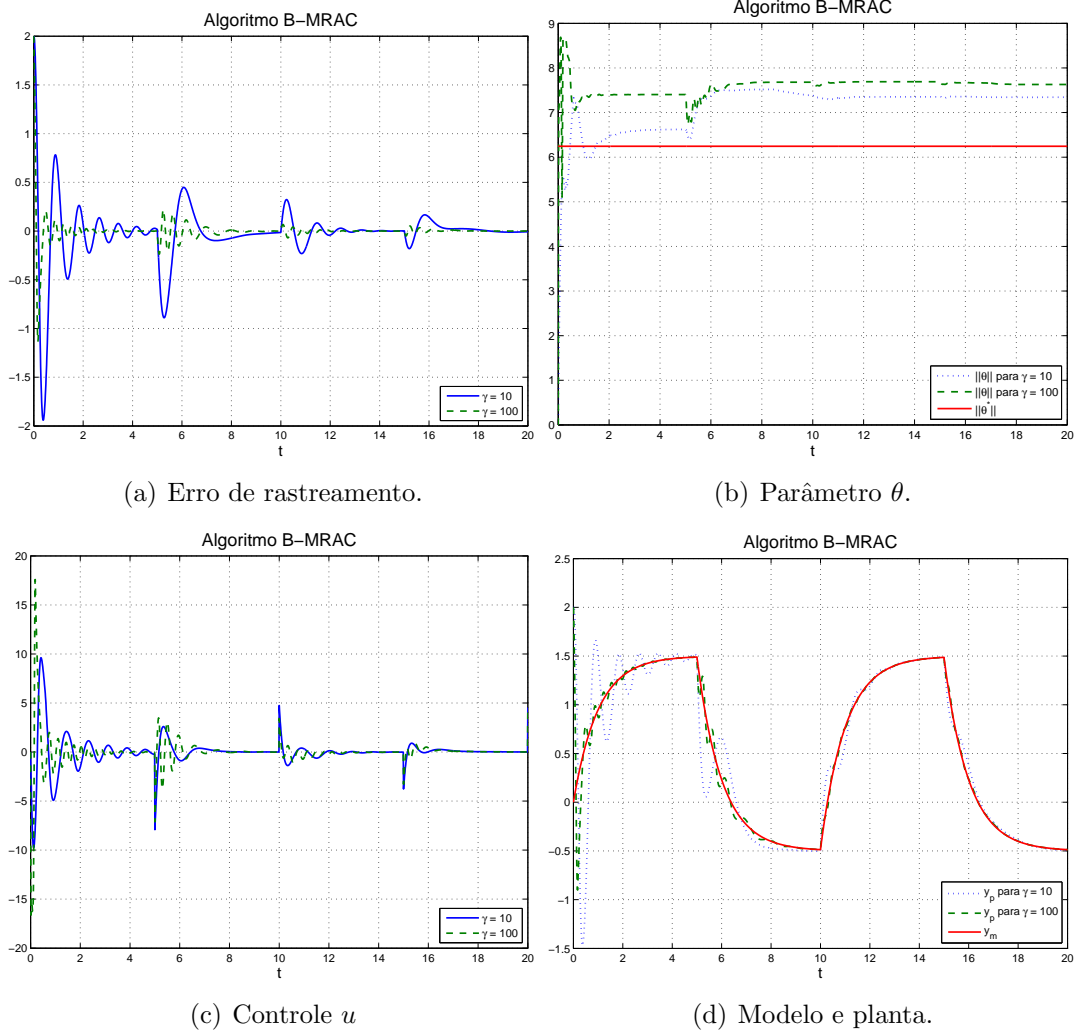


Figura 3.19: Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo *B-MRAC*.

simulações pode-se verificar que uma vantagem deste algoritmo é a redução do efeito de *chattering* no sinal de controle.

Tabela 3.27: Dados para a simulação do caso 4 com o algoritmo *B-MRAC*.

Ganho de adaptação	$\gamma = \{10, 100\}$
Sinal de referência	$r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10) + 1.5 \sin(10t)$

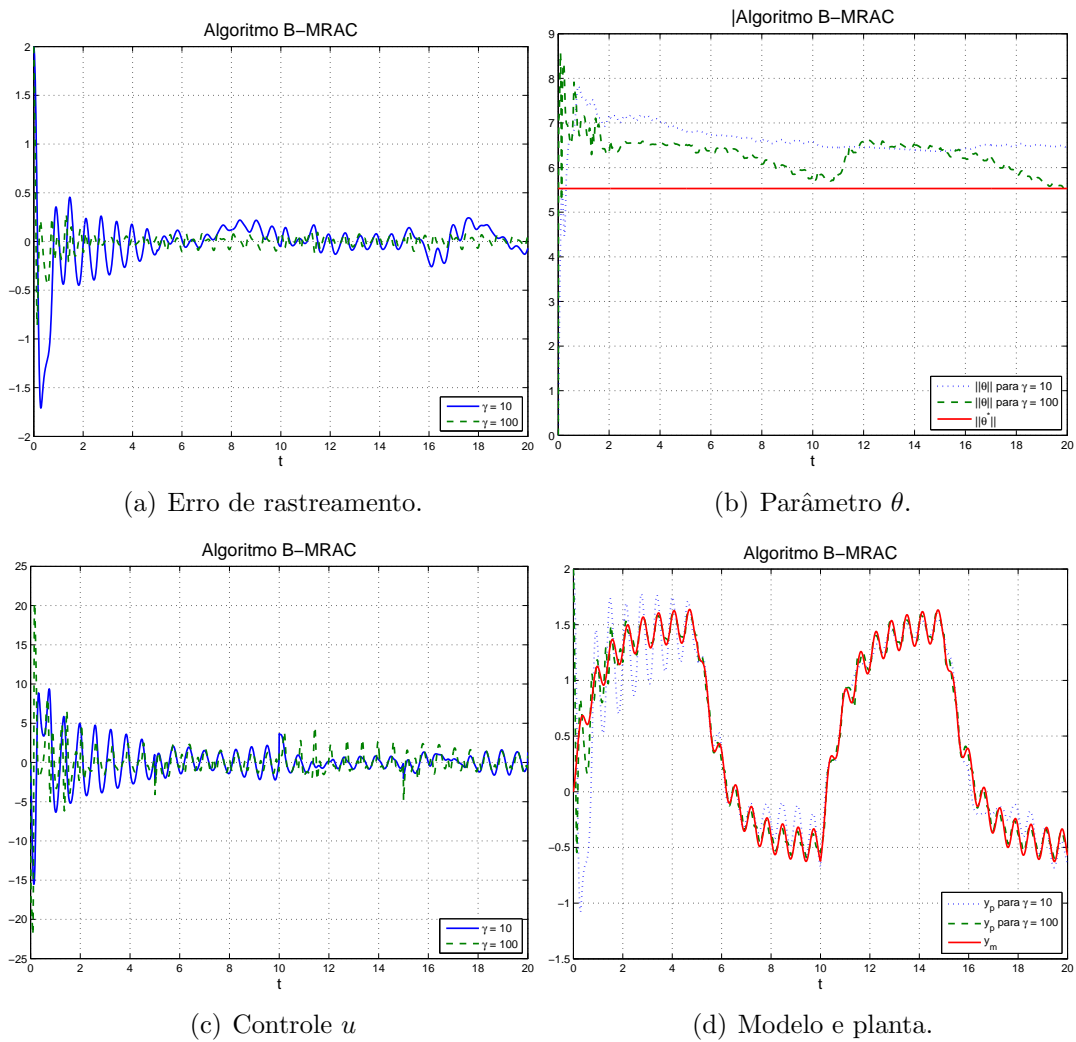


Figura 3.20: Resultados da simulação para o caso 4 com o algoritmo *B-MRAC*.

### 3.5 Comportamento transitório do $\alpha$ -MRAC

As simulações a seguir servem para validar as observações descritas na seção 2.5.3.

A Tabela 3.28 resume o algoritmo utilizado.

Tabela 3.28: Algoritmo  $\alpha$ -MRAC

Erro de saída	$e_0 = y_p - y_m$
Lei de adaptação	$\dot{\hat{\theta}} = \dot{\theta} = -\gamma \text{sign}(k^*) [e_0 + \alpha \hat{f}] \omega$ $\hat{f} = \frac{\dot{e}_0 + a_m \hat{e}_0}{k_m}$
Filtro	$\tau \dot{\hat{e}}_0 = -\hat{e}_0 + e_0$
Lei de controle	$u = \theta^T \omega$

**Caso 1:**

Os dados utilizados para a simulação estão indicados nas tabelas 3.29 e 3.30. A figura 3.21 mostra o resultado obtido com o  $\alpha$ -MRAC para dois conjuntos de parâmetros:  $\{\tau = 0.1, \gamma = 10\}$  e  $\{\tau = 0.01, \gamma = 100\}$ . A melhoria no transitório de rastreamento é notável em ambos os casos, não há oscilações e a adaptação é rápida. Para  $\gamma = 100$ , a excursão de  $\theta$  e de  $u$  é inicialmente maior, fazendo com que  $e_0$  e  $y$  tenham rastreamento um pouco mais lento que o caso de  $\gamma = 10$ .

Tabela 3.29: Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo  $\alpha$ -MRAC - caso 1.

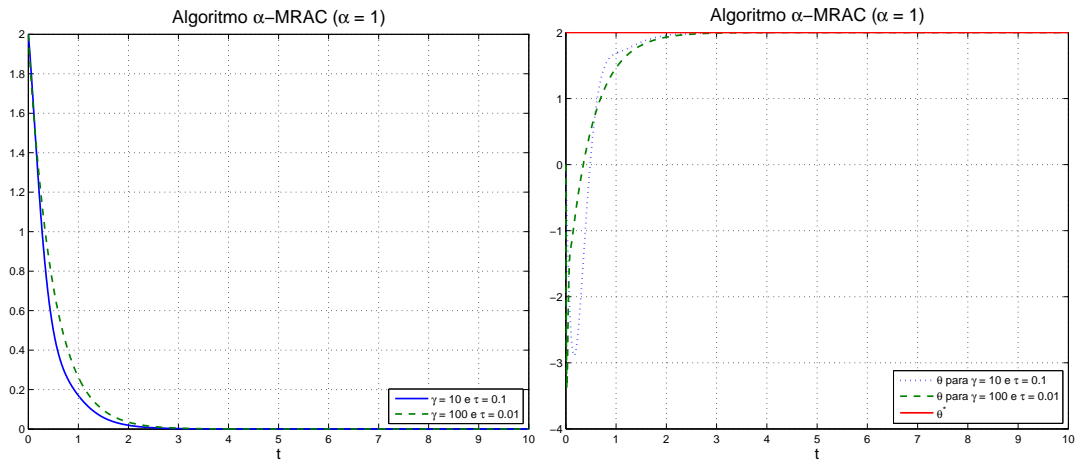
Planta	$y_p(0) = 2$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$
Parâmetro adaptado	$\theta(0) = 0$
Filtro	$\hat{e}_0(0) = 2$

Tabela 3.30: Dados para a simulação do caso 1 com o algoritmo  $\alpha$ -MRAC.

Ganho de adaptação	$\gamma = \{10, 100\}$
Constante do algoritmo	$\alpha = 1$
Filtro	$\tau = \{0.1, 0.01\}$
Sinal de referência	$r(t) = 1$

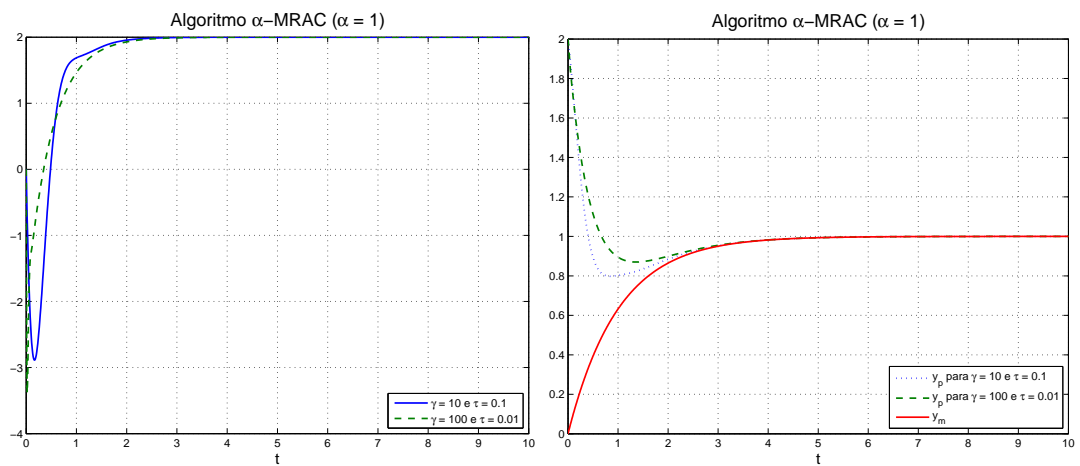
**Caso 1 - mudança de  $\alpha$ :**

A figura 3.22 mostra o resultado obtido variando o valor de  $\alpha$  e os dados utilizados encontram-se na tabela 3.31. Quando o ganho  $\alpha$  aumenta, o erro no sinal de controle  $\tilde{\theta}^T \omega$  se aproxima de 0. Como neste caso somente um parâmetro é adaptado, a solução é obtida com  $\theta \cong \theta^*$ , ou seja, a identificação de  $k_p$  pode ser arbitrariamente rápida



(a) Erro de rastreamento.

(b) Parâmetro  $\theta$ .



(c) Controle  $u$

(d) Modelo e planta.

Figura 3.21: Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo  $\alpha$ -MRAC.

aumentando-se  $\alpha$ . O efeito de  $\tau$  incide sobre o comportamento oscilatório de  $\theta$ , como pode ser observado. O transitório do erro de rastreamento não é praticamente afetado por  $\tau$ .

Tabela 3.31: Dados para a simulação do caso 1 com o algoritmo  $\alpha$ -MRAC - Mudança de  $\alpha$ .

