



POSICIONAMENTO DE EIXO COM MOTOR MANCAL MAGNÉTICO  
UTILIZANDO CONTROLE  $\mathcal{H}_\infty$

Alex Ribeiro Franco

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Afonso Celso Del Nero Gomes

Rio de Janeiro  
Setembro de 2013

POSICIONAMENTO DE EIXO COM MOTOR MANCAL MAGNÉTICO  
UTILIZANDO CONTROLE  $\mathcal{H}_\infty$

Alex Ribeiro Franco

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

---

Prof. Afonso Celso Del Nero Gomes, D.Sc.

---

Prof. Richard Magdalena Stephan, Dr.-Ing.

---

Prof. Geraldo Magela Pinheiro Gomes, Dr.ENSAE

---

Prof. Roberto Moura Sales, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
SETEMBRO DE 2013

Ribeiro Franco, Alex

Posicionamento de eixo com motor mancal magnético utilizando controle  $\mathcal{H}_\infty$ /Alex Ribeiro Franco. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XVII, 138 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Afonso Celso Del Nero Gomes

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 109 – 112.

1. Motor mancal magnético. 2. Controle robusto.
3. Controle  $\mathcal{H}_\infty$ . I. Celso Del Nero Gomes, Afonso. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*À Rosana, minha esposa, e ao  
meu filho, Rafael.*

*“If you do not know what you are  
up against, plan for the worst  
and optimize.”  
HAYKIN(1999)*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, que me forneceu todo o apoio que necessitei durante a elaboração deste trabalho. Agradeço à minha mãe, Sueni, que deu o apoio fundamental para a concretização deste sonho. Agradeço ao professor Afonso Celso, por ter me aceito como orientando, que com sua motivação e interesse na pesquisa dos motores mancais, me estimulou a ingressar neste campo. À Marinha do Brasil, por ter me concedido o privilégio de prosseguir com minha formação acadêmica, fornecendo os conhecimentos que deverei utilizar no meu aprimoramento profissional.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

POSICIONAMENTO DE EIXO COM MOTOR MANCAL MAGNÉTICO  
UTILIZANDO CONTROLE  $\mathcal{H}_\infty$

Alex Ribeiro Franco

Setembro/2013

Orientador: Afonso Celso Del Nero Gomes

Programa: Engenharia Elétrica

Este trabalho tem como objetivo aplicar a técnica de controle  $\mathcal{H}_\infty$  para o posicionamento do eixo de um motor mancal magnético. Esta técnica busca obter estabilidade e desempenho robusto em malha fechada mesmo na presença de incertezas paramétricas que ocorrem devido a variabilidade do modelo nominal da planta. É utilizado o teste do valor singular estruturado  $\mu$  para verificar o atendimento dos requisitos de estabilidade e desempenho robusto.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

POSITIONING A MAGNETIC BEARING MOTOR AXIS USING  $\mathcal{H}_\infty$   
CONTROL

Alex Ribeiro Franco

September/2013

Advisor: Afonso Celso Del Nero Gomes

Department: Electrical Engineering

This work aims apply the techniques of control  $\mathcal{H}_\infty$  for positioning the axis of a magnetic bearing motor. The objective of this technic is acquire nominal and robust stability and performance even in the presence of parametrics uncertainties that occur caused by the variability of the plant's model. The Structure Singular Values,  $\mu$ , are used to verify the fulfillment of the requirements.



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação . . . . .	1
1.2 O Problema do Controle . . . . .	3
1.3 Histórico e revisão bibliográfica . . . . .	4
1.4 Estrutura do trabalho . . . . .	6
<b>2 Princípios de funcionamento do motor mancal magnético</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	7
2.2 Levitação magnética . . . . .	7
2.3 Força eletromagnética . . . . .	8
2.4 Dispositivo eletromagnético de posicionamento no plano horizontal . .	10
2.5 Motor de indução . . . . .	13
2.5.1 Circuito elétrico equivalente ao motor de indução . . . . .	15
2.6 Motor mancal magnético . . . . .	17
2.7 Modelo mecânico do motor mancal magnético . . . . .	21
2.8 Conclusão parcial . . . . .	26
<b>3 Regulador <math>\mathcal{H}_\infty</math></b>	<b>27</b>
3.1 Espaço de funções estáveis . . . . .	27
3.2 Representação de incertezas . . . . .	28
3.3 Estabilidade robusta . . . . .	29
3.4 Especificação para estabilidade robusta . . . . .	30
3.5 Especificação para desempenho nominal . . . . .	32

3.6	Especificação para desempenho robusto . . . . .	34
3.7	Representação em blocos dos sistemas para análise de desempenho e estabilidade . . . . .	36
3.8	Valor singular estruturado . . . . .	38
3.9	O Regulador generalizado de informação completa . . . . .	39
3.9.1	Parametrização de todos os sinais de controle . . . . .	40
3.9.2	Parametrização de um sinal de controle particular . . . . .	41
3.9.3	Parametrização de todos os controladores . . . . .	43
3.9.4	Simplificação da planta generalizada . . . . .	43
3.10	Parametrização de controladores estabilizantes . . . . .	48
3.11	Fatoração Coprima . . . . .	49
3.11.1	Fatoração coprima e estabilidade interna . . . . .	50
3.11.2	Fatoração coprima dupla . . . . .	51
3.11.3	Parametrização de todos os controladores estabilizantes . . . . .	52
3.12	Controladores $\mathcal{H}_\infty$ com informação completa . . . . .	56
3.13	Caso horizonte finito . . . . .	57
3.13.1	O problema de minimização . . . . .	58
3.13.2	O problema da maximização . . . . .	59
3.13.3	O problema da fronteira de dois pontos . . . . .	61
3.13.4	Equação de Riccati . . . . .	61
3.13.5	Condição de necessidade . . . . .	65
3.13.6	Todos os sistemas em malha fechada . . . . .	65
3.13.7	Todos os controladores . . . . .	67
3.14	Caso Horizonte infinito . . . . .	68
3.14.1	Considerações preliminares . . . . .	68
3.14.2	Condição de suficiência . . . . .	69
3.14.3	Condições necessárias para a existência da equação algébrica de Riccati . . . . .	70
3.14.4	Parametrização de sistemas em malha fechada . . . . .	71
3.14.5	Todos os controladores . . . . .	72
3.15	Problema do regulador $\mathcal{H}_\infty$ generalizado . . . . .	73
3.15.1	Problema da realimentação do sinal de medição simples . . . . .	74
3.15.2	Sinal de interesse especial . . . . .	75
3.15.3	Condições necessárias a solução do problema do regulador generalizada . . . . .	76
3.15.4	Condições Necessárias e Suficientes . . . . .	77
3.16	Conclusão parcial . . . . .	79

<b>4</b>	<b>Projeto do controlador</b>	<b>80</b>
4.1	Distúrbios . . . . .	80
4.2	Incertezas paramétricas . . . . .	82
4.3	Projeto por sensibilidade mista . . . . .	85
4.4	Síntese do controlador . . . . .	87
4.5	Simulações . . . . .	88
4.6	Distúrbio harmônico . . . . .	93
4.7	Análise $\mu$ . . . . .	96
4.7.1	Estabilidade Nominal . . . . .	96
4.7.2	Estabilidade Robusta . . . . .	96
4.7.3	Desempenho Nominal . . . . .	97
4.7.4	Desempenho Robusto . . . . .	97
4.8	Controle $\mathcal{H}_\infty$ e LQR: comparações do desempenho e da robustez . . .	98
4.9	Conclusão parcial . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Implementação e descrição do protótipo</b>	<b>101</b>
5.1	Funcionamento . . . . .	101
5.2	Descrição do funcionamento do hardware . . . . .	103
5.2.1	Programa de controle . . . . .	103
5.3	Medida do tempo de processamento . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Conclusões e trabalhos futuros</b>	<b>107</b>
6.1	Conclusões . . . . .	107
6.2	Trabalhos futuros . . . . .	108
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>109</b>
<b>A</b>	<b>Parâmetros do motor mancal</b>	<b>113</b>
<b>B</b>	<b>Código fonte do programa C do DSP</b>	<b>114</b>
<b>C</b>	<b>Artigo publicado</b>	<b>130</b>

# Lista de Figuras

1.1	Configuração de um sistema realimentado com um grau de liberdade.	4
1.2	Configuração geral do sistema de controle.	5
2.1	Mancal vertical.	8
2.2	Representação da força de atração do eletroímã.	9
2.3	Eletroímã posicionados na direção horizontal.	10
2.4	Dispositivos posicionados em direções perpendiculares.	12
2.5	Motor de indução de quatro pólos e duas fases.	14
2.6	Circuito elétrico equivalente para o motor de indução.	16
2.7	Enrolamentos do motor mancal.	18
2.8	Enrolamentos da fase A e B do estator.	19
2.9	Foto do protótipo utilizado.	21
2.10	Sistema de coordenadas do motor simplificado.	22
3.1	Perturbação aditiva.	29
3.2	Perturbação multiplicativa.	29
3.3	Malha de realimentação com perturbação aditiva.	29
3.4	Configuração de realimentação.	31
3.5	Malha de realimentação com sinais de distúrbios.	32
3.6	Malha de realimentação contendo os pesos de ponderação.	34
3.7	Sistema realimentado com perturbação multiplicativa.	34
3.8	Diagrama de Nyquist para estabilidade robusta.	35
3.9	Diagrama em blocos com incertezas multiplicativa e bloco de desempenho.	35
3.10	Diagrama de Nyquist para desempenho robusto.	36
3.11	Sistema com incerteza multiplicativa e bloco de desempenho.	36
3.12	Configuração geral de controle.	37
3.13	Estrutura $N\Delta$ .	37
3.14	Estrutura $M\Delta$ .	38
3.15	Sistema realimentado com sinal de medida.	39
3.16	Configuração para informação completa.	40

3.17	Procedimento de transformação em malha fechada. . . . .	45
3.18	Transformação linear fracionada . . . . .	48
3.19	Diagrama de um sistema realimentado. . . . .	49
3.20	Representação dos controladores estabilizantes. . . . .	56
3.21	Sistema de informação completa. . . . .	57
4.1	Diagrama em blocos do sistema com distúrbio cossenoidal. . . . .	81
4.2	Desbalanceamento de massa. . . . .	81
4.3	Representação em blocos da planta com perturbações paramétricas. . . . .	83
4.4	Representação da LFT. . . . .	84
4.5	Representação da planta generalizada. . . . .	85
4.6	Resposta em frequência da função $W_p^{-1}$ . . . . .	86
4.7	Resposta em frequência das funções $\bar{\sigma}(W_p^{-1}(j\omega))$ e $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ . . . . .	87
4.8	Sistema realimentado. . . . .	88
4.9	Posição do eixo mancal, com velocidade de rotação de 300 rpm. . . . .	89
4.10	Função sensibilidade para velocidade de 300 rpm. . . . .	89
4.11	Posição do eixo mancal, com velocidade de rotação de 800 rpm. . . . .	90
4.12	Função sensibilidade para velocidade de 800 rpm. . . . .	90
4.13	Posição do eixo mancal, com velocidade de rotação de 1.500 rpm. . . . .	91
4.14	Função sensibilidade para velocidade de 1.500 rpm. . . . .	91
4.15	Posição do eixo mancal, com velocidade de rotação de 3.000 rpm. . . . .	92
4.16	Função sensibilidade para velocidade de 3.000 rpm. . . . .	92
4.17	Montagem incorporando distúrbio cossenoidal. . . . .	93
4.18	Posição do eixo submetido com a componente cossenoidal para velocidade de rotação de 300 RPM. . . . .	94
4.19	Posição do eixo submetido com a componente cossenoidal para velocidade de rotação de 800 RPM. . . . .	94
4.20	Posição do eixo submetido com a componente cossenoidal para velocidade de rotação de 1.500 RPM. . . . .	95
4.21	Posição do eixo submetido com a componente cossenoidal para velocidade de rotação de 3.000 RPM. . . . .	95
4.22	Análise de estabilidade robusta. . . . .	97
4.23	Análise de desempenho nominal e robusto. . . . .	98
5.1	Protótipo de motor mancal utilizado. . . . .	102
5.2	Diagrama em blocos simplificado do motor mancal. . . . .	103
5.3	Fluxograma da rotina de controle de posição do motor mancal. . . . .	104
5.4	Tempo de execução da rotina LQR. . . . .	105
5.5	Tempo execução da rotina $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	105

# Lista de Tabelas

4.1	Comparação entre $\mathcal{H}_\infty$ e LQR. . . . .	99
A.1	Parâmetros do protótipo do Motor Mancal Magnético. . . . .	113

# Lista de Símbolos

$\mathcal{F}_u$	Transformação linear fracionada “superior”, p. 38
$\mathcal{H}_\infty$	Conjunto de funções analíticas, p. 28
$\mu$	Valor singular estruturado, p. 36
$H(s)$	Função de transferência para a corrente de magnetização, p. 16
$I_0$	Amplitude da corrente do enrolamento, p. 17
$I_x$	Momento de inércia do rotor com relação ao eixo x, p. 22
$I_y$	Momento de inércia do rotor com relação ao eixo y, p. 22
$I_z$	Momento de inércia do rotor com relação ao eixo z, p. 22
$J_x$	Momento de inércia do eixo com relação ao eixo x, na articulação, p. 22
$J_y$	Momento de inércia do eixo com relação ao eixo y, na articulação, p. 22
$L_1$	Indutância de dispersão do estator, p. 16
$L_2$	Indutância de dispersão do rotor, p. 16
$L_m$	Indutância de magnetização, p. 16
$N_{sinc}$	Velocidade de sincronismo, p. 15
$R_1$	Resistência do estator, p. 16
$R_2$	Resistência refletida do estator para o rotor, p. 16
$\Delta_I$	Perturbação normalizada, p. 34
$\alpha$	Ângulo em relação ao eixo X, p. 22

$\bar{\sigma}(A)$	Maior valor singular da matriz A, p. 28
$\beta$	Ângulo em relação ao eixo Y, p. 22
$\gamma$	Norma infinita, p. 40
$\mathcal{C}_l$	Composição inferior, p. 47
$\mathcal{F}_l$	Transformação linear fracionada “inferior”, p. 44
$\mathcal{RH}_\infty$	Classe de funções racionais pertencentes ao espaço $\mathcal{H}_\infty$ , p. 28
$\mu_{ar}$	Permeabilidade magnética do ar, p. 9
$\mu_{fe}$	Permeabilidade magnética do ferro, p. 9
$\omega_r$	Velocidade de rotação do rotor, p. 22
$\phi$	Fluxo magnético, p. 9
$\sigma$	Escorregamento, p. 15
$i_h(t)$	Corrente de magnetização, p. 16
$i_{hB}$	Corrente de magnetização gerada pela fase B, p. 19
$k_m$	Fator de escala para SSV, p. 38
$p_x$	Torque gerado em relação a direção X, p. 23
$p_y$	Torque gerado em relação a direção Y, p. 23
$v_s$	Vetor de deslocamento do eixo na posição dos sensores, p. 25
CM	Centro de massa, p. 22
b	Distância do motor superior em relação ao centro de massa, p. 24
c	Distância do centro de massa ao ponto de pivoteamento, p. 22, 24
d	Distância do sensor superior ao centro de massa, p. 25
m	Massa do rotor, p. 22
<b>B</b>	Vetor densidade do campo magnético, p. 8
<b>H</b>	Vetor intensidade do campo magnético, p. 8



# Lista de Abreviaturas

DN	Desempenho Nominal, p. 85
DR	Desempenho Robusto, p. 85
DSP	Digital Signal Processor, p. 3
EN	Estabilidade Nominal, p. 85
ER	Estabilidade Robusta, p. 96
FMM	Força Magneto Motriz, p. 15
LEM	Levitação Eletromagnética, p. 2
LFT	Linear Fractional Transformation, p. 5
LQG	Linear Quadratic Gaussian, p. 4
LQR	Linear Quadratic Regulation, p. 3
LQR	Linear Quadratic Regulator, p. 98
MIMO	Multi Input-Multi-Output, p. 3
MMM	Motor Mancal Magnético, p. 2
MM	Mancal Magnético, p. 7
PID	Proporcional Integrador Derivativo, p. 3
SSV	Structure Singular Value, p. 38
TPBVP	Problema de Fronteira de Dois Pontos, p. 61

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Motores rotativos transferem energia utilizando eixos acoplados a cargas. Para manter em posição estes eixos, são utilizados mancais mecânicos. Uma alternativa aos mancais mecânicos é o emprego de mancais magnéticos, que tem como função principal, realizar o posicionamento do rotor utilizando forças magnéticas sem contato mecânico. Sistemas como estes possuem aplicações em diversas áreas. Dentre estas, podemos citar:

1. indústria alimentícia e farmacêutica, que exigem elevado grau de pureza em suas linhas de produção, onde a contaminação por agentes externos é fortemente indesejada;
2. indústria aeroespacial, onde a realização de manutenção de lubrificação das partes móveis é um fator complicador;
3. ultracentrífugas, empregadas para enriquecimento de urânio, que necessitam alcançar elevadas velocidades de rotações no processo da separação dos isótopos radioativas;
4. *flywheels*, que funcionam como “baterias eletromecânicas” de armazenamento de energia.

Outras aplicações de mancais magnéticos podem ser encontrados em [1] e [2].

O desenvolvimento dos mancais magnéticos teve um amadurecimento gradual ao longo do tempo, sendo o resultado de pesquisas realizadas em diversos países. Em 1939, [3] demonstrou que somente uma força diamagnética muito fraca poderia manter um corpo suspenso de forma passiva em todos os seis graus de liberdade. Verificou-se a necessidade da utilização das forças eletromagnéticas. No entanto,

a força de repulsão eletromagnética gera um posicionamento instável, necessitando portanto, de um controle de posição ativo [4].

No entanto, o emprego de fato da tecnologia de levitação magnética necessitou aguardar o amadurecimento das tecnologias de controle, eletrônica de potência, sensores e modelagem das dinâmicas dos rotores. A partir da década de 1970 soluções comerciais foram sendo introduzidas no mercado em diversos países [5]. Conferências internacionais tem sido editadas para tratar especificamente sobre mancais magnéticos, como, por exemplo, o *International Symposium on Magnetic Bearing - (ISMB)*. Livros de referência tratando exclusivamente sobre mancais magnéticos foram editados, dois quais podemos citar [2] e [6].

Uma linha de pesquisa que se desenvolve paralelamente à dos mancais magnéticos utiliza um motor de indução modificado para gerar dois tipos de forças: forças radiais de relutância para o posicionamento do rotor, e forças na direção tangencial ao eixo, gerando torque. Em um motor tradicional, o fluxo magnético que atravessa o entreferro em qualquer um dos polos do estator possui a mesma intensidade, gerando balanceamento de forças. No entanto, criando-se o desbalanceamento destes fluxos em cada entreferro, gera-se forças de atração em uma determinada direção desejada. Entretanto, estas forças de atração são inerentemente instáveis, e portanto, devem ser geradas forças controladas no entreferro em direções opostas, possibilitando o controle ativo da posição do eixo. Este equipamento que une a capacidade de gerar torque e posicionamento do eixo do motor é denominado motor mancal magnético (MMM) ou motor mancal.

As pesquisas relacionadas aos motores mancais concentram-se em dois tipos de configurações básicas, em ambas usando motores de indução. Estas configurações diferenciam-se pela forma como são montados os enrolamentos do estator com o objetivo de gerar forças radiais de posicionamento. A primeira configuração apresentada é chamada de **Sistema com dois Enrolamentos**. Neste arranjo é acrescentado um segundo conjunto de enrolamentos que altera a distribuição dos fluxos através da superposição magnética, gerando forças radiais e torque [7]. A segunda configuração é chamada de **Sistemas com Enrolamentos Divididos**, onde o enrolamento do estator de um motor de indução é separado eletricamente, permitindo a aplicação de correntes distintas com amplitudes controladas, gerando forças de posicionamento, além do torque [8].

As pesquisas em sistemas de levitação eletromagnética (LEM) no Brasil estão sendo desenvolvidas em diversos centros acadêmicos, dos quais podemos ressaltar: COPPE/UFRJ, USP, UFF, UFRN, e instituições militares como o CTMSP (Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo) [1].

Esta dissertação segue a linha de pesquisa desenvolvida na COPPE/UFRJ, onde foi apresentada a configuração com enrolamentos divididos [9]. Esse trabalho foi

o precursor do desenvolvimento de diversas dissertações e teses relacionadas aos MMM, que serão resumidas a seguir.

Ortiz em sua dissertação de mestrado [9] e em sua tese de doutorado [10], forneceu as bases para os estudos posteriores e propôs um controle analógico de posicionamento e velocidade do motor mancal. Santisteban [11] apresentou um estudo sobre a influência da carga torcional no posicionamento do eixo. David [12] apresentou um método de levitação vertical para o rotor utilizando a força de levitação diamagnética entre pastilhas cerâmicas supercondutoras e ímãs permanentes. Cardoso [13] incorporou o uso de um DSP para o processamento do controle simultâneo de posição e velocidade, e implementando o controle LQR. Rodrigues [14] apresentou um estudo para o controle de posição e velocidade utilizando técnicas de controle LQR centralizado e descentralizado. Gomes [15] realizou uma implementação utilizando um DSP de ponto fixo para o controle de posição utilizando controle ótimo LQR e controle de velocidade adaptativo por meio de um controle PID. Wilmar [16] implementou melhorias nas rotinas de controle implementadas no DSP e na implementação do hardware.

## 1.2 O Problema do Controle

O controle clássico não é muito capaz de tratar adequadamente o problema da variabilidade do modelo teórico, principalmente para sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO). As técnicas de controle robusto utilizam-se do fato de o ganho de um sistema multivariável MIMO ser baseado nos valores singulares da função de transferência. Um dos trabalhos precursores, apresentado por [17], estabeleceu as bases para o projeto utilizando a idéia de obter os benefícios da realimentação na presença de incertezas pela metodologia de controle  $\mathcal{H}_\infty$  conhecido como *loop shaping*.

O sistema realimentado da figura 1.1 indica a representação dos blocos da planta  $P$ , do controlador  $K$ , e de sinais exógenos, que são as entradas  $r$  (referência),  $d$  (distúrbio) e  $n$  (ruído dos sensores). Descrevendo os sinais de controle  $u(t)$  e de saída  $y(t)$ , em função da função sensibilidade  $S = (I + PK)^{-1}$  e da função sensibilidade complementar  $T = PK(I + PK)^{-1} = I - S$ , obtém-se as relações:

$$y(s) = T(s)r(s) + S(s)d(s) - T(s)n(s) \quad (1.1)$$

$$u(s) = K(s)S(s)[r(s) - n(s) - d(s)] \quad (1.2)$$

Adicionalmente aos requisitos de que  $K$  deve estabilizar  $P$ , o controle deve proporcionar melhorias no desempenho do sistema em malha fechada. Estes objetivos podem ser especificados como:

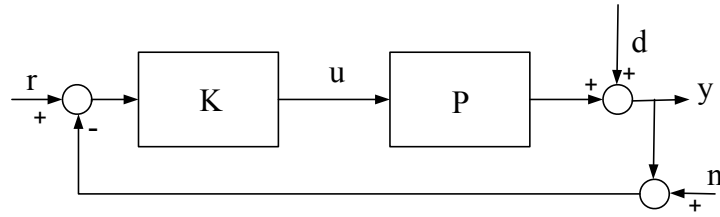


Figura 1.1: Configuração de um sistema realimentado com um grau de liberdade.

1. Rejeição de distúrbios exógenos.
2. Atenuação à ruídos.
3. Seguir a referência.
4. Redução da energia de controle.
5. Estabilidade robusta.

Infelizmente, os requisitos listados acima não podem ser atendidos simultaneamente por serem conflitantes. Verifica-se que deve-se buscar uma condição de compromisso a fim de tentar atender aos diversos objetivos.

### 1.3 Histórico e revisão bibliográfica

Os primeiros resultados utilizando o controle ótimo ocorreram pelo desenvolvimento dos filtros ótimos, iniciados por Wiener na década de 1940, alcançando maturidade nos anos de 1960 com o controle LQG (Linear Quadratic Gaussian), fortemente impulsionados pelas pesquisas em torno dos problemas a serem solucionados pelos programas espaciais americano e soviético. No entanto, este controle não mostrou ser robusto o suficiente para lidar com os problemas típicos encontrados na indústria, quando não se dispõe de uma modelagem tão precisa. Os sistemas com controle desenvolvido pela teoria LQG mostraram não possuir uma considerável margem de estabilidade [18].

Devido aos inconvenientes da técnica de controle LQG no que se refere à estabilidade robusta, o controle  $\mathcal{H}_\infty$ , desenvolvido na década de 1980 impulsionado pelo trabalho de Zames [19], contribuiu no sentido de obter um controle ótimo robusto. Para a solução do problema de síntese do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  é necessário formulá-lo explicitando os sinais de interesse. Será considerada uma planta  $P$  cujas entradas são, o sinal exógeno ao sistema  $w$  e o sinal de controle  $u$ . As saídas da planta são os sinais objetivo  $z$  e o sinal de realimentação  $y$ , conforme visto na figura 1.2.

A representação deste sistema é obtida pelas expressões:

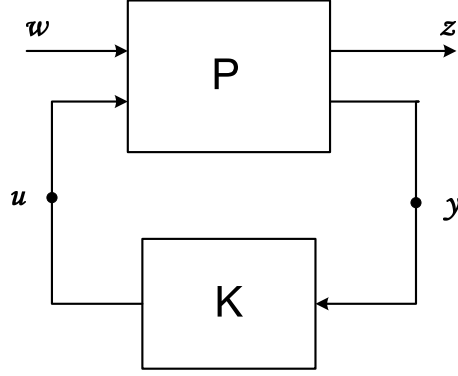


Figura 1.2: Configuração geral do sistema de controle.

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$u = K(s)y(s) \quad (1.4)$$

Neste caso, o objetivo a ser alcançado é minimizar a norma infinita da matriz de transferência entre o sinal exógeno  $w$  e o sinal de interesse  $z$ . A condição necessária é que o sistema em malha fechada seja estável. Esta relação é obtida pela transformação linear fracionada LFT (Linear Fractional Transformation) dada por:

$$z = \mathcal{F}_l(P, K)w \quad (1.5)$$

onde:

$$\mathcal{F}_l = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (1.6)$$

A solução do problema de controle é obtida pela decomposição em dois problemas distintos: o problema de realimentação completa e o problema de estimação. O método aqui apresentado, baseado na teoria dos jogos diferenciais, amadureceu ao longo de diversos trabalhos. Em [20] foi apresentado o enfoque baseado na teoria dos jogos diferenciais de soma zero.

A questão da estabilidade associada com os jogos diferenciais lineares quadráticos no horizonte finito é considerado em [21], que apresentou seus resultados sem realizar conexão com a otimização  $\mathcal{H}_\infty$ . Esta tarefa coube a [22] que explicitou esta relação.

A otimização  $\mathcal{H}_\infty$  para atenuação de distúrbios foi investigado em [23], onde demonstrou-se que controladores de realimentação de estados que satisfazem objetivos da norma infinita podem ser encontrados usando a equação de Riccati com um termo quadrático indefinido.

A estabilização de um sistema linear realizada por controladores de realimentação de estados, também usando equações de Riccati com um termo quadrático

indefinido, foi estabelecida em [24].

O problema do controle  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estados foi aprimorado em [25] e o estudo baseado na teoria do horizonte finito foi, em grande parte, realizado devido ao trabalho desenvolvido por [26]. Este trabalho apresenta a teoria do controle  $\mathcal{H}_\infty$  baseado nesta linha de desenvolvimento baseado em grande parte em [27].

Diversos trabalhos publicados na área de mancais magnéticos empregam técnicas de controle robusto, em particular utilizando o controle  $\mathcal{H}_\infty$ . O principal objetivo, em geral, é caracterizar as possíveis perturbações ao modelo e propor uma lei de controle de malha fechada que melhore o desempenho e garanta estabilidade mesmo na presença destas perturbações. Para isto, diferentes propostas de implementações são apresentadas.

Cao *et all* [28] apresentaram uma considerável melhora da robustez de regulação de um mancal magnético em um problema de sensibilidade mista.

Jastrzebski [29] realizou comparações entre duas técnicas para solução do problema do controle  $\mathcal{H}_\infty$ , “Loop-shaping” e “Signal-Based”, aplicado a um mancal magnético. Para seleção e ajuste das funções de especificação de desempenho são empregados algoritmos genéticos. Verifica-se por simulação e experimentação a superioridade do método de projeto utilizando “Signal-Based”.

Balini [30] propôs a redução do efeito da vibração do eixo do motor mancal causado pelo desbalanceamento do eixo quando girando a velocidade elevada. Este desbalanceamento causa vibrações síncronas, que podem ser modeladas como um distúrbio senoidal com frequência igual a frequência de rotação do eixo.

Toru [31] propôs a regulação da posição de um mancal magnético com incertezas na forma estruturadas. Este procedimento confirmou ser menos conservativo para análise de estabilidade e desempenho robusto.

Outros trabalhos podem ser citados como referência para a obtenção de uma caracterização melhor das perturbações para o qual a planta de um mancal magnético pode estar sujeita, ressaltando [32], [33], [34], [35],[36] e [30]. Verifica-se que a escolha apropriada das funções peso é ponto crítico para o êxito da implementação.

## 1.4 Estrutura do trabalho

Este trabalho fica estruturado da seguinte forma: O Capítulo 2 apresenta a descrição e o equacionamento do modelo do motor mancal. No capítulo 3 é descrito o desenvolvimento teórico necessário para o entendimento da síntese do controle  $\mathcal{H}_\infty$ . No Capítulo 4 é apresentado o projeto do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  e a análise do desempenho obtido. O capítulo 5 visa descrever o protótipo no qual este trabalho é baseado. No Capítulo 6 são apresentadas as conclusões gerais e sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Princípios de funcionamento do motor mancal magnético

### 2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar os conceitos necessários para o entendimento do motor mancal magnético (MMM) baseado em um motor de indução. Serão mostrados os princípios de funcionamento do mancal magnético (MM) tradicional. Também será apresentado como um motor de indução pode ser modificado para produzir, além do torque, forças radiais de posicionamento do eixo rotor. As expressões destas forças compõe as equações do sistema permitindo modelar as dinâmicas de posição do rotor em função da corrente do motor. Os princípios descritos neste capítulo sobre os MMM foram baseados em [13], e [16] e [1]. A descrição do motor de indução foi baseada em [37].

### 2.2 Levitação magnética

A levitação magnética se baseia na utilização da força de atração gerada por um eletroímã. Este é construído utilizando materiais ferromagnético em torno dos quais circula uma corrente elétrica por um condutor. A figura 2.1 mostra um sistema para levitação de uma esfera metálica, descrito em [11]. Neste aparato, montado na vertical, um eletroíma exerce uma força que se opõe à força gravitacional, um sensor de posição indica a distância da esfera ao eletroímã e um controle gera a corrente elétrica necessária para manter a esfera na posição de equilíbrio. Se a força de atração do eletroímã se igualar ao peso da esfera esta ficará suspensa em equilíbrio. No entanto, este equilíbrio é instável. Qualquer variação na distância entre a esfera e o eletroímã fará com que o sistema se desestabilize, acarretando a queda da esfera ou a aceleração da mesma em direção ao eletroímã. Para que isto não ocorra, é



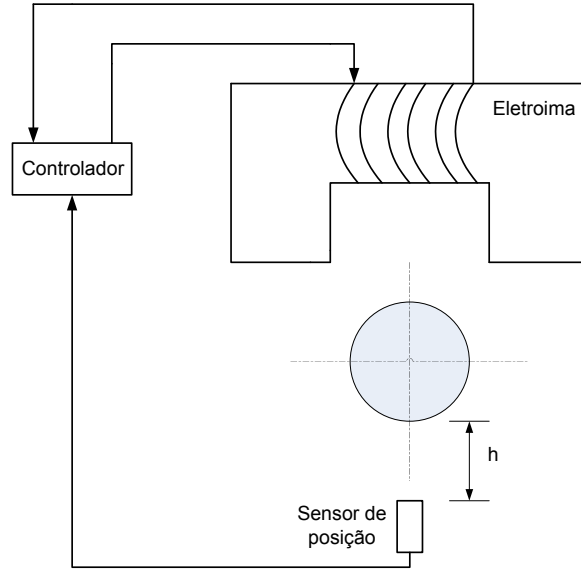


Figura 2.1: Mancal vertical.

necessário que haja um controle ativo que altere o valor da corrente do eletroímã em função da distância da esfera ao material ferromagnético.

### 2.3 Força eletromagnética

A figura 2.2 ilustra um arranjo composto por um eletroímã e um corpo ferromagnético que permite equacionar os princípios que regem o aparecimento de forças magnéticas. Empregando as equações de Maxwell descritas pelas equações (2.1) e (2.2), onde  $\mathbf{H}$  representa o vetor intensidade do campo magnético que percorre um caminho dado por  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{B}$  representa o vetor densidade do campo magnético que atravessa uma superfície dada por  $\mathbf{A}$ ,  $i$  a corrente que circula na bobina de  $N$  espiras, pode-se relacionar o fluxo magnético com a corrente elétrica da bobina e com a distância do entreferro.

$$\int \mathbf{H}d\mathbf{l} = Ni \quad (2.1)$$

$$\int \mathbf{B}d\mathbf{a} = 0 \quad (2.2)$$

Desenvolvendo a equação (2.1) de acordo com a geometria da figura 2.2, obtém-se:

$$\mathbf{H}_{fe}\mathbf{l}_{fe} + 2\mathbf{H}_{ar}h = Ni, \quad (2.3)$$

sendo  $\mathbf{H}_{fe}$  a intensidade do campo magnético no ferro,  $\mathbf{H}_{ar}$  a intensidade do campo

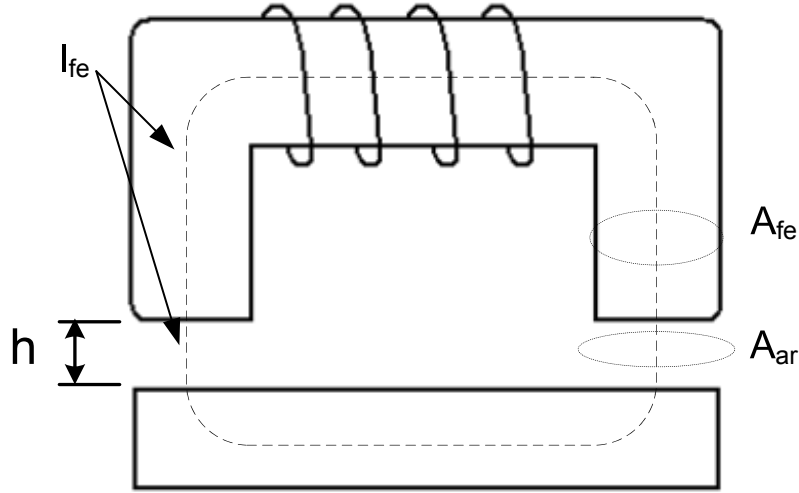


Figura 2.2: Representação da força de atração do eletroímã.

magnético no ar,  $l_{fe}$  o percurso do campo magnético no eletroímã e  $h$  a distância do entreferro. Desenvolvendo a equação (2.2) na fronteira do percurso do campo magnético entre o material ferromagnético e o entreferro, chega-se a igualdade (2.4).

$$\mathbf{B}_{fe}A_{fe} = \mathbf{B}_{ar}A_{ar}. \quad (2.4)$$

Desconsiderando a dispersão do campo magnético no entreferro, em virtude de  $h$  ser pequeno, pode-se considerar  $\mathbf{B}_{fe} = \mathbf{B}_{ar} = \mathbf{B}$ .