Ganho de adaptação	$\gamma = \{10, 100\}$
Constante do algoritmo	$\alpha = \{1, 100\}$
Filtro	$\tau = \{0.1, 0.01\}$
Sinal de referência	$r(t) = 1$

### Caso 2:

Os dados da simulação encontram-se nas tabelas 3.32 e 3.33. Pode-se observar a partir da figura 3.23 que, mesmo para um ganho de adaptação baixo e  $\tau = 0.1$ , o transitório obtido é rápido e sem oscilações. Entre os casos de condições iniciais diferentes, com  $e_0(0) = 10$  a adaptação é mais lenta.

Tabela 3.32: Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo  $\alpha$ -MRAC - caso 2.

Planta	$y_p(0) = \{2, 10\}$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$
Parâmetro adaptado	$\theta(0) = 0$
Filtro	$\hat{e}_0(0) = 2$

Tabela 3.33: Dados para a simulação do caso 2 com o algoritmo  $\alpha$ -MRAC.

Ganho de adaptação	$\gamma = 10$
Constante do algoritmo	$\alpha = 1$
Filtro	$\tau = 0.1$
Sinal de referência	$r(t) = \text{sqw}(t/100) + \sin(t)$

### Caso 3:

As tabelas 3.34 e 3.35 mostram os dados da simulação. A modificação  $\alpha$  neste caso também mostra melhoria no transitório mesmo sem riqueza de sinal como pode ser visualizado na figura 3.24. Utilizando os parâmetros  $\gamma = 10$  e  $\tau = 0.1$ , foi

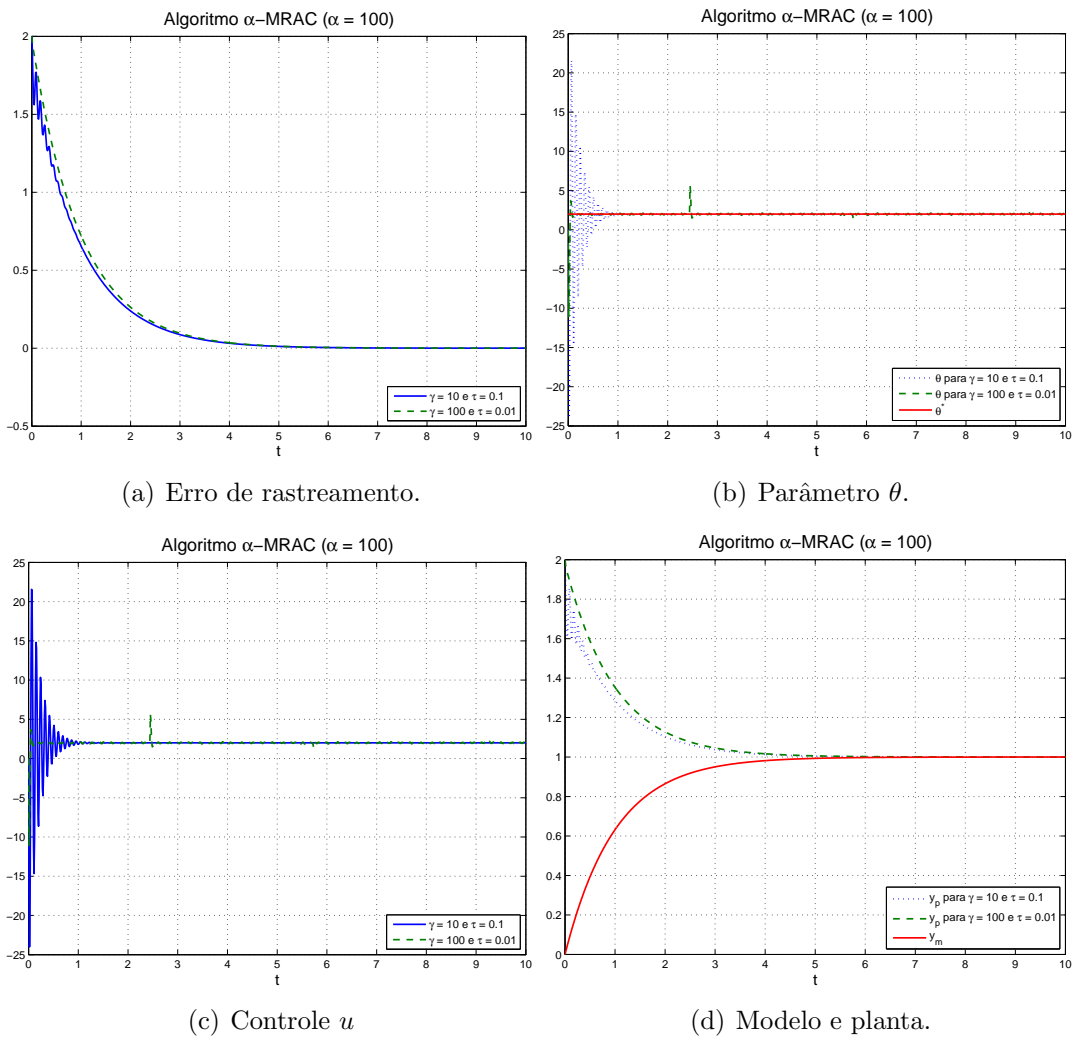


Figura 3.22: Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo  $\alpha$ -MRAC - mudança de  $\alpha$ .



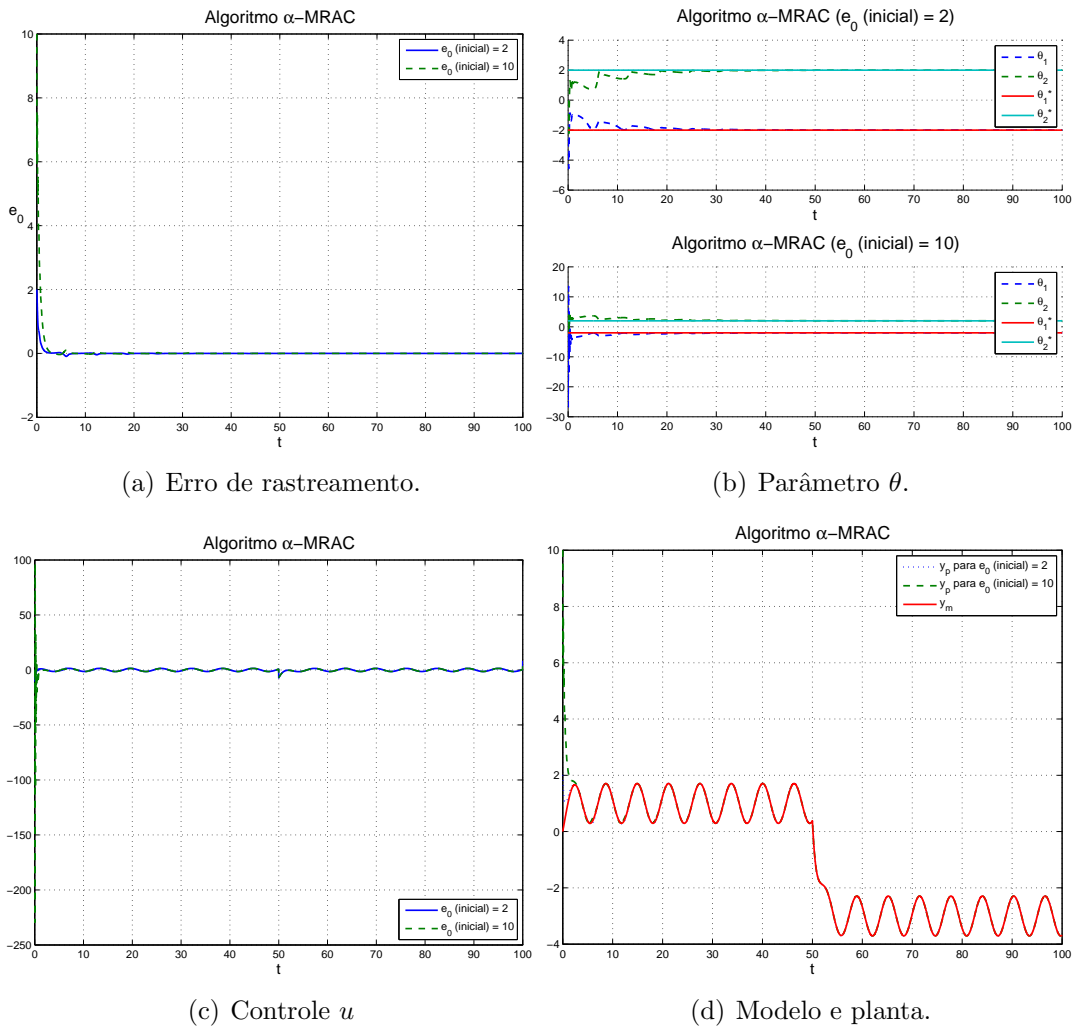


Figura 3.23: Resultados da simulação para o caso 2 com o algoritmo  $\alpha$ -MRAC.

obtido um sinal oscilatório mostrado na figura 3.24. Para  $\gamma = 100$  e  $\tau = 0.01$ , o comportamento transitório observado é próximo ao previsto pela equação (2.108).

Tabela 3.34: Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo  $\alpha$ -MRAC - caso 3.

Planta	$y_p(0) = 2$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$
Parâmetro adaptado	$\theta(0) = 0$
Filtro	$\hat{e}_0(0) = 2$

Tabela 3.35: Dados para a simulação do caso 3 com o algoritmo  $\alpha$ -MRAC.

Ganho de adaptação	$\gamma = \{10, 100\}$
Constante do algoritmo	$\alpha = 1$
Filtro	$\tau = \{0.1, 0.01\}$
Sinal de referência	$r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10)$

### Caso 3 - mudança de $\hat{e}_0(0)$

As tabelas 3.36 e 3.37 mostram os dados utilizados. O objetivo deste exemplo é ilustrar o efeito da condição inicial do filtro de avanço de fase  $\hat{e}_0(0)$  no comportamento transitório. A partir da figura 3.25, nota-se que a condição inicial do filtro apenas altera a amplitude dos sinais durante o transitório.

Tabela 3.36: Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo  $\alpha$ -MRAC - caso 3 - mudança de  $\hat{e}_0(0)$ .

Planta	$y_p(0) = 2$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$
Parâmetro adaptado	$\theta(0) = 0$
Filtro	$\hat{e}_0(0) = \{2, 3\}$

### Caso 4:

Os dados são mostrados nas tabelas 3.38 e 3.39. Observa-se que mesmo para  $\gamma = 10$  e  $\tau = 0.1$  a identificação é obtida, conforme mostrado na figura 3.26.

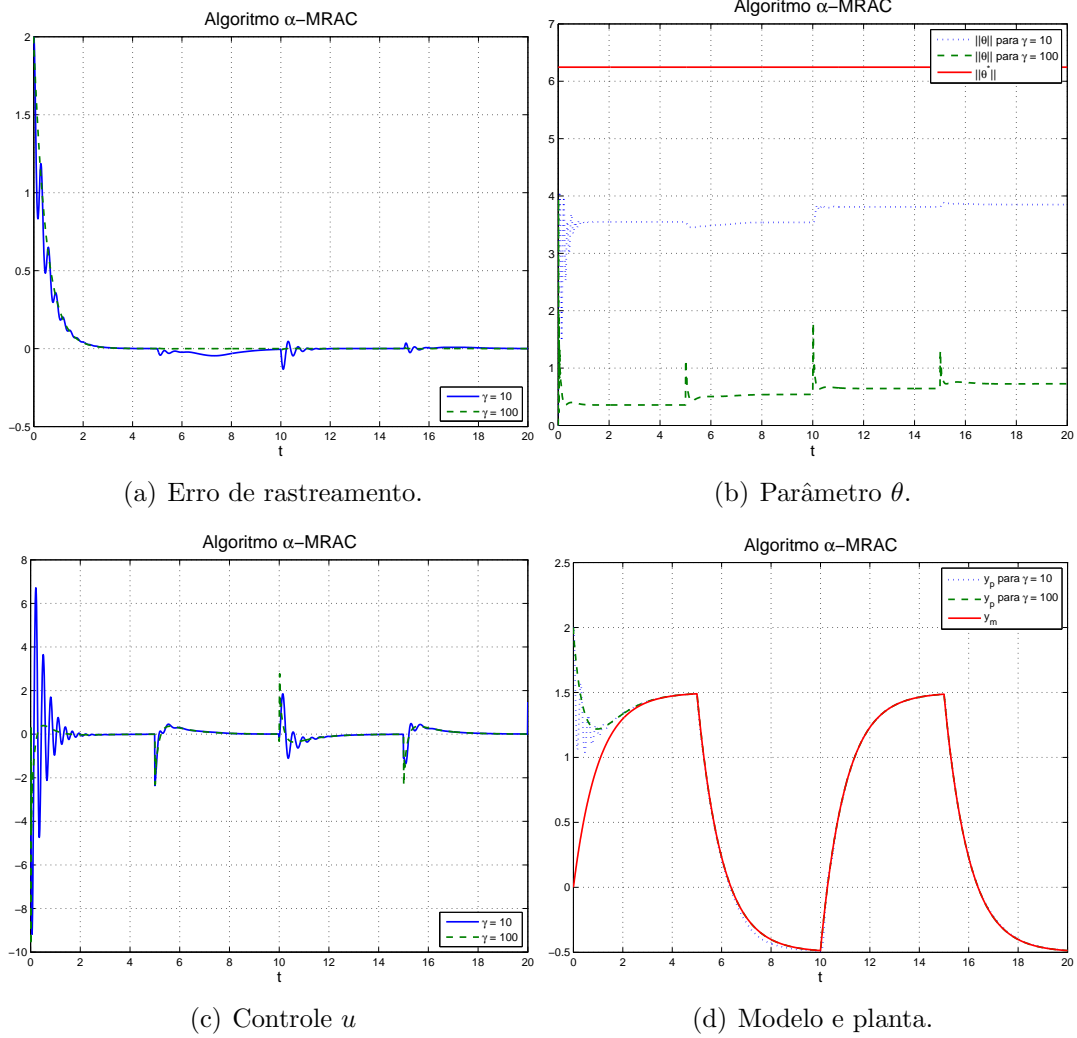


Figura 3.24: Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo  $\alpha$ -MRAC.

Tabela 3.37: Dados para a simulação do caso 3 com o algoritmo  $\alpha$ -MRAC - mudança de  $\hat{e}_0(0)$ .