A relação entre a intensidade e a densidade do campo magnético é dada em função da permeabilidade magnética do meio e do material ferromagnético, obtidas por:

$$\mathbf{H}_{fe}(i, h) = \frac{\mathbf{B}(i, h)}{\mu_{fe}}; \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H}_{ar}(i, h) = \frac{\mathbf{B}(i, h)}{\mu_{ar}}. \quad (2.6)$$

Como a permeabilidade magnética do ferro ( $\mu_{fe}$ ) é muito superior a permeabilidade magnética do ar ( $\mu_{ar}$ ), da ordem de 5000 vezes, pode-se desconsiderar o termo referente à intensidade do campo magnético no ferro na equação (2.3). Levando em consideração as dimensões físicas do entreferro e do eletroímã, obtém-se a expressão (2.7) para o fluxo magnético gerado, sendo este fluxo magnético função da corrente e do entreferro.

$$\phi(i, h) = \int \mathbf{B}(i, h) ds = \frac{\mu_0 N i A}{2h} \quad (2.7)$$

O fluxo magnético circulante nos entreferros gera uma força de relutância que tende a diminuir a distância entre eles [38]. O módulo desta força é dada por:

$$F(i, h) = \frac{\phi^2(i, h)}{2\mu_a A_0}, \quad (2.8)$$

que é uma força de atração entre o eletroímã e o material ferromagnético. Pelas equações (2.8) (2.7) obtém-se:

$$F_T(i, h) = 2F(i, h) = \frac{\mu_0 A_{ar} n^2 i^2}{4h^2}, \quad (2.9)$$

que corresponde a soma das forças exercidas nas duas extremidades do entreferro.

Percebe-se pela expressão (2.9), que a força total obtida pelo dispositivo eletromagnético depende diretamente do quadrado da intensidade da corrente elétrica que circula no enrolamento da bobina e inversamente ao quadrado da distância entre os elementos. Caso seja aplicado uma força externa atuando sobre o elemento móvel do dispositivo alterando a distância  $h$ , pode-se controlar a corrente  $i$  a fim de restabelecer a posição de equilíbrio da esfera.

## 2.4 Dispositivo eletromagnético de posicionamento no plano horizontal

Forças de relutância geradas por eletroímãs, conforme visto na seção anterior, são forças somente de atração. Para possibilitar o posicionamento de corpos utilizando eletroímãs, é necessário a colocação de outro eletroímã no mesmo eixo mais em direção oposta. Considere, para tanto, o aparato para posicionar uma esfera mostrado na figura 2.3.

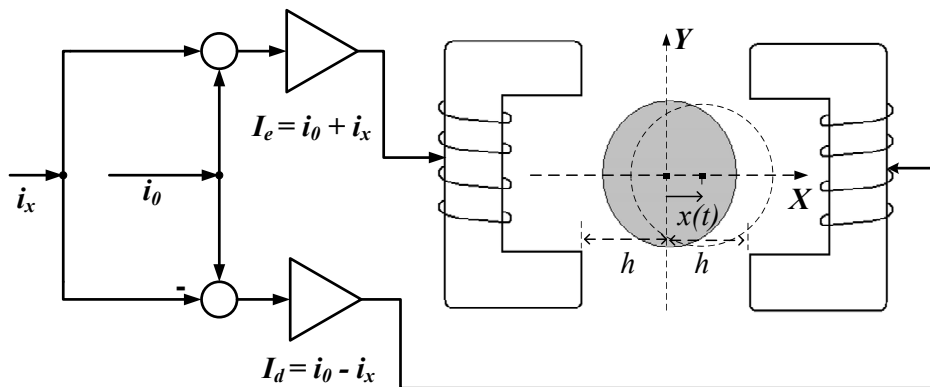


Figura 2.3: Eletroímã posicionados na direção horizontal.

Será descrito aqui o funcionamento deste dispositivo. Na equação (2.9), é mostrado que a força de atração de um eletroíma é proporcional a uma constante, ao quadrado da corrente do enrolamento e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o eletroíma e a esfera. Portanto a força resultante:

$$f_x = f_d + f_e, \quad (2.10)$$

é formada pela soma das forças geradas pelos eletroímãs da esquerda e pelo eletroímã da direita, estas definidas respectivamente pelas equações:

$$f_e = -K_m \left( \frac{i_0 + i_x(t)}{h - x(t)} \right)^2 \quad (2.11)$$

$$f_d = K_m \left( \frac{i_0 - i_x(t)}{h + x(t)} \right)^2 \quad (2.12)$$

sendo a constante magnética  $K_m$  dada por:

$$K_m = \frac{\mu_0 A_{ar} n^2}{4}. \quad (2.13)$$

No dispositivo montado na figura 2.3 é considerado que o objetivo desejado é posicionar a esfera no ponto central entre os dois eletroímãs. Também é considerado que no eixo  $x$  não esteja atuando, em condições normais, nenhuma força externa em qualquer uma das direções. As correntes  $i_e(t) = i_0 + i_x(t)$  e  $i_d(t) = i_0 - i_x(t)$  são funções de uma corrente fixa de polarização  $i_0$  e de uma corrente de controle  $i_x(t)$ . Deste modo,  $i_x(t) = 0$  na condição de equilíbrio da esfera, sendo portanto as forças geradas pelos eletroímãs iguais mas de sentido contrário. Porém, se por exemplo, houver um deslocamento da esfera no sentido positivo de  $x$  isto acarretará um aumento da força  $f_d$  e uma redução da força  $f_e$  criando uma força resultante  $f_x$  no sentido positivo do eixo  $x$ . Para uma corrente diferencial positiva  $i_x(t)$  é possível fazer com que  $f_x$  atue no sentido contrário ao deslocamento da esfera, até que, restabelecendo a condição de equilíbrio,  $x(t) = 0$  e  $i_x(t) = 0$ . Uma grande vantagem da utilização desta configuração empregada, é que tanto a grandeza  $x(t)$  como  $i_x(t)$  operam próximo a zero, permitindo que a expressão da força possa ser linearizada nas proximidades deste ponto de operação. Deste modo, pode-se obter uma expressão linearizada dada por:

$$f_x(t) = k_d x(t) + k_i(t) i_x(t), \quad (2.14)$$

representando a expressão da força em torno do ponto de operação  $x_{OP} = 0$  e  $i_{OP} = 0$ .

De forma análoga ao que foi apresentado para o posicionamento da esfera na posição  $x$ , outro aparato idêntico pode ser posicionado na direção  $y$ , perpendicular

a direção x, conforme esquema mostrado na figura (2.4), gerando uma outra força  $f_y$  no sentido do eixo y. Será considerado aqui o caso particular em que o plano

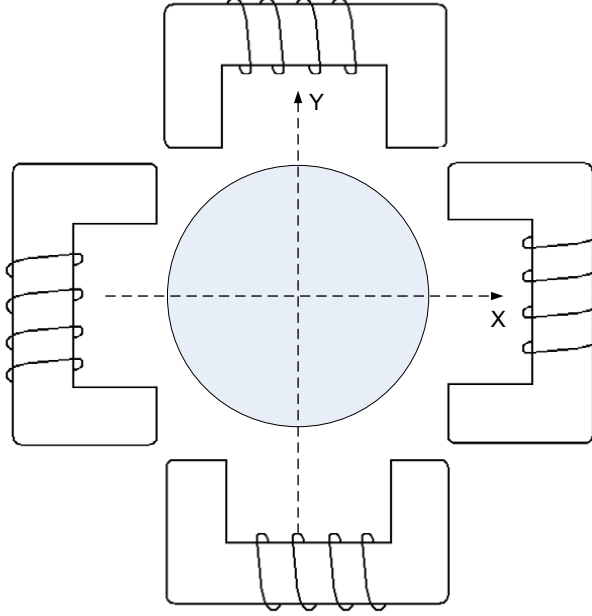


Figura 2.4: Dispositivos posicionados em direções perpendiculares.

formado pelas direções x e y está localizado na horizontal, não havendo influência da força da gravidade nas direções x e y, e que a esfera permanecerá neste plano.

Duas constatações principais são verificadas com a utilização deste arranjo. A primeira é o fato de que as correntes de polarização em cada um dos quatro eletroímãs são iguais em virtude da simetria do dispositivo, o que facilita a construção do dispositivo. A segunda é o desacoplamento das forças resultantes de posicionamento nas duas direções. Isto ocorre devido ao fato das forças serem ortogonais entre si. Com isto, a força em cada direção será função somente dos parâmetros daquela direção, ou seja  $f_x = f_x(x, i_x)$  e  $f_y = f_y(y, i_y)$ . Este desacoplamento permite que o controle do posicionamento ocorra de forma independente em cada direção.

Desta forma, a expressão para a força na direção x (2.10) para um par de eletroímãs permanece válida para este dispositivo de posicionamento com dois pares de eletroímãs. Somando as forças dadas por (2.11) e (2.12) obtemos:

$$f_x(x(t), i_x(t)) = K_m \left[ \left( \frac{i_0 + i_x(t)}{h - x(t)} \right)^2 - \left( \frac{i_0 - i_x(t)}{h + x(t)} \right)^2 \right] \quad (2.15)$$

sendo  $K_m = \mu_0 A n^2 / 4$  dado por (2.13), onde  $\mu_0$  é a permeabilidade elétrica no vácuo, n é o número de espiras na bobina e A é a área de gap de ar.

Trabalhar com uma expressão não linear dada por (2.15) é muito mais complexo

do que trabalhar com uma expressão linear. Conforme foi dito, o dispositivo eletromagnético deverá operar em torno do ponto de operação  $(i,x) = (0,0)$  com pequenas variações para as variáveis  $x(t)$  e  $i(t)$ . Pode-se aplicar a série de Taylor à expressão (2.15) em torno do ponto de operação  $f(0,0)$  considerando somente o termo de primeira ordem, obtendo:

$$f_x(t) = f(0,0) + \left. \frac{\partial f_x}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ i=0}} x(t) + \left. \frac{\partial f_x}{\partial i} \right|_{\substack{x=0 \\ i=0}} i(t) = k_d x(t) + k_i i(t), \quad (2.16)$$

sendo:

$$k_d = \left. \frac{\partial f_x}{\partial x} \right|_{\substack{x=0 \\ i=0}} = \frac{\mu A n^2 i_0^2}{h^3} \quad (2.17)$$

$$k_i = \left. \frac{\partial f_x}{\partial i} \right|_{\substack{x=0 \\ i=0}} = \frac{\mu A n^2 i_0}{h^2}. \quad (2.18)$$

O mesmo resultado pode ser considerado para a linearização da expressão da força na direção  $y$  dado por

$$f_y = k_d y(t) + k_i i(t) \quad (2.19)$$

em virtude da similaridade dos conjuntos de eletroímãs e pelas considerações já realizadas, de desacoplamento entre as direções e de posicionamento do dispositivo no plano horizontal.

## 2.5 Motor de indução

O objetivo deste tópico é apresentar conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho sobre o funcionamento do motor de indução. Maiores detalhes sobre o motor de indução podem ser encontrados em qualquer livro texto sobre máquinas elétricas, como [37].

O motor de indução, dentre os motores de corrente alternada, é aquele que possui aplicações mais extensas. Robustez, simplicidade e ausência de coletores são algumas das características mais importantes. O funcionamento do motor de indução baseia-se na lei de Lenz: a corrente gerada por um fluxo magnético variante tende a se opor ao campo magnético que a gerou. A interação entre esta corrente e campo magnético produzirá o torque gerado pelo motor. Diversas configurações de bobinas enlaçadas nas saliências do estator podem ser construídas, determinando o número de pólos do motor.

Para exemplificar o funcionamento, a figura 2.5 mostra a vista em corte de um

motor de indução bifásico de quatro pólos indicando as linhas de campo geradas em quatro instantes de tempo. As correntes senoidais que alimentam cada fase, chamadas aqui de fases A e B, apresentam uma defasagem elétrica de  $90^\circ$ . Os enrolamentos das fases A e B das bobinas são montados de tal forma que possam definir faixas de fases positivas (+) e negativas (-) tal que quando a corrente assume uma polaridade definida como positiva ela terá uma direção para dentro da figura na faixa positiva (+), e direção para fora na faixa negativa (-). Nota-se que as faixas positivas e negativas assumem lados opostos dos pólos. Verifica-se que no instante 1

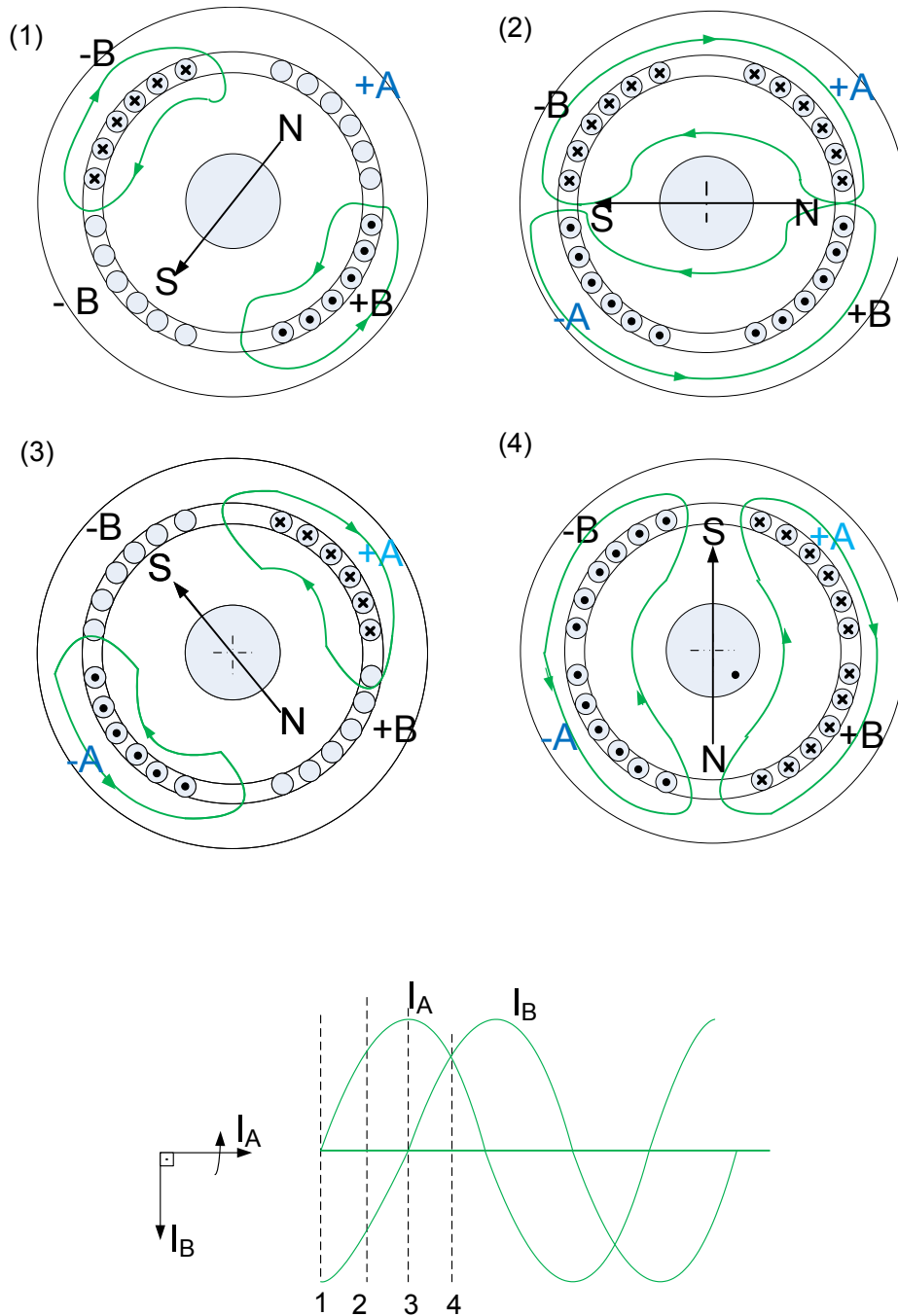


Figura 2.5: Motor de indução de quatro pólos e duas fases.

a corrente  $i_a$  é nula e  $i_b$  apresenta amplitude negativa máxima. A representação em corte do motor mostra o sentido da corrente negativa da fase B entrando no plano do papel pelo lado esquerdo e saindo do plano do papel pelo lado direito. Neste instante, a corrente  $i_a$  possui valor zero. Os campos magnéticos gerados cortam o rotor fazendo com que a fmm (Força Magneto Motriz) induzida no rotor esteja voltada para baixo.

No instante 2, correspondendo a um deslocamento de fase de  $45^\circ$  nas correntes,  $i_a$  é positiva e  $i_b$  ainda é negativa. Como a corrente  $i_a$  não é mais nula, ela produzirá também um campo magnético que terá sentido de acordo com a faixa de fase correspondente, fazendo com que o campo gerado pela faixa de fase +A intensifique o campo gerado pela faixa de fase -B, o mesmo ocorrendo para a faixa de fase -A e +B. Esta interação fará com que a fmm induzida no rotor tenha uma rotação de  $22.5^\circ$  no sentido para a esquerda (dextrógiro).

No instante 3, correspondendo a um deslocamento de fase de  $90^\circ$  nas correntes, a corrente  $i_a$  é positiva e  $i_b$  agora é nula. Somente a fase A produz linhas do campo magnético que irão induzir fmm no rotor com um deslocamento neste ponto de  $45^\circ$  em relação a condição inicial, ainda no sentido dextrógiro.

Nos demais instantes, a composição dos campos magnéticos gerados pelas bobinas seguem o procedimento mostrado, havendo a formação de um campo rotativo no estator que induz correntes no rotor. Estas correntes criarão uma força chamada de binário motor, que tenderá a acompanhar a rotação do campo rotativo do estator.

## 2.5.1 Circuito elétrico equivalente ao motor de indução

Inicialmente serão vistas algumas definições relacionadas ao motor elétrico, as quais também se aplicam ao motor mancal magnético, necessárias ao entendimento do que será apresentado.

**Velocidade de sincronismo** – A velocidade do campo rotativo, chamada de velocidade de sincronismo, dependerá, além da frequência do sinal que alimenta as bobinas, do número de pólos da configuração do motor. Para a velocidade síncrona, medidas em rotações por minuto (rpm), temos:

$$N_{sinc} = \frac{120f}{p} \text{ rpm} \quad (2.20)$$

sendo  $f$  a frequência do sinal senoidal em ciclos por segundo (Hz) e  $p$  o número de pólos do motor.

**Escorregamento:** Chamando de  $N_{mec}$  a velocidade de rotação do rotor, o escorregamento é dado por:



$$\sigma = \frac{N_{sinc} - pN_{mec}}{N_{sinc}}, \quad (2.21)$$

que é um valor constante para velocidade de regime permanente. Valores para o escorregamento de fase de motores comerciais variam de 1% a 10%, de acordo com o tipo e o tamanho do motor.

O circuito elétrico que representa cada fase do motor de indução é apresentado na figura 2.6.

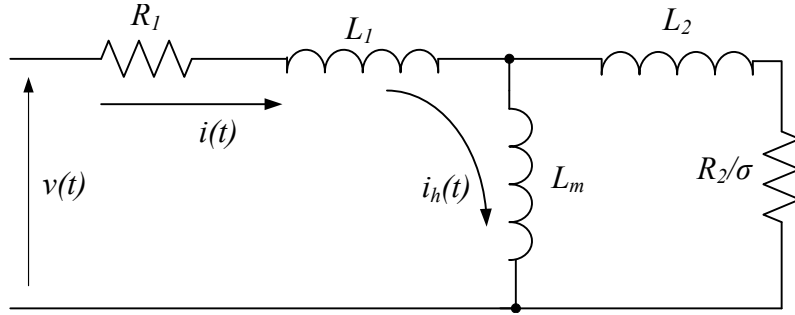


Figura 2.6: Circuito elétrico equivalente para o motor de indução.

Sendo:

$i(t)$  – Corrente que circula nas bobinas de cada fase;

$i_h(t)$  – Corrente de magnetização;

$R_1$  – Resistência do estator;

$R_2$  – Resistência refletida do estator para o rotor;

$L_1$  – Indutância de dispersão do estator;

$L_2$  – Indutância de dispersão do rotor;

$L_m$  – Indutância de magnetização.

O objetivo a ser desenvolvido é obter a relação entre a corrente  $i(t)$ , que alimenta cada fase, e a corrente de magnetização  $i_h(t)$ , conforme mostrado na equação (2.22).

$$I_h(s) = H(s)I(s) \quad (2.22)$$

A corrente de magnetização é aquela que efetivamente gera o fluxo magnético no entreferro do motor. Este fluxo magnético é o responsável pela geração do torque do motor como também a geração de forças radiais de atração entre o rotor e o entreferro.

A função de transferência  $H(s)$  é obtida equacionando o circuito da figura 2.6, chegando a expressão:

$$H(s) = \frac{1 + \sigma\tau_2s}{1 + \sigma(\tau_2 + \tau_m)s}, \quad (2.23)$$

onde  $\tau_2 = L_2/R_2$  e  $\tau_m = L_m/R_2$

Pela linearidade assumida no modelo do motor, e sendo  $i(t)$  um sinal senoidal com amplitude  $I_0$ , a corrente de magnetização  $i_h(t)$  será, em regime, um sinal senoidal de módulo e fase dados por:

$$i_h(t) = I_h \sin(\omega t + \theta) \quad (2.24)$$

onde:

$$I_h = |H(j\omega)|I \quad (2.25)$$

$$\theta = \angle H(j\omega) \quad (2.26)$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \tau_2^2(\sigma\omega)^2}{1 + (\tau_2 + \tau_m)^2(\sigma\omega)^2}} \quad (2.27)$$

$$\theta = \angle |H(j\omega)| = \arctan \frac{-(\sigma\omega)\tau_m}{1 + (\sigma\omega)^2\tau_2(\tau_2 + \tau_m)} \quad (2.28)$$

## 2.6 Motor mancal magnético

Para a construção do protótipo em uso no Laboratório de Aplicações em Supercondutores - LASUP/COPPE, um motor de indução originalmente trifásico, foi adaptado pela modificação dos seus enrolamentos para bifásico com 4 pólos.

O motor mancal magnético utiliza o campo gerado pelo próprio motor de indução para além de produzir torque, também produzir força de deslocamento radial. O diagrama de interligação dos enrolamentos das bobinas das fases A e B está mostrado na figura 2.7.

Os enrolamentos das fases estão intercalados no estator, defasados fisicamente de  $45^\circ$ . Os enrolamentos da fase B estão interligados entre si, ao passo que os terminais dos enrolamentos das quatro bobinas da fase A foram separados para efetuar o posicionamento do rotor através do controle das correntes destas bobinas. O princípio de funcionamento usado para gerar estas forças se assemelha ao dispositivo apresentado como mancal magnético visto na seção 2.2. A grande diferença ocorre pelo fato de o estator, onde estão posicionados os pólos em ranhuras, ser uma peça única, e o fluxo magnético produzido por uma bobina ser enlaçada pelas outras bobinas. Este fato faz com que o desenvolvimento da expressão da força gerada seja mais complexa. Além disto, o motor mancal, ao contrário do mancal magnético simples, opera com correntes alternadas, ao invés de corrente contínua, defasadas de  $90^\circ$  entre si.

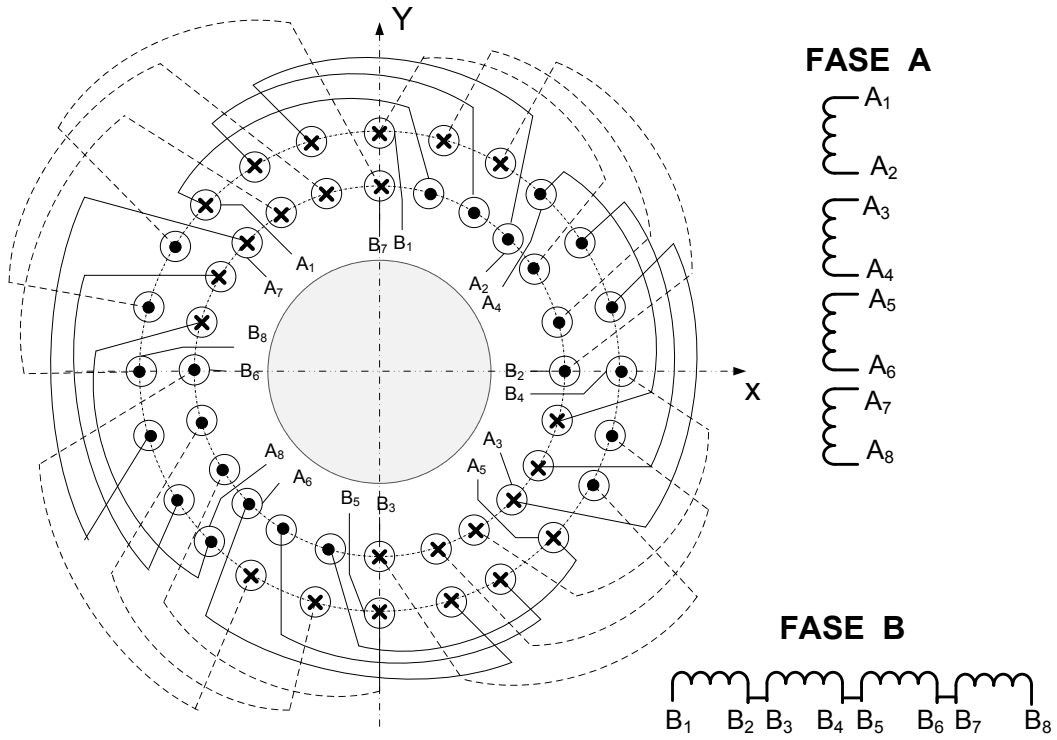


Figura 2.7: Enrolamentos do motor mancal.

Detalhando somente os enrolamentos da fase A, concentrados em torno dos pólos do estator, obtém-se a figura 2.8. Pode-se perceber claramente a semelhança estrutural entre o motor mancal e o dispositivo montado com eletroímãs mostrado na figura 2.4. Cada enrolamento da fase A será alimentado por uma corrente de polarização senoidal de frequência  $w$ , chamada de  $i_A(t) = I_0 \text{sen}(\omega t)$ . A esta corrente é somada uma corrente diferencial, também senoidal, de mesma frequência. Conforme visto na figura 2.8 as correntes de alimentação das bobinas alinhadas na direção X são dadas pelas equações (2.29) e (2.30), e as correntes de alimentação das bobinas alinhadas na direção Y são dadas pelas equações (2.31) e (2.32).

$$i_1(t) = I_0 \text{sen}(\omega t) + i_x \text{sen}(\omega t) \quad (2.29)$$

$$i_3(t) = I_0 \text{sen}(\omega t) - i_x \text{sen}(\omega t) \quad (2.30)$$

$$i_2(t) = I_0 \text{sen}(\omega t) + i_y \text{sen}(\omega t) \quad (2.31)$$

$$i_4(t) = I_0 \text{sen}(\omega t) - i_y \text{sen}(\omega t) \quad (2.32)$$

As amplitudes das correntes diferenciais aplicadas à fase A,  $i_x$  e  $i_y$ , são responsáveis pelo controle das forças radial nas direções X e Y, respectivamente. Estas correntes terão amplitudes que deverão variar em torno do ponto de operação, permitindo a linearização da expressão da força de atração gerada pelo campo magnético,

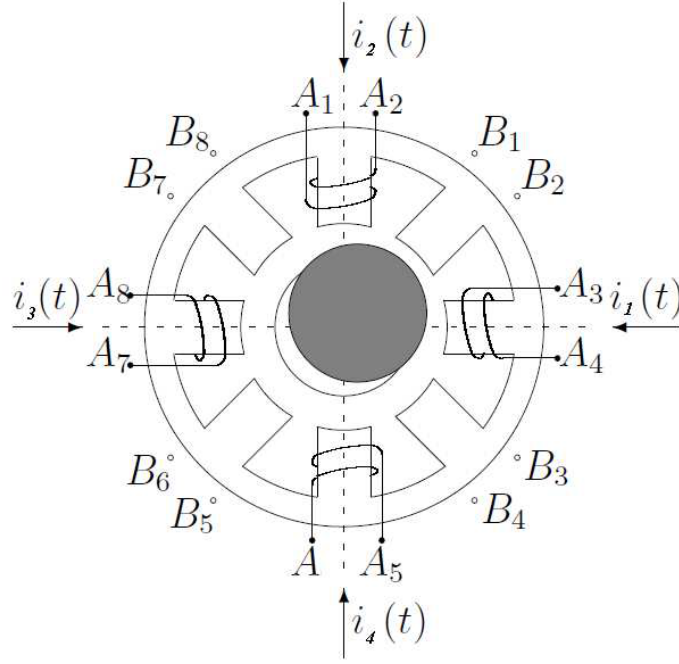


Figura 2.8: Enrolamentos da fase A e B do estator.

simplificando a expressão final.

Sendo a corrente de polarização da fase A descrita por:

$$i_A(t) = I_0 \sin(\omega t) \quad (2.33)$$

então a corrente de magnetização devido a esta corrente de polarização é dada por:

$$i_{hA}(t) = |H(j\omega)| I_0 \sin(\omega t + \theta) \quad (2.34)$$

Semelhantemente, as correntes de magnetização existentes em função das correntes diferenciais de controle aplicadas nos terminais das bobinas são dadas, tanto para a direção  $X$  como para a direção  $Y$ , respectivamente, por:

$$i_{xh}(t) = |H(j\omega)| i_x \sin(\omega t + \theta) \quad e \quad (2.35)$$

$$i_{yh}(t) = |H(j\omega)| i_y \sin(\omega t + \theta), \quad (2.36)$$

De maneira análoga, a corrente imposta na fase B também irá gerar uma corrente de magnetização, dada por:

$$i_{hB}(t) = |H(j\omega)| i_0 \sin(\omega t + \theta). \quad (2.37)$$

Conforme pode ser visto pelas equações (2.27) e (2.28) estas correntes de magnetização dependem da frequência das correntes impostas e do escorregamento  $\sigma$ .

Apesar da semelhança do princípio de funcionamento dos mancais magnéticos com

os motores mancais ser grande, o fato dos enrolamentos dos pólos estarem situados na mesma estrutura do estator acarreta enlace de fluxo magnético gerado por um pólo nos demais pólos do motor.

As equações (2.38) e (2.39) mostram que as forças resultantes do motor mancal em cada direção X e Y são funções dos fluxos totais resultantes destes enlaces em cada pólo.

$$f_{Ax} = \frac{1}{2\mu_0 A} (\phi_{T1}^2 - \phi_{T3}^2) \quad (2.38)$$

$$f_{Ay} = \frac{1}{2\mu_0 A} (\phi_{T2}^2 - \phi_{T4}^2). \quad (2.39)$$

Em [12], é mostrado o equacionamento desta força utilizando as expressões das correntes de magnetização  $i_{xh}$  e  $i_{yh}$ , permitindo obter as expressões finais das forças geradas em função das corrente de controle e das variáveis de posição  $x$  e  $y$ :

$$f_x = k_p x + k_i [1 + \cos 2(\omega t + \theta)] i_x \quad (2.40)$$

$$f_y = k_p y + k_i [1 + \cos 2(\omega t + \theta)] i_y, \quad (2.41)$$

sendo  $k_p$  e  $k_i$  dadas respectivamente por:

$$k_p = \frac{2\mu_0 A n_e^2 i_0^2}{h^3} |H(j\omega)|^2 \quad (2.42)$$

$$k_i = \frac{\mu_0 A n_e^2 i_0^2}{h^2} |H(j\omega)|, \quad (2.43)$$

onde  $\mu_0$  é a permeabilidade relativa do vácuo,  $n_e$  é o número de espiras da bobina,  $A$  é a área do gap de ar,  $i_0$  a corrente nas espiras,  $|H(j\omega)|$  definido por (2.27) e  $h$  é o comprimento do gap. Embora possa parecer que  $k_p$  e  $k_i$  sejam constantes, estes parâmetros dependem de  $|H(j\omega)|$  que é função da frequência do sinal senoidal da corrente e do escorregamento.

Outra consideração importante é que apesar da complexidade do equacionamento das expressões das forças, as equações  $f_x$  e  $f_y$  são desacopladas. Por último, a grande diferenciação desta expressões em relação as equações das forças geradas pelos mancais magnéticos está no termo cossenoidal  $\cos 2(\omega t + \theta)$  encontrado na expressão do motor mancal.

## 2.7 Modelo mecânico do motor mancal magnético

O protótipo do motor mancal magnético utilizado originalmente possuía em sua configuração completa dois motores de indução acoplados no mesmo eixo. Nesta concepção inicial do protótipo, havia um mancal vertical supercondutor que permitia a levitação do eixo independente de contato mecânico.

Na configuração atual, utiliza-se um arranjo simplificado do sistema, estando somente o motor superior ativado e exercendo forças de torque e posicionamento. O mancal supercondutor foi também substituído por um calço mecânico, permitindo o pivoteamento do rotor neste ponto. Será considerado que mecanicamente este ponto constitui uma articulação perfeita. Com isto há a simplificação da representação da posição do eixo escolhendo o ponto de pivoteamento como origem da referência do sistema de coordenadas. O motor mancal utilizado com a configuração atual é mostrado na figura 5.1. O modelo utilizado está descrito em [16] e permite uma

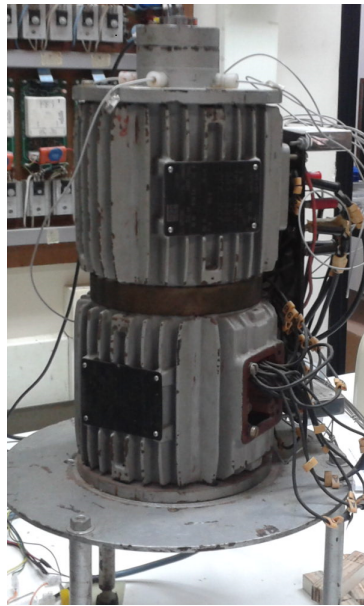


Figura 2.9: Foto do protótipo utilizado.

considerável simplificação na representação da dinâmica: a ordem do sistema é reduzida e a representação da posição de qualquer ponto do rotor pode ser descrita em função das dimensões do rotor e das coordenadas angulares em relação a um plano horizontal. A figura 2.10 apresenta o posicionamento do sistema de coordenada com origem no ponto de articulação do eixo. Este ponto corresponde a cota dos sensores inferiores de posição, que foram desativados.

As equações da dinâmica do eixo são determinadas pelas leis de Newton para movimento angular. Estas equações são definidas para os dois graus de liberdade

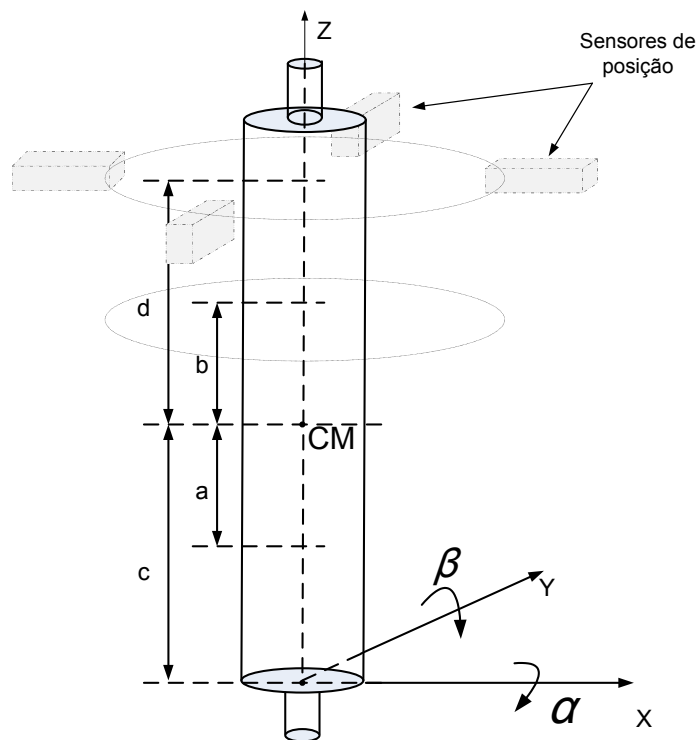


Figura 2.10: Sistema de coordenadas do motor simplificado.

que o sistema possui, representadas pelos ângulos  $\alpha$ , que representa a rotação em torno do eixo X, e o ângulo  $\beta$ , que representa a rotação em torno do eixo Y.

Sejam  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  os momentos de inércia do rotor com relação a um sistema de referência  $(x,y,z)$  fixo no seu CM (centro de massa). Pela simetria do rotor, temos  $I_x = I_y = I$ , e sejam  $J_x$  e  $J_y$  os momentos de inércia do rotor com relação a um sistema inercial  $(x,y,z)$  colocado na articulação, como se vê na figura 2.10. Como a massa do rotor é  $m$  e a distância do centro de massa ao ponto de pivoteamento é dada pela cota  $c$ , o teorema dos eixos paralelos garante que:

$$J = J_x = J_y = I + mc^2. \quad (2.44)$$

O efeito giroscópico, que deve ser levado em consideração em elevadas velocidades de rotação do eixo, acarreta o surgimento de um acoplamento entre as direções ortogonais X e Y. Este acoplamento ocorre pela geração de momentos em torno de um eixo e é proporcional à velocidade angular em torno dos outros eixos e do momento de inércia do rotor na direção Z. Com isto, temos as equações:

$$J\ddot{\beta} - \omega_r I_z \dot{\alpha}(t) = p_y(t) \quad (2.45)$$

$$J\ddot{\alpha} + \omega_r I_z \dot{\beta}(t) = p_x(t) \quad (2.46)$$

que representam a dinâmica do movimento do rotor em torno dos eixos X e Y, onde  $\omega_r$  é a velocidade de rotação do eixo,  $I_z$  o momento de inércia em torno do eixo Z,

e onde  $p_x$  e  $p_y$  são os torques com relação as direções X e Y causados pela forças de atração dos motores. Representando as equações dinâmicas na forma matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\beta} \\ -\ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_r I_z \\ -\omega_r I_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ -\dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_y \\ -p_x \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Reescrevendo (2.47) de forma compacta obtém-se:

$$M\ddot{v}(t) + G\dot{v}(t) = e(t) \quad (2.48)$$

sendo:

$$v = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

$$M = JI_{22} \quad (2.50)$$

$$G = \omega_r I_z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$e(t) = \begin{bmatrix} p_y \\ -p_x \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Em particular, a matriz giroscópica  $G = -G^T$  é antissimétrica. O vetor  $e(t)$  é a matriz de momentos, onde se levou em consideração somente forças de atração geradas pelo motor. Utilizando (2.16) e (2.19), e definindo  $v_b = [x_b \ y_b]^T$  como sendo a posição do rotor na cota b da figura 2.10 com relação aos eixos coordenados obtém-se:

$$F_B = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} k_p & 0 \\ 0 & k_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_i & 0 \\ 0 & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - \cos 2\omega t) & 0 \\ 0 & (1 - \cos 2\omega t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Definindo:

$$u = \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$v_b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$K_p = 2 \begin{bmatrix} k_p & 0 \\ 0 & k_p \end{bmatrix} \quad (2.56)$$



$$K_i = (1 - \cos 2\omega t) \begin{bmatrix} k_i & 0 \\ 0 & k_i \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

pode-se escrever a expressão matricial para as forças restauradoras na forma compacta como:

$$F_B = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = K_p v_b + K_i u \quad (2.58)$$

Os torques gerados pelas forças indicadas em (2.58) em relação ao ponto de articulação são dados pelas expressões:

$$p_x = -f_y(b+c) \cos \alpha \quad (2.59)$$

$$p_y = f_x(b+c) \cos \beta \quad (2.60)$$

Para pequenos deslocamentos angulares pode-se considerar  $\cos \alpha \approx 1$  e  $\cos \beta \approx 1$ , e então:

$$e(t) = \begin{bmatrix} p_y \\ -p_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} (b+c). \quad (2.61)$$

Utilizando (2.58) :

$$e(t) = (b+c)K_p v_b + (b+c)K_i u \quad (2.62)$$

e sabendo que as relações:

$$\beta \approx \sin \beta = \frac{x_b}{(b+c)} \quad e \quad \alpha \approx \sin \alpha = \frac{-y_b}{(b+c)} \quad (2.63)$$

são válidas somente para pequenos deslocamentos angulares. Correlacionando o vetor de posição de variáveis lineares  $v_b$  com o vetor de posição de variáveis angulares, chega-se à:

$$v_b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+c & 0 \\ 0 & b+c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Logo, reescrevendo a equação (2.62):

$$e(t) = K_p(b+c)^2 v + K_i(b+c)u, \quad (2.65)$$

e substituindo esta expressão em (2.48) obtemos:

$$M\ddot{v} + G\dot{z} - K_p(b+c)^2 v = K_i(b+c)u. \quad (2.66)$$

Como o valor das medidas das distâncias que serão computadas são aquelas

obtidas na cota  $d$ , que se encontra no mesmo plano dos sensores de posição, deve-se obter o efetivo deslocamento nesta posição. Deste modo definindo:

$$v_s = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix}, \quad (2.67)$$

que representa as variáveis de deslocamento do eixo na posição dos sensores, e usando as relações:

$$\text{sen}(\beta) \approx \beta = \frac{x_d}{d+c} \quad (2.68)$$

$$\text{sen}(\alpha) \approx \alpha = \frac{-y_d}{d+c} \quad (2.69)$$

para pequenos deslocamentos do eixo, obtemos:

$$v_s = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta(d+c) \\ -\alpha(d+c) \end{bmatrix} = (d+c) \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} = (d+c)v. \quad (2.70)$$

Escrevendo (2.66) em termos da variável  $v_s$  descrita em (2.70):

$$\ddot{v}_s + M^{-1}G\dot{v}_s - M^{-1}K_p(b+c)^2v_s = M^{-1}K_i(d+c)(b+c)u. \quad (2.71)$$

Definindo:

$$K_g' = M^{-1}G \quad (2.72)$$

$$K_p' = M^{-1}K_p(b+c)^2 \quad (2.73)$$

$$K_i' = M^{-1}K_i(d+c)(b+c) \quad (2.74)$$

reescreve-se a equação (2.71) como

$$\ddot{v}_s + K_g'\dot{v}_s - K_p'v_s = K_i'u. \quad (2.75)$$

Escrevendo a equação (2.75) na forma de espaço de estados, define-se a variável de estado

$$x = \begin{bmatrix} v_s \\ \dot{v}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \\ \dot{x}_d \\ \dot{y}_d \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

e separando o termo multiplicativo cossenoidal de  $K_i'$ , obtemos as equações do sis-

tema dinâmico:

$$\dot{x} = Ax + Bu - B \cos(2\omega t)u \quad (2.77)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.78)$$

onde as matrizes de estado (A,B,C,D) são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ K'_p & -K'_g \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ K'_i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0_4, \quad (2.79)$$

onde o vetor  $y$  representa o deslocamento do eixo na direção  $X$  e  $Y$ .

O desenvolvimento da expressão do motor mancal mostra a existência do termo cossenoidal como uma característica intrínseca deste sistema. Para que o modelo possa ser linearizado, este termo deve ser negligenciado, considerado portanto este termo como ruído. O sistema realimentado deverá portanto ser projetado para ser capaz de rejeitar esta perturbação.

## 2.8 Conclusão parcial

O sistema descrito pelas equações (2.77) a (2.79) representa o deslocamento do eixo medido na posição dos sensores. Este deslocamento é função da amplitude da corrente diferencial aplicada nos enrolamentos do motor. A matriz  $A$  também só poderá ser considerada invariante para uma determinada velocidade de operação, pelo fato de  $K'_p$  ser função da velocidade de rotação e do escorregamento, que é constante somente em regime permanente. Uma característica marcante dos Motores Mancais Magnéticos, um fator diferencial com relação aos mancais magnéticos tradicionais, é a existência do termo cossenoidal que multiplica o vetor de entrada de corrente. Este termo cossenoidal possui frequência duas vezes maior que a frequência elétrica que alimenta o motor. É possível linearizarmos o sistema, se o termo cossenoidal for considerado uma perturbação ao modelo. Seu efeito na perturbação da posição do eixo dependerá da resposta do sistema mecânico a este sinal, que é função da frequência natural do sistema.

# Capítulo 3

## Regulador $\mathcal{H}_\infty$

Inicialmente, deve ser dito que este capítulo é extenso e trata da revisão de conceitos e que podem ser omitidos pelos leitores mais experientes. Estes conceitos são necessários para o entendimento da formulação do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$ , não esgotando, no entanto, o assunto em virtude da complexidade e da profundidade do tema envolvido.

Será abordado a caracterização dos distúrbios e as especificações de desempenho e robustez desejados para o projeto. A técnica conhecida como transformação linear fracionada (LFT) será empregada para obter uma formulação do problema de forma mais conveniente, facilitando o equacionamento. Será apresentada a parametrização de todos os controladores estabilizantes e de informação completa, abordado inicialmente para o caso do horizonte finito, sendo posteriormente estendido para o caso do horizonte infinito. Finalmente é obtido a formulação do controlador para o caso da planta generalizada. Os conceitos que serão apresentados sobre desempenho e estabilidade robusta podem ser encontrados em [39] e [40]. A abordagem sobre a formulação do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  é obtida em [27].

### 3.1 Espaço de funções estáveis

Um sistema de controle é avaliado por suas características de desempenho e estabilidade. Uma maneira de medir o desempenho de um sistema é pela medida de alguns sinais de interesse escolhendo uma norma apropriada.

Uma matriz de transferência  $P$  define um sistema LTI estável se e somente se  $z = Pw$  for limitado para todo  $w$  limitado. Uma vez que  $z$  deve ser analítica no semiplano lateral direito, uma condição necessária para estabilidade é que  $P$  seja analítica no semiplano aberto lateral direito. A condição suficiente para o sinal  $z$  ser limitado, ou seja,  $\|z\|_2 < \infty$ , é  $\sup_{\alpha > 0} \{\sup_{\omega} \bar{\sigma}(P(\alpha + j\omega))\} < \infty$ . A classe de matrizes  $P$  de interesse é definida como:

$$\mathcal{H}_\infty = \{ P : P \text{ é analítico em } \operatorname{Re}(s) > 0 \text{ e } \|P\|_\infty < \infty \} \quad (3.1)$$

no qual

$$\|P\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(P(\alpha + j\omega)) \quad (3.2)$$

Um sistema que possua uma matriz de transferência no espaço  $\mathcal{H}_\infty$  é um sistema estável, ou seja  $P$  define um sistema estável se  $P \in \mathcal{H}_\infty$ .

No caso de  $P$  ser racional,  $P \in \mathcal{H}_\infty$  se e somente se  $P$  não possui pólos no semi plano lateral direito fechado. A classe de funções racionais pertencentes ao espaço  $\mathcal{H}_\infty$  é denominada  $\mathcal{RH}_\infty$ .

## 3.2 Representação de incertezas

As incertezas descrevem as diferenças entre o sistema real e o modelo matemático utilizado para representar este sistema. A literatura apresenta dois formatos principais para a representação destas incertezas: a representação por incertezas paramétricas e a representação relacionada ao comportamento dinâmico do sistema.

A representação da incerteza paramétrica é construída pela indicação das variações dos diversos parâmetros do modelo utilizado. Considere, por exemplo, um sistema de primeira ordem descrito por

$$\frac{1}{rs + 1}, \quad r = \bar{r}(1 + \delta),$$

onde  $r$  apresenta um conjunto de valores possíveis para um determinado parâmetro, cujo valor nominal é dado por  $\bar{r}$ , variando em torno de uma incerteza quanto ao valor real determinado por  $\delta$ .

Representa-se as incertezas de um sistema, quando a diferença entre o comportamento dinâmico da planta real em relação ao modelo utilizado é conhecida. As representações mais empregadas são a forma aditiva e a multiplicativa. A planta com perturbação aditiva,  $P_\Delta = P + \Delta$ , possui a representação em blocos mostrada na figura 3.1, enquanto a planta com perturbação multiplicativa,  $P_\Delta = P(I + \Delta)$ , tem a sua representação em blocos mostrada na figura 3.2.

A representação de incertezas na forma aditiva leva em consideração o erro absoluto entre a dinâmica do sistema real e o modelo, enquanto a representação da incerteza na forma multiplicativa leva em consideração o erro relativo. A conveniência de utilização de cada uma destas representações dependerá da natureza do problema.

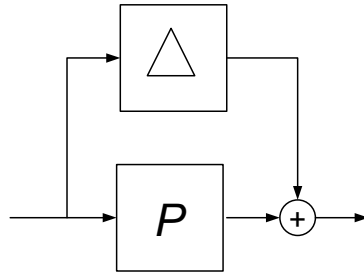


Figura 3.1: Perturbação aditiva.

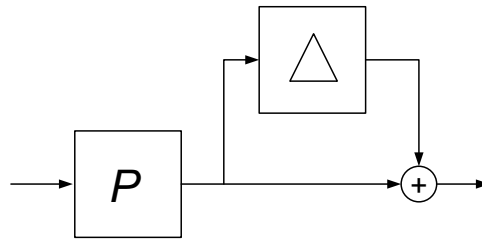


Figura 3.2: Perturbação multiplicativa.

### 3.3 Estabilidade robusta

Considere o sistema realimentado formado pela planta nominal com uma incerteza aditiva representado na figura 3.1 e um controlador  $K$ , conforme mostrado na figura 3.3. Como se supõe que o sistema nominal ( $\Delta = 0$ ) seja estável, as raízes do  $\det(I - PK)$  estão situadas no semi-plano esquerdo. Assim,

$$\det(I - PK(j\omega)) \neq 0, \quad \forall \omega.$$

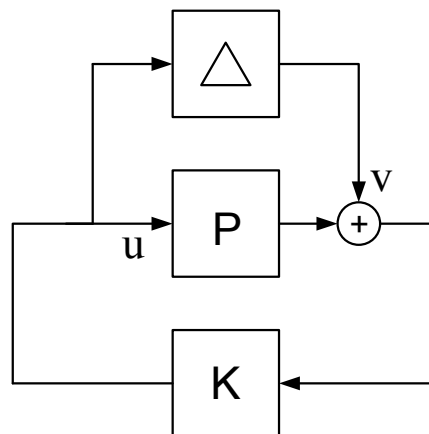


Figura 3.3: Malha de realimentação com perturbação aditiva.

Considerando que a perturbação  $\Delta$  leva o sistema para os limites da estabilidade,

para alguma frequência  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \det(I - PK(j\omega) - \Delta K(j\omega)) &= \\ \det[(I - \Delta K(I - PK)^{-1}(j\omega))(I - PK(j\omega))] &= \\ \det(I - \Delta K(I - PK)^{-1}(j\omega))\det(I - PK(j\omega)) &= 0, \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\det(I - \Delta K(I - PK)^{-1}(j\omega)) = 0,$$

uma vez que  $\det(I - PK(j\omega)) \neq 0$ . Pelas propriedades das operações com valores singulares, isto não ocorrerá se

$$\bar{\sigma}(\Delta K(I - PK)^{-1}(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega \text{ real} \quad (3.3)$$

De igual modo podemos estabelecer que

$$\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < \frac{1}{\bar{\sigma}(K(I - PK)^{-1}(j\omega))}, \quad \forall \omega \text{ real.} \quad (3.4)$$

A equação (3.4) define o valor limite de  $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega))$  para o qual o sistema ainda mantém a condição de estabilidade em malha fechada.

### 3.4 Especificação para estabilidade robusta

O Teorema do Pequeno Ganho tem importância fundamental para o equacionamento da estabilidade robusta (ER). Para o caso do controle  $\mathcal{H}_\infty$  ele pode ser enunciado pelo Teorema 3.1.

**Teorema 3.1** *Seja o sistema em malha fechada da figura 3.4. Se  $P_1(s) \in \mathcal{H}_\infty$  e  $P_2(s) \in \mathcal{H}_\infty$ , então o sistema em malha fechada é internamente estável se*

$$\|P_1P_2\|_\infty < 1, \quad e \quad (3.5)$$

$$\|P_2P_1\|_\infty < 1. \quad (3.6)$$

**Demonstração:** Ver [39]. □

Pelo Teorema do Pequeno Ganho, obtém-se o **Teorema 3.2**.

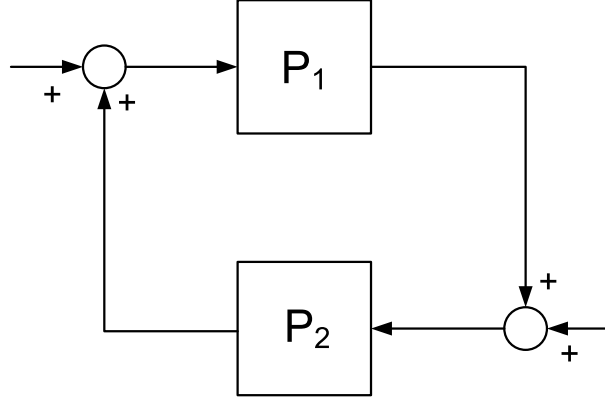


Figura 3.4: Configuração de realimentação.

**Teorema 3.2** Para  $\Delta(s) \in \mathcal{H}_\infty$ , o sistema em malha fechada possui estabilidade robusta se  $K(s)$  estabiliza a planta e

$$\|\Delta K(I - PK)^{-1}\|_\infty < 1; \quad (3.7)$$

$$\|K(I - PK)^{-1}\Delta\|_\infty < 1; \quad (3.8)$$

$$\|K(I - PK)^{-1}\|_\infty < \frac{1}{\|\Delta\|_\infty} \quad (3.9)$$

**Demonstração:** Ver [39]. □

Um sistema em malha fechada composto por uma planta  $P \in \mathcal{H}_\infty$  e um controlador  $K \in \mathcal{H}_\infty$  é robustamente estável se permanecer estável para todas as perturbações previstas durante o projeto. Isto implica que  $K$  também estabiliza a planta nominal. Considere o sistema com perturbação mostrado na figura 3.3, onde  $\Delta(s)$  é uma perturbação tal que  $\Delta \in \mathcal{H}_\infty$ . Verifica-se que a função de transferência do sinal  $v$  para  $u$  é dada por

$$T_{uv} = -K(I - PK)^{-1}. \quad (3.10)$$

O controle  $\mathcal{H}_\infty$  busca obter um controlador que estabilize o sistema de forma robusta na presença da maior perturbação esperada, em termos da norma infinita. Com isto, o problema a ser resolvido é:

$$\min \|K(I - PK)^{-1}\|_\infty. \quad (3.11)$$

Tendo conhecimento *a priori* da caracterização da resposta em frequência da perturbação, pode-se especificar uma função  $W_u$  tal que:

$$\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(W_u(j\omega)), \quad \forall \omega \in \mathcal{R}. \quad (3.12)$$

Deste modo, a condição de estabilização robusta se torna:



$$\|W_u K(I - PK)^{-1}\|_\infty < 1, \quad (3.13)$$

e o objetivo para o problema de otimização torna-se:

$$\min \|W_u K(I - PK)^{-1}\|_\infty, \quad (3.14)$$

sendo  $K$  estabilizante.

### 3.5 Especificação para desempenho nominal

A especificação de desempenho é traduzida pela escolha de funções pesos que caracterizem informações de restrição ao sistema. Seja o sistema realimentado presente na figura 3.5.

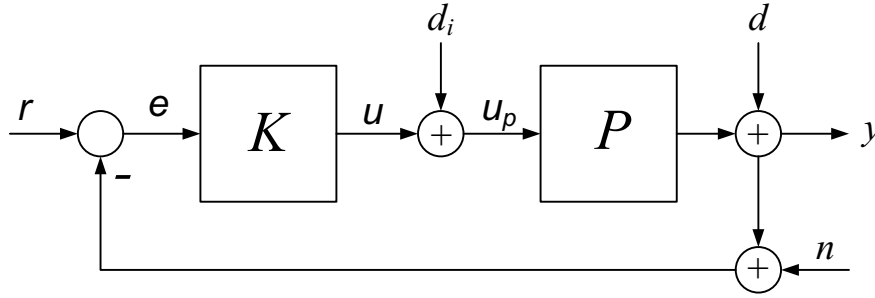


Figura 3.5: Malha de realimentação com sinais de distúrbios.

Define-se aqui a matriz de ganho de malha aberta  $L = PK$ , a matriz de sensibilidade  $S = (I + L)^{-1}$ , e a matriz de sensibilidade complementar  $T = I - S = L(I + L)^{-1}$ . Relacionando os sinais de interesse com os diversos sinais de distúrbio, é possível obter as relações:

$$y = T(r - n) + SPd_i + Sd \quad (3.15)$$

$$e = S(r - n) + Tn - SPd_i \quad (3.16)$$

$$u = KS(r - n) - KSd - Td_i \quad (3.17)$$

$$u_p = KS(r - n) - KSd + Sd_i \quad (3.18)$$

Estas quatro equações mostram os principais objetivos dos sistemas realimentados referentes ao desempenho nominal. Buscando melhorar a rejeição aos distúrbios  $d$ ,  $d_i$  e  $n$ , pode-se tentar reduzir o valor das funções  $S$ ,  $T$  e  $KS$ . No entanto, ocorrem problemas de compromissos a serem considerados. Aumentando o valor de  $PK$  com o intuito de reduzir o valor de  $S$ , reduz-se o efeito do distúrbio  $d$  no sinal  $y$  em (3.15). No entanto, outros compromissos de desempenho e estabilidade tem que ser satisfeitos impossibilitando um aumento indiscriminado no valor do ganho de

malha aberta. Considerando uma perturbação no modelo da planta nominal tal que  $P_\Delta = (I + \Delta)P$  com  $\Delta$  e  $P$  estáveis, o sistema em malha fechada perturbada é estável se

$$\det(I + (I + \Delta)PK) = \det(I + PK) \det(I + \Delta T) \quad (3.19)$$

não possuir zeros no semiplano lateral direito. Isto requer que  $\|\Delta T\|_\infty$  seja pequeno ou que  $\bar{\sigma}(T)$  seja pequeno nas frequências em que  $\Delta$  seja significativo, o que implica que o ganho de malha fechada  $\bar{\sigma}(T)$  deva ser pequeno nestas frequências.

Para sistemas escalares, os objetivos quanto ao desempenho podem apresentar a seguinte forma:

$$\begin{cases} |S(j\omega)| \leq \epsilon, & \forall \omega \leq \omega_0 \\ |S(j\omega)| \leq M, & \forall \omega > \omega_0 \end{cases} \quad (3.20)$$

sendo  $M$  e  $\epsilon$  escalares especificados pelo requisito de desempenho para a função sensibilidade. De forma geral, os requisitos de desempenho podem ser descritas por uma função cujo contorno especifique a conformação da função sensibilidade desejada, tal que:

$$|W_p(j\omega)S(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega,$$

onde, em geral,  $W_p$  é uma função de transferência que representa esta conformação.

Analogamente, pode ser utilizada outra função para refletir uma restrição ao sinal de controle, implicando em restrições na largura de banda ou na energia do sinal. Deste modo, podemos especificar uma condição de desempenho nominal para o sinal  $K(s)S(s)$  por meio da função  $W_u$ , tal que:

$$|W_u(j\omega)KS(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega$$

A figura 3.6 mostra o sistema realimentado com a representação dos sinais de interesse e com a indicação das funções peso para os sinais  $y$  e  $u$ . É essencial que a especificação das funções peso sejam feitas adequadamente, pois estabelecerão as restrições ao comportamento do sistema. Portanto, uma etapa bastante importante do projeto de controladores utilizando a técnica  $\mathcal{H}_\infty$  é a especificação das funções peso.

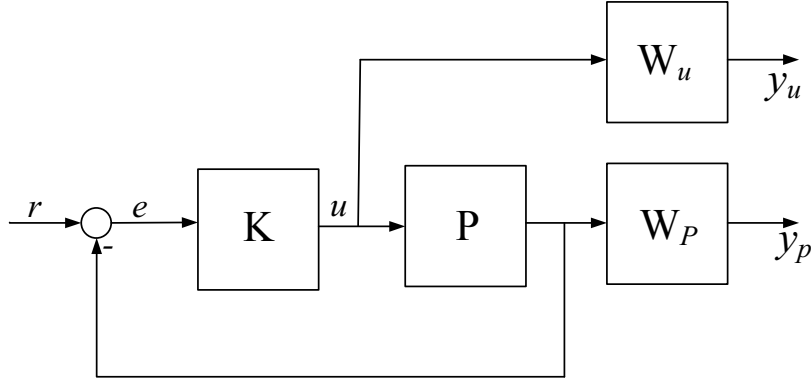


Figura 3.6: Malha de realimentação contendo os pesos de ponderação.

### 3.6 Especificação para desempenho robusto

Seja uma planta contendo uma perturbação multiplicativa. Um sistema realimentado é projetado para estabilizar a planta nominal e com perturbações, conforme mostrado na figura 3.7.

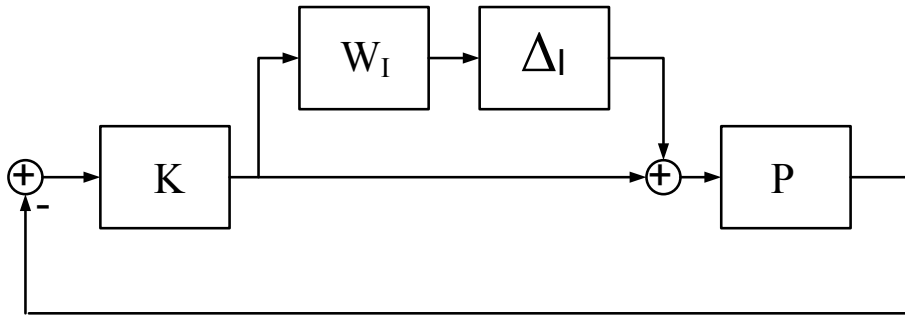


Figura 3.7: Sistema realimentado com perturbação multiplicativa.

Considera-se que a planta é modelada com uma perturbação multiplicativa dada por:

$$P_{\Delta}(s) = P(s)(I + W_I\Delta_I(s)), \quad (3.21)$$

sendo  $\Delta_I$  a perturbação normalizada pela função  $W_I$ , tal que  $\|\Delta_I\|_{\infty} < 1$ . Definindo  $L = KP$  como a matriz de ganho de malha aberta, pode-se derivar a condição de estabilidade robusta pelo gráfico de Nyquist. Como pode ser visto na figura 3.8,  $|I + L|$  é a distância do ponto -1 para o centro do disco com centro em  $L$  e raio  $|W_IL|$ .

Para a condição de estabilidade robusta temos:

$$|W_IL| < |I + L|, \quad \forall \omega \quad (3.22)$$

$$\left| \frac{W_IL}{I + L} \right| < 1, \quad \forall \omega \quad (3.23)$$

$$|W_IT| < 1, \quad \forall \omega, \quad (3.24)$$

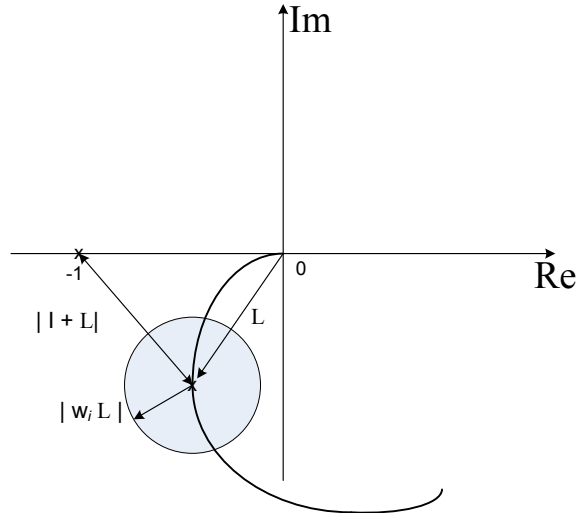


Figura 3.8: Diagrama de Nyquist para estabilidade robusta.

que estabelece que a função  $T = KP(I + KP)^{-1}$  estará limitada pela função  $W_I$  para obter a condição de estabilidade requerida.

Para análise do desempenho robusto, considere o sistema presente na figura 3.9, onde o bloco  $W_P$  descreve o desempenho desejado do sistema.

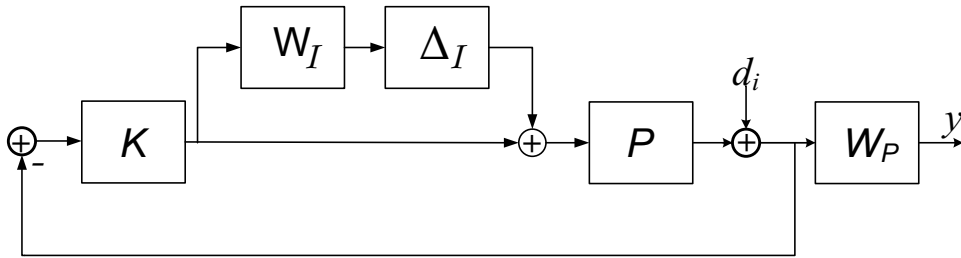


Figura 3.9: Diagrama em blocos com incertezas multiplicativa e bloco de desempenho.

A condição de desempenho robusto pode ser verificada pelo gráfico de Nyquist, conforme mostrado na figura 3.10. Para garantir que o sistema tenha desempenho robusto é necessário que todos os possíveis valores de  $L$  estejam fora do disco de raio  $|W_P|$  centrado em  $-1$ . Uma vez que  $L$ , em cada frequência, esteja dentro do disco de raio  $W_I L$  centrado em  $L$ , a condição para desempenho robusto é que os dois discos não se sobreponham. Como a distância entre eles é dada por  $|I + L|$ , a condição de desempenho robusto pode ser descrita como:

$$|W_P| + |W_I L| < |I + L|, \quad \forall \omega \quad (3.25)$$

$$|W_P(I + L)^{-1} + |W_I L(I + L)^{-1}| < 1, \quad \forall \omega \quad (3.26)$$

o que equivale a:

$$\max_{\omega} (|W_P S| + |W_I T|) < 1. \quad (3.27)$$

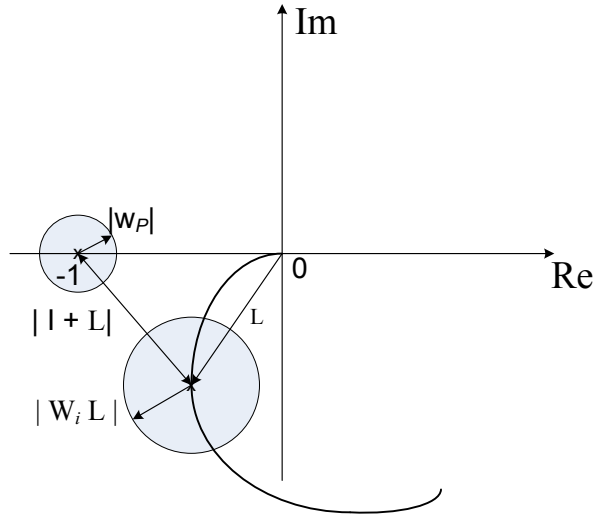


Figura 3.10: Diagrama de Nyquist para desempenho robusto.

As condições de estabilidade e desempenho apresentadas são válidas tanto para incertezas representadas por funções dinâmicas, descrita neste caso pela função  $W_I$ , como utilizando a representação de incertezas paramétrica. No entanto, para o caso das incertezas paramétricas, as condições apresentadas em (3.24) e (3.27) são condições apenas de suficiência para estabilidade e desempenho robusto. Quando é possível representar o sistema utilizando incertezas paramétricas, obtém-se resultados menos conservadores na verificação do atendimento dos requisitos de robustez utilizando o teste do valor singular estruturado ( $\mu$ ), que será visto neste capítulo.

### 3.7 Representação em blocos dos sistemas para análise de desempenho e estabilidade

Considere o sistema realimentado da figura 3.11, contendo a representação de incertezas multiplicativas, sendo  $W_I$  a representação da incerteza,  $\Delta_I$  a matriz de incertezas normalizada, tal que  $\|\Delta_I\|_\infty < 1$  e  $W_P$  a função que especifica o desempenho desejado para o sistema.

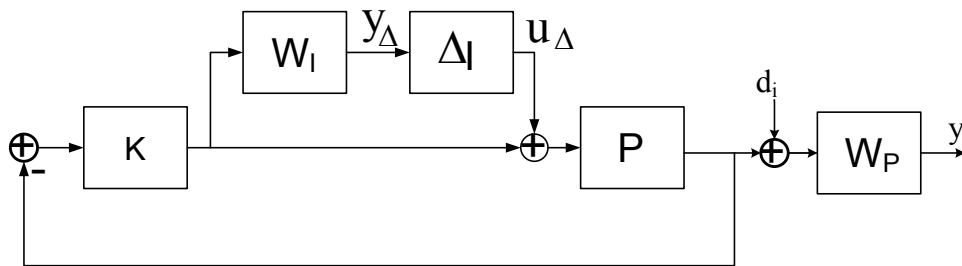


Figura 3.11: Sistema com incerteza multiplicativa e bloco de desempenho.

É possível rearranjar os elementos deste sistema em três blocos distintos, que são

os blocos do controlador, das incertezas  $\Delta$  e um bloco contendo os demais sinais e funções chamado de planta generalizada  $G$ , conforme é mostrado na figura 3.12.

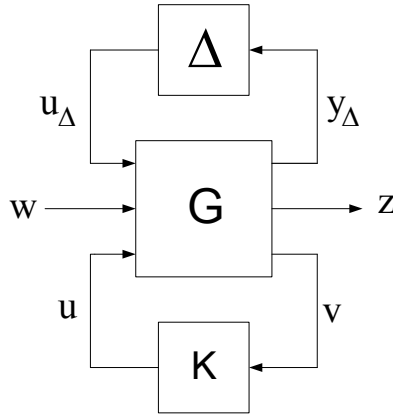


Figura 3.12: Configuração geral de controle.

A planta generalizada  $G$  para este caso é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W_I \\ W_P P & P & W_P P \\ -P & -I & -P \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Para a análise de desempenho robusto é conveniente incorporar o bloco  $K$  e o bloco  $G$  em um único bloco representado pelo bloco  $N$ , mostrado na figura 3.13. Esta estrutura é chamada de  $N\Delta$ .

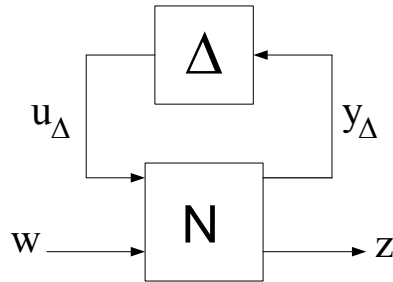


Figura 3.13: Estrutura  $N\Delta$ .

O bloco  $N$  relacionando  $G$  e  $K$  é obtido pela transformação linear fracionada definida por:

$$N = \mathcal{F}_l(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22})^{-1}G_{21}. \quad (3.29)$$

Para análise de estabilidade robusta da estrutura  $N\Delta$ , não são levados em consideração os sinais de entrada ao sistema. Com isto, define-se o bloco  $M = N_{11}$ , mostrado na figura 3.14. A condição de estabilidade robusta, considerando o bloco  $M\Delta$ , pode ser estabelecido como sendo:

$$\bar{\sigma}(M(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega \quad (3.30)$$

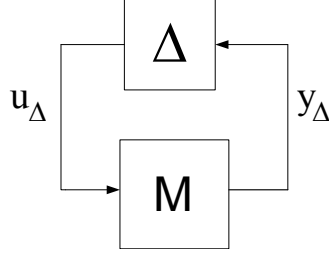


Figura 3.14: Estrutura  $M\Delta$ .

No entanto, (3.30) mostra-se muito conservador para a verificação da estabilidade robusta, considerando que a condição não é verificada para cada frequência individualmente. A realização de testes mais efetivos podem ser realizados utilizando valores singulares estruturados (SSV).

### 3.8 Valor singular estruturado

O valor singular estruturado ( $\mu$ ) é uma função que provê a generalização do valor singular ( $\bar{\sigma}$ ). Para definição, considere a estrutura  $M\Delta$ , para o qual  $\Delta$  é um conjunto diagonal. Para a obtenção da estabilidade robusta deve-se verificar se:

$$\det(I - M\Delta(j\omega)) \neq 0, \quad \forall \omega, \quad \forall \Delta, \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1. \quad (3.31)$$

Escalonando a matriz  $\Delta$  por um fator  $k_m$ , busca-se o menor valor de  $k_m$  que torna a matriz  $(I - k_m M\Delta)$  singular, ou seja:

$$\det(I - k_m M\Delta(j\omega)) = 0 \quad (3.32)$$

Pode-se então definir:

$$\mu(M) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\min\{k_m \mid \det(I - k_m M\Delta) = 0\}}. \quad (3.33)$$

A expressão (3.33) representa o tamanho que a perturbação  $\Delta$  pode ter sem que (3.32) se torne singular, ou seja, para o qual o sistema se torna instável. Deste modo, a estrutura  $M\Delta$  é estável para todas as perturbações possíveis se  $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$  e se e somente se:

$$\mu(M(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega. \quad (3.34)$$

Para o teste de desempenho robusto é utilizando o bloco  $N\Delta$ . O teste verifica se:

$$F = \mathcal{F}_u(N, \Delta) < 1 \quad (3.35)$$

para todas as perturbações admissíveis. Neste caso, a condição de desempenho robusto também será considerada como uma condição que deva ser satisfeita, sendo incorporada ao bloco de perturbações. Com isto, temos que:

$$\|F\|_\infty = \|\mathcal{F}_u(N, \widehat{\Delta})\|_\infty < 1 \quad (3.36)$$

para

$$\widehat{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta & \\ & \Delta_P \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

onde  $\widehat{\Delta}$  corresponde ao bloco contendo as condições de estabilidade e desempenho.