Ganho de adaptação	$\gamma = 10$
Constante do algoritmo	$\alpha = 1$
Filtro	$\tau = 0.1$
Sinal de referência	$r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10)$

Tabela 3.38: Condições iniciais utilizadas nas simulações do algoritmo  $\alpha$ -MRAC - caso 4.

Planta	$y_p(0) = 2$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$
Parâmetro adaptado	$\theta(0) = 0$
Filtro	$\hat{e}_0(0) = 2$

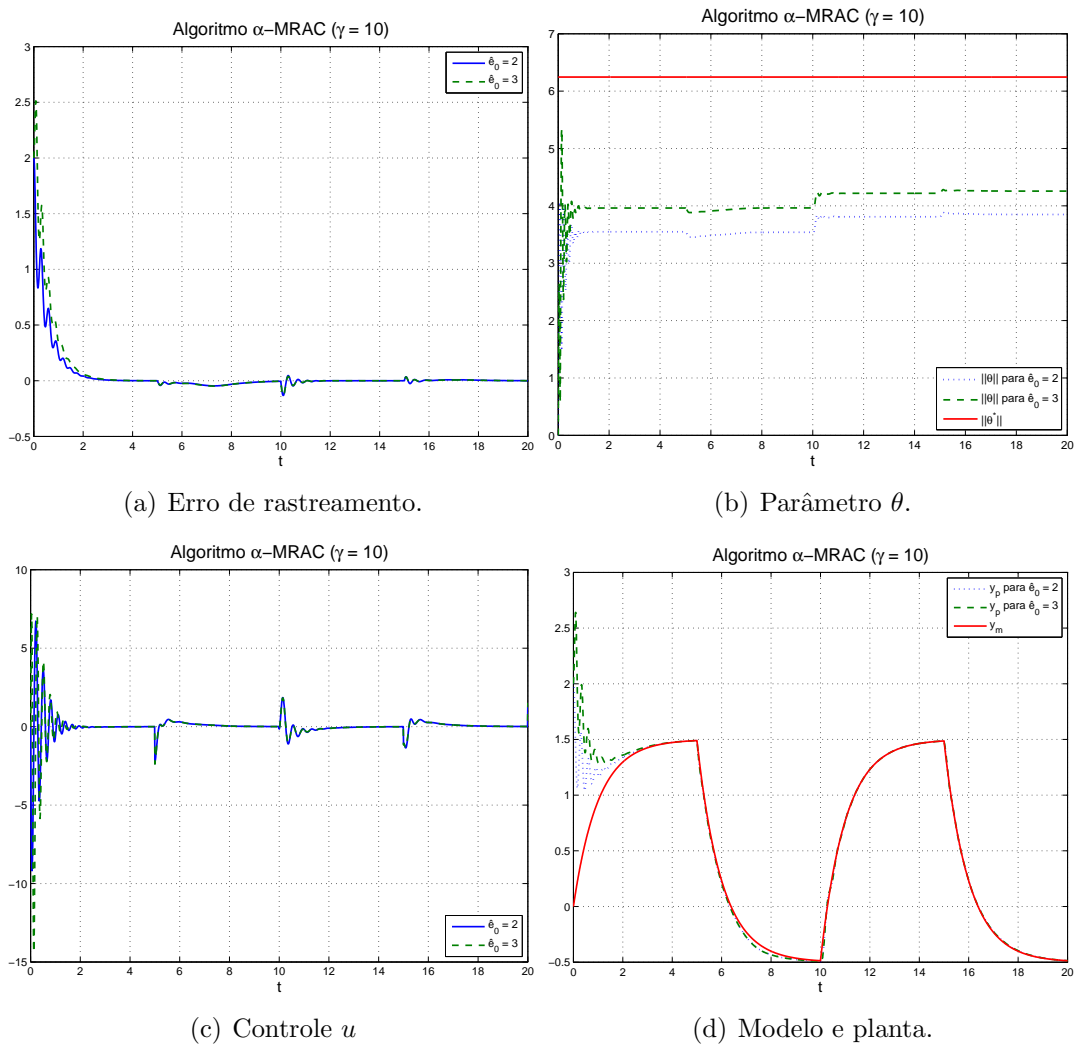


Figura 3.25: Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo  $\alpha$ -MRAC - mudança de  $\hat{\epsilon}_0(0)$ .

Tabela 3.39: Dados para a simulação do caso 4 com o algoritmo  $\alpha$ -MRAC.

Ganho de adaptação	$\gamma = \{10, 100\}$
Constante do algoritmo	$\alpha = 1$
Filtro	$\tau = \{0.1, 0.01\}$
Sinal de referência	$r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10) + 1.5 \sin(10t)$

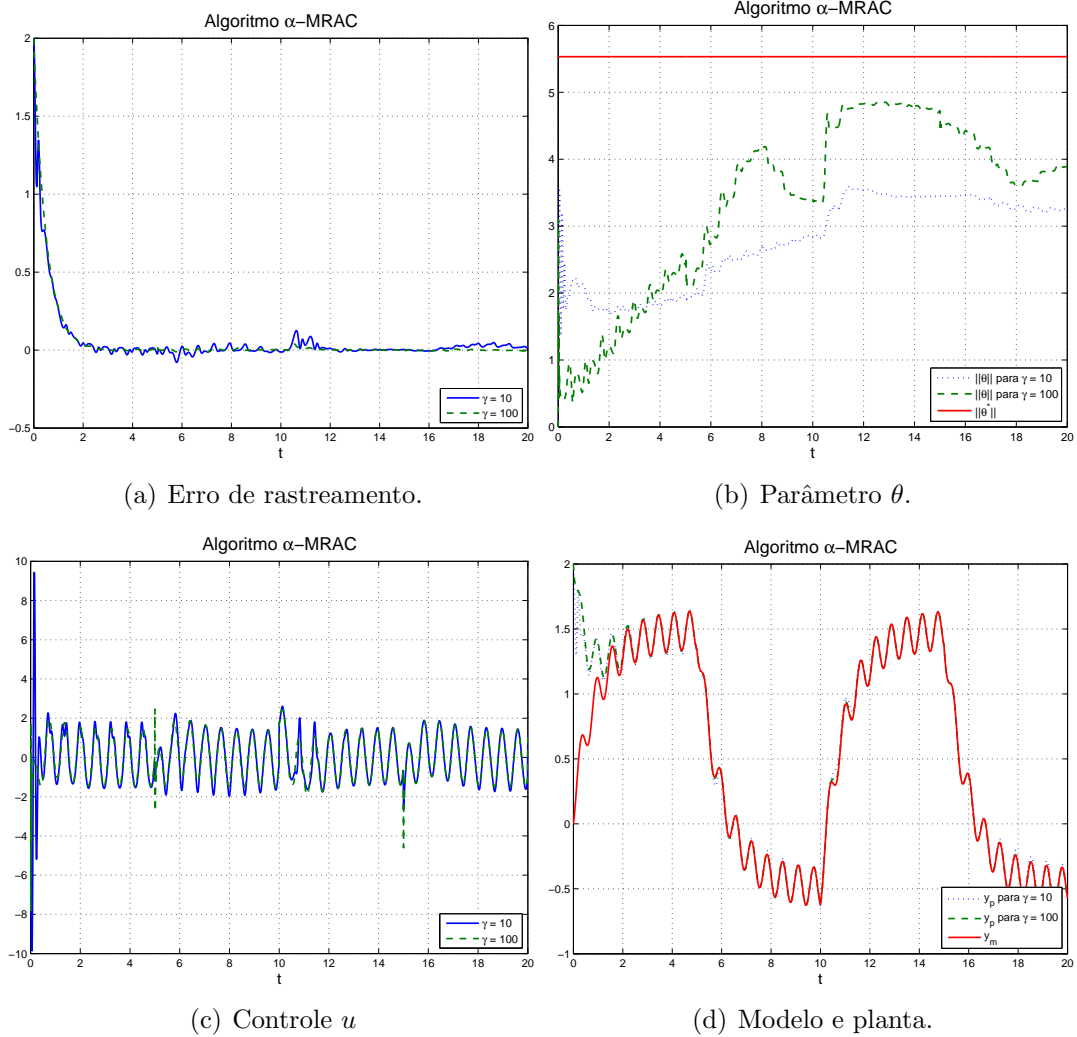


Figura 3.26: Resultados da simulação para o caso 4 com o algoritmo  $\alpha$ -MRAC.

## 3.6 Comparativo entre os algoritmos

A partir das simulações pode ser comprovado que o *MRAC* tem transitório insatisfatório, é dependente de excitação persistente e de condição inicial.

O algoritmo *VS-MRAC* é notável em relação ao *MRAC* no sentido de que não necessita de excitação persistente e possui bom comportamento transitório, sem *parameter drift*, permitindo inclusive que o modelo seja alcançado em tempo finito. É baseado em síntese de sinais assim como o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ . Um ponto negativo é a necessidade de conhecimento de um limitante superior para os parâmetros incertos da planta, assim como o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  e outro aspecto seria a possibilidade de ocorrência do fenômeno de *chattering*.

Uma vantagem do *B-MRAC* sobre o *VS-MRAC* consiste no fato de o sinal de controle ser contínuo ou uma função do tempo contínua por partes. O *VS-MRAC* precisa de chaveamento em alta frequência do sinal de controle, o que pode levar ao problema de *chattering*, enquanto que o *B-MRAC* impõe restrições à taxa de mudança dos parâmetros em adaptação evitando a frequência infinita requerida no *VS-MRAC*. Como similaridade ambos mantêm boa invariância a perturbações. Comparando com o Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ , ambos necessitam de alto ganho de adaptação e projeção.

O  $\alpha$ -*MRAC* garante convergência sem a necessidade de alto ganho ou limitante superior sem grande esforço de controle como no caso do *VS-MRAC*, Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$  e *B-MRAC*. Porém, como não há restrições aos parâmetros, pode ocorrer o fenômeno de *drifting* em presença de perturbações. Também nota-se que não há garantia de insensibilidade a variação paramétrica ou robustez a dinâmica não modelada, como no caso do *VS-MRAC* e *B-MRAC*.

O Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ , mostrou através da simulação de um caso simples de 1ª ordem que não é capaz de seguir o modelo de referência, o que faz com que ele não siga o objetivo principal de estratégias *MRAC*. A restrição da classe de sistemas para o qual o controle pode ser aplicado e a dificuldade de se obter um filtro capaz de estabilizar a planta também são dificuldades apresentadas por este algoritmo.

## Capítulo 4

# Contribuição ao *VS-MRAC*: o algoritmo *VS-MRAC* modificado

Um requisito básico para a implementação da lei de controle a estrutura variável consiste na hipótese de que a incerteza é limitada e este limitante superior é conhecido. Porém, devido a falta de informação disponível e a complexidade da estrutura da incerteza da planta, este limitante pode não ser facilmente obtido.

Esta dificuldade pode ser relaxada através da implementação de algum tipo de estimador para obtenção do limitante superior para a incerteza. Há várias tentativas encontradas na literatura com o intuito de solucionar este problema. Dentre as pioneiras, encontram-se: (Chu & Tung 2005, Su & Leung 1993, Wai 2000, Wheeler et al. 1998, Yoo & Chung 1992). Outras referências mais recentes são: (Fei 2007, Liu & Gong 2008, Neila & Tarak 2011, Yeh et al. 2010, Yu 2006).

Uma solução baseada em controle adaptativo em que somente a saída do sistema encontra-se disponível, sem o requisito de conhecimento de um limitante superior para a incerteza da planta foi apresentada por (Yan et al. 2006) utilizando o conceito de função de monitoração (*monitoring function*).

Mais recentemente, (Cunha et al. 2008) utilizou filtros de primeira ordem para gerar aproximações apropriadas para os limitantes superiores dos sinais baseados em métodos de otimização.

Como contribuição deste trabalho, será descrita e analisada neste capítulo uma modificação do *VS-MRAC*, adicionando um estimador do limitante superior para a incerteza da planta. Esta proposta foi apresentada em artigo no CBA 2012 (Dinau & Costa 2012) e a maior vantagem desta modificação é a simplicidade do algoritmo resultante. Somente o caso de plantas SISO com grau relativo igual a 1 será considerado neste capítulo. A análise mostra estabilidade global e uniforme do sistema.

O problema de *chattering* devido a pequenas imperfeições em dispositivos de chaveamento também foi considerado. Como este fenômeno poderia fazer com que a estimativa do limitante crescesse indefinidamente, uma forma simples e efetiva de

evitar este efeito é através da introdução de uma zona morta na adaptação.

## 4.1 Lei de adaptação do *VS-MRAC* modificado

Relembrando a equação (2.71):

$$\Psi_i = -\bar{\theta}_i \text{sign}(\omega_i e_0),$$

substitui-se o limitante superior  $\bar{\theta}_i$  pela seguinte estimativa adaptativa:

$$\Psi_i = -\rho_i \text{sign}(\omega_i e_0), \quad (4.1)$$

$$\dot{\rho}_i = \gamma |\omega_i e_0|, \quad (4.2)$$

em que  $\gamma > 0$ . Observe que  $\rho_i$  é uma função não decrescente.

## 4.2 Estabilidade do *VS-MRAC* modificado

Definindo o erro de estimação do limitante superior como sendo

$$\tilde{\rho}_i = \rho_i - |\theta_i^*|, \quad (4.3)$$

e considerando a função de Lyapunov

$$V(e, \tilde{\rho}) = e^T P e + k^* \gamma^{-1} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\rho}_i^2, \quad (4.4)$$

a derivada é então obtida como



$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + 2k^* \gamma^{-1} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\rho}_i \dot{\rho}_i \\
&= [Ae + bk^* (u - \theta^{*T} \omega)]^T P e + e^T P [Ae + bk^* (u - \theta^{*T} \omega)] \\
&\quad + 2k^* \gamma^{-1} \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\rho}_i \gamma |\omega_i e_0| \\
&= e^T (A^T P + P A) e + 2e^T P b k^* (\Psi - \theta^*)^T \omega + 2k^* \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\rho}_i |\omega_i e_0| \\
&= -e^T Q e + 2k^* (\Psi - \theta^*)^T \omega e_0 + 2k^* \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\rho}_i |\omega_i e_0| \\
&= -e^T Q e + 2k^* (-\rho \text{sign}(\omega e_0) - \theta^*)^T \omega e_0 + 2k^* \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\rho}_i |\omega_i e_0| \\
&= -e^T Q e - 2k^* \sum_{i=1}^{2n} (\rho_i |\omega_i e_0| + \theta_i^* \omega_i e_0) + 2k^* \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\rho}_i |\omega_i e_0| \\
&\leq -e^T Q e + 2k^* \sum_{i=1}^{2n} (-\rho_i |\omega_i e_0| + |\theta_i^*| |\omega_i e_0| + \tilde{\rho}_i |\omega_i e_0|) \\
&\leq e^T Q e.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Conclui-se então que  $\dot{V}(t)$  é negativa semi-definida no espaço  $(e, \tilde{\rho})$ , o que implica que  $V(t)$  é monotonicamente não crescente ao longo de (2.67) e (4.2) e  $e \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Portanto, o algoritmo proposto garante estabilidade global e uniforme ao sistema.