### 3.9 O Regulador generalizado de informação completa

Nesta seção, será considerando o sistema realimentado presente na figura 3.15, descrito pelas equações (3.38) e (3.39). Sob a forma de uma LFT, este sistema também é descrito pela equação (3.40). Esta transformação de sistemas permite uma representação mais conveniente para a determinação de controladores estabilizantes.

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$u = \mathbf{K}y \quad (3.39)$$

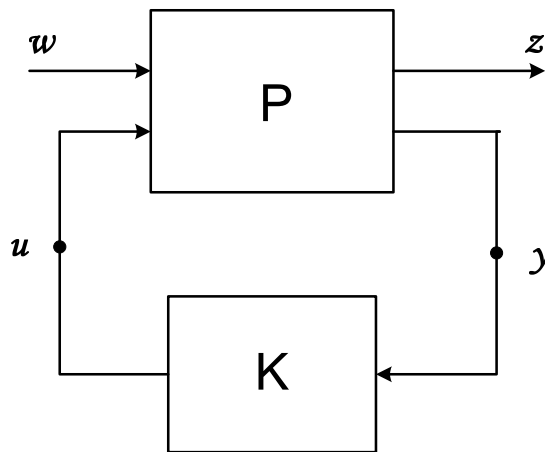


Figura 3.15: Sistema realimentado com sinal de medida.

$$\mathcal{F}_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}, \quad (3.40)$$



O objetivo a ser alcançado em termos de uma LFT consiste em selecionar um controlador  $K$  tal que o sistema em malha fechada  $\mathcal{F}_l(P, K)$ , mapeando  $w$  em  $z$ , possua uma norma infinita minimizada ( $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ ), sujeito a restrição de possuir estabilidade interna. Este problema é conhecido como problema do regulador generalizado [39].

O regulador do problema de controle generalizado tem unicamente acesso ao sinal medido  $y$ . Contudo, será visto inicialmente um controle que tem acesso a informação completa. A reconstrução da informação completa será feita por meio de um filtro  $\mathcal{H}_\infty$ . A configuração do problema da informação completa é mostrada na figura 3.16. No problema da informação completa o sinal de controle é gerado tanto pelos estados  $x$  como pelo sinais de distúrbios  $w$ , conforme mostrado em (3.41) .

$$u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

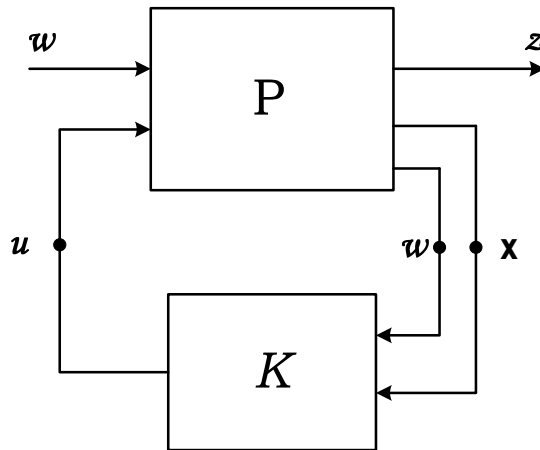


Figura 3.16: Configuração para informação completa.

### 3.9.1 Parametrização de todos os sinais de controle

Considere qualquer sinal de controle que pode ser gerado por

$$u_L = L_1 x + L_2 w \quad (3.42)$$

considerando

$$u = K_1 x + (K_2 + \mathbf{U})w \quad (3.43)$$

no qual  $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$  é qualquer controlador de informação completa e  $\mathbf{U}$  é um sistema linear qualquer. Verifica-se esta proposição supondo que (3.42) seja

implementado por

$$\dot{x}_L = (A + B_2L_1)x_L + (B_1 + B_2L_2)w, \quad x(0) = 0. \quad (3.44)$$

Esta equação diferencial descreve um sistema linear  $W_L$  mapeando  $w \mapsto x_L$ . Assim,

$$u_L = (L_1W_L + L_2)w. \quad (3.45)$$

Fazendo  $x = x_L$  em (3.43), fornece

$$u = (K_1W_L + K_2 + U)w. \quad (3.46)$$

Para gerar o sinal de controle  $u_L$  obtido de (3.43) deve-se usar

$$U = (L_1 - K_1)W_L + L_2 - K_2. \quad (3.47)$$

Deste modo, todos os sinais de controle que podem ser gerados por leis de controle de informação completa também podem ser gerados por

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_2 + U \end{bmatrix} = \mathcal{F}_l \left( \left[ \begin{array}{cc|c} K_1 & K_2 & I \\ 0 & I & 0 \end{array} \right], U \right), \quad (3.48)$$

sendo  $U$  um sistema linear.

### 3.9.2 Parametrização de um sinal de controle particular

Suponha um controlador de informação completa  $K = [K_1 \quad K_2]$  que gere o sinal de controle

$$u = [K_1 \quad K_2] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Deve-se encontrar todos os controladores de informação completa que gerem o mesmo sinal de controle. Uma vez que qualquer controlador que gere o mesmo sinal de controle deve gerar o mesmo sistema em malha fechada  $w \mapsto z$ , isto irá fornecer a parametrização de todos os controladores que forneçam uma dada malha fechada.

Seja  $\hat{x}$  a solução para a equação diferencial

$$\dot{\hat{x}} = (A + B_2K_1)\hat{x} + (B_1 + B_2K_2)w + B_2r, \quad \hat{x}(0) = 0, \quad (3.50)$$

no qual  $r$  é dado por

$$r = V(x - \hat{x}), \quad (3.51)$$

onde  $V$  é um sistema linear arbitrário.

Uma vez que  $\hat{x}(0) = x(0)$ , tem-se que  $r(0) = 0$  para qualquer  $V$ . Como consequência,  $\hat{x} \equiv x$  e  $r \equiv 0$  para todo  $t \geq 0$ . Deste modo:

$$u = K_1x + K_2w + r \quad (3.52)$$

para todo  $t \geq 0$ . Com isto é obtido

$$\begin{bmatrix} u \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & I \\ I & -W_1 & -W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ r \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$r = V(x - \hat{x}), \quad (3.54)$$

no qual  $W_1$  é descrito por

$$\dot{\hat{x}} = (A + B_2K_1)\hat{x} + (B_1 + B_2K_2)w, \quad (3.55)$$

e  $W_2$  é descrito por

$$\dot{\hat{x}} = (A + B_2K_1)\hat{x} + B_2r. \quad (3.56)$$

Fazendo

$$K_a = \left[ \begin{array}{cc|c} K_1 & K_2 & I \\ \hline I & -W_1 & -W_2 \end{array} \right] \quad (3.57)$$

obtemos

$$u = \mathcal{F}_l(K_a, V) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$= [K_1 + Z \quad K_2 - ZW_1] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

para o qual

$$Z = V(I + W_2V)^{-1}. \quad (3.60)$$

O sinal de controle  $u$  em (3.59) é idêntico ao obtido em (3.49), visto que  $x = W_1w$ . Deste modo, (3.58) gera a classe de controladores que produz o mesmo sinal de controle como em (3.49). Para verificar que esta LFT realmente engloba todos os controladores como  $V$  engloba todos os sistemas lineares, percebe-se que há uma correspondência um a um entre  $Z$  e  $V$  em (3.60). Deste modo, dado um  $Z$  arbitrário,

pode-se sempre encontrar um  $V$  que gera  $Z$ . Isto mostra que  $K_1 + Z$  é arbitrário em (3.59) e varia com  $V$ . Conclui-se que todas as leis de controle que possuem o mesmo sinal de controle como em (3.49) são gerados por (3.58).

### 3.9.3 Parametrização de todos os controladores

A representação de todos os controladores de informação completa é obtida pela combinação da parametrização de todos os sinais de controle com a parametrização de todos os controladores que dão origem ao mesmo sinal de controle. Para realizar esta representação combina-se (3.53) com

$$r = V(x - \hat{x}) + Uw. \quad (3.61)$$

Isto fornece

$$u = \mathcal{F}_l(K_{aa}, [V \ U]), \quad (3.62)$$

onde

$$K_{aa} = \left[ \begin{array}{cc|c} K_1 & K_2 & I \\ \hline I & -W_1 & -W_2 \\ 0 & I & 0 \end{array} \right]. \quad (3.63)$$

Com isto

$$[L_1 \ L_2] = \mathcal{F}_l(K_{aa}, [V \ U]) \quad (3.64)$$

gera todas as leis de controle de informação completa.

### 3.9.4 Simplificação da planta generalizada

A obtenção de uma estrutura equivalente para o sistema em malha fechada tem como objetivo obter uma expressão mais simplificada para o equacionamento da expressão final.

Seja a planta generalizada descrita por

$$P = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (3.65)$$

em que o espaço de estados satisfaz os seguintes pressupostos:

1.  $(A, B_2, C_2)$  seja estabilizável e detectável.
2. Posto  $D_{12} = m$  e posto  $D_{21} = q$ .

$$3. \text{ Posto } \begin{bmatrix} j\omega I & -B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = m + n \text{ para todo } \omega \text{ real.}$$

$$4. \text{ Posto } \begin{bmatrix} j\omega I & -B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = q + n \text{ para todo } \omega \text{ real.}$$

O objetivo do escalonamento e do procedimento de deslocamento em malha fechada é substituir a planta em (3.65) por um problema equivalente na forma

$$\hat{P} = \left[ \begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & 0 & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (3.66)$$

com as mesmas restrições descritas para o sistema (3.65).

O procedimento de escalonamento e de deslocamento em malha fechada pode ser dividido em quatro passos. No quinto passo é obtido o controlador para a planta modificada, sendo obtido o controlador para a planta original por substituição reversa no passo final. Será considerado o sistema presente na figura 3.17. Pela escolha apropriada dos diversos blocos é possível obter uma equivalência tal que, por transformação lineares (LFT), seja possível obter um sistema tal que  $\mathcal{F}_l(P, K) = \mathcal{F}_l(\hat{P}, \tilde{K})$ .

### Passo 1

O objetivo deste passo é fazer  $\bar{D}_{11} = 0$ . Este objetivo é alcançado pela processo de minimização de  $\|\bar{D}_{11}\|$ . Verifica-se que:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ u \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

$$u = Fy + \tilde{u}, \quad (3.68)$$

então

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ y \end{bmatrix} = \mathcal{F}_l \left( \left[ \begin{array}{cc|c} P_{11} & P_{12} & P_{12} \\ \hline P_{21} & P_{22} & P_{22} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \end{array} \right], F \right) \begin{bmatrix} y_2 \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ \tilde{u} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

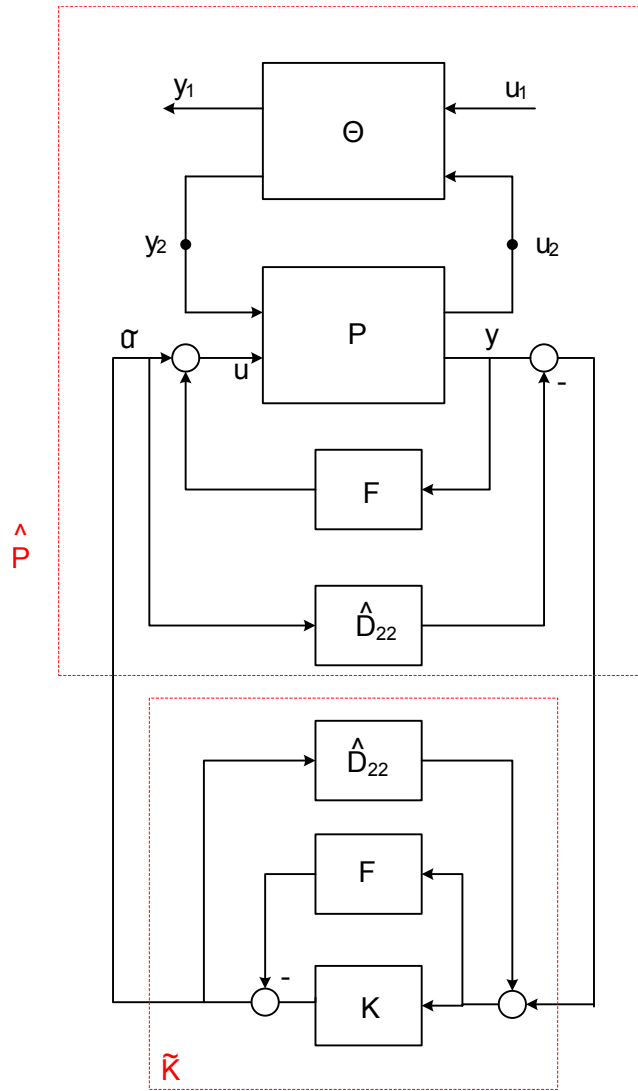


Figura 3.17: Procedimento de transformação em malha fechada.

Eliminando  $u$  de

$$\dot{x} = Ax + B_1 y_2 + B_2 u \quad (3.71)$$

$$u_2 = C_1 x + D_{11} y_2 + D_{12} u \quad (3.72)$$

$$y = C_2 x + D_{21} + D_{22} u \quad (3.73)$$

e usando (3.68) tem-se a realização:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \left[ \begin{array}{c|cc} A + B_2F(I - D_{22}F)^{-1}C_2 & B_1 + B_2F(I - D_{22}F)^{-1}D_{21} & B_2(I - FD_{22})^{-1} \\ \hline C_1 + D_{12}F(I - D_{22}F)^{-1}C_2 & D_{11} + D_{12}F(I - D_{22}F)^{-1}D_{21} & D_{12}(I - FD_{22})^{-1} \\ (I - D_{22}F)^{-1}C_2 & (I - D_{22}F)^{-1}D_{21} & (I - D_{22}F)^{-1}D_{22} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|cc} \bar{A} & \bar{B}_1 & \bar{B}_2 \\ \hline \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Pelo fato de que  $\bar{D}_{11} = \mathcal{F}_l(D, F)$ , escolhe-se  $F$  tal que  $\|\bar{D}_{11}\| = \gamma_0$  onde

$$\gamma_0 = \max\{\|\hat{D}_{12}^*D_{11}\|, \|D_{11}\hat{D}_{21}^*\|\}, \quad (3.74)$$

Considerando o ponto  $s = \infty$ , verifica-se que  $\gamma > \gamma_0$  é necessário para a existência de  $K$  para o qual  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ . Além disto,  $\|\bar{P}_{11}\|_2$  é finito somente se  $\gamma_0 = 0$ . Para que

$$\max\{\|\hat{D}_{12}^*D_{11}\|, \|D_{11}\hat{D}_{21}^*\|\} = 0, \quad (3.75)$$

é necessário a existência de um sistema dinâmico  $K$  tal que  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_2 < \infty$ . Conseqüentemente  $\bar{D}_{11} = 0$  sempre que existir uma solução de norma 2 finita.

## Passo 2

Neste passo é escolhido uma matriz  $\Theta$  ortogonal, conforme mostrado na figura 3.17, tal que garanta  $\mathcal{F}_l(\Theta, \bar{D}_{11}) = 0$ . Para isto é definido:

$$\left[ \begin{array}{cc} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{array} \right] = \gamma^{-1} \left[ \begin{array}{cc} \gamma^{-1}\bar{D}_{11} & (I - \gamma^{-2}\bar{D}_{11}\bar{D}_{11}^*)^{\frac{1}{2}} \\ -(I - \gamma^{-2}\bar{D}_{11}^*\bar{D}_{11})^{\frac{1}{2}} & \gamma^{-1}\bar{D}_{11}^* \end{array} \right], \quad (3.76)$$

tal que satisfaça  $\Theta\Theta^* = \gamma^{-2}I$  e  $\|\Theta_{22}\|_2 < \gamma^{-1}$  para todo  $\gamma > \gamma_0$ . Uma vez que  $\|y_1\|_2^2 - \gamma^{-2}\|u_1\|_2^2 = \gamma^{-2}\|u_2\|_2^2 - \|y_2\|_2^2$ , conclui-se que  $\|\mathcal{F}_l(\hat{P}, K)\|_\infty \leq \gamma^{-1}$  se e somente se  $\|\mathcal{F}_l(\bar{P}, K)\|_\infty \leq \gamma$ . Uma vez que  $\Theta$  é uma matriz constante com  $\|\Theta_{22}\|_2 < \gamma^{-1}$ , pelo Teorema do Pequeno Ganho, pode-se mostrar que  $\mathcal{F}_l(\hat{P}, K)$  é internamente estável se e somente se  $\mathcal{F}_l(\bar{P}, K)$  também for estável. Com isto, conclui-se que  $\hat{P}$  e  $\bar{P}$  descrevem problemas equivalentes sobre a questão da estabilidade e sobre o atendimento da condição de norma infinita. O sistema  $\hat{P} = \mathcal{C}_l(\Theta, \bar{P})$ , formado pela

composição entre  $\Theta$  e  $\bar{P}$ , é obtido pela realização:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \left[ \begin{array}{c|cc} \bar{A} + \bar{B}_1 \Theta_{22} (I - \bar{D}_{11} \Theta_{22})^{-1} \bar{C}_1 & \bar{B}_1 (I - \Theta_{22} \bar{D}_{11})^{-1} \Theta_{21} & \bar{B}_2 + \bar{B}_1 \Theta_{22} (I - \bar{D}_{11} \Theta_{22})^{-1} \bar{D}_{12} \\ \Theta_{12} (I - \bar{D}_{11} \Theta_{22})^{-1} \bar{C}_1 & 0 & \Theta_{12} (I - \bar{D}_{11} \Theta_{22})^{-1} \bar{D}_{12} \\ \bar{C}_2 + \bar{D}_{21} \Theta_{22} (I - \bar{D}_{11} \Theta_{22})^{-1} \bar{C}_1 & \bar{D}_{21} (I - \Theta_{22} \bar{D}_{11})^{-1} \Theta_{21} & \bar{D}_{22} + \bar{D}_{21} \Theta_{22} (I - \bar{D}_{11} \Theta_{22})^{-1} \bar{D}_{12} \end{array} \right] \\ &= \left[ \begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & 0 & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{array} \right] \end{aligned}$$

que possui  $\hat{D}_{11} = 0$ .

### Passo 3

A eliminação de  $\hat{D}_{22}$  ocorre pela conexão de  $-\hat{D}_{22}$  em  $\hat{P}_{22}$ , como ilustrado na figura 3.17.

### Passo 4

Selecionar as matrizes de escalonamento  $S_1$  e  $S_2$  tal que  $\hat{D} = \tilde{D}_{12} S_1$  satisfazendo  $\hat{D}'_{12} \hat{D}_{12} = I_m$ , e  $\hat{D}_{21} = S_2 \tilde{D}_{21}$  satisfazendo  $\hat{D}_{21} \hat{D}'_{21} = I_q$ . O problema do regulador generalizado se torna então

$$\hat{P} = \left[ \begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & 0 & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (3.77)$$

no qual  $\hat{B}_2 = \tilde{B}_2 S_1$  e  $\hat{C}_2 = S_2 \tilde{C}_2$ . Isto completa a substituição de (3.65) por (3.66).

### Passo 5

Neste passo, a planta está representada na forma  $\hat{P}$  que permite o projeto do controlador  $\tilde{K}$ .

### Passo 6

Para obter o controlador  $K$  que controla a planta original  $P$ , deve-se reverter o deslocamento da malha fechada. Pela figura 3.17 obtém-se:

$$K = \mathcal{F}_l \left( \left[ \begin{array}{cc} F & I \\ I & -\hat{D}_{22} \end{array} \right], S_2 \tilde{K} S_1 \right), \quad (3.78)$$

que é o controlador desejado.



### 3.10 Parametrização de controladores estabilizantes

O problema principal nos sistema de controle de malha fechada é obter a estabilidade. O problema seguinte consiste em efetuar uma busca entre os controladores estabilizantes visando a otimização. A parametrização dos controladores estabilizantes pode ser estabelecida por uma LFT:

$$K = \mathcal{F}_l(K_s, Q), \quad Q \in \mathcal{RH}_\infty \quad (3.79)$$

Um  $K_s$  apropriado pode ser criado de qualquer matriz estabilizante e qualquer matriz de observador estabilizante. O parâmetro  $Q$  é arbitrário e estabilizante.

A figura 3.18 representa a transformação linear fracionada entre  $P$  e  $K$ , podendo também descrever a transformação entre  $T$  e  $Q$ , tendo  $T$  a seguinte forma:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

para o qual

$$\mathcal{F}_l(P, K) = \mathcal{F}_l(T, Q) = T_{11} + T_{12}QT_{21} \quad (3.81)$$

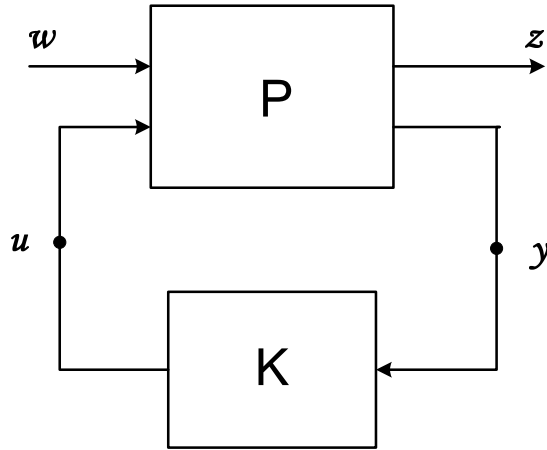


Figura 3.18: Transformação linear fracionada

Com isto  $\mathcal{F}_l(P, K) = \mathcal{F}(T, Q)$ , sendo  $T$  obtido de  $P$  e  $K_s$  por composição. O problema em obter um controlador estabilizante se transforma em obter um  $Q$  estável.

Logo, a solução do problema do regulador generalizado no qual se deseja que  $\|\mathcal{F}(P, K)\|_\infty$  seja minimizado se transforma em um problema de casamento de modelo no qual se busca um  $Q$  estável para o qual  $T_{12}QT_{21}$  seja aproximadamente igual a  $-T_{11}$ .

**Lema 3.1** O sistema em malha fechada contido na figura 3.19 é internamente estável se e somente se

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty. \quad (3.82)$$

**Demonstração:** Verificando a figura 3.19 obtemos a representação:

$$\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -K \\ -P & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

deste modo:

$$\begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -K \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$$

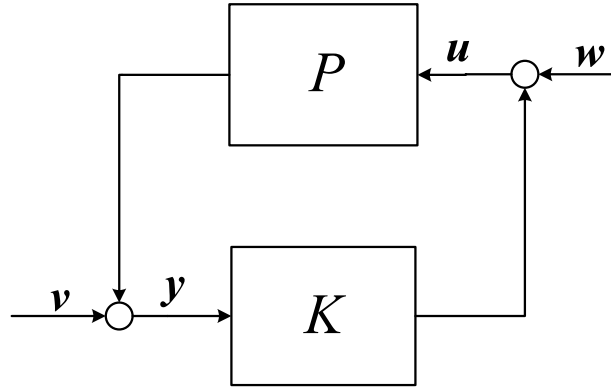


Figura 3.19: Diagrama de um sistema realimentado.

□

### 3.11 Fatoração Coprima

**Definição:** Duas matrizes de transferência  $N$  e  $D$ , com o mesmo número de colunas, são denominadas *coprimas pela direita* se existirem matrizes  $X, Y$  tal que

$$XN + YD = I. \quad (3.84)$$

Esta equação é chamada de *equação de Bezout*.

**Definição:** Se  $N$  e  $D$  são coprimos pela direita e  $D$  é não singular, então  $ND^{-1}$  é denominada de *fatoração coprima pela direita*.

**Definição:** Duas matrizes de transferência  $\tilde{N}$  e  $\tilde{D}$  com o mesmo número de linhas são denominadas *coprimas pela esquerda* se existirem matrizes  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  tal que

$$\tilde{N}\tilde{X} + \tilde{D}\tilde{Y} = I$$

se  $\tilde{N}$  e  $\tilde{D}$  são coprimas pela esquerda e  $\tilde{D}$  é não singular, então  $\tilde{D}^{-1}\tilde{N}$  é chamado fatoração coprima pela esquerda.

**Lema 3.2** *Seja  $N_1D_1^{-1} = N_2D_2^{-1}$  duas fatorações coprimas pela esquerda. Então:*

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ D_1 \end{bmatrix} W \quad (3.85)$$

no qual  $W$  e  $W^{-1}$  estão em  $\mathcal{RH}_\infty$ .

**Demonstração:**[27]. □

### 3.11.1 Fatoração coprima e estabilidade interna

**Teorema 3.3** *Supondo que  $G = ND^{-1}$  seja uma fatoração coprima pela direita e que  $X, Y \in \mathcal{RH}_\infty$  satisfaça a equação de Bezout  $XN + YD = I$ . Se  $Y$  for não singular, então  $K = -Y^{-1}X$  é um controlador estabilizante para  $G$ . Deste modo*

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ -G & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^{-1} & Y^{-1}X \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ -ND^{-1} & I \end{bmatrix}, \quad (3.86)$$

o que fornece

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ -G & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D & 0 \\ N & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & -X \\ 0 & I \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty. \quad (3.87)$$

**Demonstração:** Utilizando o critério de Nyquist,  $K$  é estabilizante se e somente se o número de envoltimentos no sentido anti-horário da origem por  $\det(I - KG)(s)$ , enquanto  $s$  atravessa o contorno de Nyquist, for igual a  $n_K + n_G$ , sendo  $n_K$  e  $n_G$  o número de pólos de  $K$  e  $G$ , respectivamente, no semi-plano lateral direito. Se  $G = ND^{-1}$  e  $K = -\tilde{Y}^{-1}\tilde{X}$  então  $-n_G$  é o número de envoltimentos da origem no sentido anti-horário realizado pelo determinante de  $D(s)$  e  $-n_K$  é o número de envoltimentos da origem no sentido anti-horário realizado pelo determinante de  $\tilde{Y}(s)$ , quando  $s$  percorre o contorno de Nyquist. Uma vez que

$$\det(\tilde{Y}D + \tilde{X}N) = \det \tilde{Y} \det D \det(I - KG),$$

segue que  $\det(\tilde{Y}D + \tilde{X}N)(s)$  não envolve a origem enquanto  $s$  percorre o contorno de Nyquist. Assim,  $V = \tilde{Y}D + \tilde{X}N \in \mathcal{RH}_\infty$  não pode ter qualquer zero no semi-plano direito, dado que  $V^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$ . Assim,  $K = -Y^{-1}X$ , no qual  $X = V^{-1}\tilde{X}$

e  $Y = V^{-1}\tilde{Y}$ , é uma fatoração coprima a esquerda de  $K$  e  $XN + YD = I$ . Deste modo  $K$  é um controlador estabilizante para  $G = ND^{-1}$  se e somente se  $K$  tenha uma fatoração coprima a direita  $K = -Y^{-1}X$  para o qual a identidade de Bezout é satisfeita.  $\square$

### 3.11.2 Fatoração coprima dupla

Sendo  $G = N_r D_r^{-1}$  satisfazendo  $XN_r + YD_r = I$ , e  $G = N_l D_l^{-1}$  satisfazendo  $N_l X + D_l Y = I$ , então

$$\begin{bmatrix} Y_r & X_r \\ -N_l & D_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & D_r R - X_l \\ N_r & N_r R + Y_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

no qual  $R = Y_r X_l - X_r Y_l$ .

Isto mostra que para qualquer fatoração coprima pela esquerda ou pela direita, da mesma matriz função de transferência ( $N_r D_r^{-1} = D_l^{-1} N_l$ ), existem matrizes funções de transferência  $U_r, V_r, U_l$  e  $V_l$ , tal que a equação generalizada de Bezout e descrita em termos da fatoração coprima dupla dada por

$$\begin{bmatrix} V_r & U_r \\ -N_l & D_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & -U_l \\ N_r & V_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

que pode ser utilizada para parametrizar todos os controladores estabilizantes.

**Teorema 3.4** *Suponha que  $P = D + C(sI - A)^{-1}B$  é uma realização detectável e estabilizante de uma matriz de transferência  $P$ . Seja  $F$  uma matriz de realimentação de estados para o qual  $A - BF$  seja assintoticamente estável, e seja  $H$  uma matriz observador tal que  $A - HC$  seja assintoticamente estáveis. Defina-se*

$$\begin{bmatrix} D_r & -U_l \\ N_r & V_l \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A - BF & B & H \\ \hline -F & I & 0 \\ C - DF & D & I \end{array} \right] \quad (3.90)$$

$$\begin{bmatrix} V_r & U_r \\ -N_l & D_l \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A - HC & B - HD & H \\ \hline F & I & 0 \\ -C & -D & I \end{array} \right] \quad (3.91)$$

Então a equação generalizada de Bezout (3.89) é válida e  $P = N_r D_r^{-1} = D_l^{-1} N_l$  são fatorações a direita e a esquerda de  $P$ .

**Demonstração:** Seja um controlador formado pela combinação de um observador estabilizante e uma realimentação de estados estabilizante tal que

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - (C\hat{x} + Du)) \quad (3.92)$$

$$u = -F\hat{x}, \quad (3.93)$$

que estabelece o controlador estabilizante  $K = -V_r^{-1}U_r$ . Expressando este controlador pela forma fatorada

$$-V_r^{-1}U_r = \left[ \begin{array}{c|c} A - HC - (B - HD)F & H \\ \hline -F & 0 \end{array} \right], \quad (3.94)$$

que pode ser escrito como

$$[V_r \quad U_r] = \left[ \begin{array}{c|cc} A - HC & B - HD & H \\ \hline -F & I & 0 \end{array} \right]. \quad (3.95)$$

Utilizando a identidade  $D_l^{-1}N_l = N_rD_r^{-1}$  e manipulando algebricamente as equações de estado

$$\begin{bmatrix} D_r \\ N_r \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} A - BF & B \\ \hline -F & I \\ C - DF & D \end{array} \right]. \quad (3.96)$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado para obter os termos referentes a fatoração coprima pela direita.  $\square$

### 3.11.3 Parametrização de todos os controladores estabilizantes

A fatoração Coprima Dupla pode ser utilizada para parametrizar todos os controladores estabilizantes para o sistema realimentado mostrado na figura 3.19.

**Teorema 3.5** *Seja  $P = N_rD_r^{-1} = D_l^{-1}N_l$  a fatoração coprima de  $P$  respectivamente a direita e a esquerda, e seja*

$$\begin{bmatrix} V_r & U_r \\ -N_l & D_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & -U_l \\ N_r & V_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (3.97)$$

com cada uma destas funções de transferências em  $\mathcal{RH}_\infty$  representando a fatoração coprima dupla. As seguintes sentenças são equivalentes:

1.  $K$  é um controlador internamente estabilizante para cada uma das malhas fechadas representadas na figura 3.19.

2.  $K = K_1 K_2^{-1}$ , no qual

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_r & -U_l \\ N_r & V_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ I \end{bmatrix}, \quad Q \in \mathcal{RH}_\infty \quad (3.98)$$

3.  $K = K_4^{-1} K_3$ , no qual

$$\begin{bmatrix} K_4 & -K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r & U_r \\ -N_l & D_l \end{bmatrix}, \quad Q \in \mathcal{RH}_\infty. \quad (3.99)$$

4.

$$K = \mathcal{F}_l(K_s, Q), \quad (3.100)$$

no qual,

$$K_s = \begin{bmatrix} -V_r^{-1}U_r & V_r^{-1} \\ V_l^{-1} & -V_l^{-1}N_r \end{bmatrix}. \quad (3.101)$$

Se a fatoração coprima dupla estiver na forma do Teorema 3.4, então

$$K_s = \left[ \begin{array}{c|cc} A - BF - H(C - DF) & H & B - HD \\ \hline -F & 0 & I \\ \hline -(C - DF) & I & -D \end{array} \right] \quad (3.102)$$

### Demonstração:

3  $\Rightarrow$  1: Uma vez que é válida a igualdade:

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ -G & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_4 & 0 \\ 0 & D_l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & -Q \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r & U_r \\ -N_l & D_l \end{bmatrix}, \quad (3.103)$$

pode-se ver que:

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ -G & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D_r & -U_l \\ N_r & V_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Q \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_4 & 0 \\ 0 & D_l \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_\infty. \quad (3.104)$$

Logo, qualquer controlador gerado por (3.99) é internamente estabilizante.

1  $\Rightarrow$  3: Seja  $K$  um controlador estabilizante e  $K = X^{-1}Y$  uma fatoração coprima de  $K$ . Então:

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ -P & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & D_l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X & -Y \\ -N_l & D_l \end{bmatrix}. \quad (3.105)$$

fornece

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} X & -Y \\ -N_l & D_l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & D_l \end{bmatrix}. \quad (3.106)$$

Se  $A, B \in \mathcal{RH}_\infty$  satisfazem

$$XA + YB = I, \quad (3.107)$$

então

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & D_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & U_l \\ B & V_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X & -Y \\ -N_l & D_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -U_l \\ -B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (3.108)$$

mostra que (3.106) é uma fatoração coprima a esquerda de

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1}.$$

Utilizando o Lema 3.2, pode-se ver que

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ -P & I \end{bmatrix}^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty \Rightarrow \begin{bmatrix} X & -Y \\ -N_l & D_l \end{bmatrix}^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty. \quad (3.109)$$

Com isto

$$\begin{bmatrix} X & -Y \\ -N_l & D_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & -U_l \\ N_r & V_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XD_r - YN_r & -XU_l - YV_l \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (3.110)$$

Uma vez que ambas as matrizes do lado esquerdo são invertíveis em  $\mathcal{RH}_\infty$ , segue que  $(XD_r - YN_r)^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$ . Da equação (3.99) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} X & -Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & -Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & -U_l \\ N_r & V_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r & U_r \\ -N_l & D_l \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

$$= \begin{bmatrix} XD_r - YN_r & -XU_l - YV_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r & U_r \\ -N_l & D_l \end{bmatrix}, \quad (3.112)$$

que pode ser rescrito como

$$(XD_r - YN_r)^{-1} \begin{bmatrix} X & -Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r & U_r \\ -N_l & D_l \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

$$= \begin{bmatrix} K_4 & -K_3 \end{bmatrix}, \quad (3.114)$$

no qual  $Q = (XD_r - YN_r)^{-1}(XU_l + YV_l) \in \mathcal{RH}_\infty$ .

2  $\Leftrightarrow$  3: Uma vez que

$$\begin{bmatrix} I & -Q \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r & U_r \\ -N_l & D_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_r & -U_l \\ N_r & V_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & Q \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (3.115)$$

segue que

$$\begin{bmatrix} K_4 & -K_3 \\ -N_l & D_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_r & K_1 \\ N_r & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (3.116)$$

2  $\Leftrightarrow$  4: Uma vez que  $D_r = V_r^{-1} - V_r^{-1}U_rN_r$ , e  $U_lV_l = V_r^{-1}U_r$ , obtém-se

$$(D_rQ - U_l)(N_rQ + V_l)^{-1} \quad (3.117)$$

$$= (V_r^{-1}Q - V_r^{-1}U_rN_rQ - U_l)(I + V_l^{-1}N_rQ)^{-1}V_l^{-1} \\ = -U_lV_l^{-1} + V_r^{-1}Q(I + V_l^{-1}N_rQ)^{-1} \quad (3.118)$$

$$= \mathcal{F}_l \left( \begin{bmatrix} -V_r^{-1}U_r & V_r^{-1} \\ V_l^{-1} & -V_l^{-1}N_r \end{bmatrix}, Q \right). \quad (3.119)$$

Isto verifica que  $K$  é dado por (3.98) se e somente se ele também for dado por (3.100), no qual  $K_s$  é dado por (3.101).  $\square$

Em (3.102), todos os controladores estabilizantes possuem a forma:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - BF - H(C - DF))\hat{x} + Hy + (B - HD)r \\ u &= -F\hat{x} + r \\ \eta &= y - (C - DF)\hat{x} - Dr \\ r &= Q\eta, \end{aligned}$$

que pode ser reescrito para:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + H(y - (C\hat{x} + Du)) \\ u &= -F\hat{x} + Q(y - (C\hat{x} + Du)), \end{aligned}$$



mostrando que todo controlador estabilizante é uma combinação de um observador estável com uma realimentação de estados estimados estabilizantes somado a  $Q\eta$ , sendo  $\eta = y - (C\hat{x} + Du)$ , como mostrado na figura 3.20.

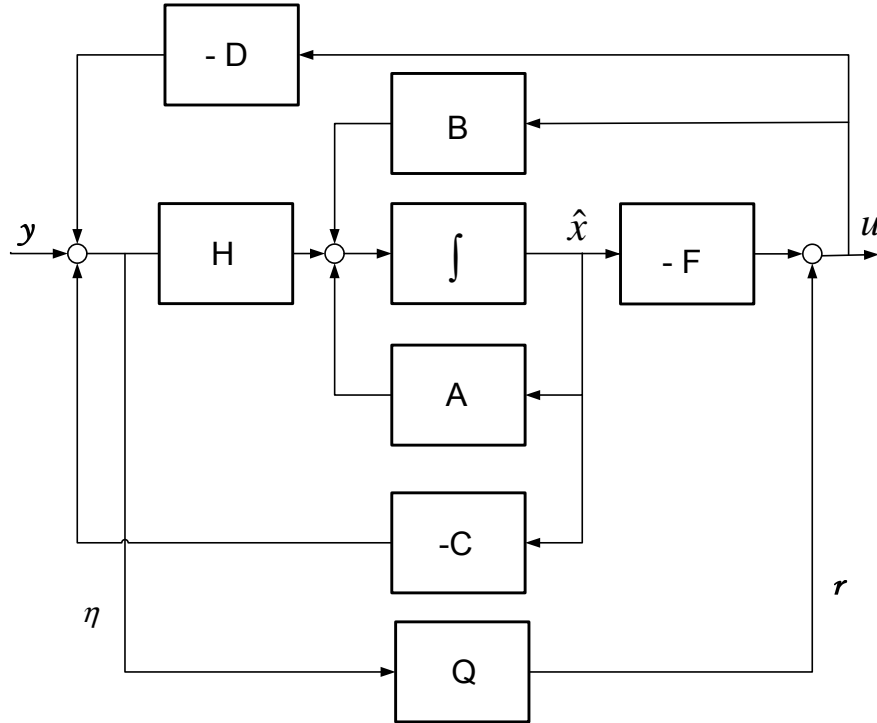


Figura 3.20: Representação dos controladores estabilizantes.

### 3.12 Controladores $\mathcal{H}_\infty$ com informação completa

Para tratar do problema de síntese de controladores que satisfaçam os objetivos da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , será visto o problema de informação completa descrita na seção 3.9. No problema de informação completa, o controlador tem acesso tanto aos estados  $x$  como as entradas exógenas  $w$ , como mostrado na figura 3.21. Logo, o sinal de controle gerado pelo controlador  $K$  deverá ser da forma

$$u = K \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \quad (3.120)$$

sendo o vetor de estados  $x$  a solução para a equação diferencial

$$\dot{x} = Ax + B_1w + B_2u. \quad (3.121)$$

O sinal objetivo será:

$$z = C_1x + D_{12}u, \quad (3.122)$$

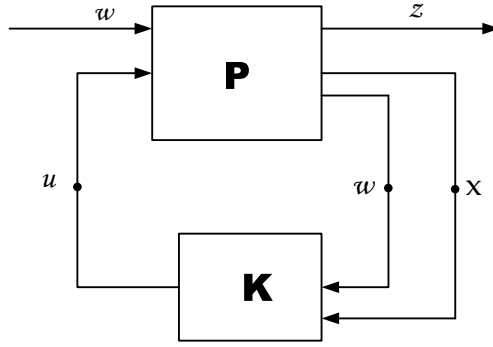


Figura 3.21: Sistema de informação completa.

no qual  $D'_{12}D_{12} = I$ . A função objetivo pode ser utilizada devido ao procedimento de escalonamento e deslocamento em malha fechada que removeu  $D_{11}$  e realizou o escalonamento de  $D_{12}$ . A mudança do sinal de controle  $\tilde{u} = u + D'_{12}C_1x$  permite reescrever o objetivo (3.122) para a forma:

$$z = \begin{bmatrix} Cx \\ Du \end{bmatrix}, \quad (3.123)$$

no qual  $D'D = I$ . A exclusão de termos cruzado entre  $u$  e  $x$  e  $z'z$  simplifica a formulação.

### 3.13 Caso horizonte finito

No caso do horizonte finito, o sinal de controle é gerado pelo controlador de informação completa, conforme mostrado na figura 3.21, no qual  $K$  é linear. O conjunto de controladores que obedecem a esta lei de controle será denominado de  $\mathcal{K}$ . O objetivo a ser buscado é determinar quando existe um  $K \in \mathcal{K}$  para o qual a equação (3.124) é satisfeita para todo  $w \in \mathcal{L}_2[0, T]$ , e obter uma parametrização para estes controladores. Será assumido que  $\Delta \geq 0$  e  $\gamma \geq 0$ .

$$\int_0^T (z'z - \gamma^2 w'w) dt + x(T)' \Delta x(T) \leq -\epsilon \|w\|_{2,[0,T]}^2 \quad (3.124)$$

O desenvolvimento aqui empregado utiliza a abordagem dos jogos diferenciais quadráticos lineares, cujo objetivo é encontrar um controlador para o pior  $w$  possível, para o qual (3.124) é satisfeito.

Definindo o índice de desempenho como:

$$J(K, w, T, \Delta) = \int_0^T (z'z - \gamma^2 w'w) dt + x(T)' \Delta x(T) \quad (3.125)$$

no qual  $K^* \in \mathcal{K}$  é o melhor controlador obtido,  $w$  é o distúrbio e  $\Delta$  é uma matriz definida semipositiva arbitrária. A forma para alcançar este objetivo é minimizando  $J(K, w, T, \Delta)$ . Caso exista um ponto de sela é possível estabelecer as desigualdades para o par  $(K, w)$  dadas por

$$J(K^*, w, T, \Delta) \leq J(K^*, w^*, T, \Delta) \leq J(K, w^*, T, \Delta), \quad (3.126)$$

sendo  $K^*$  o controlador que melhor minimiza a função custo, e  $w^*$  é a pior entrada exógena.

Considerando a equação (3.126), supõe-se aqui que os sinais  $u^*$  e  $w^*$  satisfazem esta desigualdade e que a trajetória de estados  $x^*$  atende a expressão:

$$\dot{x}^* = Ax^* + B_1 w^* + B_2 u^*, \quad x^*(0) = 0. \quad (3.127)$$

Será considerado o problema de otimização associado à desigualdade (3.126) envolvendo cálculo de variações.

### 3.13.1 O problema de minimização

Suponha que  $w \equiv w^*$  seja fixo e que  $u^*$  recebe uma perturbação  $u = u^* + \eta \tilde{u}$ , no qual  $\eta$  é um número qualquer. Isto produz uma perturbação correspondente no estado descrito por:

$$\dot{x} = Ax + B_1 w^* + B_2 u, \quad x(0) = 0. \quad (3.128)$$

Subtraindo de (3.127) obtém-se:

$$x = x^* + \eta \tilde{x}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.129)$$

no qual  $\tilde{x}$  satisfaz

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_2 \tilde{u}, \quad \tilde{x}(0) = 0. \quad (3.130)$$

Então

$$\tilde{x}(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau) B_2 \tilde{u} d\tau \quad (3.131)$$

no qual a matriz  $\Phi(., .)$  é a matriz de transição correspondente a matriz  $A$ . Fazendo

a substituição direta na função  $J$  de (3.125):

$$\begin{aligned}
J(u, w^*, T, \Delta) = & \int_0^T (x^{*T} C' C x^* + u^{*T} u^* - \gamma^2 w^{*T} w^*) dt + x^{*T}(T) \Delta x^*(T) \\
& + 2\eta \left[ \int_0^T (\tilde{x}' C' C x^* + \tilde{u}' u^*) dt + \tilde{x}' \Delta x^*(T) \right] \\
& + \eta^2 \left[ \int_0^T (\tilde{x}' C' C \tilde{x} + \tilde{u}' \tilde{u}) dt + \tilde{x}'(T) \Delta \tilde{x}(T) \right]
\end{aligned}$$

Uma vez que  $u^*$  é minimizado, alterando o sinal de controle, o valor da função  $J(u, w^*, T, \Delta)$  não pode alterar. Deste modo, como  $J(u, w^*, T, \Delta)$  é função de  $\eta$ , esta deverá ter seu valor mínimo em  $\eta = 0$ . Sendo a função custo quadrática em  $\eta$ , com valor mínimo em  $\eta = 0$ , o coeficiente do termo linear deve ser zero. Com isto,

$$\int_0^T (\tilde{x}' C' C x^* + \tilde{u}' u^*) dt + \tilde{x}'(T) \Delta x^*(T) = 0. \quad (3.132)$$

Substituindo (3.131) em (3.132) e alterando a ordem de integração, obtemos:

$$\int_0^T \tilde{u}' (B_2' \lambda + u^*) dt = 0, \quad (3.133)$$

no qual  $\lambda$  é a variável adjunta definida por

$$\lambda(t) = \int_t^T \phi'(\tau, t) C' C x^* d\tau + \phi'(T, t) \Delta x^*(T) \quad (3.134)$$

uma vez que  $\tilde{u}$  é arbitrário, conclui-se utilizando o lema fundamental do cálculo de variáveis que:

$$u^* = -B_2' \lambda, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.135)$$

### 3.13.2 O problema da maximização

Será considerado agora que  $u = u^*$  é fixo e que  $w^*$  é perturbado por:

$$w = w^* + \eta \tilde{w}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.136)$$

O sinal  $\tilde{w}$  é uma função arbitrária de  $\mathcal{L}_2[0, T]$  sendo  $\eta$  também uma constante arbitrária. A perturbação em  $w$  provoca a perturbação em  $x$ :

$$x = x^* + \eta \tilde{x}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.137)$$

Deste modo,  $\tilde{x}$  é a função que é determinada por  $\tilde{w}$ ,  $u^*$  e pelas dinâmicas do sistema. Subtraindo (3.127) de (3.121) obtém-se:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B_1\tilde{w}, \quad \tilde{x}(0) = 0, \quad (3.138)$$

sendo

$$\tilde{x} = \int_0^t \phi(t, \tau) B_1 \tilde{w} d\tau \quad (3.139)$$

no qual  $\Phi(., .)$  é a matriz de transição correspondente a matriz  $A$ . Realizando a substituição de (3.139) em (3.125):

$$\begin{aligned} J(u^*, w, T, \Delta) = & \int_0^T (x^{*'} C' C x^* + u^{*'} u^* - \gamma^2 w^{*T} w^*) dt + x^{*'}(T) \Delta x^*(T) \\ & + 2\eta \left[ \int_0^T (\tilde{x}' C' C x^* - \gamma^2 \tilde{w}' w^*) dt + \tilde{x}'(T) \Delta x^*(T) \right] \\ & + \eta^2 \left[ \int_0^T (\tilde{x}' C' C \tilde{x} - \gamma^2 \tilde{w}' w^*) dt + \tilde{x}'(T) \Delta \tilde{x}(T) \right]. \end{aligned}$$

Sendo  $w^*$  maximizante, alterando a entrada para aquela descrita em (3.136),  $J(u^*, w, T, \Delta)$  não pode aumentar. Como antes, o coeficiente do termo linear  $\eta$  deve ser zero. Ou seja,

$$\int_0^T (\tilde{x}' C' C x^* - \gamma^2 \tilde{w}' w^*) dt + \tilde{x}'(T) \Delta x^*(T) = 0. \quad (3.140)$$

Substituindo (3.139) em (3.140) e alternando a ordem de integração obtém-se

$$\int_0^T \tilde{w}' (B_1' \lambda - \gamma^2 w^*) dt = 0, \quad (3.141)$$

no qual  $\lambda$  é a variável adjunta definida por (3.134). Uma vez que (3.141) deve ser verdadeiro para todo  $\tilde{w}$ , conclui-se que

$$w^* = \gamma^{-2} B_1' \lambda. \quad (3.142)$$

### 3.13.3 O problema da fronteira de dois pontos

Podemos associar a dinâmica dos estados do ponto de sela com a variável adjunta em um Problema de Fronteira de Dois Pontos (TPBVP) que representam estes dois problemas de controle ótimo.

Diferenciando (3.134) com relação a  $t$  obtemos:

$$\dot{\lambda}(t) = -A' \lambda - C' C x^*, \quad \lambda(T) = \Delta x^*(T), \quad (3.143)$$

e combinando (3.143) com (3.127), (3.135) e (3.142) obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -(B_2 B_2' - \gamma^{-2} B_1 B_1') \\ -C' C & -A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad (3.144)$$

com a condição de fronteira:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^*(0) \\ \lambda(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta x^*(T) \end{bmatrix}. \quad (3.145)$$

Verifica-se com isto que o sinal de controle  $u^*$  e o sinal  $w^*$  associado com cada estratégia de ponto de sela devem ser dados por:

$$\begin{aligned} u^* &= -B_2' \lambda \\ w^* &= \gamma^{-2} B_1' \lambda \end{aligned}$$

no qual  $\lambda$  é uma solução para TPBVP. Foi visto, no entanto, que esta é uma condição necessária, devendo ainda ser verificado se o ponto de sela realmente existe.

### 3.13.4 Equação de Riccati

Obtendo as expressões para  $u^*$  e  $w^*$ , é possível obter uma lei de controle para informação completa para  $K^*$ . Isto é possível relacionando  $x^*$  e  $\lambda$  através da solução da equação de Riccati (ER).

Seja  $\phi(t, T)$  a matriz de transição correspondente a (3.144):

$$\frac{d}{dt} \Phi(t, T) = H \Phi(t, T) \quad (3.146)$$

no qual

$$H = \begin{bmatrix} A & -(B_2 B_2' - \gamma^{-2} B_1 B_1') \\ -C' C & -A' \end{bmatrix}.$$

Com isto,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^*(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, T) & \Phi_{12}(t, T) \\ \Phi_{21}(t, T) & \Phi_{22}(t, T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(T) \\ \lambda(T) \end{bmatrix}. \quad (3.147)$$

Eliminando  $x^*(T)$  e  $\lambda(T)$  em (3.147), e usando a condição de fronteira

$$\lambda(T) = \Delta x^*(T),$$

obtemos:

$$\lambda(t) = P(t)x^*(t).$$

Sendo

$$P(t) = (\Phi_{21}(t, T) + \Phi_{22}(t, T)\Delta)(\Phi_{11}(t, T) + \Phi_{12}(t, T)\Delta)^{-1}, \quad (3.148)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} u^* &= -B_2' P(t)x^* \\ &= \begin{bmatrix} -B_2' P(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ w^* \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Com isto, verifica-se que

$$K^* = \begin{bmatrix} -B_2' P(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

é um candidato a lei de controle. A equação diferencial de Riccati associada a matriz  $H$  é dada por:

$$-\dot{P} = A' P + P A - P(B_2 B_2' - \gamma^2 B_1 B_1') P + C' C, \quad P(T) = \Delta \quad (3.150)$$

É importante ressaltar que a lei de controle  $u^* = -B_2 P x^*$  somente se aplica se a equação de Riccati possui uma solução, o que é equivalente para a não singularidade de  $\Phi_{11}(t, T) + \Phi_{12}(t, T)\Delta$  no intervalo de tempo  $[0, T]$ . Assumindo que a equação de Riccati tenha solução no intervalo  $[0, T]$ , deve ser verificado que a lei de controle (3.149) satisfaz o objetivo descrito em (3.124).

**Teorema 3.6** *Supondo que a equação diferencial de Riccati (3.150) tenha solução em  $[0, T]$ , então:*

$$u^* = -B_2'Px \quad (3.151)$$

$$w^* = \gamma^{-2}B_1'Px \quad (3.152)$$

resulta em

$$J(K, w, T, \Delta) = \|u - u^*\|_{2,[0,T]}^2 - \gamma^2 \|w - w^*\|_{2,[0,T]}^2 \quad (3.153)$$

para todo controlador  $K$  e toda entrada  $w$ . Se  $u = u^*$ , então o objetivo (3.124) é satisfeito para algum  $\epsilon > 0$ . A lei de controle de informação completa (3.151) é solução para a síntese de controle de informação completa  $\mathcal{H}_\infty$  no horizonte de tempo  $[0, T]$ , significando que  $\|R_{zw}\|_{[0,T]} < \gamma$ .

**Demostração.** Seja  $P(T) = \Delta$  e  $x(0) = 0$  para qualquer  $u$  e  $w$ , em que

$$J(K, w, T, \Delta) = \int_0^T (z'z - \gamma w'w + \frac{d}{dt}(x'Px))dt.$$

Uma vez que

$$\frac{d}{dt}(x'Px) = \dot{x}'Px + x'\dot{P}x + x'P\dot{x},$$

efetuando a substituição de  $\dot{x}$  e  $\dot{P}$  da equação dinâmica de estados e da equação diferencial de Riccati para obter:



$$\begin{aligned}
J(K, w, T, \Delta) &= \int_0^T (x' C' C x + u' u - \gamma^2 w' w + (x' A' + w' B'_1 + u' B'_2) P x \\
&\quad + x' \dot{P} x + x' P (A x + B_1 w + B_2 u)) dt \\
&= \int_0^T (x' (C' C + A' P + P A + \dot{P}) x + u' u - \gamma^2 w' w + \\
&\quad (w' B'_1 + u' B'_2) P x + x' P (B_1 w + B_2 u)) dt \\
&= \int_0^T x' P (B_2 B'_2 - \gamma^{-2} B_1 B'_1) P x + u' u - \gamma^2 w' w \\
&\quad + (w' B'_1 + u' B'_2) P x + x' P (B_1 w + B_2 u)) dt \\
&= \int_0^T (u + B'_2 P x)' (u + B'_2 P x) dt - \gamma^2 \int_0^T (w - \gamma^{-2} B'_1 P x)' (w - \gamma^{-2} B'_1 P x) dt \\
&= \|u - u^*\|_{2,[0,T]}^2 - \gamma^2 \|w - w^*\|_{2,[0,T]}^2
\end{aligned}$$

Para provar que esta relação implica em satisfazer (3.124), seja  $L$  um sistema que faça o mapeamento  $w \mapsto (w - w^*)$  quando  $u = u^*$ . Realizando a substituição direta:

$$\dot{x} = (A - B_2 B'_2 P) x + B_1 w \quad (3.154)$$

$$w - w^* = -\gamma^{-2} B'_1 P x + w \quad (3.155)$$

Fazendo  $K = K^*$  ( $u = u^*$ ) em (3.153):

$$\begin{aligned}
J(K^*, w, T, \Delta) &= -\gamma^2 \|w - w^*\|_{2,[0,T]}^2 \\
&= -\gamma^2 \|L w\|_{2,[0,T]}^2 \\
&= \leq -\epsilon \|w\|_{2,[0,T]}^2,
\end{aligned}$$

para alguma constante positiva  $\epsilon$  ( $\epsilon = \gamma^2 / \|L^{-1}\|_{2,[0,T]}^2$ ). O fato de  $\epsilon > 0$  é uma consequência de que  $L^{-1}$  é dado por um sistema de espaço de estados, portanto, com norma finita. Conclui-se então que  $\|R_{zw}\|_{[0,T]} < \gamma$ , desde que  $\Delta \geq 0$ .

□

### 3.13.5 Condição de necessidade

A conexão entre  $\mathcal{H}_\infty$  e jogos diferenciais mostra que qualquer controlador que satisfaça o objetivo mostrado em (3.124) deve ser um ponto de cela. Analizando a condição de primeira ordem para o ponto de cela, é obtido o problema de fronteira de dois valores. Qualquer estratégia de ponto de cela é dado por  $u^* = -B_2'P\lambda$ ,  $w^* = \gamma^{-2}B_1'\lambda$ , na qual a variável adjunta  $\lambda$  é a solução para o problema TPBVP. Foi visto que  $\lambda$  pode ser relacionado com  $x$  garantindo que a equação diferencial de Riccati tenha solução em  $[0, T]$ . Completando o quadrado, foi mostrado a **condição de suficiência** para o problema de informação completa  $\mathcal{H}_\infty$ . Será verificado que a existência de uma solução para a equação diferencial de Riccati (3.150) também é uma **condição necessária** para a existência do problema de informação completa  $\mathcal{H}_\infty$ . Deve ser provado que a equação diferencial de Riccati (3.150) tem uma solução sempre que o problema de informação completa  $\mathcal{H}_\infty$  tiver uma solução.

### 3.13.6 Todos os sistemas em malha fechada

Foi visto que o controlador central é somente função de  $x$ , uma vez que  $w$  é uma medida fornecida. Neste tópico será obtido os sinais de controle resultantes de controladores de informação completa  $K$  que satisfaça:

$$J(K, w, T, \Delta) \leq -\epsilon \|w\|_{2,[0,T]}^2 \quad (3.156)$$

para todo  $w \in \mathcal{L}_2$  e todo  $\epsilon > 0$ . Equivalentemente, deve-se construir todos os operadores de malha fechada gerados pelos controladores que satisfazem (3.156). Devido a redundância de informação inerente a configuração de informação completa, não são gerados todos os controladores de informação completa que atendem a (3.156). A caracterização de todos os controladores, ao invés de todos os sinais de controle será feito posteriormente.

Somente existirão controladores de informação completa com a propriedade de (3.156) se e somente se a equação de Riccati (3.150) tiver solução em  $[0, T]$ . Adicionalmente,

$$u^* = -B_2'Px \quad (3.157)$$

$$w^* = \gamma^2 B_1'Px \quad (3.158)$$

resulta em

$$J(K, w, T, \Delta) = \|u - u^*\|_{2,[0,T]}^2 - \gamma^2 \|w - w^*\|_{2,[0,T]}^2 \quad (3.159)$$

**Teorema 3.7** *Considere a classe de controladores obtidos atribuindo:*

$$u - u^* = U(w - w^*), \quad (3.160)$$

no qual  $U$  é causal. Este é um controlador de informação completa pois:

$$u = -(B_2'P + \gamma^{-2}UB_1'P)x + Uw.$$

Pode-se afirmar que o controlador gerado por (3.160) satisfaz (3.156) se e somente se:

$$\|U\|_{2,[0,T]}^2 < \gamma. \quad (3.161)$$

Então,

$$u = \mathcal{F}_l \left( \left[ \begin{array}{cc|c} -B_2' & 0 & I \\ \hline -\gamma^{-2}B_1'P & I & 0 \end{array} \right], U \right) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}. \quad (3.162)$$

**Demonstração:** Reescrevendo (3.159) como

$$J(K, w, T, \Delta) = \|U(w - w^*)\|_{2,[0,T]}^2 - \gamma^2 \|w - w^*\|_{2,[0,T]}^2 \quad (3.163)$$

e fazendo  $L$  ser um sistema que mapeia  $w$  para  $w - w^*$  o qual já foi mostrado em (3.154) e (3.155). Sendo  $\|U\|_{[0,T]} < \gamma$ ,

$$\begin{aligned} J(K, w, T, \Delta) &\leq (\|U\|_{[0,T]}^2 - \gamma^2) \|w - w^*\|_{2,[0,T]}^2 \\ &= (\|U\|_{[0,T]}^2 - \gamma^2) \|Lw\|_{2,[0,T]}^2 \\ &\leq -\epsilon \|w\|_{2,[0,T]}^2 \end{aligned}$$

para algum  $\epsilon > 0$ , concluindo que (3.156) é satisfeita. Se (3.156) é satisfeita, então

$$\begin{aligned} \|U(w - w^*)\|_{2,[0,T]}^2 - \gamma^2 \|w - w^*\|_{2,[0,T]}^2 &\leq -\epsilon \|w\|_{2,[0,T]}^2 \\ &= -\epsilon \|L^{-1}(w - w^*)\|_{2,[0,T]}^2 \\ &\leq -\frac{\epsilon}{\|L\|_{[0,T]}^2} \|w - w^*\|_{2,[0,T]}^2 \end{aligned}$$

para todo  $w$ , e assim também para todo  $w - w^*$ , desde  $L : w \mapsto w^*$  seja invertível. Assim,  $U$  satisfaz (3.161).

Para concluir que (3.160) gera todas as malhas fechadas que satisfaz (3.156), deve ser mostrado que qualquer sinal de controle que possa ser gerado com uma lei de controle de informação completa também pode ser gerado por um  $U$  adequado em (3.160). Substituindo

$$u = L_1x + L_2w \quad (3.164)$$

e (3.158) em (3.121) chega-se a

$$\dot{x} = (A + \gamma^{-2}B_1B_1'P + B_2(L_1 + \gamma^{-2}L_2B_1'P))x + (B_1 + B_2L_2)(w - w^*)$$

Deste modo

$$x = L_3(w - w^*).$$

Substituindo (3.157) e (3.158) em (3.164)

$$\begin{aligned} u - u^* &= (L_1 + B_2'P + \gamma^{-2}L_2B_1'P)x + L_2(w - w^*) \\ &= ((L_1 + B_2'P + \gamma^{-2}L_2B_1'P)L_3 + L_2)(w - w^*) \\ &= U(w - w^*) \end{aligned}$$

para algum  $U$  causal. Este sistema também pode ser escrito na forma como:

$$u = \mathcal{F}_l \left( \begin{bmatrix} -B_2' & 0 & I \\ -\gamma^{-2}B_1'P & I & 0 \end{bmatrix}, U \right) \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}.$$

### 3.13.7 Todos os controladores

A equação (3.160) mostra que  $u = u^* + r$ , no qual  $r = U(w - w^*)$ . Para obter todos os controladores, é adicionado a  $r$  o sinal  $V(x - \hat{x})$ , no qual  $\hat{x}$  é uma cópia do estado e  $V$  é qualquer sistema linear. Com isto:

$$\dot{\hat{x}} = (A - B_2B_2'P)\hat{x} + B_1w + B_2r \quad (3.165)$$

$$u = u^* + r \quad (3.166)$$

$$r = U(w - w^*) + V(x - \hat{x}) \quad (3.167)$$

Com estas equações, juntamente com as equações (3.157) e (3.158) que descrevem  $w^*$  e  $u^*$ , obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ u \\ \begin{bmatrix} w - w^* \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_2B_2'P & \begin{bmatrix} 0 & B_1 \end{bmatrix} & B_2 \\ 0 & \begin{bmatrix} -B_2'P & 0 \end{bmatrix} & I \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\gamma^{-2}B_1'P & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ x \\ w \\ r \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w - w^* \\ x - \hat{x} \end{bmatrix}$$

Fazendo

$$K_a \equiv \left[ \begin{array}{c|cc} A - B_2 B_2' P & \begin{bmatrix} 0 & B_1 \end{bmatrix} & B_2 \\ \hline 0 & \begin{bmatrix} -B_2' P & 0 \end{bmatrix} & I \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\gamma^{-2} B_1' P & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad (3.168)$$

chega-se a

$$K = \mathcal{F}_l(K_a [U \quad V]), \quad (3.169)$$

que é um controlador de informação completa.

### 3.14 Caso Horizonte infinito

Deve-se verificar se as condições de necessidade e suficiência para a existência dos controladores estabilizantes e de informação completa satisfazem:

$$\|R_{zw}\|_\infty < \gamma.$$

O método consiste em estender os resultados do caso de horizonte finito para o caso do horizonte infinito fazendo o limite de  $T$  tender para infinito. A dificuldade associada a esta abordagem está em obter a existência de um limite  $P = \lim_{T \rightarrow \infty} P(t, T, \Delta)$  e com a garantia de que a lei de controle  $u^* = -B_2' P x$  tenha certas propriedades estabilizantes. A notação  $P(t, T, \Delta)$  é usada para indicar o fato de que  $P(t)$  satisfaz a condição terminal  $P(T) = \Delta$ .

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0, \quad (3.170)$$

$$z = \begin{bmatrix} Cx \\ Du \end{bmatrix}, \quad D'D = I \quad (3.171)$$

#### 3.14.1 Considerações preliminares

O objetivo aqui é estabelecer algumas considerações sobre a obtenção da expressão para  $P(t, T, \Delta)$  assumindo que:

$$H = \begin{bmatrix} A & -(B_2 B_2' - \gamma^{-2} B_1 B_1') \\ -C' C & -A' \end{bmatrix} \quad (3.172)$$

é uma matriz Hamiltoniana, cuja matriz de autovalores satisfaz:

$$H \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix}$$

onde  $\Lambda$  é uma matriz  $n \times n$  para o qual  $Re\lambda_i(\Lambda) \leq 0$ .

Se

$$P(t, T, \Delta) = \Psi_2(t, T, \delta)\Psi_1^{-1}(t, T, \delta) \quad (3.173)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Psi_1(t, T, \Delta) &= (Z_{11} + Z_{12}e^{\Lambda(T-t)}Xe^{\Lambda(T-t)}) \\ \Psi_2(t, T, \Delta) &= (Z_{21} + Z_{22}e^{\Lambda(T-t)}Xe^{\Lambda(T-t)}) \\ X &= -(Z_{22} - \Delta Z_{12})^{-1}(Z_{21} - \Delta Z_{11}) \end{aligned}$$

e  $\Lambda$  for assintoticamente estável,  $P(t, T, \Delta)$  irá convergir para a matriz constante  $\Pi = Z_{21}Z_{11}^{-1}$  exponencialmente. Uma vez que  $P(t, T, \Delta) \geq 0$ , para todo  $t < T$ ,  $\Pi \geq 0$ .  $P = \Pi$  é a solução para a equação algébrica de Riccati

$$PA + A'P - P(B_2B_2' - \gamma^{-2}B_1B_1')P + C'C = 0 \quad (3.174)$$

para o qual  $(B_2B_2' - \gamma^{-2}B_1B_1')P$  é assintoticamente estável, visto que possui os mesmos autovalores de  $\Lambda$ . Esta solução é a solução estabilizante para a equação algébrica de Riccati.

Deve-se perceber que a matriz  $(B_2B_2' - \gamma^{-2}B_1B_1')P$  é a matriz de malha fechada correspondendo para a implementação das leis de controle dadas por

$$u^* = -B_2'Px \quad (3.175)$$

$$w^* = \gamma^{-2}B_1'Px \quad (3.176)$$

em (3.170). Se for utilizado a lei de controle  $u^* = -B_2'Px$  e qualquer  $w$  de malha fechada, obtendo:

$$\dot{x} = (A - B_2B_2'P)x + B_1w,$$

que também deverá ser estável. Verifica-se que esta propriedade estabilizante é garantida por  $P$  ser não negativa definida.

### 3.14.2 Condição de suficiência

**Teorema 3.8** *Sendo  $P > 0$  a solução da equação algébrica de Riccati (3.174) para o qual  $A - (B_2B_2' - \gamma^{-2}B_1B_1')P$  é assintoticamente estável. Então a lei de controle  $u = -B_2TPx$  é estabilizante e satisfaz  $\|R_{zw}\|_\infty < \gamma$ .*

**Demonstração** Ver [27]. □

### 3.14.3 Condições necessárias para a existência da equação algébrica de Riccati

**Lema 3.3** *Considere que  $P_2$  é a solução estabilizante para a equação de Riccati:*

$$A'P_2 + P_2A - P_2B_2B_2'P_2 + C'C = 0 \quad (3.177)$$

*Supondo também que exista um controlador de informação completa  $\widehat{K}$  para o qual o sistema em malha fechada  $R_{zw}$ , definido por*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + b_2u, & x(0) &= 0. \\ z &= \begin{bmatrix} Cx \\ Du \end{bmatrix} \\ u &= \widehat{K} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

*seja internamente estável, satisfazendo  $\|R_{zw}\|_\infty < \gamma$ . Então:*

1. *A equação diferencial de Riccati*

$$-\dot{P} = PA + A'P - P(B_2B_2' - \gamma^{-2}B_1B_1')P + C'C, \quad P(T) = P_2,$$

*tem uma solução  $P(t, T, P_2)$  para todo  $t$  finito,  $t \leq T$ .*

2.  *$P(t, T, P_2)$  é não negativa e uniformemente limitado. Ou seja, existe um número real  $\beta$  para o qual para todo  $t < T$*

$$0 \leq P(t, T, P_2) \leq \beta I.$$

3. *O limite  $\Pi = \lim_{T \rightarrow \infty} P(t, T, P_2)$  existe, é independente de  $t$ , não negativa e satisfaz a equação algébrica de Riccati(3.174). Percebe-se que  $\Phi > P_2$ .*

**Demonstração:** A demonstração formal pode ser encontrada em [27], porém pode ser assinalado aqui os resultados mais importantes. sabe-se que:

$$\|z\|_2^2 - \gamma^2\|w\|_2^2 \geq J(K, w, T, P_2) \quad (3.178)$$

$$J(K, w, T, P_2) = \int_0^T (z'z - \gamma^2w'w)dt + x(T)'P_2x(T) \quad (3.179)$$

para a primeira proposição do Lema (3.3).

Fazendo  $x_0 = 0$ ,  $\|R_{zw}\|_\infty < \gamma$  é equivalente a  $\|z\|_{2,[0,T]}^2 - \gamma^2\|w\|_{2,[0,T]}^2 \leq -\epsilon\|w\|_{2,[0,T]}^2$ , para todo  $w \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$ , e algum  $\epsilon > 0$ . Usando (3.178) para  $w(t) = 0$  para todo  $t > T$ , obtém-se

$$J(\hat{K}, w, T, P_2) \leq -\epsilon\|w\|_2^2 = -\epsilon\|w\|_{2,[0,T]}^2 \quad (3.180)$$

Conclui-se que (3.180) é válido para todo  $w \in \mathcal{L}_2[0, T]$  e assim,  $P(t, T, P_2)$  existe no intervalo  $[0, T]$ . Como  $T$  é arbitrário e  $P(t, T, P_2) = P(\tau, T - t + \tau, P_2)$ , para todo  $\tau$ . Conclui-se que  $P(t, T, P_2)$  existe para todo tempo finito  $t$ , com  $t \leq T$ .

### 3.14.4 Parametrização de sistemas em malha fechada

No caso do horizonte finito, todos os sistema de malha fechada que podem ser gerados por controladores de informação completa também podem ser gerados por controladores da forma  $u = u^* + U(w - w^*)$ . Esta parametrização também será usada para mostrar que  $\Pi = \lim_{T \rightarrow \infty} P(0, T, P_2)$  possui as propriedade de estabilidade sempre que existir um controlador tal que  $\|R_{zw}\| < \gamma$ . O primeiro resultado mostra que a estabilidade assintótica de  $A - B_2B_2'\Pi$  vem do fato que  $\Pi \geq P_2$ .

**Lema 3.4** *Supondo que o presuposto padrão seja válido e que  $P$  é uma solução para a equação algébrica de Riccati(3.174) para o qual  $P \geq P_2$ . Então  $A - B_2B_2'P$  é assintoticamente estável.*

**Demonstração:** Subtraindo (3.177) de (3.174) obtemos

$$(P - P_2)A + A'(P - P_2) - P(B_2B_2' - \gamma^{-2}B_1B_1')P + P_2B_2B_2'P_2 = 0,$$

que pode ser reescrito como

$$(P - P_2)(A - B_2B_2'P)(A - B_2B_2'P)(P - P_2) + (P - P_2)B_2B_2'(P - P_2) + \gamma^{-2}PB_1B_1'P = 0 \quad (3.181)$$

Observando que

$$(A - B_2B_2'P, \begin{bmatrix} B_2'(P - P_2) \\ B_1'P \end{bmatrix})$$

é detectável, uma vez que  $A - B_2B_2'P_2$  é assintoticamente estável e pelo fato de que

$$(A - B_2B_2'P) + [B_2 \quad 0] \begin{bmatrix} B_2'(P - P_2) \\ B_1'P \end{bmatrix} = (A - B_2B_2'P_2). \quad (3.182)$$

De (3.181), conclui-se que  $A - B_2B_2'P$  é assintoticamente estável.