Como resultado, a lei de controle é dada por

$$u = -\rho^T |\omega| \text{sign}(e_0) = -g \text{sign}(e_0), \tag{4.6}$$

em que  $g = \rho^T |\omega|$  é a nova função modulante. Note que pode-se afirmar que

$$g \geq |\theta^{*T} \omega|, \quad \forall t > T,$$

em que  $T$  é um instante de tempo finito.

## Questões práticas de implementação

Qualquer dispositivo real de chaveamento possui imperfeições que impedem a existência de um movimento deslizante ideal. Isto significa que o erro de saída  $e_0$  não tende exatamente a zero em tempo finito. Perto da superfície de deslizamento, ocorre o fenômeno de *chattering*, o qual pode facilmente fazer com que o parâmetro

adaptativo  $\rho$  (4.2) cresça sem limites. Para superar tal situação, uma maneira simples e eficaz consiste na introdução de uma zona morta no mecanismo de adaptação. Assim sendo, uma forma prática do algoritmo é dada por

$$\dot{\rho}_i = \gamma |\omega_i e_z|, \quad (4.7)$$

com

$$|e_z| = \begin{cases} 0, & \text{if } |e_0| < \epsilon, \\ |e_0| - \epsilon, & \text{if } |e_0| \geq \epsilon, \end{cases} \quad (4.8)$$

em que  $\epsilon > 0$  é a largura da zona morta, a qual deve ser selecionada segundo a imperfeição do dispositivo de chaveamento. Por exemplo, se o dispositivo de chaveamento é um relé com histerese, neste caso simples a zona morta deve ser selecionada da seguinte forma

$$\epsilon > \delta, \quad (4.9)$$

em que  $\delta$  é a largura da histerese.

A figura 4.1 mostra o diagrama de blocos do algoritmo adaptativo proposto.

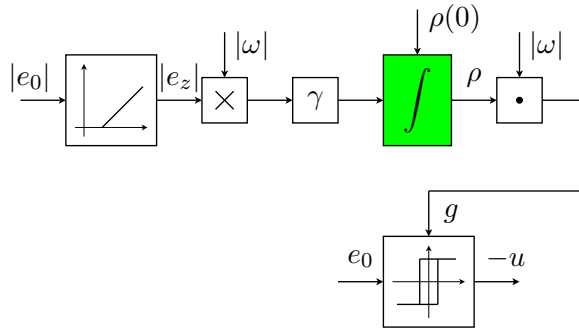


Figura 4.1: Diagrama de blocos do algoritmo adaptativo proposto.

Outra ideia seria introduzir um termo de decaimento para reduzir o valor de  $\rho$  em conjunto com uma lógica de chaveamento. Nas simulações a seguir, foi adotada a primeira ideia apresentada.

### 4.3 Simulações do *VS-MRAC* modificado

Para mostrar o desempenho do novo algoritmo, serão utilizadas algumas simulações. As plantas e o modelo utilizados nesta seção correspondem aos casos 1 e 3 apresentados no início do capítulo 3.

### Caso 1:

Os dados utilizados para a simulação estão indicados nas tabelas 4.1 e 4.2 e os resultados são mostrados nas figuras 4.2, 4.3 e 4.4.

Tabela 4.1: Condições iniciais utilizadas no caso 1 do algoritmo *VS-MRAC* modificado.

Planta	$y_p(0) = 2$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$
Parâmetro	$\Psi(0) = 0$
Estimativa de $\bar{\theta}$	$\rho(0) = 0$

Tabela 4.2: Dados para a simulação do caso 1 com o controlador *VS-MRAC* modificado.

Ganho de adaptação	$\gamma = \{1, 5\}$
Sinal de referência	$r(t) = 1 + 0.5 \sin(2t)$
Relé	$\delta = 0.02$
Limitante ( <i>VS-MRAC</i> )	$\bar{\theta} = 3$
Zona morta	$\epsilon = \{0, 0.025\}$

A partir da figura 4.2, pode ser observada a frequência baixa de chaveamento e o erro residual em  $e_0$  causados pela histerese, ilustrando o comportamento do algoritmo em presença de imperfeições.

O efeito da histerese pode ser observado no gráfico do parâmetro adaptativo  $\rho$  (figura 4.4c). Como o erro  $e_0 \neq 0$ , o parâmetro  $\rho$  continua crescendo. A figura 4.4d mostra o efeito correto da introdução de uma pequena zona morta no mecanismo de adaptação. A zona morta não suaviza o *chattering* e não reduz o erro residual em  $e_0$ , mas somente evita que o parâmetro  $\rho$  cresça ilimitadamente.

### Caso 3:

As tabelas 4.3 e 4.4 mostram os dados utilizados para a simulação e os resultados são mostrados nas figuras 4.5, 4.6 e 4.7.

Pode-se notar novamente que a zona morta consegue evitar escapamento do parâmetro  $\rho$ . Analisando-se em conjunto os dois casos estudados e também a relação com o algoritmo original, nota-se que a adaptação do limitante superior traz ganhos ao evitar a necessidade de conhecimento prévio desta informação, porém em contrapartida não garante convergência em tempo finito e gera maior erro de rastreamento devido a adaptação do limitante, que no *VS-MRAC* já é uma informação conhecida desde o início da simulação.

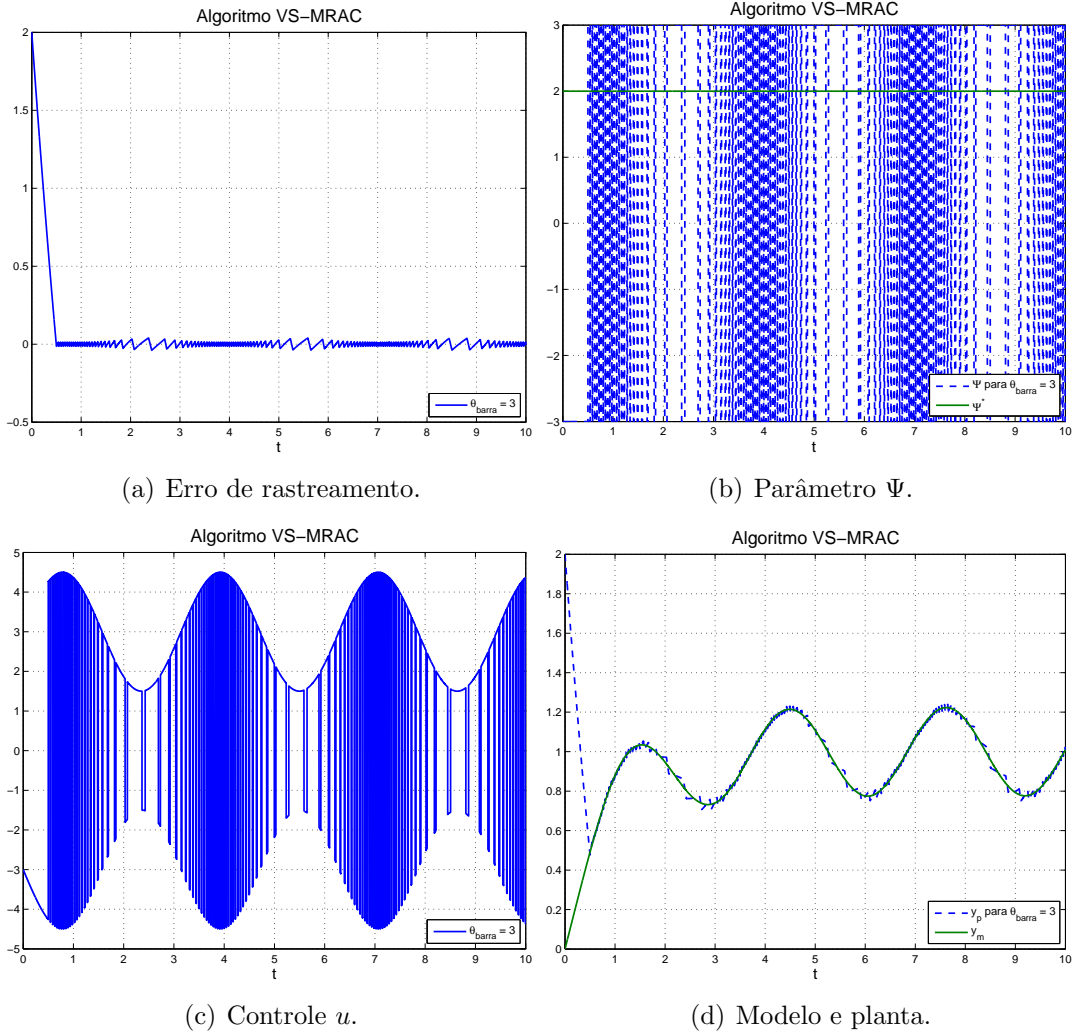


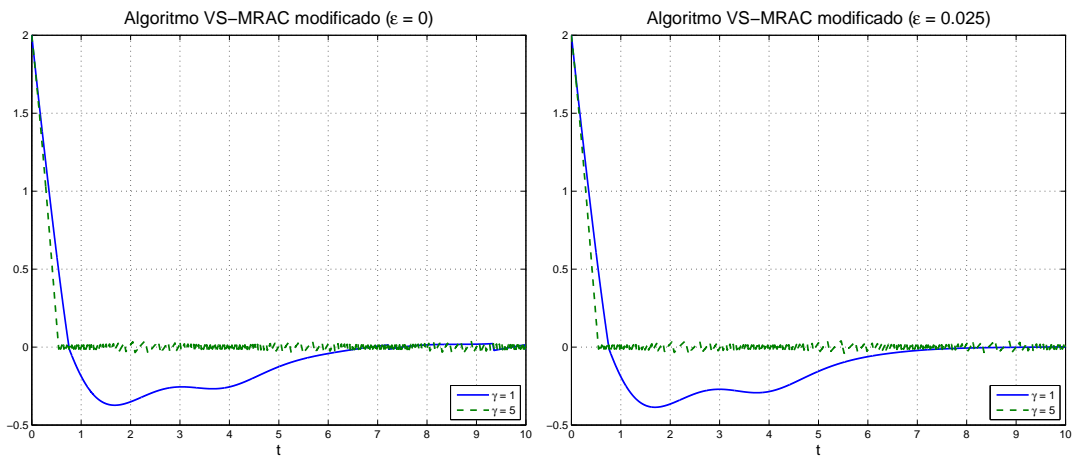
Figura 4.2: Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo *VS-MRAC*.

Tabela 4.3: Condições iniciais utilizadas no caso 3 do algoritmo *VS-MRAC* modificado.

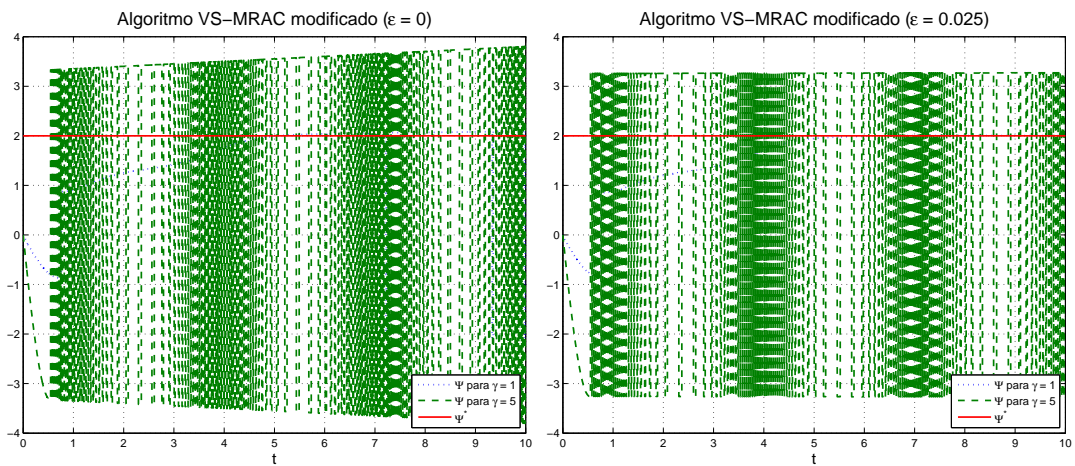
Planta	$y_p(0) = 2$
Modelo de referência	$y_m(0) = 0$
Parâmetro	$\Psi(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$
Estimativa de $\bar{\theta}$	$\rho(0) = 0$

Tabela 4.4: Dados para a simulação do caso 1 com o controlador *VS-MRAC* modificado.