**Lema 3.5** *Suponha  $P$  a solução para (3.174) tal que  $A - B_1 B_2' P$  seja assintoticamente estável. Então o sinal de controle gerado pelo controlador de informação completa*

$$u = \begin{bmatrix} \hat{K}_1 & \hat{K}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (3.183)$$

*também é gerado por um controlador de informação completa da forma*

$$u = -B_2' P x + U(w - \gamma^{-2} B_1' P x). \quad (3.184)$$

*Além do mais (3.183) é estabilizante se e somente se (3.184) for estabilizante.*

**Demostração:** As equações (3.183) e (3.184) geram o mesmo sinal de controle e sistema em malha fechada aos encontrados na Seção 3.13.6. Além disto, o controle (3.184) é estabilizante se e somente se (3.183) também for, pelo fato de  $u = -B_2' P x$  ser um controle estabilizante.  $\square$

**Teorema 3.9** *Supõe-se que  $P_2$  e a solução estabilizante para (3.177). Se existir um controlador de informação completa  $\hat{K}$  para o qual o sistema em malha fechada  $R_{zw}$  definido por*

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = 0, \quad (3.185)$$

$$z = \begin{bmatrix} Cx \\ Du \end{bmatrix} \quad (3.186)$$

$$u = \hat{K} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (3.187)$$

*seja internamente estável e satisfaça  $\|R_{zw}\| < \gamma$ , então  $\Pi = \lim_{T \rightarrow \infty} P(0, T, P_2)$  é a solução estabilizante para a equação (3.174) e  $\Pi \geq P_2 \geq 0$ . Adicionalmente,*

$$u = -B_2' \Pi x + U(w - \gamma^{-2} B_1' \Pi x), \quad (3.188)$$

*no qual  $U \in \mathcal{H}_\infty$  e  $\|R_{zw}\| < \gamma$ .*

**Demostração** [27].  $\square$

### 3.14.5 Todos os controladores

Foi verificado que a fórmula que representa todos os controladores requer a introdução de um segundo parâmetro livre  $V$ , alimentado pelo erro entre o estado  $x$  e o estado duplicado  $\hat{x}$ . O controle será estável se somente se  $V$  for estável. Esta idéia foi utilizada para gerar todas as soluções para o problema de informação completa em

horizonte finito na seção 3.13.7. A parametrização LFT de todos os controladores é dado por (3.169) e (3.168).

Substituindo  $P(t)$  em (3.168) com a solução não negativa estabilizante para a equação algébrica de Riccati(3.174), obtém-se que todos os controladores estabilizantes de informação completa que satisfazem  $\|R_{zw}\| < \gamma$  são dados por:

$$K = \mathcal{F}_l(K_a, \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix}), \quad \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} \in \mathcal{H}_\infty, \quad \|U\|_\infty < \gamma, \quad (3.189)$$

sendo todos os controladores  $K_a$  dados por

$$K_a \equiv \left[ \begin{array}{c|cc} A - B_2 B_2' P & \begin{bmatrix} 0 & B_1 \end{bmatrix} & B_2 \\ \hline 0 & \begin{bmatrix} -B_2' P & 0 \end{bmatrix} & I \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\gamma^{-2} B_1' P & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right], \quad (3.190)$$

para um sinal de controle  $u = -B_2' P x$  correspondendo a  $U = 0$  e  $V = 0$ .

### 3.15 Problema do regulador $\mathcal{H}_\infty$ generalizado

Seja a planta generalizada descrita pelo sistema de espaço de estados:

$$\dot{x} = Ax + B_1 u + B_2 u, \quad x(0) = 0, \quad (3.191)$$

$$z = C_1 x + D_{12} u \quad (3.192)$$

$$y = C_2 x + D_{21} w, \quad (3.193)$$

no qual  $w$  é uma entrada exógena de dimensão  $l$ ,  $u$  é o sinal de controle de dimensão  $m$ ,  $y$  é o sinal medido de dimensão  $q$  e  $z$  é o sinal objetivo de dimensão  $p$ . A variável de estados possui dimensão  $n$ . É assumido que:

$$D_{12}' D_{12} = I_m, \quad e \quad (3.194)$$

$$D_{21} D_{21}' = I_q \quad (3.195)$$

Considera-se que as simplificações realizadas por deslocamento em malha fechada e por transformação de escalonamento já tenham sido realizadas, obtendo as simplificações descritas em (3.192) e (3.193), ao invés das expressões para o caso geral

$$z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u$$

$$y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u.$$

O objetivo é determinar um controlador admissível, que produza um sinal de con-

trole:

$$u = Ku, \quad (3.196)$$

para o qual o sistema em malha fechada  $R_{zw} = \mathcal{F}_l(P, K)$  satisfaça:

$$\|R_{zw}\|_\infty < \gamma. \quad (3.197)$$

São assumido os seguintes pressupostos:

1.  $(A, B_2)$  é estabilizável e  $(A, C_2)$  é detectável;
2. As matrizes  $D_{12}$  e  $D_{21}$  satisfazem (3.194);
3. posto  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m, \quad \forall \omega;$
4. posto  $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + q, \quad \forall \omega.$

Considerar que  $(A, B_2, C_2)$  seja estabilizável e detectável é necessário e suficiente para a existência de controladores admissíveis. O posto completo no eixo imaginário é necessário para a existência de soluções estabilizantes para as equações de Riccati usadas para obter a solução do problema do regulador  $\mathcal{H}_\infty$ .

Serão considerados dois casos especiais para o problema do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ . O problema da realimentação do sinal de medição simples e o problema do sinal de interesse especial. Cada um destes problemas pode ser resolvido usando somente uma equação de Riccati.

### 3.15.1 Problema da realimentação do sinal de medição simples

Para este caso, deve-se considerar o sinal realimentado da forma:

$$y = C_2x + w, \quad (3.198)$$

que deve ser usado ao invés de (3.193). Portanto o observador

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2u + B_1(y - C_2\hat{x}), \quad \hat{x}(0) = 0, \quad (3.199)$$

$$\hat{w} = y - C_2\hat{x} \quad (3.200)$$

reconstroi perfeitamente os vetores de estados  $x$  e de entradas exógenas por meio do sinal de medida  $y$ , e conseqüentemente, o vetor de estados  $x$  do controlador de informação completa pode ser substituído pelo vetor  $\hat{x}$ , gerado de  $y$  pelo observador definido por (3.199) e (3.200). A existência de um controlador estabilizante tal que  $\|R_{zw}\|_\infty < \gamma$  implica na existência da solução da equação algébrica de Riccati

$$X_\infty \tilde{A} + \tilde{A}' X_\infty + \tilde{C}' \tilde{C} - X_\infty (B_2 B_2' - \gamma^2 B_1 B_1') X_\infty = 0 \quad (3.201)$$

sendo as matrizes  $\tilde{A}$  e  $\tilde{C}$  dadas por:

$$\tilde{A} = A - B_2 D_{12}' C_1 \quad (3.202)$$

$$\tilde{C}' \tilde{C} = \tilde{C}'_1 (I - D_{12} D_{12}') C_1. \quad (3.203)$$

Temos que  $X_\infty \tilde{A} - (B_2 B_2' - \gamma^{-2} B_1 B_1') X_\infty$  são assintoticamente estável e  $X_\infty \geq 0$ . As equações (3.202) e (3.203) resultam de (3.192) posto na forma

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} \tilde{C}x \\ \tilde{u} \end{bmatrix}$$

usando a transformação  $\tilde{u} = u + D_{12}' C_1 x$ . Um controlador que atende a este objetivo, é obtido por:

$$u^* = -F_\infty \hat{x}, \quad (3.204)$$

no qual:

$$F_\infty = D_{12}' C_1 + B_2' X_\infty. \quad (3.205)$$

Todas as soluções para este caso especial de realimentação de medida simples é obtido pela combinação do gerador de todos os controladores de informação completa com o observador (3.199) e (3.200). Isto resulta em uma parametrização  $K = \mathcal{F}_l(K_a, U)$ , no qual  $U$  é um sistema linear tal que  $\|U\| < \gamma$  e  $K_a$  é dado por:

$$K_a = \left[ \begin{array}{c|cc} A - B_1 C_2 - B_2 F_\infty & B_1 & B_2 \\ \hline -F_\infty & 0 & I \\ -(C_2 + \gamma^{-2} B_1' X_\infty) & I & 0 \end{array} \right]. \quad (3.206)$$

### 3.15.2 Sinal de interesse especial

Em outro caso especial considerado, é utilizado

$$z = C_1 x + u \quad (3.207)$$

no lugar de (3.192). A solução existe se e somente se a equação algébrica de Riccati

$$\bar{A}Y_\infty + Y_\infty\bar{A}' + \bar{B}\bar{B}' - Y_\infty(C_2' C_2 - \gamma^{-2} C_1' C_1)Y_\infty = 0 \quad (3.208)$$

tenha solução, tal que

$$\bar{A} = A - B_1 D_{21}' C_2 \quad (3.209)$$

$$\bar{B}\bar{B}' = B_1(I - D_{21}' D_{21} B_1'). \quad (3.210)$$

Todas as soluções são geradas por  $K = \mathcal{F}(K_a, U)$  no qual  $\|U\|_\infty < \gamma$  e  $K_a$  são dadas por

$$K_a = \left[ \begin{array}{c|cc} A - B_2 C_1 - H_\infty C_2 & H_\infty & B_2 + \gamma^{-2} Y_\infty C_1' \\ \hline -C_1 & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right]. \quad (3.211)$$

sendo

$$H_\infty = B_1 D_{21}' + Y_\infty C_2' \quad (3.212)$$

### 3.15.3 Condições necessárias a solução do problema do regulador generalizada

Considere o caso geral no qual  $P$  é descrito por (3.191) a (3.193). Todo controlador de realimentação de medição simples também é um controlador de informação completa, uma vez que (3.193) e (3.196) pode ser visto como

$$u = \begin{bmatrix} KC_2 & KD_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \quad (3.213)$$

A existência de um controlador de realimentação de medição implica na existência de um controlador de informação completa, atendendo aos objetivo (3.197). Deste modo, a existência de uma solução para a equação algébrica de Riccati (3.201) é necessária para a existência da solução para o problema da realimentação de medição.

Analogamente, considere o sistema abaixo como um problema dual ao problema da existência de um controlador de realimentação de medição e da existência de um controlador de informação completa.

$$\dot{x}_0 = Ax_0 + B_1 w, \quad x_0(0) = 0, \quad (3.214)$$

$$y_0 = C_2 x_0 + D_{21} w \quad (3.215)$$

O filtro  $F$  é definido como:

$$\tilde{x} = A\tilde{x} + B_2K(y_0 + C_2\tilde{x}) \quad (3.216)$$

$$\tilde{z} = C_1\tilde{x} + D_{12}K(y_0 + C_2\tilde{x}). \quad (3.217)$$

Então o sistema que faz o mapeamento de  $w$  para  $z = C_1x_0 + \tilde{z}$  é justamente  $\mathcal{F}_l(P, K)$ . Logo se  $K$  satisfaz (3.197) o sistema formado pelo filtro para estimação da informação completa também atenderá a equação (3.197). Com estas duas condições necessárias atendidas é possível estabelecer o princípio da separação.

### Princípio da separação

A estimação dos estados para o problema  $\mathcal{H}_\infty$  não está desassociado dos objetivos do controle  $\mathcal{H}_\infty$ , pois a estimação dos estados depende de  $F$ . Apesar da existência das soluções para as equações algébricas de Riccati (3.201) e (3.208) serem condições necessárias, elas não são condições suficientes para a existência da solução para o problema do regulador generalizado  $\mathcal{H}_\infty$ . Deste modo, a solução do problema de síntese do controlador  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser obtido pela solução do problema de controle de informação completa e de estimação de informação completa.

### 3.15.4 Condições Necessárias e Suficientes

Qualquer sistema em malha fechada  $R_{zw} = \mathcal{F}_l(P, K)$  que satisfaz os objetivo (3.197) é gerado por

$$u - u^* = \tilde{U}(w - w^*), \quad (3.218)$$

no qual  $w^* = \gamma^{-2}B_1'X_\infty x$  para o qual

$$\|\tilde{U}\|_\infty < \gamma. \quad (3.219)$$

Deste modo, para determinar quando um controlador de medição realimentada  $u = Ky$  atende ao objetivo (3.197), calcula-se o sistema  $\tilde{U}$  que faz o mapeamento de  $w - w^*$  para  $u - u^*$ . Escrevendo a equação dinâmica (3.191) e a equação das medidas (3.193) em termos de  $w - w^*$  ao invés de  $w$ , obtém-se:

$$\dot{x} = (A + \gamma^{-2}B_1B_1'X_\infty)x + B_1(w - w^*) + B_2u \quad (3.220)$$

$$y = (C_2 + \gamma^{-2}D_{12}B_1'X_\infty)x + D_{21}(w - w^*). \quad (3.221)$$

Do sistema acima, verifica-se que o sistema  $\tilde{U}$  que realiza o mapeamento de  $w - w^*$  para  $u - u^*$  é gerado pela LFT

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ u - u^* \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A + \gamma^{-2}B_1B_1'X_\infty & B_1 & B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ C_2 + \gamma^{-2}D_{21}B_1'X_\infty & D_{21} & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ w - w^* \\ u \end{bmatrix}. \quad (3.222)$$

A parametrização de todos os controladores do problema de informação completa diz que o controlador  $K$  atende ao objetivo (3.197) se e somente se  $\tilde{U}$  atende a (3.219). A vantagem de considerar este problema de regulador modificado é que o sinal objetivo  $u - u^* = F_\infty x + u$  tem precisamente a forma do objetivo especial (3.207). Com isto  $K$  existe se e somente se a equação algébrica de Riccati

$$A_z Z_\infty + Z_\infty A'_z + \bar{B}\bar{B}' - Z_\infty(C'_{2z} - \gamma^{-2}F'_\infty F_\infty)Z_\infty = 0, \quad (3.223)$$

sendo

$$C_{2z} = C_2 + \gamma^{-2}D_{21}B_1'X_\infty \quad (3.224)$$

$$A_z = A + \gamma^{-2}B_1B_1'X_\infty - B_1D'_{21}C_{2z} \quad (3.225)$$

$$= A + \gamma^{-2}B_1(I - D'_{21}D_{21})B_1'X_\infty - B_1D'_{21}C_2. \quad (3.226)$$

Além disto, todas as soluções são geradas pela *LFT*

$$K = \mathcal{F}_l(K_a, U) \quad (3.227)$$

no qual  $U$  é um sistema linear tal que  $\|U\|_\infty < \gamma$ . O gerador de todas as soluções é dado pela realização

$$K_a = \left[ \begin{array}{c|cc} A_k & B_{k1} & B_{k2} \\ \hline C_{k1} & 0 & I \\ C_{k2} & I & 0 \end{array} \right], \quad (3.228)$$

no qual

$$A_k = A + \gamma^{-2}B_1B_1'X_\infty - B_2F_\infty - B_{k1}C_{2z} \quad (3.229)$$

$$\begin{bmatrix} B_{k1} & B_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1D'_{21} + Z_\infty C'_{2z} & B_2 + \gamma^{-2}Z_\infty F'_\infty \end{bmatrix} \quad (3.230)$$

$$\begin{bmatrix} C_{k1} \\ C_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_\infty \\ -C_{2z} \end{bmatrix} \quad (3.231)$$

$$(3.232)$$

Verifica-se aqui uma equivalência de um problema de controle. Se  $u$  é gerado por  $u = Ky$ , então  $\tilde{U}$  em (3.218) é gerado por:

$$\tilde{U} = \mathcal{F}_l(G, K), \quad (3.233)$$

no qual o sistema  $G$  é dado por:

$$G = \left[ \begin{array}{c|cc} A + \gamma^{-2}B_1B_1'X_\infty & B_1 & B_2 \\ \hline F_\infty & 0 & I \\ C_2 + \gamma^{-2}D_{21}B_1'X_\infty & D_{21} & 0 \end{array} \right]. \quad (3.234)$$

Deste modo, pode-se afirmar que  $K$  estabiliza  $P$  e  $\|\mathcal{F}(P, K)\|_\infty < \gamma$  se e somente se  $K$  estabiliza  $G$  e  $\|\mathcal{F}(G, K)\|_\infty < \gamma$ .

**Lema 3.6** *Supondo que  $X_\infty \geq 0$  seja a solução estabilizante para (3.201). São equivalentes*

1.  $K$  é admissível para  $P$  e  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty < \gamma$ ;
2.  $K$  é admissível para  $G$  e  $\|\mathcal{F}_l(G, K)\|_\infty < \gamma$ .

Adicionalmente, para todo  $\lambda$ ,

$$\text{posto} \begin{bmatrix} A + \gamma^{-2}B_1B_1'X_\infty - \lambda I & B_1 \\ C_2 + \gamma^{-2}D_{21}B_1'X_\infty & D_{21} \end{bmatrix} = \text{posto} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}. \quad (3.235)$$

**Demonstração:** Ver [27].

□

## 3.16 Conclusão parcial

Foram apresentados os requisitos para estabilidade e desempenho nominal e robusto baseado nas funções de transferências que estabelecem os requisitos desejados. Foi visto que todo modelo apresenta um erro em sua modelagem, seja por negligenciamento de dinâmicas ou pelas incertezas quanto ao seu valor real. Estas incertezas podem ser classificadas como paramétricas, no qual o bloco de incertezas apresenta uma determinada estrutura, ou por incertezas dinâmicas, que caracterizam a variabilidade do modelo no domínio da frequência. Foi apresentado a formulação do controle  $\mathcal{H}_\infty$  baseado em princípios da teoria dos jogos e do cálculo das variações.



# Capítulo 4

## Projeto do controlador

Neste capítulo será apresentada uma abordagem de projeto via controle  $\mathcal{H}_\infty$  para a regulação da posição do motor mancal empregando a metodologia conhecida como sensibilidade mista. Este método está presente largamente na literatura [39],[41], [17], onde as restrições de desempenho são desenvolvidas por meio da função sensibilidade do sistema em malha fechada. Para a planta nominal será utilizado o modelo matemático do motor mancal apresentado no Capítulo 2, obtido na equação (2.75).

### 4.1 Distúrbios

Distúrbios ocorrem inevitavelmente em sistemas reais. Conforme visto na seção 3.5 os distúrbios se referem aos sinais exógenos que contribuem para a redução do desempenho do sistema. Para tanto, o sistema controlado deve ser capaz de reduzir o efeito destes distúrbios. Além dos ruídos provenientes do meio que afetam os sinais medidos, o motor mancal apresenta peculiaridades que devem ser levadas em consideração: a componente cossenoidal, que é uma característica construtiva do motor mancal; e o desbalanceamento do eixo do motor, que em uma faixa de velocidade de rotação mais alta, pode ser um fator a ser considerado. Estes últimos fatores serão vistos a seguir.

#### Distúrbio cossenoidal

O desenvolvimento do modelo do motor mancal mostra a existência de um termo cossenoidal multiplicando a matriz  $B$  presente na equação dinâmica (2.77), repetida abaixo

$$\dot{x} = Ax + Bu - B \cos(2\omega t)u,$$

e representada na figura 4.1.

A frequência elétrica  $\omega = 2\pi f_{sinc}$ , é a frequência da corrente nos enrolamentos do

motor, conforme visto na figura 4.1. Esta é uma característica dos motores mancais que não está presente no comportamento dos mancais magnéticos. Isto ocorre pelo fato de que, neste último, a força eletromagnética é gerada pela aplicação de corrente contínua. Nas referências [12], [13] e [15] foi verificado que esta componente não possui efeito considerável se  $f_{sinc}$  for bem superior a frequência natural do sistema eixo-motor. Porém, deve ser verificado o quanto este termo afetará o desempenho do sistema real, visto que o controle é projetado para a planta simplificada, que desconsidera este termo.

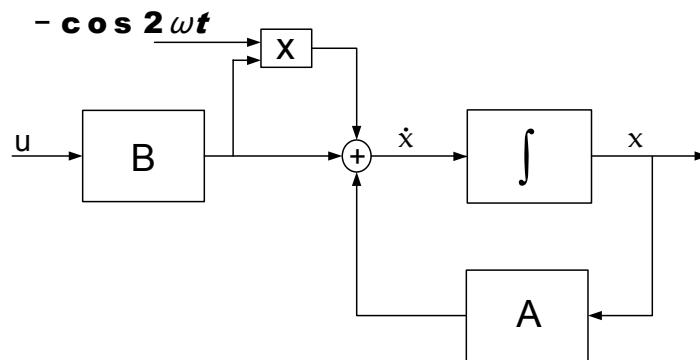


Figura 4.1: Diagrama em blocos do sistema com distúrbio cossenoidal.

### Desbalanceamento do rotor

Desbalanceamentos no rotor geram forças que causam vibrações [6]. A figura 4.2 mostra a representação deste fenômeno pelo corte transversal em um eixo perfeitamente simétrico no plano XY, porém possuindo um ponto de massa adicional  $m_e$  a uma distância  $\epsilon$  do centro, sendo  $\omega_r$  a velocidade angular de rotação. As forças

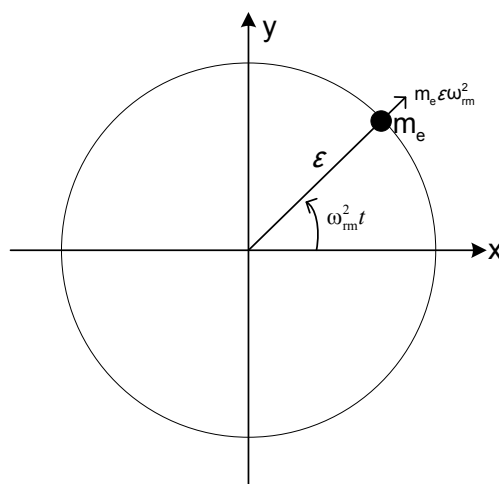


Figura 4.2: Desbalanceamento de massa.

radiais nas direções perpendiculares x e y são descritas por

$$F_x = m_e \omega_r^2 \cos(\omega_r t) \quad (4.1)$$

$$F_y = m_e \omega_r^2 \text{sen}(\omega_r t) \quad (4.2)$$

Em (4.1) e (4.2) verifica-se que as forças de desbalanceamento criadas são sincronizadas com a rotação do eixo. Estas forças caracterizam, portanto, distúrbios harmônico de frequência  $\omega_r$ . A amplitude destes distúrbios aumentam proporcionalmente com o quadrado da velocidade angular de rotação do eixo. Porém, devido ao fenômeno de ressonância, o efeito de deslocamento provocado por esta força é crítico apenas em algumas frequências. Portanto, nas proximidades das velocidades críticas, o efeito deste distúrbio pode ter influência no desempenho do controle de posicionamento do sistema. O projeto de controle robusto deve prever a redução da sensibilidade do sistema para sinais de distúrbios na frequência de rotação do eixo. Para este trabalho serão consideradas velocidades de rotação entre 300 rpm a 3.000 rpm.

## 4.2 Incertezas paramétricas

A dinâmica do posicionamento do motor mancal é descrita pela equação (2.75), repetida abaixo.

$$\ddot{v}_s + K'_g \dot{v}_s - K'_p v_s = K'_i u.$$

Sendo

$$K'_g = M^{-1} K_g$$

$$K'_p = M^{-1} K_p (b + c)^2$$

$$K'_i = M^{-1} K_i (d + c)(b + c)$$

Suponha que os parâmetros físicos encontrem-se dentro de um intervalo de confiança, devido a existência de incertezas. logo, redefinindo os parâmetros para:

$$K_g = K'_g (1 + p_g \delta_g), \quad |\delta_g| < 1 \quad (4.3)$$

$$K_z = K'_p (1 + p_z \delta_z), \quad |\delta_z| < 1 \quad (4.4)$$

$$K_i = K'_i (1 + p_i \delta_i), \quad |\delta_i| < 1 \quad (4.5)$$

sendo  $p_g, p_z$  e  $p_i$  a variação proporcional que cada parâmetro pode apresentar. Estas incertezas estão associadas aos dados construtivos do motor mancal, como por exemplo, o fator de escorregamento, os momentos de inércia e da geometria do gap. Será definido para o projeto uma incerteza de 20% para os coeficiente  $K_g, K_z$  e  $K_i$ .

Utilizando os valores para os parâmetros nominais constantes no Apêndice A, obtemos:

$$K'_g = \begin{bmatrix} 0 & 1,935 \\ -1,935 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$K'_z = 10^5 \begin{bmatrix} 1,379 & 0 \\ 0 & 1,379 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$K'_i = \begin{bmatrix} 45,098 & 0 \\ 0 & 45,098 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Realizando a substituição das equações (4.3), (4.4) e (4.5) em (2.75), obtemos:

$$\ddot{z}_s + K_g(1 + p_g\delta_g)\dot{z}_s - K_z(1 + p_z\delta_z)z_s = K_i(1 + p_i\delta_i)u. \quad (4.9)$$

O diagrama em blocos deste sistema é mostrado na figura 4.3. As entradas dos blocos  $\delta_g$ ,  $\delta_z$  e  $\delta_i$ , são descritas por  $y_g$ ,  $y_z$  e  $y_i$ , e as saídas por  $u_g$ ,  $u_z$  e  $u_i$ , respectivamente. Fazendo  $x_1 = z_s$  e  $\dot{x}_2 = \dot{z}_s$ , escrevendo a representação deste sistema na forma de espaço de estados, e separando as equações em dois blocos, obtemos a descrição ds sistemas dadas pelas equações (4.10) e (4.11).

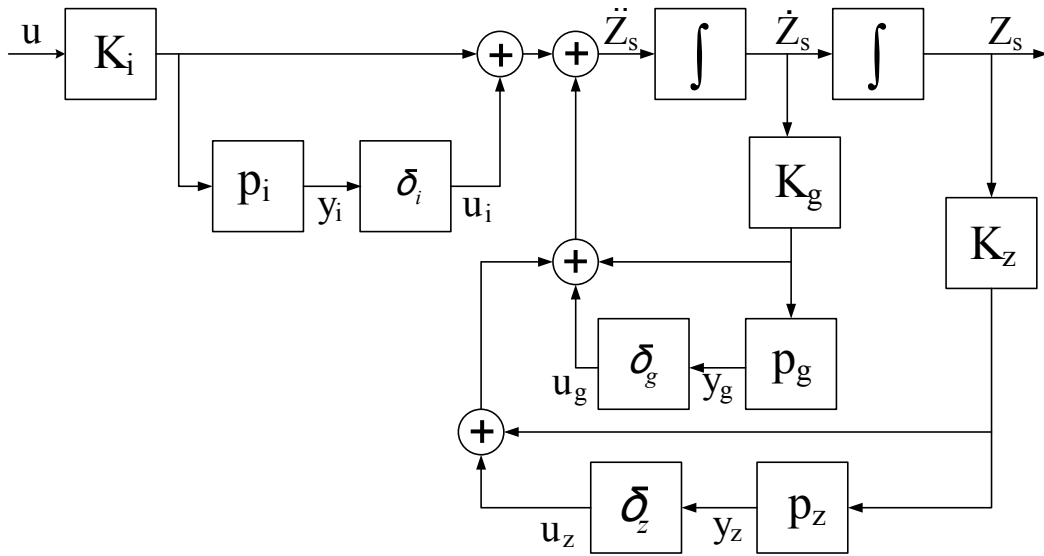


Figura 4.3: Representação em blocos da planta com perturbações paramétricas.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ y_i \\ y_g \\ y_z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_g & K_z & I & I & I & K_i \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_i K_i \\ -p_g K_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_z K_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_i \\ u_g \\ u_z \\ u \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_g \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_i & 0 & 0 \\ 0 & \delta_g & 0 \\ 0 & 0 & \delta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ y_g \\ y_z \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Estes sistemas descrevem a interligação de dois blocos, a planta  $G$  incorporando as incertezas relativas descritas por  $p_g$ ,  $p_z$  e  $p_i$ , e o bloco de incertezas  $\Delta$ , definidas pelas matrizes (4.12) e (4.13), respectivamente.

$$G = \begin{bmatrix} -K_g & K_z & I & I & I & K_i \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_i K_i \\ -p_g K_g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_z K_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_i & 0 & 0 \\ 0 & \delta_g & 0 \\ 0 & 0 & \delta_z \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Estes blocos interligam-se formando uma transformação linear representada pela figura 4.4. O vetor de saída do bloco  $\Delta$  é definido por  $u_\Delta = [u_i; u_g; u_z]^T$  e de entrada por  $y_\Delta = [y_i; y_g; y_z]^T$ .

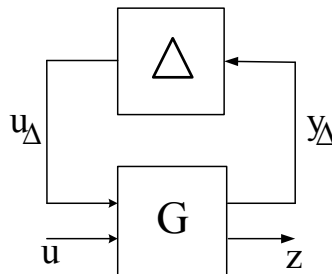


Figura 4.4: Representação da LFT.

### 4.3 Projeto por sensibilidade mista

O objetivo no projeto do controle de posição do motor mancal é encontrar um sinal de controle  $u(s) = K(s)y(s)$ , gerado por um controlador  $K(s)$  e pelos sinais de posição do eixo do motor, dado por  $y(s) = [x_d; y_d]$ , que permita obter estabilidade nominal (EN) e desempenho nominal (DN) para o sistema em malha fechada. A estabilidade nominal sempre será um requisito primário e necessariamente deverá ser atendido para a existência do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ . Os requisitos de estabilidade robusta (ER) e desempenho robusto (DR) deverão ser verificados quanto ao seu atendimento.

Os critérios de desempenho nominal estabelecidos para este projeto utilizando o método de sensibilidade mista são definidos como sendo:

$$\left\| \begin{array}{c} W_u K(I + GK)^{-1} \\ W_p(I + GK)^{-1} \end{array} \right\|_\infty < 1. \quad (4.14)$$

As funções pesos  $W_p$  e  $W_u$  caracterizam os sinais expúrios para o qual se deseja reduzir a sensibilidade do sistema e impõe restrições ao sinal de controle. Conforme foi visto em (3.10),  $R(s) = K(I + GK)^{-1}$  representa a função de transferência do bloco de incertezas  $\Delta$ . A minimização da função  $R(s)$  contribui para o aumento da robustez do sistema em malha fechada. A inclusão dos requisitos de desempenho ocorre pela criação de uma nova planta generalizada (4.15) incorporando as funções pesos  $W_p$  e  $W_u$ . Este novo sistema representado por  $P$  corresponde a função de transferência entre o sinal de distúrbios  $d$  e os sinais de interesse  $z_1$  e  $z_2$ , conforme é mostrado na figura 4.5.

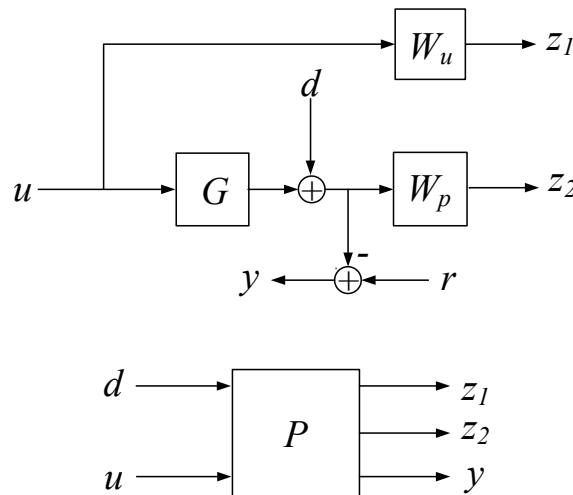


Figura 4.5: Representação da planta generalizada.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & W_u \\ W_p & W_p G \\ I & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ u \end{bmatrix} \implies P = \begin{bmatrix} 0 & W_u \\ W_p & W_p G \\ I & -G \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Deste modo, o objetivo pode ser obtido pela minimização da função de transferência do sistema realimentado, entre o sinal de entrada  $d$  e os sinais de saída  $z_1$  e  $z_2$ , com relação a norma infinita. Para a função  $W_p$  normalmente é empregado uma função de primeira ordem, com formato descrito em (4.16).

$$W_p(s) = \frac{s/M_p + \omega_b}{s + \omega_b A_p} I_{22} \quad (4.16)$$

A função  $W_p$  é normalmente um filtro passa-baixa, cuja inversa especifica a função sensibilidade desejada. A largura de banda é especificada por  $\omega_b$ . A variável  $M_p$  está relacionada ao valor de pico da função  $W_p^{-1}$  e portanto não é desejado um valor elevado para  $M_p$ . O parâmetro  $A_p$  está relacionado ao erro de regime. Para uma situação ideal seria desejado fazer  $A_p = 0$ , porém isto implicaria na colocação de um pólo em malha fechada sobre o eixo imaginário, o que tornaria o sistema não detectável e não estabilizável [39]. Para a função escolhida, após repetidas experiências, foram especificados  $M_p = 1,11$ ,  $\omega_p = 2.053$  rad/s e  $A_p = 0,21$ . A matriz transferência  $W_p(s)$  é então definida como

$$W_p(s) = \begin{bmatrix} 0,9 \frac{s+2282}{s+456,3} & 0 \\ 0 & 0,9 \frac{s+2282}{s+456,3} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

A resposta em frequência do inverso da função peso,  $\bar{\sigma}(W_p^{-1}(s))$ , pode ser vista na figura 4.6. Este requisitos de desempenho, especifica atenuação de -13db dos

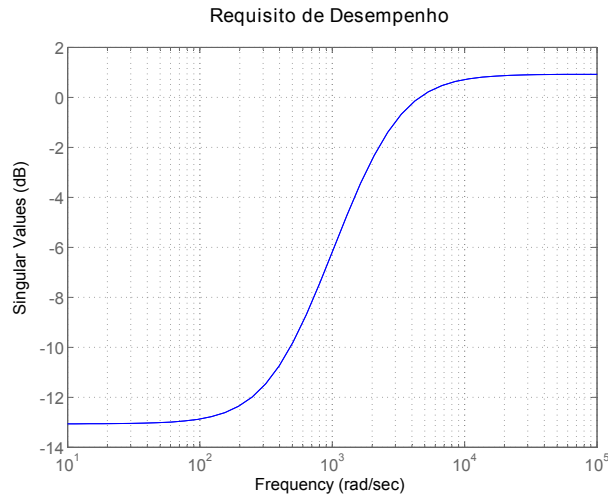


Figura 4.6: Resposta em frequência da função  $W_p^{-1}$ .

ruídos para frequências abaixo de 100 rad/s, havendo atenuação maior que -3db para frequência abaixo 1.800 rad/s. Acima de 4.740 rad/s não deverá ocorrer mais a atenuação do sinal de ruído. Para a função  $W_u$ , foi definida uma matriz diagonal constante  $W_u = 10^{-2}I_{22}$ .

## 4.4 Síntese do controlador

O sistema a ser considerado é aquele que incorpora os requisitos de desempenho que se deseja obter, conforme mostrado na figura 4.5 e descrito pela equação (4.15).

Para a síntese do controlador foi utilizado o comando hinsyn do programa Matlab. Para o controlador sub-ótimo obtido, a norma infinita da matriz (4.14) é  $\gamma = 0,9375$ , verificando-se o atendimento das condições de desempenho nominal pretendida definidas por  $W_p$  e  $W_u$ . Uma vez que a condição (4.14) é atendida, a condição dada por

$$\left\| W_p(I + GK)^{-1} \right\|_{\infty} < \gamma \quad (4.18)$$

também é satisfeita. Esta condição é verificada pela comparação dos gráficos da resposta em frequência da função sensibilidade em conjunto com a função  $W_p^{-1}$ , mostrada na figura 4.7.

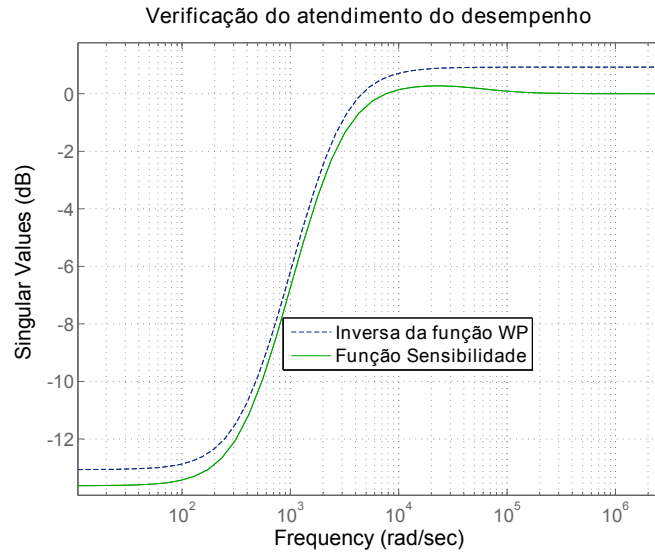


Figura 4.7: Resposta em frequência das funções  $\bar{\sigma}(W_p^{-1}(j\omega))$  e  $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ .