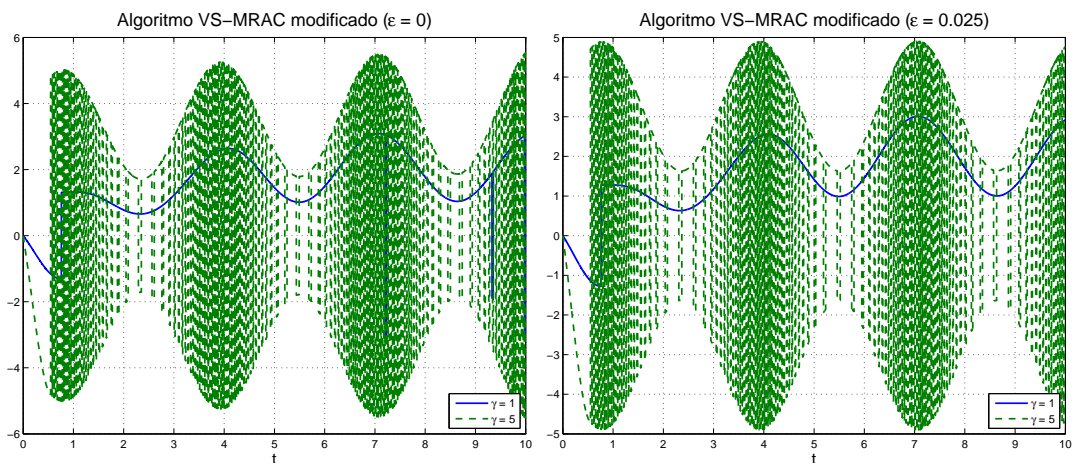
Ganho de adaptação	$\gamma = \{1, 5\}$
Sinal de referência	$r(t) = 1 + 0.5 \sin(2t)$
Relé	$\delta = 0.02$
Limitante ( <i>VS-MRAC</i> )	$\theta = [6 \ 4 \ 3 \ 3]$
Zona morta	$\epsilon = \{0, 0.025\}$



(a) Erro de rastreamento (sem zona morta). (b) Erro de rastreamento (com zona morta).

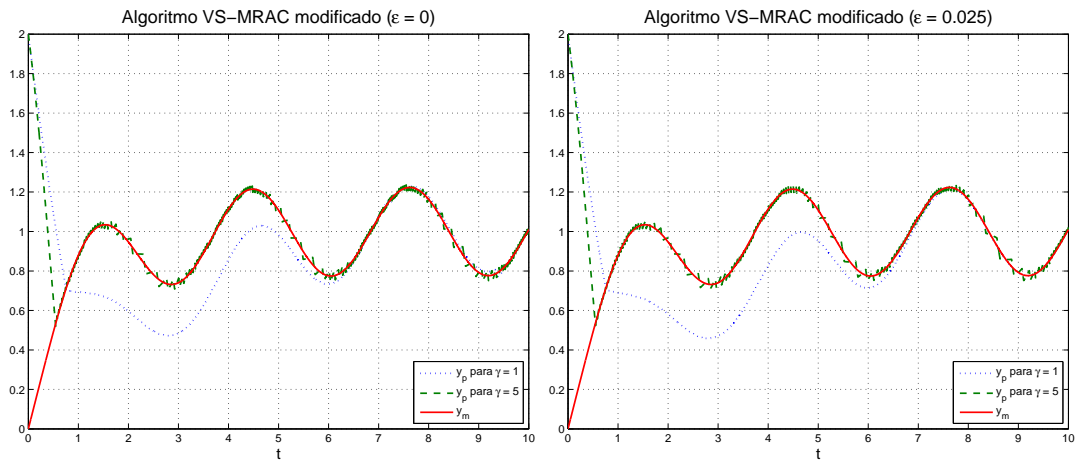


(c) Parâmetro  $\Psi$  (sem zona morta). (d) Parâmetro  $\Psi$  (com zona morta).



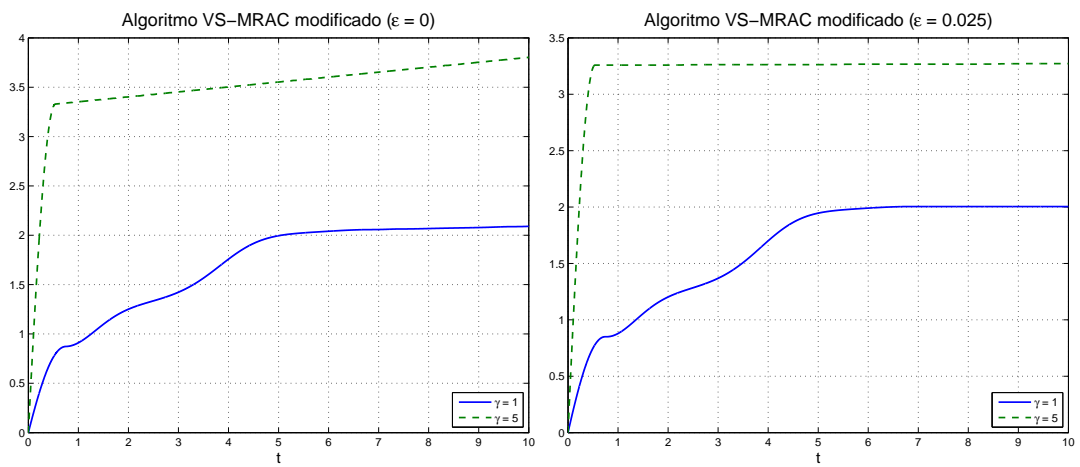
(e) Controle  $u$  (sem zona morta). (f) Controle  $u$  (com zona morta).

Figura 4.3: Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo *VS-MRAC* modificado sem e com zona morta.



(a) Modelo e planta (sem zona morta).

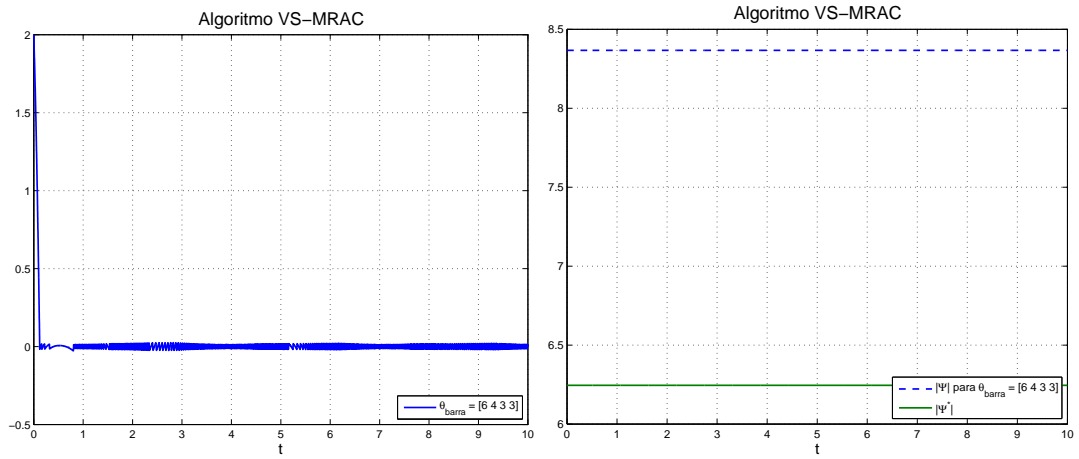
(b) Modelo e planta (com zona morta).



(c)  $\rho$  (sem zona morta).

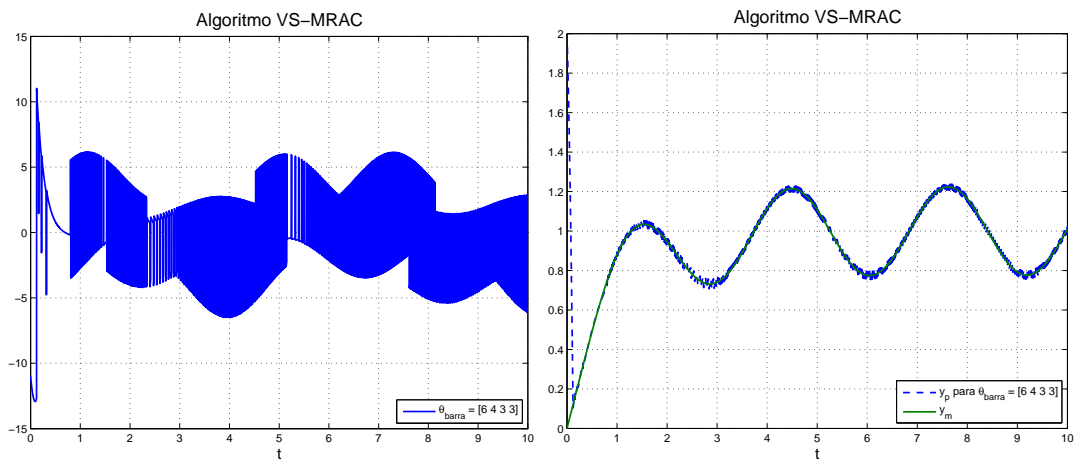
(d)  $\rho$  (com zona morta).

Figura 4.4: Resultados da simulação para o caso 1 com o algoritmo *VS-MRAC* modificado com e sem zona morta - (2).



(a) Erro de rastreamento.

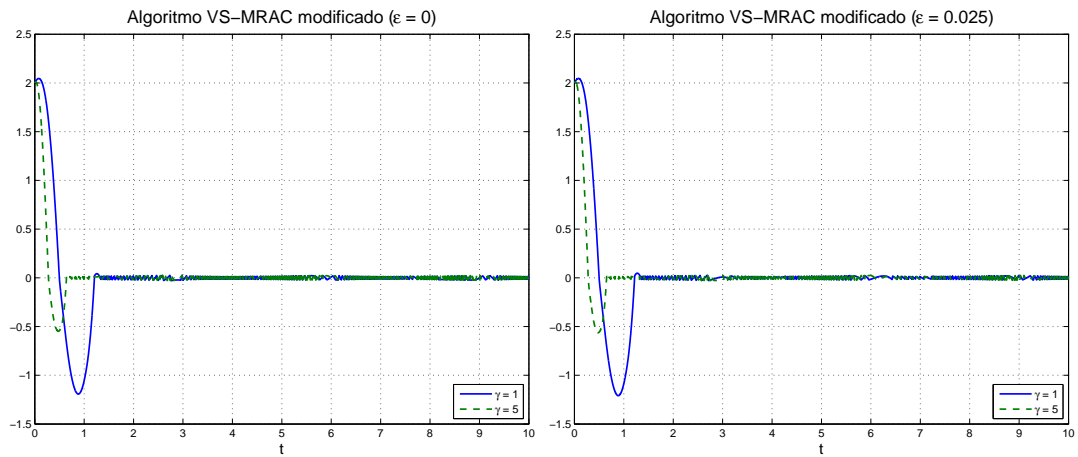
(b) Parâmetro  $\Psi$ .



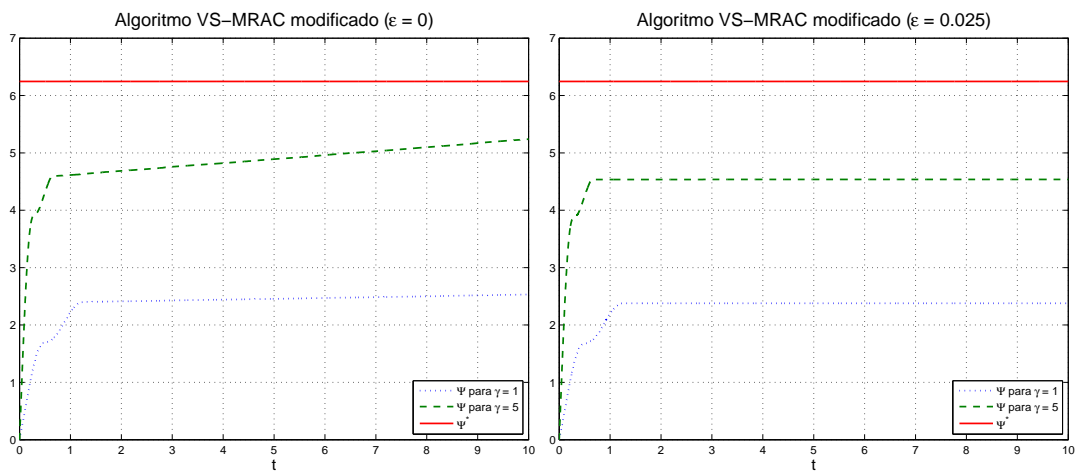
(c) Controle  $u$ .

(d) Modelo e planta.

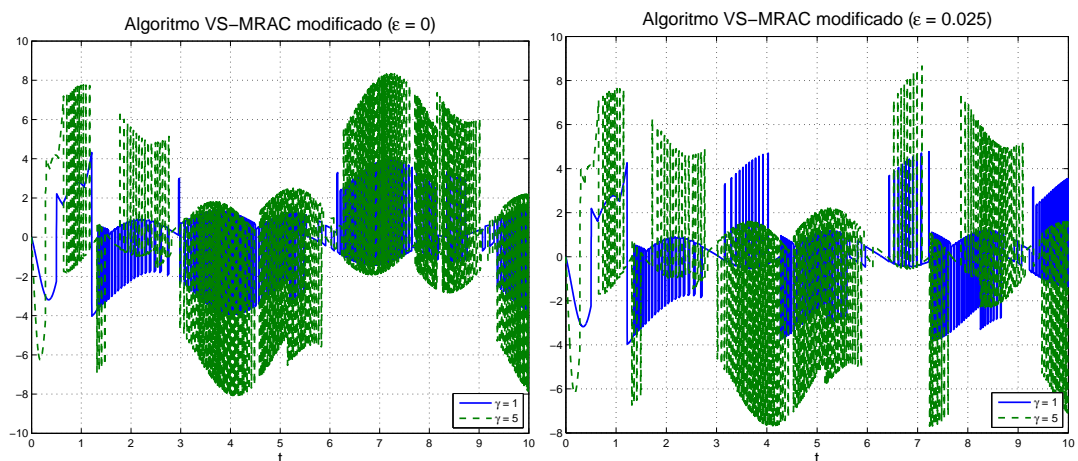
Figura 4.5: Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo *VS-MRAC*.



(a) Erro de rastreamento (sem zona morta). (b) Erro de rastreamento (com zona morta).



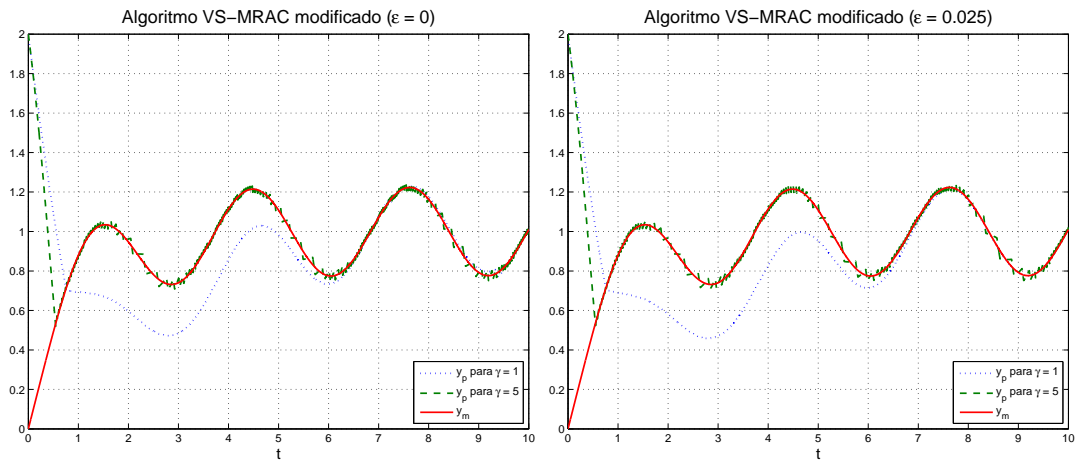
(c) Parâmetro  $\Psi$  (sem zona morta). (d) Parâmetro  $\Psi$  (com zona morta).



(e) Controle  $u$  (sem zona morta). (f) Controle  $u$  (com zona morta).

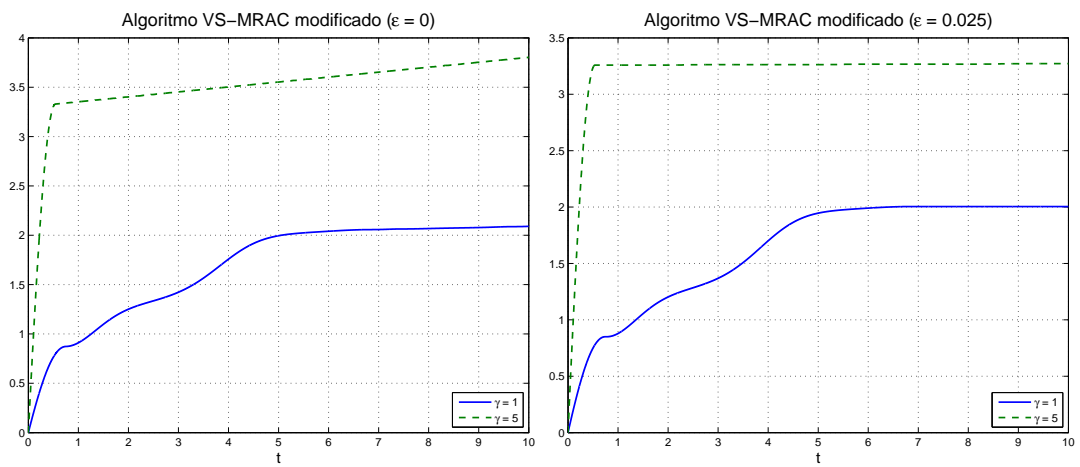
Figura 4.6: Resultados da Simulação para o caso 3 com o algoritmo *VS-MRAC* modificado sem e com zona morta.





(a) Modelo e planta (sem zona morta).

(b) Modelo e planta (com zona morta).



(c)  $\rho$  (sem zona morta).

(d)  $\rho$  (com zona morta).

Figura 4.7: Resultados da simulação para o caso 3 com o algoritmo *VS-MRAC* modificado com e sem zona morta - (2).

# Capítulo 5

## Conclusões

O objetivo proposto nesta dissertação foi realizar um estudo comparativo do comportamento transitório de alguns algoritmos de controle adaptativo disponíveis na literatura. Em particular, o interesse principal foi direcionado para o algoritmo de controle adaptativo  $\mathcal{L}_1$ . Esse interesse foi, em parte, motivado pelo aparente sucesso do algoritmo  $\mathcal{L}_1$ , o que pode ser avaliado pelo número de publicações relacionadas e um livro recente (Hovakimyan & Cao 2010). Para compor o estudo comparativo, foram escolhidos os algoritmos *VS-MRAC*, *B-MRAC* e  $\alpha$ -*MRAC*. Em comum, todos estes algoritmos asseguram algum tipo de melhoria no comportamento transitório quando confrontados com o algoritmo *MRAC* tradicional, o qual é reconhecidamente insatisfatório. Outros dois elementos comuns a estes algoritmos são o alto ganho de adaptação e, eventualmente, a utilização de um filtro.

A partir da avaliação do algoritmo  $\mathcal{L}_1$ , foi detectado que ao manter um compromisso de desacoplar transitório e robustez perde a garantia de rastreamento do modelo, não atingindo o principal objetivo de estratégias do tipo *MRAC*, o que se traduz em uma não conformidade com a formulação proposta. Na formulação o objetivo é rastrear a saída  $y_m$  de um modelo de referência de primeira ordem cuja entrada  $r$  é um sinal contínuo por partes, ou em outras palavras, fazer com que o erro de rastreamento  $e_0 = y - y_m$  seja pequeno. Porém, na realidade, o sistema não consegue rastrear o modelo e apenas o erro de predição pode ser minimizado com um alto ganho de adaptação, o qual traz grandes esforços de controle, semelhante a um chaveamento, como no caso de outros algoritmos baseados em Estrutura Variável.

Uma importante conclusão acerca do caso de realimentação de saída, consiste no fato de que sua aplicação fica limitada a uma classe específica de sistemas: aqueles que podem ser estabilizados por controlador *PI*, o que já traz restrições a sua utilização como por exemplo em relação a ordem dos sistemas, o que não acontece com os demais algoritmos mostrados no capítulo 2. Também não fica claro na formulação qual informação a priori é necessária sobre o sistema para garantir o projeto do filtro.

Outra observação a ser apontada é o fato de que, ainda que não mencionado em

sua formulação, este algoritmo também necessita de conhecimento prévio do sinal do ganho de alta frequência do sistema, assim como os demais algoritmos do tipo *MRAC*. Outra dificuldade é a necessidade de conhecimento de um filtro estabilizante, informação que também aparece no caso do algoritmo *VS-MRAC* sob a forma de um ganho estabilizante, porém para uma classe mais geral de sistemas.

Assim como esta dissertação, outros pesquisadores da área estão investigando as reais propriedades e dificuldades do Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ , a exemplo do artigo recente (Ioannou et al. 2012), amplamente divulgado entre a comunidade de controle. Assim como neste artigo, a avaliação feita neste trabalho aponta que este algoritmo não traz grandes vantagens sobre os demais no diz respeito a melhoria de transitório.

Em relação aos outros algoritmos analisados no capítulo 2, algumas características importantes foram destacadas em comparação com o algoritmo  $\mathcal{L}_1$ . O algoritmo *VS-MRAC* garante a estabilidade exponencial global do sistema em malha fechada, com rastreamento do modelo em tempo de adaptação finito, rejeição de perturbações evitando o *parameter drift*, porém uma de suas dificuldades é a necessidade de conhecimento de um limitante superior para o vetor de parâmetros, ou seja, um alto ganho capaz de estabilizar o sistema, uma semelhança com o  $\mathcal{L}_1$ . Esta característica gera um esforço de controle elevado além de poder causar o efeito indesejado de *chattering*, inerente de estruturas *VSC*.

Assim como o *VS-MRAC*, o algoritmo *B-MRAC* garante rejeição de perturbações, insensibilidade a variações paramétricas e robustez a dinâmicas não modeladas (Hsu & Costa 1994). Uma melhoria do *B-MRAC* em relação ao *VS-MRAC* é fato de o controle ser contínuo ou contínuo por partes, sem requerer frequência infinita e a suavização do efeito de *chattering*. Similarmente ao Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$ , a formulação utiliza projeção como forma de garantir que os parâmetros mantenham-se uniformemente limitados.

O algoritmo  $\alpha$ -*MRAC* garante estabilidade e as propriedades de rastreamento superiores ao algoritmo original *MRAC*, a melhoria de transitório não se restringe a condição inicial zero da planta e não necessita de qualquer riqueza de sinal. Outro ponto positivo é que, diferentemente dos algoritmos anteriores, a convergência é garantida sem necessidade de conhecimento de limitante superior, sem grande esforço de controle e sem *chattering*. Porém o fato de não haver restrições aos parâmetros pode acarretar em fenômeno de *drifting* em presença de perturbações, além de não haver garantia de insensibilidade a variação paramétrica ou robustez a dinâmica não modelada, diferentemente do caso do *VS-MRAC* e *B-MRAC*.

A figura 5.1 mostra um diagrama de blocos geral das estratégias abordadas. A seguir os blocos particulares de cada algoritmo são detalhado.

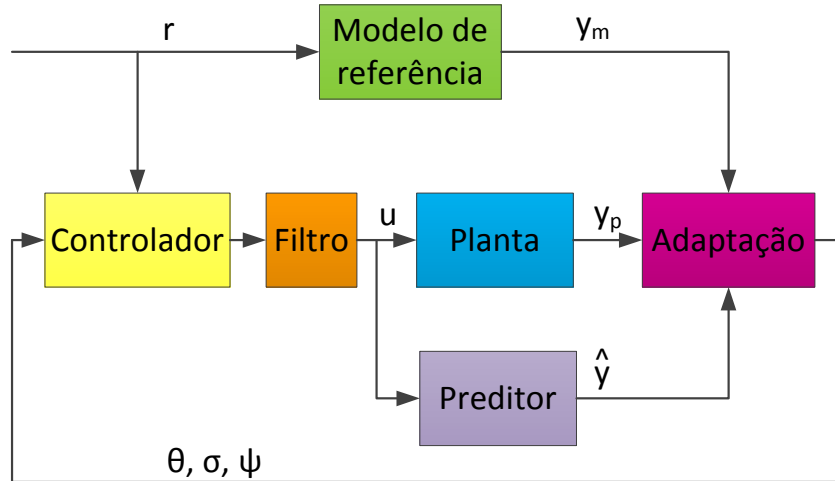


Figura 5.1: Diagrama geral dos algoritmos apresentados na dissertação.

- *MRAC*

Controlador:  $u = \theta^T \omega$ ;

Filtro:  $C(s) = 1$ ;

Adaptação:  $\dot{\theta} = -\gamma \text{sign}(k^*) \omega e_0$ ;

Preditor:  $\hat{y} = 0$ .

- Controle Adaptativo  $\mathcal{L}_1$

Controlador:  $u(s) = C(s) (-\hat{\sigma}(s) + r(s))$ ;

Filtro:  $C(s)$  estritamente próprio com  $C(0) = 1$ ;

Adaptação:  $\dot{\hat{\sigma}} = \gamma \text{Proj}(\hat{\sigma}, -m P \hat{y})$ ;

Preditor:  $\dot{\hat{y}} = -m \hat{y} + m(u + \hat{\sigma})$ ,  $\hat{y}(0) = 0$ .

- *VS-MRAC*

Controlador:  $u = -\bar{\theta}^T |\omega| \text{sign}(e_0)$ ;

Filtro:  $C(s) = 1$ ;

Adaptação:  $\Psi_i = -\bar{\theta}_i \text{sign}(\omega_i e_0)$ ;

Preditor:  $\hat{y} = 0$ .

- *B-MRAC*

Controlador:  $u = \theta^T \omega$ ;

Filtro:  $C(s) = 1$ ;

Adaptação:  $\dot{\theta} = -\sigma_{proj} \theta - \gamma e_0 \omega$ ;

Preditor:  $\hat{y} = 0$ .

- $\alpha$ -MRAC

Controlador:  $u = \theta^T \omega$ ;

Filtro:  $C(s) = 1$ ;

Adaptação:  $\dot{\theta} = -\gamma \text{sign}(k^*) [e_0 + \alpha f^*] \omega$ ,  $\hat{f} = \frac{\dot{e}_0 + a_m \hat{e}_0}{k_m}$

Sendo  $\hat{e}_0$  obtido através do filtro de avanço de fase:  $\tau \dot{\hat{e}}_0 = -\hat{e}_0 + e_0$ ;

Preditor:  $\hat{y} = 0$ .

- VS-MRAC modificado

Controlador:  $u = -\rho^T |\omega| \text{sign}(e_0)$ ;

Filtro:  $C(s) = 1$ ;

Adaptação:  $\dot{\Psi}_i = -\rho_i \text{sign}(\omega_i e_0)$ ,  $\dot{\rho}_i = \gamma |\omega_i e_0|$ ;

Preditor:  $\hat{y} = 0$ .

A tabela 5.1 resume as características dos algoritmos analisados nesta dissertação de forma comparativa.

Portanto o algoritmo que, aparentemente, apresenta mais vantagens de acordo com o que foi estudado nesta dissertação, é o  $B$ -MRAC já que garante rastreamento do modelo, reduz efeitos de *chattering*, é robusto a incertezas paramétricas, impõe restrição ao crescimento dos parâmetros evitando *drifting*, porém requer o conhecimento de um limitante para o vetor de parâmetros, problema para o qual o novo algoritmo proposto no capítulo 4 mostra uma possível solução.

Como contribuição desta dissertação, foi apresentada a modificação do algoritmo VS-MRAC citada anteriormente com o objetivo de relaxar o conhecimento prévio de um limitante superior para os parâmetros desconhecidos da planta. O algoritmo proposto foi analisado garantindo ao menos estabilidade global uniforme e bom transitório conforme visto através das simulações realizadas. Porém este resultado traz o inconveniente de não garantir a propriedade de convergência em tempo finito do algoritmo VS-MRAC.