A função sensibilidade foi obtida considerando para a corrente do estator  $f = 28$  Hz, o que corresponde uma velocidade de rotação de 800 rpm. As equações (4.19) a (4.22) mostram as matrizes referentes ao controlador utilizado.



$$A = \begin{bmatrix} -1.654e+005 & -22.46 & 7.082e+004 & 9593 & 719 & -79.63 \\ 22.46 & -1.654e+005 & 9593 & -7.082e+004 & -79.63 & 43.4 \\ -7.081e+004 & -9653 & -1.673 & -32.13 & -2.504 & 0.4958 \\ -9653 & 7.081e+004 & 32.13 & -1.673 & -0.4958 & -8896e-004 \\ 716.2 & -101.8 & 2.418 & 0.8181 & -18.04 & 0.0009301 \\ -101.8 & -716.2 & -0.8181 & 2.418 & -0.0009301 & -18.04 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$B = 10^4 \begin{bmatrix} 5.3777 & -6.1677 \\ -6.1677 & -5.3777 \\ 0.0129 & -0.0224 \\ 0.0224 & 0.0129 \\ -0.0142 & 0.0123 \\ -0.0123 & -0.0142 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$C = 10^4 \begin{bmatrix} 5.3773 & -6.1680 & -0.0154 & -0.0207 & -0.0138 & -0.0127 \\ -6.1680 & -5.3773 & 0.0207 & -0.0154 & 0.0127 & -0.0138 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

## 4.5 Simulações

Para verificar a regulação obtida, será considerado um deslocamento do eixo da posição central de 0,1mm. Para simulação foi empregado sistema realimentado contendo a planta que representa o sistema de posicionamento do eixo (4.12) e o controlador projetado, conforme nostrado na figura 4.8. A verificação é feita para o sistema nominal, fazendo  $\Delta = 0$ . Como a planta  $G$  é função da frequência da corrente de excitação do estator, e portanto da velocidade de rotação, serão realizadas simulações para as velocidades de rotação de 300 rpm (figura 4.9), 800 rpm (figura 4.11), 1.500 rpm (figura 4.13) e 3.000 rpm (figura 4.15). O controle utilizado será não adaptativo sendo projetado para a velocidade de 800 rpm. Para cada velocidade de rotação é verificado a condição de desempenho nominal mostrado nas figuras 4.10, 4.12, 4.14 e 4.16.

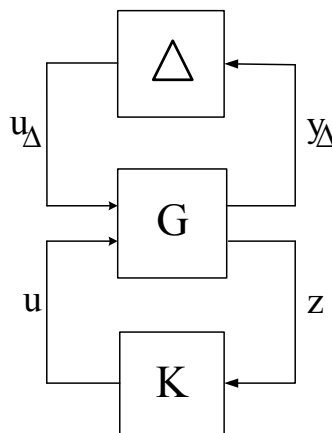


Figura 4.8: Sistema realimentado.

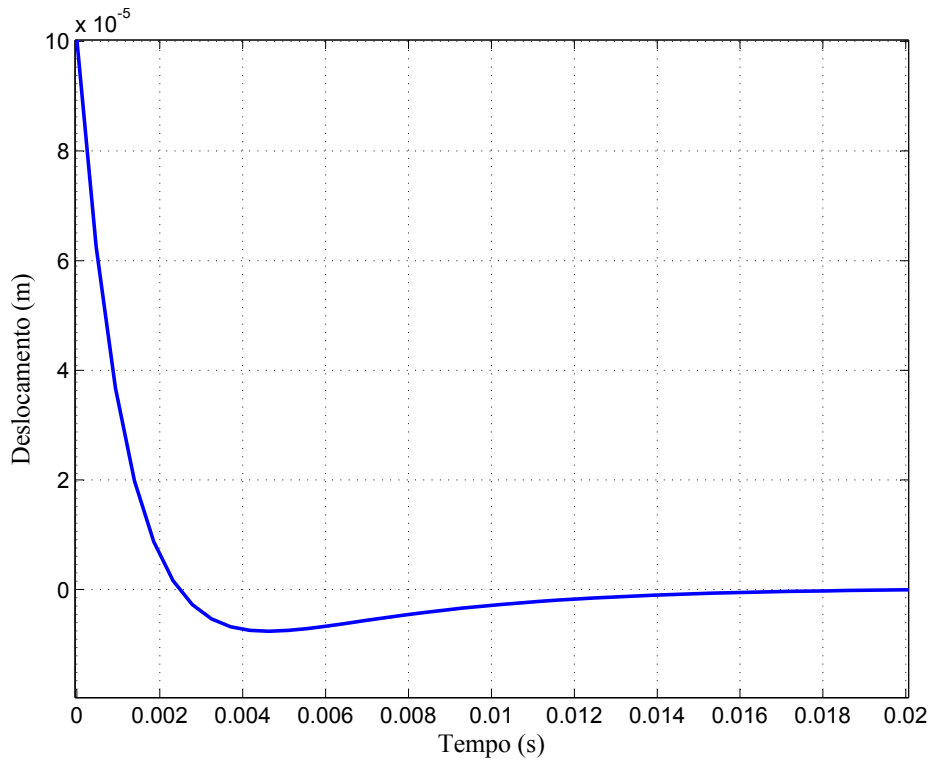


Figura 4.9: Posição do eixo mancal, com velocidade de rotação de 300 rpm.

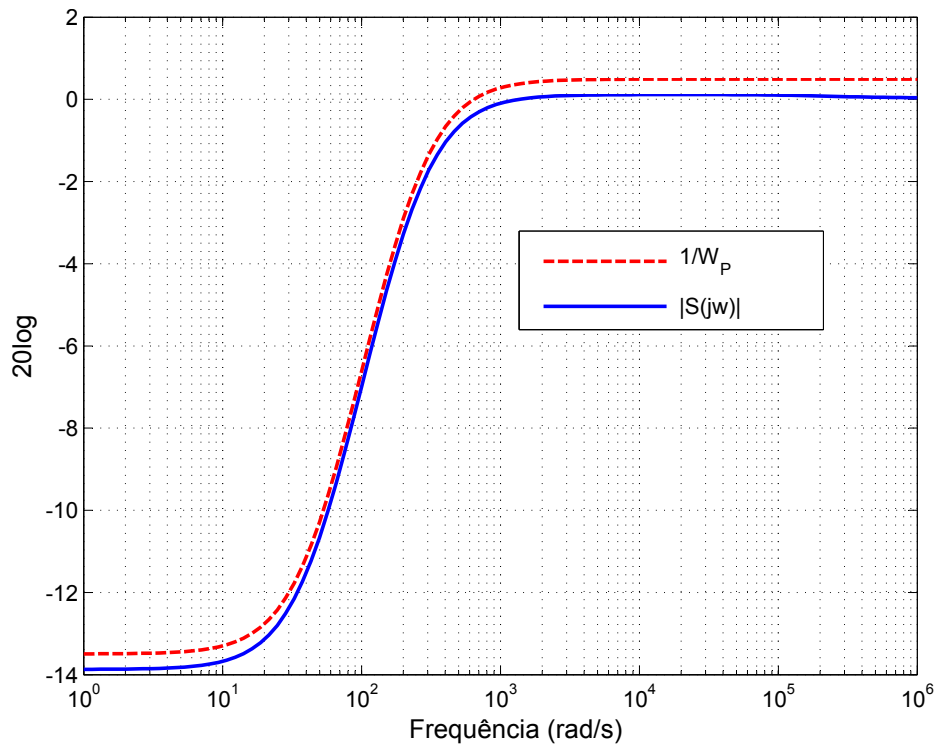


Figura 4.10: Função sensibilidade para velocidade de 300 rpm.

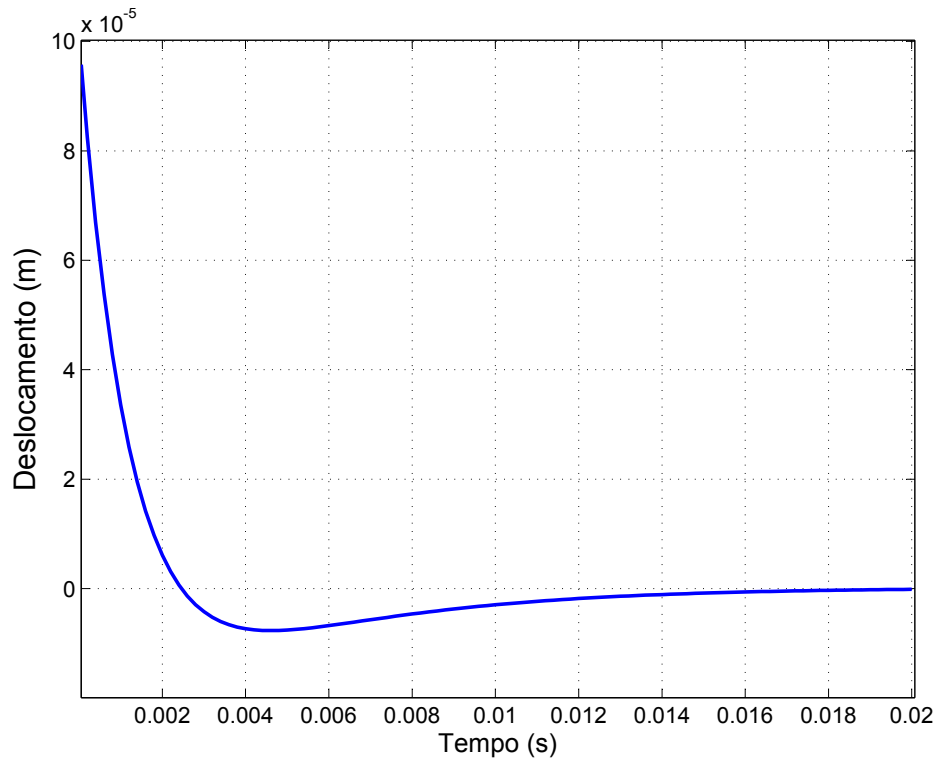


Figura 4.11: Posição do eixo mancal, com velocidade de rotação de 800 rpm.

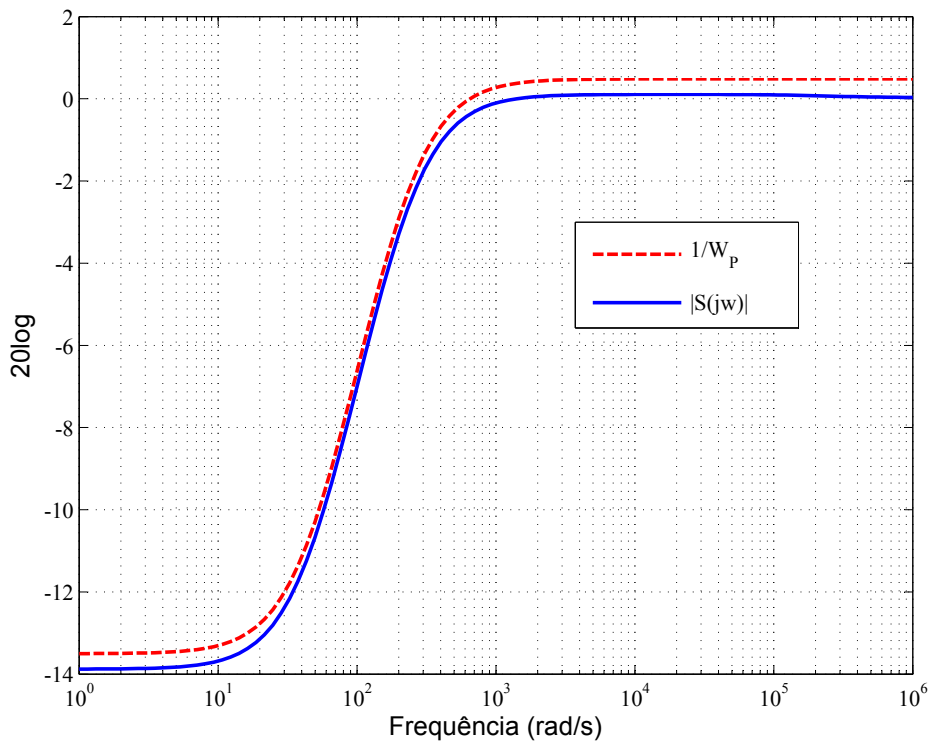


Figura 4.12: Função sensibilidade para velocidade de 800 rpm.

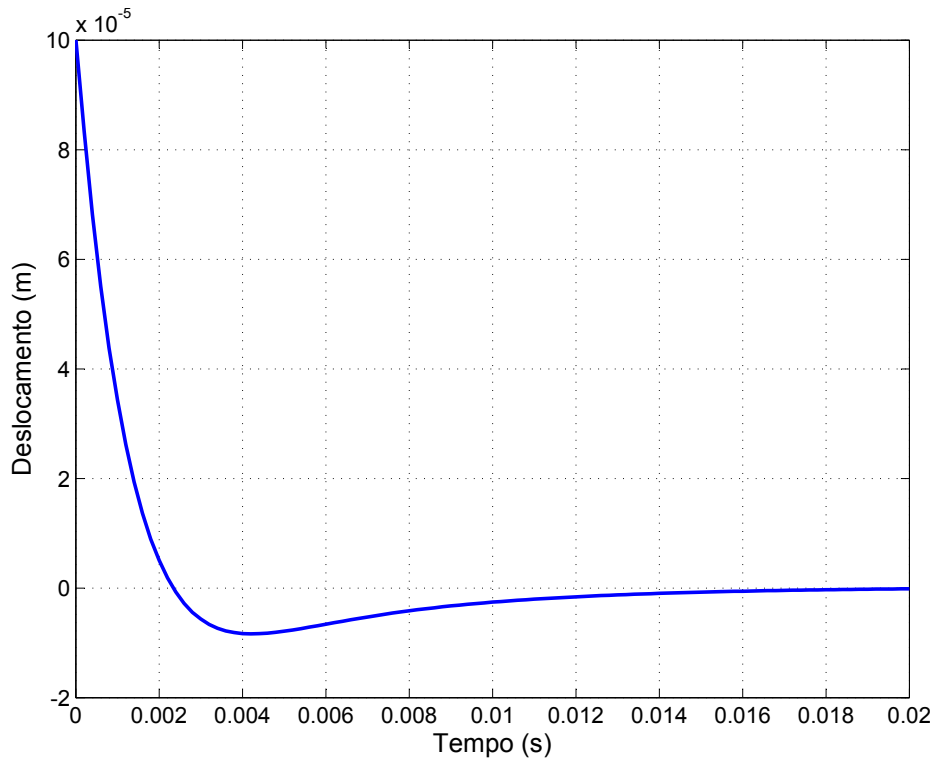


Figura 4.13: Posição do eixo mancal, com velocidade de rotação de 1.500 rpm.

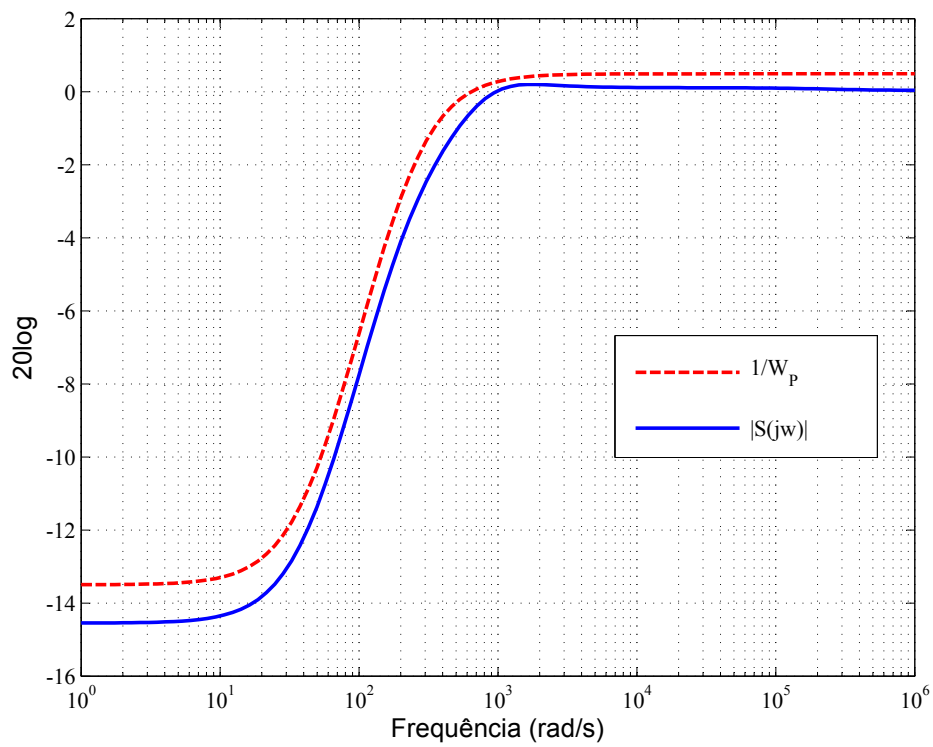


Figura 4.14: Função sensibilidade para velocidade de 1.500 rpm.

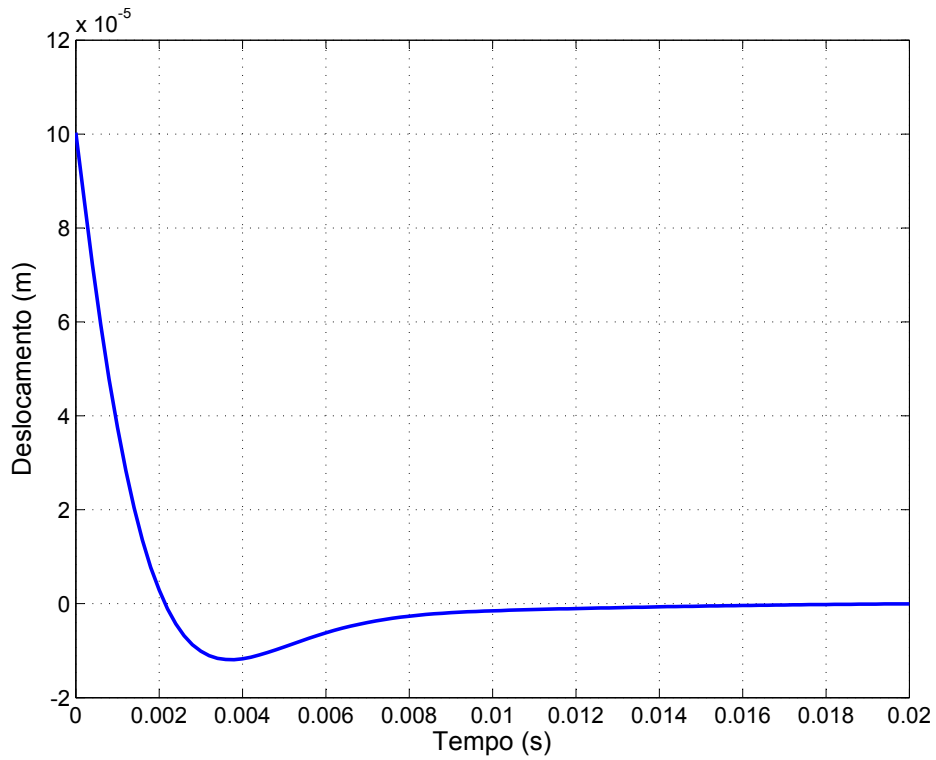


Figura 4.15: Posição do eixo mancal, com velocidade de rotação de 3.000 rpm.

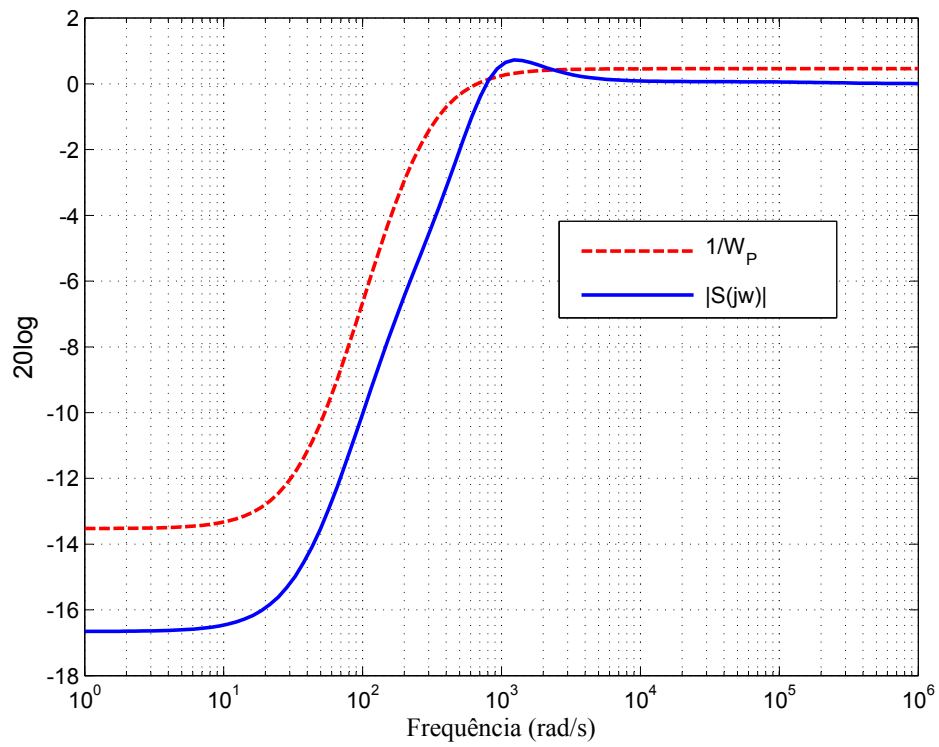


Figura 4.16: Função sensibilidade para velocidade de 3.000 rpm.

Pelas simulações, verifica-se que não há diferenças significativas para a regulação obtida para as diversas velocidade de rotação consideradas. O critério de desempenho estabelecido pela função sensibilidade também foi, em geral, atendido nos casos considerados. Percebe-se no entanto que para a velocidade de rotação de 3.000 rpm, a condição  $\|S(j\omega)\|_\infty < 1/\|W_p\|_\infty$  não se verificou para uma faixa de frequência em torno de 1.000 rad/s. Controladores projetados com a técnica de controle  $\mathcal{H}_\infty$  são normalmente de ordem elevada, e cresce na mesma proporção da ordem dos pesos incorporados à planta generalizada. Além disto, o controlador incorpora o estimador ótimo de estados, contribuindo para o aumento da ordem do controlador.

## 4.6 Distúrbio harmônico

O modelo do motor mancal descrito na seção anterior desconsidera o termo cosenoidal. Para que este termo possa ser considerado foi utilizado o programa Simulink para simular o modelo da planta descrito pela equação (2.77), que representa um modelo mais próximo do caso real, conforme mostrado na figura 4.17. As figuras

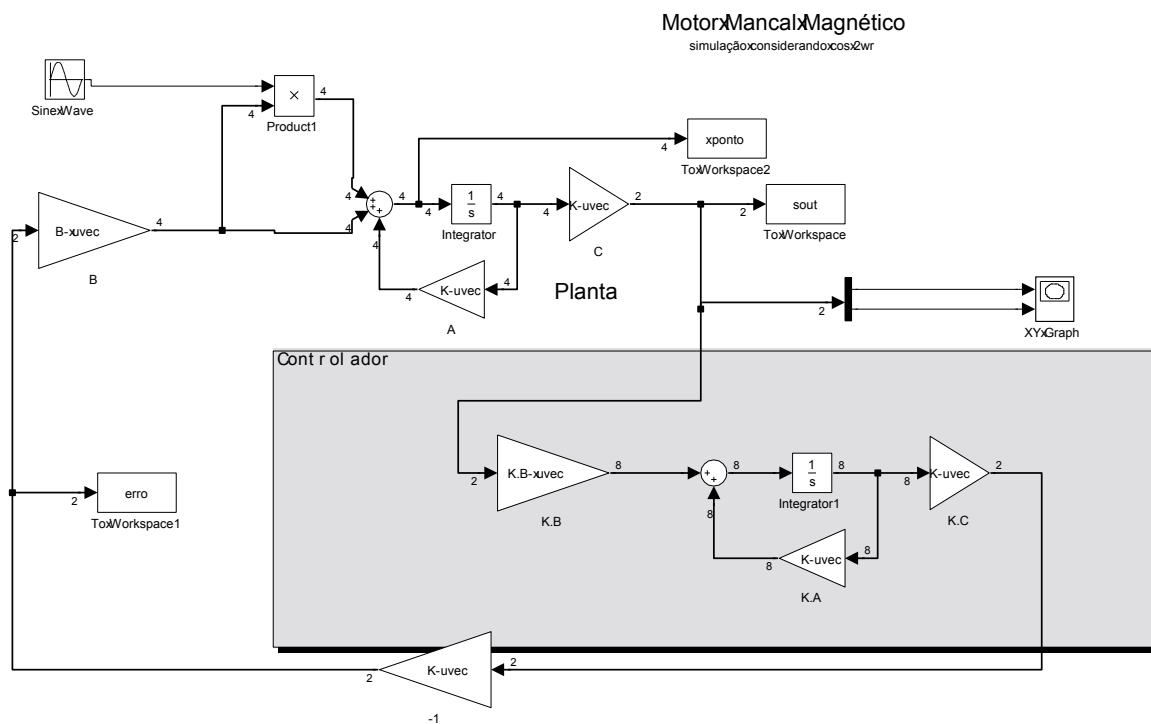


Figura 4.17: Montagem incorporando distúrbio cosenoidal.

4.18 a 4.21 mostram simulações para a posição do rotor utilizando este arranjo.

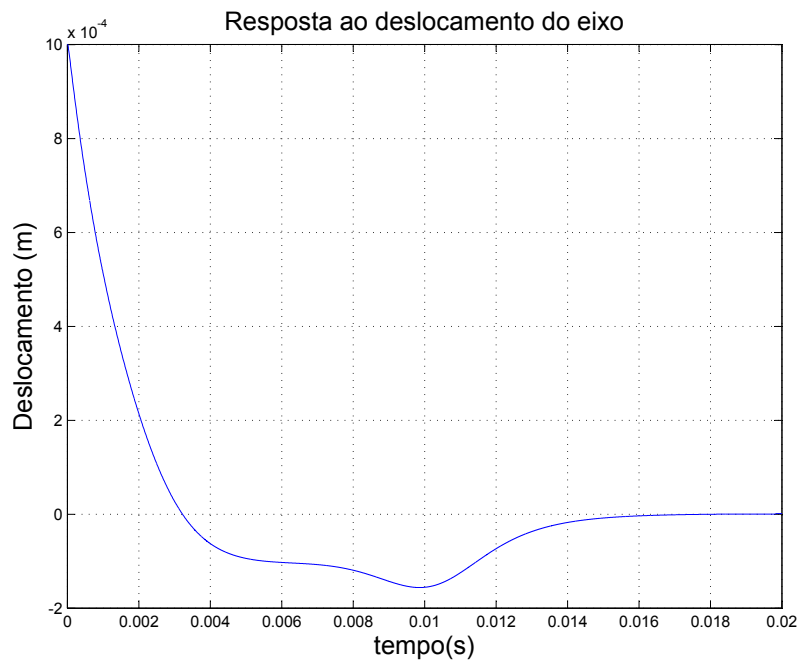


Figura 4.18: Posição do eixo submetido com a componente cossenoidal para velocidade de rotação de 300 RPM.

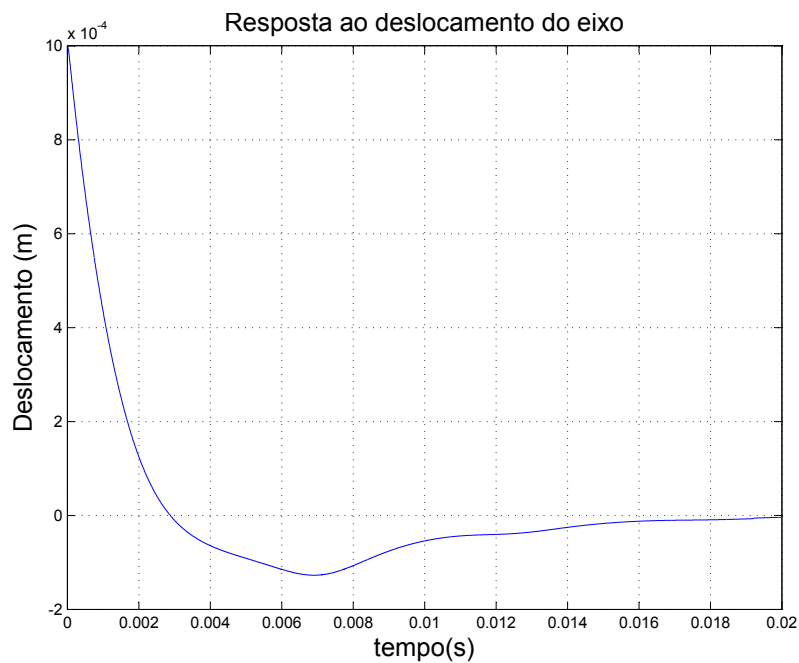


Figura 4.19: Posição do eixo submetido com a componente cossenoidal para velocidade de rotação de 800 RPM.

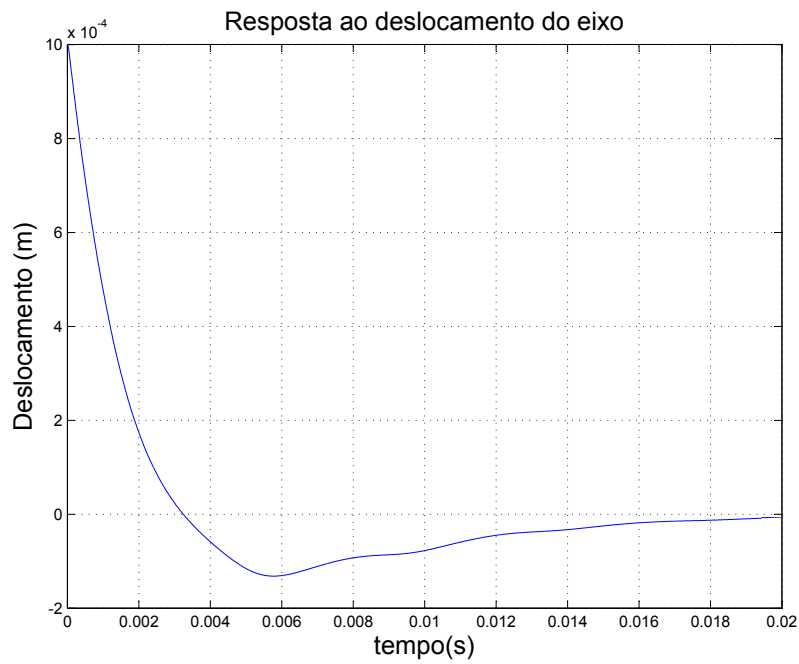


Figura 4.20: Posição do eixo submetido com a componente cossenoidal para velocidade de rotação de 1.500 RPM.

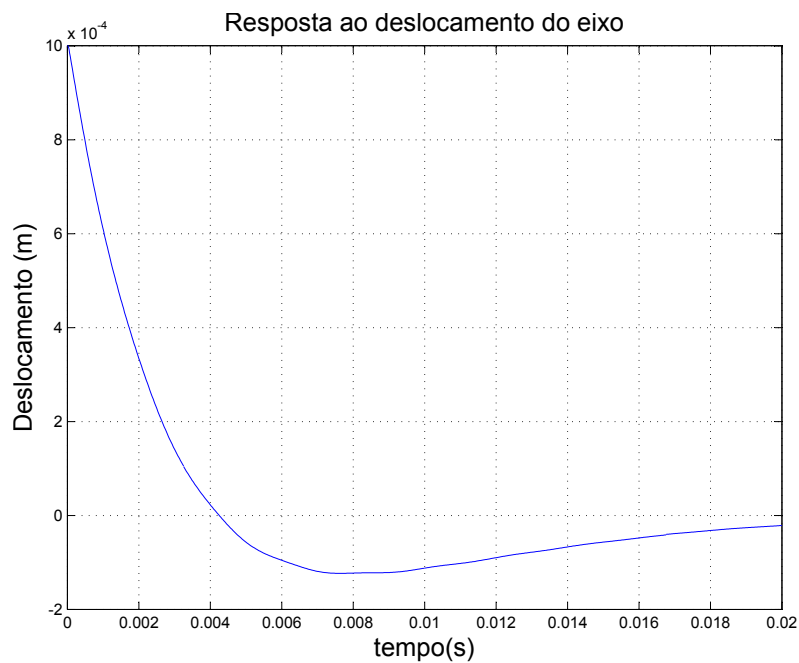


Figura 4.21: Posição do eixo submetido com a componente cossenoidal para velocidade de rotação de 3.000 RPM.



Verifica-se que apesar do distúrbio cossenoidal estar presente durante o período transitório do posicionamento do eixo, seu efeito foi atenuado no estado estacionário.

## 4.7 Análise $\mu$

Uma vez que as incertezas consideradas são estruturadas, a verificação da estabilidade robusta (ER) e do desempenho robusto (DR) deve ser feita por meio dos valores singulares estruturados  $\mu$ . Para esta análise foram utilizadas as funções pertencentes ao pacote Robust Control Toolbox do Matlab. Serão apresentadas aqui as considerações envolvendo o problema de estabilidade e desempenho nominal e robusto.

### 4.7.1 Estabilidade Nominal

A estabilidade nominal (EN) do sistema é uma condição garantida quando existem soluções para as equações de Riccati necessárias para a síntese do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ .

### 4.7.2 Estabilidade Robusta

Para a verificação da estabilidade robusta de um determinado sistema nominalmente estável, é necessário que o maior valor de  $\mu$  do sistema seja menor que 1, para uma determinada faixa de frequência de interesse. Para tanto, será considerado a estrutura mostrada na figura 3.14, onde M representa a função de transferência do bloco que deverá ter a estabilidade garantida na presença de perturbações. O teste de estabilidade  $\mu$  verifica em quanto o bloco  $\Delta$  pode ser aumentado garantindo a estabilidade, considerando que  $\mu < 1$  para que haja estabilidade robusta. Os valores de  $\mu$  são mostrados na figura 4.22. Verifica-se que o maior valor de  $\mu$  é 0,68475 o que significa que uma perturbação estruturada com norma menor que  $\frac{1}{0,68475}$  é permitida, ou seja, a estabilidade é mantida para  $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{0,68475}$ . Na mesma figura é mostrada a função  $\bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))$  que representa a estabilidade robusta considerando uma perturbação não estruturada. Verifica-se que  $\|M_{11}\|_\infty > 1$  em torno de 230 rad/s, e com isto, a estabilidade robusta não é preservada caso a perturbação seja não estruturada. A diferença entre os dois resultados ocorre pelo fato de que  $\bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))$  não leva em consideração a estrutura da perturbação estruturada paramétrica, que é levada em consideração pela análise  $\mu$ . Portanto a análise  $\mu$  permite resultados menos conservativos caso a estrutura da incerteza seja conhecida.

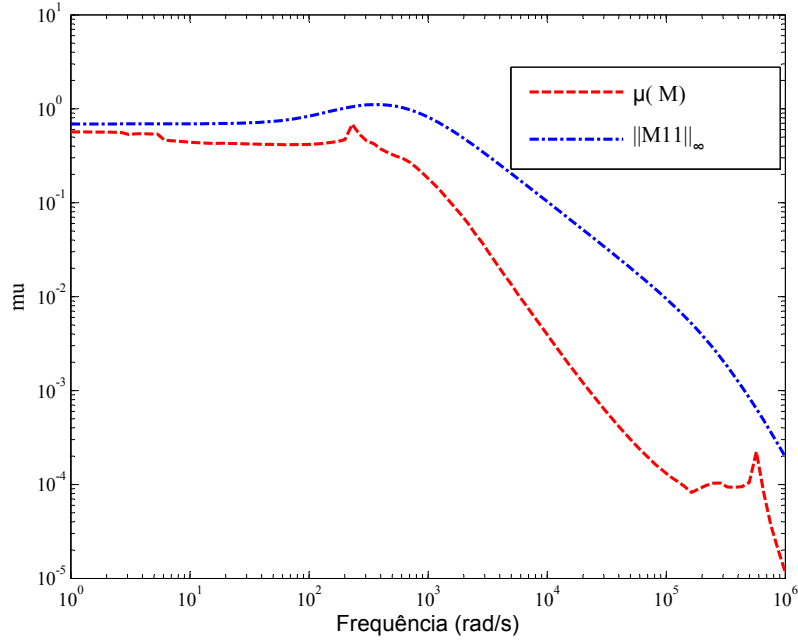


Figura 4.22: Análise de estabilidade robusta.