Como próximos passos pode-se apontar:

- a avaliação do algoritmo VS-MRAC modificado em presença de ruído na planta e a análise de robustez;
- reformulação do  $B$ -MRAC com o objetivo de resolver a questão do conhecimento de  $\bar{\theta}$ ;

Tabela 5.1: Tabela comparativa (Caso entrada / saída)

Característica \ Algoritmo	<i>MRAC</i>	$\mathcal{L}_1$	<i>VS-MRAC</i>	<i>B-MRAC</i>	$\alpha$ - <i>MRAC</i>	<i>VS-MRAC</i> mod
Alto ganho		X	X	X		X
Filtro		X			X	
Projeção paramétrica		X		X		
Erro de rastreamento zero	X		X	X	X	X
Grande esforço de controle		X	X	X		X
Convergência em tempo finito			X			
<i>Chattering</i>			X			
<i>Parameter drift</i>	X				X	
Conhecimento de limitante		X	X	X		
Restrição de aplicação		X				

# Referências Bibliográficas

- Ambrosino, G., Celentano, G. & Garofalo, F. (1984), ‘Variable structure mrac systems’, *International Journal of Control* **39**(6), pp. 1339–1349.
- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (2008), *Adaptive Control*, 2nd edn, Dover.
- Bartolini, G., Ferrara, A. & Usai, E. (1998), ‘Chattering avoidance by second-order sliding mode control’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**(2), pp. 241–246.
- Boyd, S. & Sastry, S. S. (1986), ‘Necessary and sufficient conditions for parameter convergence in adaptive control’, *Automatica* **22**(6), pp. 629–639.
- Boyd, S. & Vandenberghe, L. (2004), *Convex Optimization*, Convex Optimization.
- Cao, C. & Hovakimyan, N. (2006a), ‘Design and analysis of a novel  $\mathcal{L}_1$  adaptive control architecture with guaranteed transient performance’, Published in <http://front.math.ucdavis.edu/math.OC>.
- Cao, C. & Hovakimyan, N. (2006b), ‘Design and analysis of a novel  $\mathcal{L}_1$  adaptive controller, part I: Control signal and asymptotic stability’, *American Control Conference*, pp. 3397–3402.
- Cao, C. & Hovakimyan, N. (2006c), ‘Design and analysis of a novel  $\mathcal{L}_1$  adaptive controller, part II: Guaranteed transient performance’, *American Control Conference*, pp. 3403–3408.
- Cao, C. & Hovakimyan, N. (2008), ‘ $\mathcal{L}_1$  adaptive output feedback controller for systems of unknown dimension’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**(3), pp. 815–821.
- Chu, W.-H. & Tung, P.-C. (2005), ‘Development of an automatic arc welding system using a sliding mode control’, *International Journal of Machine Tools & Manufacture* **45**, pp. 933–939.
- Costa, R. R. (1999), ‘Improving transient behavior of model-reference adaptive control’, *American Control Conference*, pp. 576 – 580.

- Costa, R. R. & Hsu, L. (1990), ‘Unmodeled dynamics in adaptive control revisited’, *Joint Conference on New Trends in Systems Theory* **7**, pp. 210–217.
- Cunha, J. P. V. S., Costa, R. R. & Hsu, L. (2008), ‘Design of first-order approximation filters for sliding-mode control of uncertain systems’, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **55**(11), pp. 4037–4046.
- Datta, A. & Ioannou, P. A. (1994), ‘Performance analysis and improvement in model reference adaptive control’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(12), pp. 2370–2387.
- Dinau, P. C. M. & Costa, R. R. (2012), ‘Variable structure mrac without prior knowledge of an upper bound on the plant uncertainty’, *XIX Congresso Brasileiro de Automática*.
- Edwards, C. & Spurgeon, S. K. (1998), *Sliding Mode Control: Theory And Applications*, Taylor & Francis.
- Emelyanov, S. V. (1987), *Binary Automatic Control Systems*, MIR Publishers, Moscow.
- Fei, J. (2007), Adaptive sliding mode control with bound estimation for MEMS angular rate sensor, *in* ‘Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation’, pp. 1565–1569.
- Francis, B. A. & Wonham, W. M. (1976), ‘The internal model principle of control theory’, *Automatica* **12**, pp. 457–465.
- Hill, J. H. & Ydstie, B. E. (2004), ‘Adaptive control with selective memory’, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* **18**, pp. 571–587.
- Hovakimyan, N. (2012), ‘ $\mathcal{L}_1$  adaptive control’. Published in <http://naira.mechse.illinois.edu/2012/05/03/clarifications-on-l1-adaptive-control/>.
- Hovakimyan, N. & Cao, C. (2010),  *$\mathcal{L}_1$  Adaptive Control Theory - Guaranteed Robustness with Fast Adaptation*, 1st edn, Siam.
- Hsu, L. (1990), ‘Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements: general case’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(11), pp. 1238–1243.



- Hsu, L. & Costa, R. R. (1987), ‘Adaptive control with discontinuous  $\sigma$ -factor and saturation for improved robustness’, *International Journal of Control* **45**(3), pp. 843–859.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1989), ‘Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements - part 1’, *International Journal of Control* **49**(2), pp. 399–416.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1990), A binary control approach to design globally exponentially stable systems, *in* ‘Proceedings of the 7th International Conference on Systems Engineering’, Las Vegas.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1991), B-MRAC: A new model reference adaptive controller based on binary control theory, *in* ‘Proceedings of the First IFAC Symposium on Design Methods of Control Systems’, Zürich, pp. 384–389.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1994), ‘B-MRAC: Global exponential stability with a new model reference adaptive controller based on binary control theory’, *Control-Theory and Advanced Technology (C-TAT)* **10**(4), pp. 649–668. Special issue on Variable Structure Control.
- Ioannou, P. A. & Fidan, B. (2006), *Adaptive Control Tutorial*, Siam.
- Ioannou, P. A. & Kokotovic, P. V. (1984), ‘Robust redesign of adaptive control’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-29**(3), pp. 202–211.
- Ioannou, P. A. & Sun, K. (1996), *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall.
- Ioannou, P. A. & Tao, G. (1987), ‘Frequency domain conditions for strictly positive real functions’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-32**(1), pp. 53–54.
- Ioannou, P. A. & Tao, G. (1989), ‘Dominant richness and improvement of performance of robust adaptive control’, *Automatica* **25**(2), pp. 287–291.
- Ioannou, P. A., Narendra, K. S., Annaswamy, A. M., S. Jafari, L. R., Ortega, R. & Boskovic, J. (2012), ‘ $l_1$ -adaptive control: Stability, robustness, and misperceptions’, *IEEE Transactions on Automatic Control*. Submitted.
- Kailath, T. (1980), *Linear Systems*, Prentice-Hall.
- Khalil, H. K. (1992), *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company.
- Khalil, H. K. (2002), *Nonlinear Systems*, 3rd edn, Macmillan Publishing Company.

- Kharisov, E., Kim, K. K. K., Wang, X. & Hovakimyan, N. (2011), Limiting behaviour of  $\mathcal{L}_1$  adaptive controllers, *in* ‘AIAA Guidance, Navigation and Control Conference’, Portland, Oregon.
- Kokotović, P., Khalil, H. K. & O’Reilly, J. (1999), *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, Siam.
- Kokotović, P. V., Khalil, H. K. & O’Reilly, J. (1986), *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, Academic Press.
- Krstić, M., Kanellakopoulos, I. & Kokotović, P. (1995), *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley & Sons.
- Krstić, M., Kanellakopoulos, I. & Kokotović, P. V. (1993), ‘Transient-performance improvement with a new class of adaptive controllers’, *Systems and Control Letters* **00**(21), pp. 451–461.
- Ksakalis, K. S. (1997), ‘Bursting scenaria in adaptive algorithms: Performance limitations and some remedies’, *Kybernetika* **33**(1), pp. 17–40.
- Liu, H. & Gong, Z. (2008), Upper bound adaptive learning of neural network for the sliding mode control of underwater robot, *in* ‘International Conference on Advanced Computer Theory and Engineering’, pp. 276–280.
- Mareels, I. & Polderman, J. W. (1996), *Adaptive Systems: an Introduction*, Birkhauser.
- Naik, S. M., Kumar, P. R. & Ydstie, B. E. (1992), ‘Robust continuous-time adaptive control by parameter projection’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(2), pp. 182–197.
- Narendra, K. & Annaswamy, A. (2005), *Stable Adaptive Systems*, Dover.
- Narendra, K. S. (1994), Parameter adaptive control - the end ... or the beginning?, *in* ‘Proc. IEEE Conference on Decision and Control’, Lake Buena Vista.
- Narendra, K. S. & Balakrishnan, J. (1994), ‘Improving transient response of adaptive control systems using multiple models and switching’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(9), pp. 1861–1866.
- Narendra, K. S. & Valavani, L. S. (1978), ‘Stable adaptive controller design - direct control’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC. 23**, pp. 570–583.
- Neila, M. B. R. & Tarak, D. (2011), ‘Adaptive terminal sliding mode control for rigid robotic manipulators’, *International Journal of Automation and Computing* **8**(2), pp. 215–220.

- Nunes, E. V. L. (2004), Controle por Modos Deslizantes de Ordem Superior com Estabilidade Global, Master's thesis, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Pedersen, T. (2009), L1 adaptive control in managed pressure drilling, Master's thesis, Norwegian University of Science and Technology.
- Peixoto, A. J. (2002), Controle suave a estrutura variável e filtro de kalman para atenuar ruído de medição, Master's thesis, COPPE/UFRJ.
- Pomet, J.-B. & Praly, L. (1992), 'Adaptive nonlinear regulation: Estimation from the lyapunov equation', *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(6), pp. 729–740.
- Rockafellar, R. T. (1997), *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, Nj.
- Sabanovic, A., Fridman, L. & Spurgeon, S. K. (2004), *Variable Structure Systems: From Principles to Implementation*, IEEE Control Engineering.
- Sastry, S. S. & Bodson, M. (1989), *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice-Hall.
- Stepanyan, V. & Krishnakumar, K. (2010), 'Mrac revisited: Guaranteed performance with reference model modification', *American Control Conference* pp. pp. 93–98.
- Su, C.-Y. & Leung, T.-P. (1993), 'A sliding mode controller with bound estimation for robot manipulators', *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **9**(2), pp. 208–214.
- Sun, J. (1993), 'A modified model reference adaptive control scheme for improvement transient performance', *IEEE Transactions on Automatic Control* **38**(8), pp. 1255–1259.
- Tao, G. (2003), *Adaptive Control Design and Analysis*, Adaptive and Learning Systems for Signal Processing, Communications, and Control, 1 edn, Wiley, New Jersey.
- Utkin, V. I. (1978), *Sliding Modes and their Application in Variable Structure Systems*, Vol. 1, Mir Publishers, Moscou.
- Wai, R.-J. (2000), 'Adaptive sliding-mode control for induction servomotor drive', *IEEE Proc. Electr. Power Appl.* **147**(6), pp. 553–562.

- Wheeler, G., Su, C.-Y. & Stepanenko, Y. (1998), ‘A sliding mode controller with improved adaptation laws for the upper bounds on the norm of uncertainties’, *Automatica* **34**(12), pp. 1657–1661.
- Yan, L., Hsu, L. & Xiuxia, S. (2006), ‘A variable structure MRAC with expected transient and steady-state performance’, *Automatica* **42**(12), pp. 805–813.
- Yanque, I., Nunes, E. V. L., Costa, R. R. & Hsu, L. (2012), ‘Binary mimo mrac using a passifying multiplier - a smooth transition to sliding mode control’, *American Control Conference* pp. pp. 1925–1930.
- Yeh, F.-K., Chen, C.-M. & Huang, J.-J. (2010), Fuzzy sliding-mode control for a mini-UAV, in ‘Proceedings of SICE Annual Conference 2010’, pp. 3317–3323.
- Yoo, D. S. & Chung, M. J. (1992), ‘A variable structure control with simple adaptation laws for upper bounds on the norm of the uncertainties’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(6), pp. 860–865.
- Yu, W. (2006), ‘Stability analysis of visual servoing with sliding-mode estimation and neural compensation’, *International Journal of Control, Automation, and Systems* **4**(5), pp. 545–558.
- Zhang, Y., Ioannou, P. A. & Chien, C.-C. (1996), ‘Parameter convergence of a new class of adaptive controllers’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(10), pp. 1489–1493.

# Apêndice A

## Base matemática

Neste apêndice serão apresentados os principais teoremas, lemas e definições úteis para as análises de estabilidade realizadas neste trabalho.

### A.1 Normas de vetores

A definição de normas de vetores em  $\mathbf{R}^n$  encontra-se em (Tao 2003):

A norma 1 de um vetor constante  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  é definida por:

$$\|x\|_1 \triangleq |x_1| + \dots + |x_n|, \quad (\text{A.1})$$

a norma 2 (Euclidiana) de um vetor  $x$  é definida por:

$$\|x\|_2 \triangleq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad (\text{A.2})$$

e a norma  $\infty$  é definida por:

$$\|x\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (\text{A.3})$$

### A.2 Função Estritamente Positiva Real

**Teorema 4** (Ioannou & Tao 1987): *Uma função racional  $H(s)$  é Estritamente Positiva Real (SPR – Strictly Positive Real) se, e somente se,*

1.  $H(s)$  é analítica em  $\text{Re}[s] \geq 0$ ,
2.  $\text{Re}[H(j\omega)] > 0, \forall \omega \in (-\infty, \infty)$ , e
3. (i)  $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \omega^2 \text{Re}[H(j\omega)] > 0$ , quando  $n^* = 1$ , ou  
(ii)  $\lim_{\omega^2 \rightarrow \infty} \text{Re}[H(j\omega)] > 0$ ,  $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{H(j\omega)}{j\omega} > 0$ , quando  $n^* = -1$ ,

em que  $n^*$  é o grau relativo entre o denominador e o numerador da função de transferência.

### A.3 Norma $\mathcal{L}_1$ de funções de transferência *SISO*

A norma  $\mathcal{L}_1$  de um sistema *SISO* próprio e estável  $H(s)$  é definido por (Cao & Hovakimyan 2006b, Ioannou & Sun 1996):

$$\|H(s)\|_1 = \int_0^\infty |h(t)| dt, \quad (\text{A.4})$$

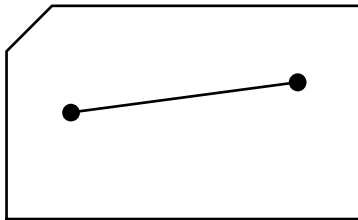
em que  $h(t)$  é a resposta ao impulso de  $H(s)$ , computada via transformada inversa de Laplace, isto é,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} H(s)e^{st} ds, t \geq 0. \quad (\text{A.5})$$

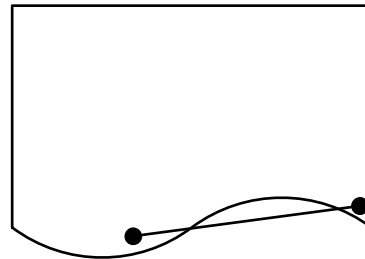
### A.4 Conjuntos convexos e projeção

**Definição 1 (Conjunto convexo)** (Boyd & Vandenberghe 2004):

Um conjunto  $\Omega$  é convexo se um segmento de linha que liga dois pontos contidos em  $\Omega$  permanece, ao longo de toda sua extensão, em  $\Omega$ , ou seja, se para quaisquer  $x_1$  e  $x_2 \in \Omega$  e qualquer  $\lambda \in [0, 1]$ , tem-se que  $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \Omega$ .



(a) Conjunto convexo.



(b) Conjunto não convexo.

Figura A.1: Exemplos de conjunto convexo e não convexo.

**Definição 2 (Função convexa)** (Boyd & Vandenberghe 2004):

Uma função  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  é convexa se o domínio de  $f$  for um conjunto convexo e se para todo  $x_1, x_2 \in$  domínio de  $f$  e  $\lambda$  com  $0 \leq \lambda \leq 1$  tem-se que:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2). \quad (\text{A.6})$$

Geometricamente esta definição significa que o segmento de linha que liga  $(x_1, f(x_1))$  e  $(x_2, f(x_2))$  permanece acima do gráfico de  $f(x)$  conforme visto na figura A.2.

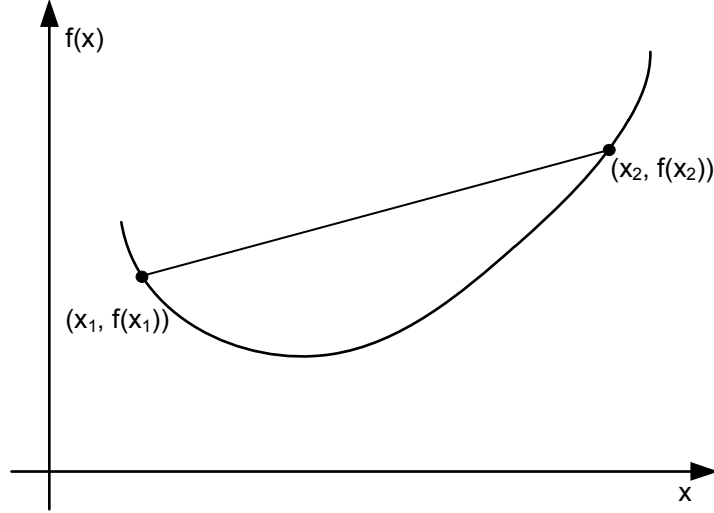


Figura A.2: Exemplo de função convexa.

**Lema 4** (Hovakimyan & Cao 2010): *Seja  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  uma função convexa, então para uma constante arbitrária  $\delta$ , o subconjunto  $\Omega_\delta \triangleq \{\theta \in \mathbf{R}^n | f(\theta) \leq \delta\}$  é convexo.*

**Lema 5** : *Considere uma função  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  convexa continuamente diferenciável. Escolha uma constante  $\delta$  e considere o conjunto convexo  $\Omega_\delta \triangleq \{\theta \in \mathbf{R}^n | f(\theta) \leq \delta\}$ . Sejam  $\theta, \theta^* \in \Omega_\delta$  e  $f(\theta^*) < \delta$  e  $f(\theta) = \delta$  (ou seja,  $\theta^*$  não se encontra na fronteira de  $\Omega_\delta$ , enquanto que  $\theta$  está na fronteira de  $\Omega_\delta$ ). Então a seguinte desigualdade é válida:*

$$(\theta^* - \theta)^T \nabla f(\theta) \leq 0, \quad (\text{A.7})$$

em que  $\nabla f(\theta)$  é o vetor gradiente de  $f(\cdot)$  avaliado em  $\theta$ .

A prova deste lema segue do teorema (25.1) em (Rockafellar 1997).

**Definição 3 (Projeção)** (Hovakimyan & Cao 2010, Pomet & Praly 1992): *Considere um conjunto convexo compacto com fronteira dada por:*

$$\Omega_c \triangleq \{\theta \in \mathbf{R}^n | f(\theta) \leq c\}, \quad 0 \leq c \leq 1, \quad (\text{A.8})$$

em que  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  é a seguinte função suave convexa:

$$f(\theta) \triangleq \frac{(\epsilon_\theta + 1) \theta^T \theta - \theta_{max}^2}{\epsilon_\theta \theta_{max}^2}, \quad (\text{A.9})$$

com  $\theta_{max}$  sendo o limite imposto à norma do vetor  $\theta$ , e  $\epsilon_\theta > 0$  é uma tolerância para a projeção. O operador projeção é então definido como:

$$\text{Proj}(\theta, y) \triangleq \begin{cases} y, & \text{se } f(\theta) < 0, \\ y, & \text{se } f(\theta) \geq 0 \text{ e } \nabla f^T y \leq 0, \\ y - \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \left\langle \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}, y \right\rangle f(\theta), & \text{se } f(\theta) \geq 0 \text{ e } \nabla f^T y > 0. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Nesta definição,  $y$  representa uma função de  $\theta$  através da qual se quer limitar o crescimento de  $\theta$  ou seja manter  $|\theta| \leq |\theta|_{max}$ , como por exemplo a derivada de  $\theta$ .

Obs.

$$\begin{aligned} f(\theta) = 0 &\Rightarrow (\epsilon_\theta + 1)\|\theta\|^2 - \theta_{max}^2 = 0 \Rightarrow \|\theta\|^2 = \frac{\theta_{max}^2}{(\epsilon_\theta + 1)} \\ f(\theta) = 1 &\Rightarrow (\epsilon_\theta + 1)\|\theta\|^2 - \theta_{max}^2 = \epsilon_\theta \theta_{max}^2 \Rightarrow \|\theta\|^2 = \theta_{max}^2 \end{aligned}$$

A figura A.3 mostra a descrição geométrica dos três casos citados em (A.10).

O operador projeção não altera  $y$  se  $\theta$  pertence a  $\Omega_0 \triangleq \{\theta \in \mathbf{R}^n | f(\theta) \leq 0\}$ . No conjunto  $\{\theta \in \mathbf{R}^n | 0 \leq f(\theta) \leq 1\}$ , se  $\nabla f^T y > 0$ , o operador  $\text{Proj}(\theta, y)$  subtrai um vetor normal à fronteira  $\bar{\Omega}_{f(\theta)} = \{\bar{\theta} \in \mathbf{R}^n | f(\bar{\theta}) = f(\theta)\}$  e assim obtém-se uma transformação suave do vetor original  $y$  em um vetor em direção ao interior (caso  $0 \leq c < 1$ ) ou tangente à fronteira (caso  $c = 1$ ) (Hovakimyan & Cao 2010, Pomet & Praly 1992).

**Propriedade 1 :**

Dados os vetores  $y \in \mathbf{R}^n$ ,  $\theta^* \in \Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \mathbf{R}^n$ , e  $\theta \in \Omega_1$ , vale a seguinte inequação

$$(\theta - \theta^*)^T (\text{Proj}(\theta, y) - y) \leq 0. \quad (\text{A.11})$$

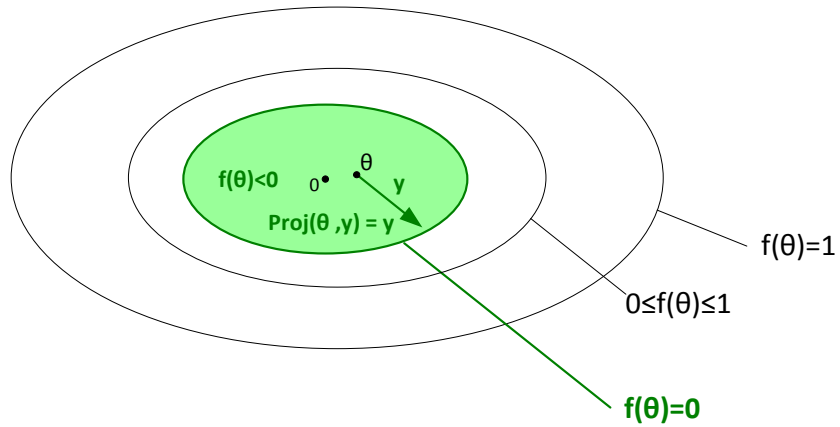
## A.5 Teoremas e lemas de estabilidade

Considere o sistema variante no tempo

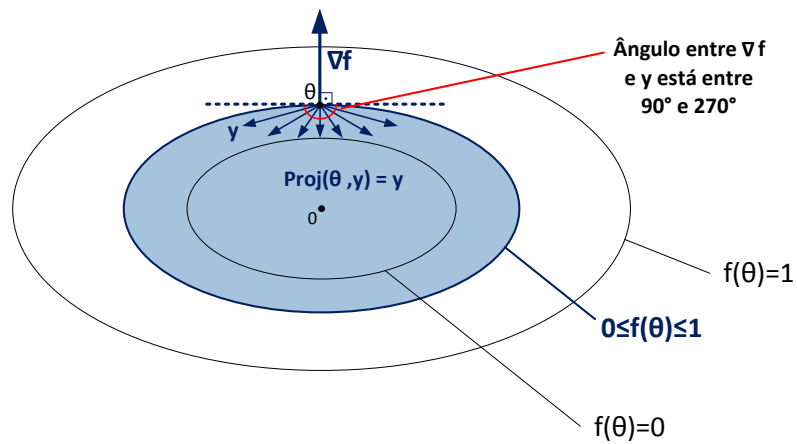
$$\dot{x} = f(x, t) \quad (\text{A.12})$$

em que  $x \in \mathbf{R}^n$  e  $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^n$  é contínua por partes em  $t$ . Uma ferramenta muito importante para a análise de convergência é o teorema de LaSalle e Yoshizawa

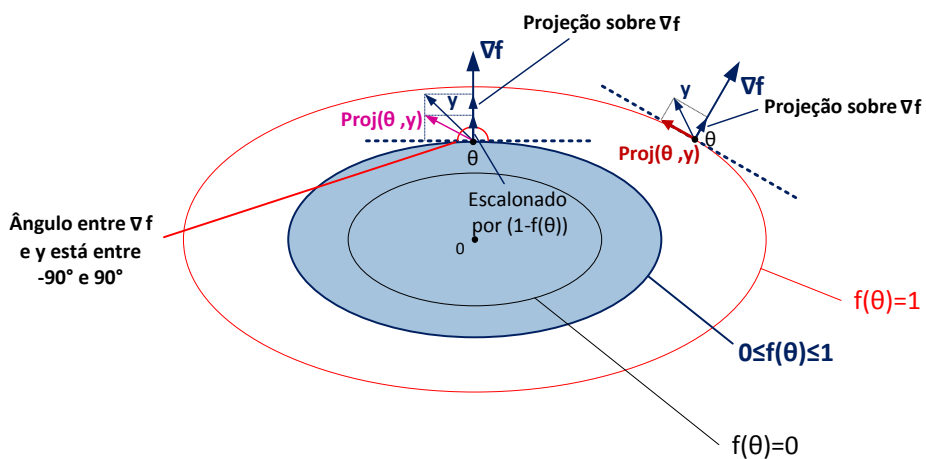




(a) Caso  $f(\theta) < 0$ .



(b) Caso  $f(\theta) \geq 0$  e  $\nabla f^T y \leq 0$ .



(c) Caso  $f(\theta) \geq 0$  e  $\nabla f^T y > 0$ .

Figura A.3: Descrição geométrica da projeção.

(cf. (Krstić et al. 1995))

**Teorema 5 (LaSalle-Yoshizawa):** *Sendo  $x = 0$  um ponto de equilíbrio de (A.12) e supondo que  $f$  é localmente Lipschitz em  $x$  e uniformemente em  $t$ . Sendo  $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$  uma função continuamente diferenciável, positiva definida e radialmente ilimitada tal que*

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, t) \leq -W(x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}^n \quad (\text{A.13})$$

*em que  $W$  é uma função contínua. Então, todas as soluções de (A.12) são globalmente uniformemente limitadas e satisfazem*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0 \quad (\text{A.14})$$

*Adicionalmente, se  $W(x)$  é positiva definida, então o ponto de equilíbrio  $x = 0$  é globalmente uniformemente assintoticamente estável.*

Uma versão mais geral deste teorema e sua prova encontram-se em (Krstić et al. 1995). O teorema de LaSalle-Yoshizawa é aplicável a sistemas variantes no tempo e permite estabelecer a convergência do conjunto  $E = \{x | W(x) = 0\}$ .

O seguinte lema é fundamental para a análise de estabilidade (Ioannou & Fidan 2006):

**Lema 6 (Meyer-Kalman-Yakubovich - MKY):** *Dados uma matriz estável  $A$ , vetores  $b$ ,  $c$ , e um escalar  $d > 0$ , se*

$$G(s) = d + c(sI - A)^{-1}b \quad (\text{A.15})$$

*é SPR, então para qualquer  $L_{MKY} = L_{MKY}^T > 0$  existe um escalar  $\nu > 0$ , um vetor  $q$ , e  $P = P^T > 0$  tal que*

$$A^T P + P A = -q q^T - \nu L_{MKY} \quad (\text{A.16})$$

$$P B - C = \pm \sqrt{2q}. \quad (\text{A.17})$$

**Teorema 6 (Teorema do pequeno ganho  $\mathcal{L}_1$  —  $\mathcal{L}_1$  *Small gain Theorem*)** *(Cao & Hovakimyan 2006a):*

*O sistema interconectado da figura A.4 é estável se*

$$\|E(s)\|_1 \|D(s)\|_{\mathcal{L}_1} < 1. \quad (\text{A.18})$$

*A prova deste teorema segue do teorema do pequeno ganho em (Khalil 2002) escrito para a norma  $\mathcal{L}_1$ .*

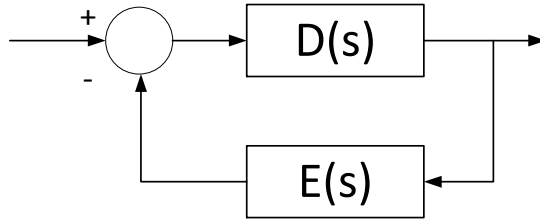


Figura A.4: Sistema interconectado.

**Lema 7 (Lema de Barbalat)** (*Khalil 2002*):

Seja  $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  uma função uniformemente contínua em  $[0, \infty]$ . Suponha que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau$  existe e é finito. Então,

$$\phi(t) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty. \quad (\text{A.19})$$