### 4.7.3 Desempenho Nominal

A análise para o desempenho nominal (DN) é realizada considerando o sistema descrito na figura 3.13, no qual são incluídos os pesos de desempenho. Para tanto é necessário que  $\|N_{22}\|_{\infty} < 1$  para que haja desempenho nominal. Esta condição é equivalente a condição definida em (4.18). A resposta em frequência de  $\bar{\sigma}(N_{22}(j\omega))$  é mostrado na figura 4.23. Verifica-se, como esperado, que o desempenho nominal é obtido pois temos  $\|N_{12}\|_{\infty} < 1$ , com  $\gamma = 0,9575$ .

### 4.7.4 Desempenho Robusto

Para a análise do desempenho robusto (DR), é considerado todo o bloco N, conforme descrito pela equação (3.29). Neste caso a função peso é levada em consideração como uma perturbação, e a análise  $\mu$  de estabilidade robusta pode ser aplicado para a verificação do desempenho robusto. O gráfico para o desempenho robusto é mostrado na figura 4.23. No caso do desempenho robusto, foi obtido  $\mu = 2,1125$  ( $\mu > 1$ ), não sendo obtido portanto a condição de desempenho robusto para as condições de variações especificadas e para os requisitos de desempenho exigido.

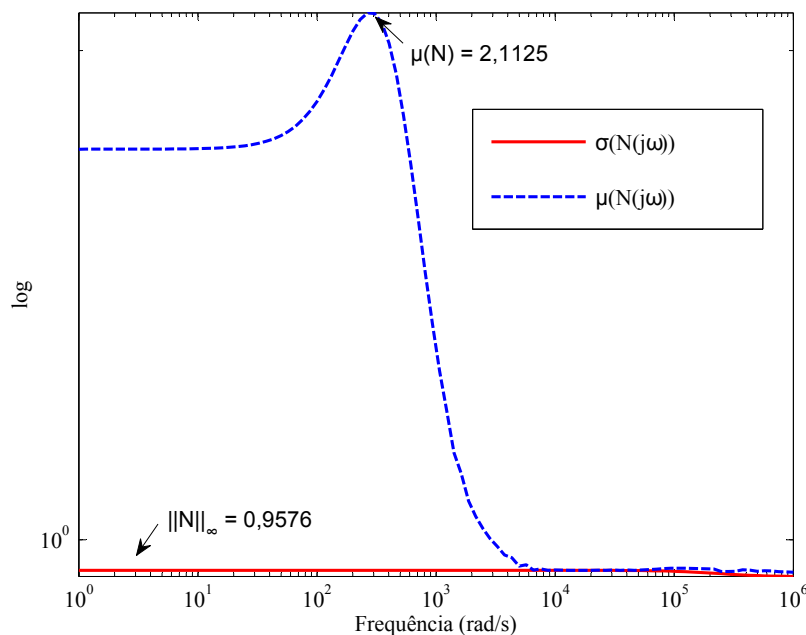


Figura 4.23: Análise de desempenho nominal e robusto.

## 4.8 Controle $\mathcal{H}_\infty$ e LQR: comparações do desempenho e da robustez

As técnicas empregadas neste trabalho para a quantificação do desempenho e da estabilidade do sistema, se aplicam a qualquer sistema de malha fechada estabilizado, independentemente do método utilizado para obter o sistema controlado [40]. Para tanto, é utilizado a norma infinita do sistema em malha fechada. Para comparação, será utilizado a matriz de controle obtida pelo método LQR (Linear Quadratic Regulator) na forma centralizada, desenvolvida por [16]. Esta matriz é dada por:

$$F_c = \begin{bmatrix} -8,777 & -7 & -79 & 0 \\ 7 & -8,777 & 0 & -79 \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Desta forma, utilizando os mesmos princípios e rotinas desenvolvidas para a verificação do desempenho e da estabilidade, é possível obter as normas dos sistemas realimentados e o índice  $\mu$  de qualquer técnica de controle, e compará-los com os valores obtidos para o controle  $\mathcal{H}_\infty$ . A planta utilizada é a descrita pela equação (4.12), contendo as variações paramétricas e as funções de desempenho do sistema que descreve o posicionamento do motor mancal magnético. Semelhantemente ao

que foi realizado para a análise do controle  $\mathcal{H}_\infty$ , são obtidos os blocos N e M, mostrados respectivamente, nas figuras 3.13 e 3.14. Os resultados obtidos nesta nova análise, juntamente com os dados obtidos para o controlador  $\mathcal{H}_\infty$ , são mostrados na Tabela 4.1.

	$\mathcal{H}_\infty$	LQR
<b>Estabilidade Robusta</b>	0,6847	0,7553
<b>Desempenho Nominal</b>	0,9575	0,9755
<b>Desempenho Robusto</b>	2,1125	3,7338

Tabela 4.1: Comparação entre  $\mathcal{H}_\infty$  e LQR.

Portanto, apesar da melhora em todos os critérios de comparação observados na tabela acima (sabendo que quanto menor o valor, melhor o desempenho), os indicadores para Estabilidade Robusta e para Desempenho Nominal não apresentarão uma diferenciação considerável. Porém, para o índice de Desempenho Robusto, verifica-se um ganho com relação ao Desempenho Robusto do sistema. Isto garante que a rejeição aos ruídos pode ser alcançada mesmo para uma maior faixa de variabilidade da planta, utilizando o controle  $\mathcal{H}_\infty$ .

## 4.9 Conclusão parcial

Para o projeto de controle do posicionamento do eixo do motor mancal, foram estabelecidos requisitos objetivando: melhora do desempenho do sistema (mesmo na presença de distúrbios), e melhora na estabilidade robusta. Simulações comprovaram que os controladores projetados permitiram a correta regulação do sistema para diferentes velocidades síncronas de operação do rotor. Verifica-se que o sistema apresenta, além da estabilidade nominal, estabilidade robusta, para as condições de variabilidade dos parâmetros proposto. No entanto, que os requisitos de desempenho exigidos e para a variabilidade admitida para os parâmetros do sistema, não foi possível obtida a condição de desempenho robusto.

O método de projeto do controlador por Sensibilidade Mista, emprega as funções pesos para “sintonizar” o desempenho e a robustez desejado. Apesar da estabilidade nominal ser sempre garantida, nem mesmo para a planta nominal há garantia de obtenção do desempenho especificado pelas funções pesos escolhidas.

O uso do teste de estabilidade e desempenho utilizando os valores singulares estruturados se mostrou uma ferramenta bastante útil para verificar o atendimento dos requisitos de projeto.

Variando-se os parâmetros das funções pesos, foram realizadas diversas tentativas buscando obter para o sistema desempenho robusto. Porém, mesmo para o

caso de desempenho nominal os resultados foram alcançados somente após diversas interações de projeto. Investigações mais aprofundadas poderão determinar outras técnicas de projeto que permitam obter os objetivos de estabilidade e desempenho pretendidos.

# Capítulo 5

## Implementação e descrição do protótipo

Serão apresentados os principais blocos constituintes do protótipo do motor mancal, no qual se baseia este estudo teórico.

Será descrito a implementação do controlador projetado no capítulo anterior em um DSP, visando a validação desta implementação. Será mostrado, no entanto, que o DSP de ponto fixo utilizado não possui velocidade de processamento necessária para o sucesso da implementação.

### 5.1 Funcionamento

O motor mancal, mostrado na figura 5.1, utiliza para seu funcionamento, fonte de de potência de tensão contínua, um quadro de acionamento e controle e por sensores de corrente, posição e velocidade. O quadro de acionamento e controle é constituído basicamente dos seguintes módulos:

**Placa do Processador Digital de Sinais:** O processamento do controle é baseado no DSP F2812 da Texas Instruments [42], de ponto fixo. O processador de ponto fixo representa os números reais em forma binária utilizando uma quantidade fixa de números inteiros e fracionários. Para lidar com números de ordem de grandezas diferentes, deve-se realizar um elevado processamento por software para que seja possível utilizar estes dados sem que haja perda de informação. Quanto as suas características, o DSP F2812 possui barramento de 32 bits, 16 conversores analógicos de 12 bits e opera a frequência de 150 MHz. A placa de desenvolvimento empregada foi a eZdsp F2812.

**IGBT:** Chaves para fornecer as correntes para os enrolamentos do motor, atuando como inversores seguindo o controle do DSP.

**Placas condicionadoras de sinais:** Recebem os sinais medidos dos sensores de posição, corrente e velocidade para serem processados pelo DSP. Os sinais são lidos como tensões e convertidos para valores positivos variando de 0v a 3,3v, que é a faixa de tensão lida pelas entradas analógicas do DSP. Também recebe os sinais digitais do DSP para serem ajustados para a ativação dos IGBT. A placa foi desenvolvida pela COPPE cujo princípio é funcionar como buffers e amplificadores de tensão.

**Sensores de corrente:** Medem as correntes que alimentam as fases do motor. Existem quatro sensores para cada bobina da fase A, já que possuem controle de corrente diferente para cada bobina, e um sensor para a fase B.

**Sensor de velocidade:** O módulo principal é acoplado ao lado do quadro de controle possuindo os transdutores acoplados ao motor. Mede o intervalo entre os pulsos, sendo quatro pulsos por volta.

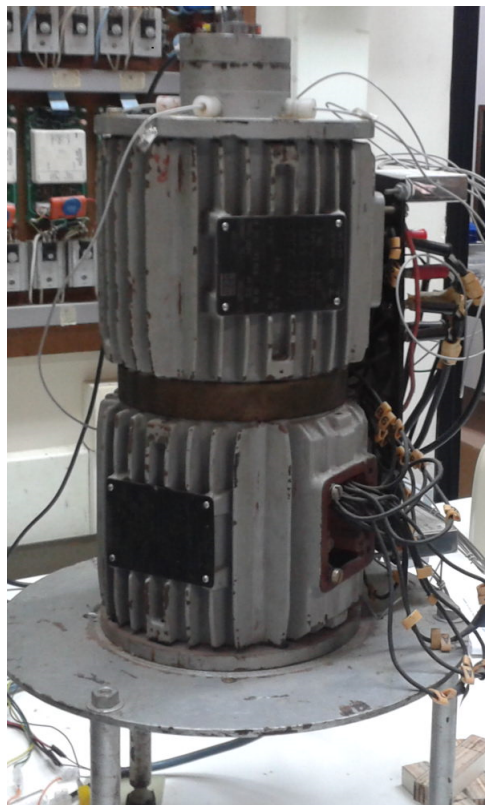


Figura 5.1: Protótipo de motor mancal utilizado.

## 5.2 Descrição do funcionamento do hardware

Todo o processamento de controle é realizado pela placa de desenvolvimento do DSP. Esta placa possui portas de saídas digitais para ativar os IGBT responsáveis pela geração das correntes que alimentam os enrolamentos do motor. A condução dos IGBT ocorrerá mediante a comparação entre o sinal senoidal de referência, gerados por software, e os sinais medidos pelos sensores de corrente (4 correntes da fase A e 1 corrente para fase B). Esta técnica de controle por histerese é conhecida como bang-bang. A ligação dos blocos do motor mancal pode ser vista na figura 5.2.

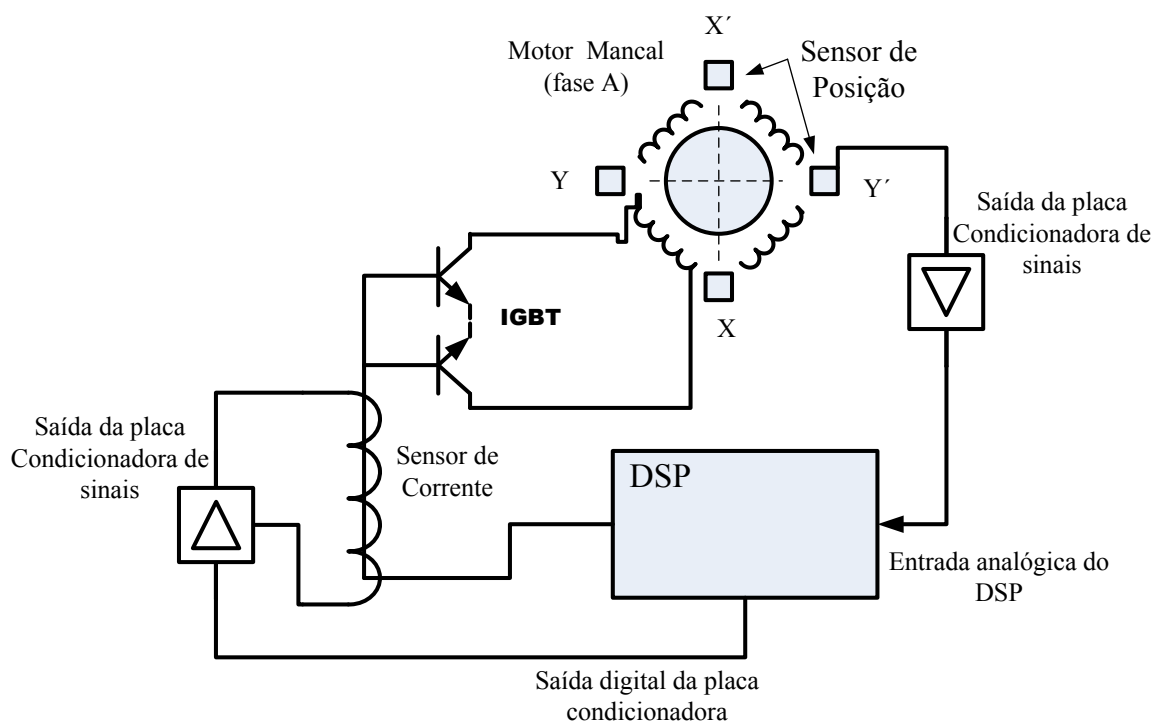


Figura 5.2: Diagrama em blocos simplificado do motor mancal.

### 5.2.1 Programa de controle

O código utilizado para controle, que é carregado no DSP, é desenvolvido no ambiente de desenvolvimento Code Composer. Este software permite gerar o código fonte e o código objeto que é carregado no DSP. O código pode ser desmembrado em duas rotinas principais, que são inicialização, que serve para configurar e inicializar dispositivos internos do DSP, terminando em um loop infinito onde o programa fica aguardando uma chamada de interrupção, e a rotina de interrupção, cuja periodicidade é previamente configurada. Na rotina de interrupção são realizados os cálculos de controle de posição. A figura 5.3 mostra o fluxograma de funcionamento da rotina de controle.



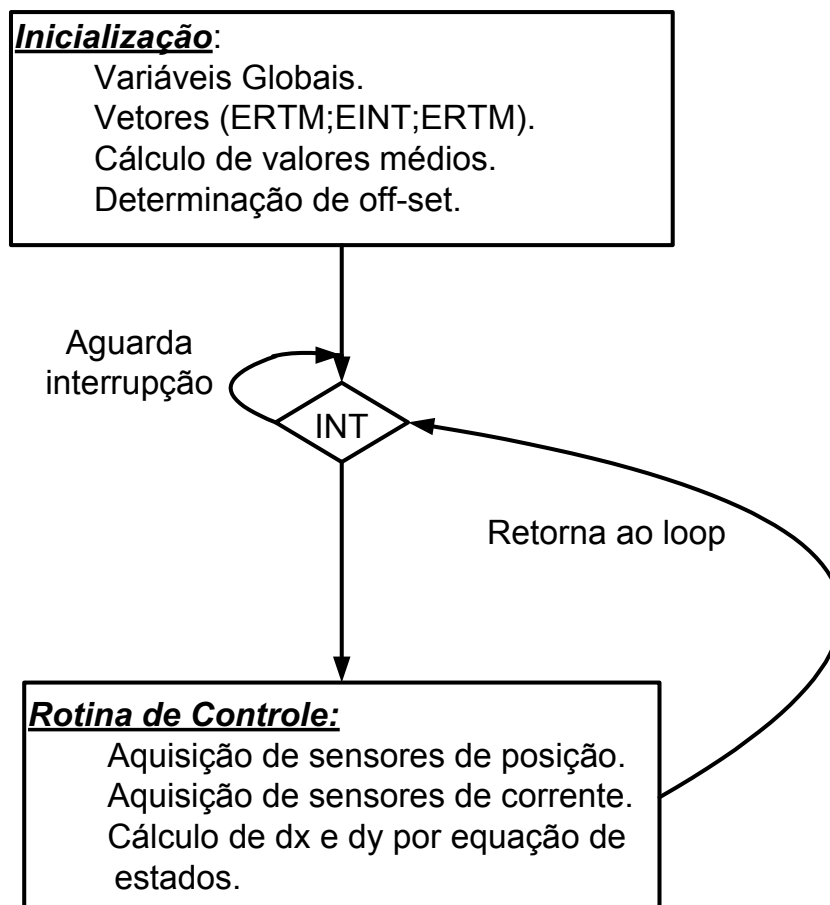


Figura 5.3: Fluxograma da rotina de controle de posição do motor mancal.

### 5.3 Medida do tempo de processamento

A implementação de uma nova lógica de controle do protótipo pode ser realizada aproveitando parte das rotinas de inicialização e geração das correntes de referência do código já desenvolvido nos trabalhos anteriores. No entanto, verificou-se que a frequência das chamadas a rotina de interrupção, que era de 32.786 Hz, se mostrou bastante elevada, ou seja, com tempo de processamento destinado para a cálculo das correntes de controle utilizando controle  $\mathcal{H}_\infty$  bastante reduzido. Como comparação, a figura 5.4 mostra o tempo gasto para leitura das entradas analógicas de posição e correntes e para processamento do controle LQR implementado por [16], visto em um osciloscópio ligado a um terminal da placa de desenvolvimento que indica a entrada e saída da rotina de interrupção pela colocação em nível alto de uma porta durante a execução desta rotina. Esta medida é realizada setando um bit de uma porta do DSP no início da interrupção e resetando o bit da porta no final da interrupção.

Verifica-se que o tempo necessário para cada medida é de cerca de  $20\mu\text{s}$ . Obtendo um valor próximo a este, [15] relatou em seu trabalho, um tempo de processamento de  $16,8\mu\text{s}$ . No entanto, para a implementação do controle  $\mathcal{H}_\infty$  é necessário

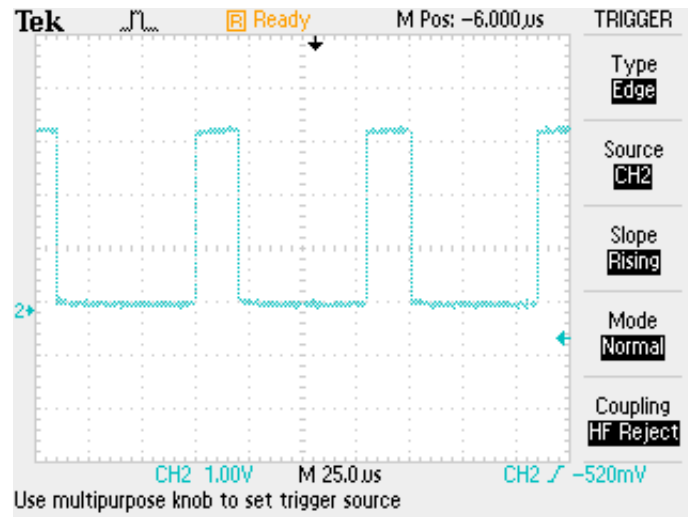


Figura 5.4: Tempo de execução da rotina LQR.

um tempo de processamento 4 vezes superior para a execução da rotina. O tempo medido para esta implementação é mostrado na figura 5.5. Vemos que o tempo necessário para executar esta rotina é de cerca de  $80\mu s$ , mantendo-se uma margem de cerca de  $5\mu s$  até a próxima interrupção a fim de evitar que seja iniciado um novo ciclo de interrupção antes do término do anterior. Com isto é obtido uma frequência de amostragem de 11,8 KHz, que mostra-se como a frequência de amostragem máxima possível para o processamento da rotina. No entanto, ao se executar o procedimento, verifica-se que o controle tende a posicionar o eixo na posição central, porém oscilando no espaço entre o mancal mecânico de proteção.

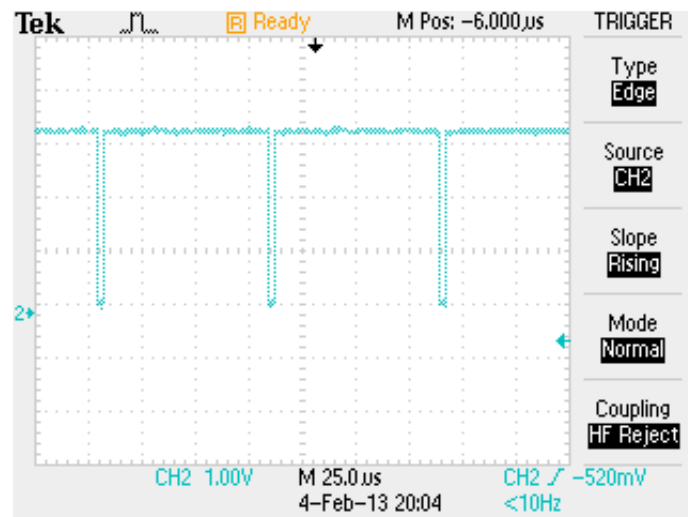


Figura 5.5: Tempo execução da rotina  $\mathcal{H}_\infty$ .

Dentre os fatores que explicam este elevado tempo de processamento está a ordem das matrizes de estado necessárias para o cálculo das variáveis de estado como também na grande diferença na ordem de grandeza entre os elementos das matrizes

acarretando maior tempo de processamento. Diversas tentativas de escalonamento e utilização de notação utilizando aritmética de base "Q", foram tentadas sem sucesso.

# Capítulo 6

## Conclusões e trabalhos futuros

### 6.1 Conclusões

Este trabalho buscou dar prosseguimento à linha de pesquisa sobre motores mancais magnéticos desenvolvido na COPPE/UFRJ. Além disto foi o motivador para o estudo e aprofundamento da técnica de controle robusto e para verificação dos benefícios e dificuldades inerente a esta técnica.

Foi visto no capítulo 3, como a descrição das incertezas de um sistema pode ser equacionada, e como esta representação é empregada para o projeto do controlador.

Verificou-se que o controle  $\mathcal{H}_\infty$  tem como objetivo aumentar a robustez do sistema controlado, de acordo com as especificações realizadas no projeto. Porém a verificação do atendimento dos objetivos pretendidos deve ser realizada através da análise do desempenho e da estabilidade do sistema. Para isto foi empregado a técnica que utiliza os valores singulares estruturados ( $\mu$ ). O requisito de estabilidade nominal sempre é atendida quando existe um controlador.

No capítulo 4, verificou-se que o sistema atende aos requisitos de desempenho nominal, de acordo com os requisitos de desempenho especificados pelas funções peso. Considera-se, neste caso, somente a planta nominal, não sendo considerado qualquer variabilidade do modelo.

A estabilidade robusta considera que, mesmo a planta apresentando uma variabilidade para o pior caso admissível, ou seja, uma variabilidade dentro da pior condição, esta deverá permanecer estável. Verificou-se, utilizando o teste  $\mu$ , que a planta apresenta estabilidade robusta para a variabilidade paramétrica estabelecida.

O requisito de possuir desempenho robusto é atendido quando o sistema em malha fechada é capaz de atenuar os ruídos, de acordo com as especificações descritas pelas funções pesos, na pior condição de variação da planta. Neste caso, com os resultados alcançados, não foi possível obter um sistema realimentado com as condições de desempenho para os critérios propostos.

A técnica do controle  $\mathcal{H}_\infty$  mostrou ser bastante promissor no controle do motor mancal utilizado, em virtude deste ser um sistemas com modelagem complexa, dinâmicas com velocidades elevadas e pela variabilidade da planta, que é função da velocidade de rotação do motor. A operação do motor mancal utilizando LQR e PID ainda apresenta questões práticas quanto ao funcionamento que devem ser melhor estudadas. Por exemplo, o motor não opera bem a baixas velocidades e em determinados momentos verifica-se a ocorrência choque do rotor no mancal mecânico de proteção, provavelmente pela baixa robustez do controle.

## 6.2 Trabalhos futuros

São apresentadas as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Substituição do DSP de ponto fixo para ponto flutuante. O DSP de ponto flutuante é otimizado para a realização de cálculos com números não inteiros. Isto solucionará o problema encontrado para o tempo de processamento do algoritmo.
- Implementação do controle de velocidade utilizando controle  $\mathcal{H}_\infty$ .
- Implementação da técnica de controle  $\mu$  para o controle de posição. Os valores singulares estruturados podem ser empregados na técnica de controle conhecida como síntese  $\mu$ . Esta técnica visa obter o controlador que atenda aos requisitos de desempenho e estabilidade robusta. No entanto, como a ordem dos controladores obtidos é elevada, deve-se primeiramente otimizar o tempo de processamento pela substituição do DSP.
- Estudo das incertezas e da confiabilidade dos parâmetros da planta do motor mancal. Este estudo permitirá que os valores descrevendo a variabilidade do modelo atenda à requisitos reais do protótipo utilizado.

# Referências Bibliográficas

- [1] STEPHAN, R., PINTO, F. C., GOMES, A. N. “Mancais Magnéticos - Mecatrônica sem atrito”. 1 ed., Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2013.
- [2] SCHWEITZER, MASLEN, G. E. H. “Active Magnetic Bearings. Theory, Design and application to Rotating Machinery”. 1 ed., New York, Pearson Education, 2009.
- [3] BRAUNBECK, W. *Freischwebende Körper im elektrischen und magnetischen Feld*. Tese de Doutorado, Dutch Institute for Systems and Control.
- [4] BLEULER, H. *Decentralized control of Magnetic Rotor Bearing Systems*. Tese de Doutorado, Swiss Federal Institute of Thechnology.
- [5] HABERMANN, H., LIARD, G. “Le palier magnétique active: um principe revolutionarie”. 1 ed., France, SKF, 1977.
- [6] CHIBA, A., FUKAU, T., ICHIKAWA, O., et al. “Magnetic Bearings and Bearingless Drives”. 1 ed., Oxford, Elsevier, 2005.
- [7] CHIBA, A., POWER, D., RAHMAM, M. A. “Characteristics of a bearingless inductor motor”, *IEEE Transaction on Magnetics*, v. 27, n. 1, pp. 5199–6201, nov. 1991.
- [8] SALAZAR, A. O., STEPHAN, R. M. “A bearingless method for induction machines”, *IEEE Transaction on Magnetics*, v. 29, n. 1, pp. 2965–2967, nov. 1993.
- [9] SALAZAR, A. O. *Mancais magnéticos para motores de indução utilizando os próprios enrolamentos de estator*. Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ.
- [10] SALAZAR, A. O. *Estudo de Um motor CA com mancal magnetico utilizando os próprios enrolamentos do estator*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 1994.

- [11] SANTISTEBAN, J. A. *Estudo da influência da carga torcional sobre o posicionamento de um motor mancal*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 1999.
- [12] DAVID, D. F. B. *Levitação de Rotor por mancais motores radiais magnéticos e mancal axial supercondutor auto-estável*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ.
- [13] CARDOSO, N. N. *Controle simultâneo da velocidade e posição em mancais motores magnéticos*. Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2003.
- [14] RODRIGUES, L. S. *Controle ótimo descentralizado a dois parâmetros para Mancais Motores Magnéticos*. Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ.
- [15] GOMES, R. R. *Motor Mancal com controle implementado em um DSP*. Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ.
- [16] KAUSS, W. L. *Motor Mancal Magnético com Controle Ótimo Implementado em um DSP*. Dissertação de mestrado, COPPE/UFRJ, COPPE, Rio de Janeiro, 2008.
- [17] DOYLE, J., STEIN, G. “Multivariable Feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis”, *IEEE Transaction on automatic Control*, v. 26, n. 1, pp. 4–16, fev. 1981.
- [18] DOYLE, J. “Guaranteed margin for LQG regulators”, *IEEE Transaction on automatic Control*, v. 23, n. 4, pp. 756–757.
- [19] ZAMES. “Feedback and Optimal Sensitivity: modelo reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverse”, *IEEE Transaction on automatic Control*, v. 26, n. 4, pp. 301–320.
- [20] ISAACS, R. “Differential games”. 1 ed., New York, John Wiley and Sons, 1965.
- [21] MAGEIROU, E. F. “Values and strategies for infinite time linear quadratic games”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 21, n. 4, pp. 547–550, ago. 1976.
- [22] BASSAR, T., BERNHARD, P. “H-infinity optimal control and related minimax design problems: A dynamic game approach”. 1 ed., Boston, Birkhauser, 1991.
- [23] PETERSEN, I. R., HOLLOT, C. V. “Disturbance attenuation and H-infinity optimization: A design method based on the algebraic Riccati equation”,

- IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 22, n. 1, pp. 397–411, jul. 1986.
- [24] PETERSEN, I. R., HOLLOT, C. “A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems”, *Automatica*, v. 22, n. 2, pp. 397–411, out. 1986.
- [25] KHARGONEKAR, P., PETERSEN, I., ROTEA, M. A. “H-infinity optimal control with state feedback”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 33, n. 8, pp. 786–788, 2002.
- [26] LIMEBEER, D., ANDERSON, B., KHARGONEKAR, P., et al. “A game theoretic approach to H-infinity control for time varying systems”, *SIAM Journal of Control and Optimization*, v. 30, n. 2, pp. 262—283, jul. 2006.
- [27] GREEN, M., LIMEBEER, D. J. “Linear Robust Control”. 1 ed., New York, Dover Books, Ago 2012.
- [28] CAO, G., FAN, S., XU, G. “The Characteristics Analysis of Magnetic Bearing based on H-infinity controller”, *Proceeding of the 5th Congress on Intelligent Control and Automation*, v. 1, n. 1, pp. 752–756, jun. 2004.
- [29] JASTRZEBSKI, R. P., HYNYNEN, K. M., SMIRNOV, A. “H-infinity Control of active magnetic suspension”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 24, n. 4, pp. 995–1006, jun. 2010.
- [30] BALINI, H. M. K., SCHERER, C. W. “Performance enhancement for AMB systems using unstable H-infinity controllers”, *IEEE transaction on Control Systems Technology*, v. 19, n. 6, pp. 1479–1492, jan. 2011.
- [31] NAMERIKAWA, T., FUJITA, M. “Uncertain model and  $\mu$  synthesis of a Magnetic Bearing”, *IEEE Conference on Control Applications - CCA*, v. 1, n. 1, pp. 558–563, ago. 1999.
- [32] EJAZ, M., ARBAB, M. N., SHAH, S. W. “Weight selection in H-infinity loop shaping using LEAD/LAG Compensators”, *2th International Conference on Emerging Technologies*, v. 1, n. 1, pp. 319–324, nov. 2006.
- [33] OLOOMI, H., SHAFAI, B. “Weight selection in Mixed Sensitivity Robust Control for improving the sinusoidal tracking performance”, *Proceeding of the 42nd IEEE conference on Decision and Control*, v. 1, n. 1, pp. 300–305, dez. 2003.



- [34] BALINI, H. M. N. K. *Advanced systems theory applied to AMB Systems*. Tese de D.Sc., Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands, 2011.
- [35] WANG, D. “Design and performance of QFT H-infinity controller for Magnetic Bearing of high-speed motors”, *Industrial Electronics and Applications, IEEE conference*, v. 1, n. 1, pp. 2624–2629, maio 2009.
- [36] JASTRZEBSKI, R. P. “Signal-based H-infinity optimal control for AMB system based on genetic algorithm”, *IEEE International conference on Control and Automation*, v. 1, n. 1, pp. 715–721, dez. 2009.
- [37] DAWES, C. L. “A course in electrical engineering”. 3 ed., New York, McGraw Hill Book Company, 1969.
- [38] HAYT, W. H. “Engineering electromagnetics”. 5 ed., New York, McGraw-Hill, 1988.
- [39] ZHOU, K., DOYLE, J. C. “Essential of robust control”. 1 ed., New York, Prentice Hall, 1997.
- [40] PETKOV, P. H., KONSTANTINOV, M. M. “Robust control design with MATLAB”. 1 ed., Leipzig, Springer Verlag, 2005.
- [41] SKOGESTAD, S., POSTLETHWAITE, I. “Multivariable feedback control: analysis and design”. 1 ed., New York, John Wiley and Sons, 1996.
- [42] INSTRUMENTS, T. “Manual DSP F2812”. 1 ed., New York, Texas Instruments, 2007.

# Apêndice A

## Parâmetros do motor mancal

N	Símbolo	Valor	Descrição
1	$a$	$68,9x10^{-3}m$	Geometria do Rotor
2	$b$	$-82,8x10^{-3}m$	Geometria do Rotor
3	$c$	$148,0x10^{-3}m$	Geometria do Rotor
4	$d$	$-163,0x10^{-3}m$	Geometria do Rotor
5	$g$	$218,0x10^{-3}m$	Geometria do Rotor
6	$m$	$4,42kg$	Massa do Rotor
7	$I_x$	$50,3x10^{-3}kgm^2$	Momento de Inércia
8	$I_y$	$50,3x10^{-3}kgm^2$	Momento de Inércia
9	$I_z$	$2,17x10^{-3}kgm^2$	Momento de Inércia
10	$k_h$	$1368N/m$	Mancal supercondutor
11	$c_h$	$2,89Ns/m$	Mancal supercondutor
12	$n_e$	99	Número de espiras por enrolamento
13	$h$	$0,4x10^{-3}m$	Geometria do GAP
14	$a_g$	$3,734x10^{-3}m^2$	Geometria do GAP
15	$I_0$	1,17A	Corrente de polarização no motor
16	$\mu_0$	$4\pi x10^{-7}N/A^2$	Permeabilidade elétrica
17	$L_2$	$34,24x10^{-3}H$	Parâmetro elétrico
18	$L_m$	$350,43x10^{-3}H$	Parâmetro elétrico
19	$R_2$	13,97 $\Omega$	Parâmetro elétrico
20	$\Gamma$	9,81 $m/s^2$	Aceleração da gravidade
21	$\sigma$	0,05	Escorregamento do motor

Tabela A.1: Parâmetros do protótipo do Motor Mancal Magnético.

# Apêndice B

## Código fonte do programa C do DSP

```
/*
 * Programa de controle de posicionamento/rotação de uma máquina sem mancal
 *
 * Versão 2.00 - COPPE/UFRJ - Dezembro de 2007
 *
 * =====
 * 15/Jul/2008: LQR e PID com IREF=600
 * Versão 3.00: Controle H-inf
 * Versão 2.00: Acrescido controle por LQR - mestrado de Wilmar Kauss - Dez2007*
 * Versão 1.00: PID fixo e adaptado - mestrado de Rafael Ramos Gomes - Dez2006*
 */

#include "DSP28_Device.h"
#include "IQmathLib.h"
#include "pid_reg3.h"
// #include <stdlib.h>
#define NBUF 8
#define Q11 2048
#define Imax ((int)((9.0/10.0)*Q11)) /* IREF global */

/* Definicão de variáveis globais */
int16 pxbuf=0,pybuf=0,iabuf_1=0,iabuf_2=0,iabuf_3=0,iabuf_4=0,ibbuf=0,velbuf=0;
int16 a_corr_A1[NBUF], a_px[NBUF], a_py[NBUF], a_corr_A2[NBUF], a_corr_A3[NBUF];
int16 a_corr_A4[NBUF], a_corr_B[NBUF],a_velbuf[NBUF];
int16 pos_x=0, pos_y=0, i_a1=0, i_a2=0, i_a3=0, i_a4=0, i_b=0,posxoff=2450,
posyoff=2520;
int16 i_a1ref,i_a2ref,i_a3ref,i_a4ref,i_bref,xref=0,yref=0,sensorvel=0,vref=400,
```

```

bmorta=10;
int16 aux[128],caux=0,dx=0,dy=0, IREF=600, IREFB=30,f=10,ang=1183;
int16 Kp = 50, Td = 295, Ki=4, Kc = 1, Kpv=1, Kiv=1, posx_old=0 ;

//Wilmar
int16 um=1, zero=0, erro_corr=1, corr_max=1500, maximo=0, minimo=0;
int16 pos_x1=0, pos_y1=0, f1=0, operacao=0, IREFaux=0;
float dx1=0, dy1=0;

//Matriz de realimentação do LQR - Wilmar
float f11=0,f12=0,f13=0,f14=0;
float f21=0,f22=0,f23=0,f24=0;
float f11c=0,f12c=0,f13c=0,f14c=0;
float f21c=0,f22c=0,f23c=0,f24c=0;

//alex

// Variaveis de estado - Alex
float X1=0, X2=0, X3=0, X4=0;
float X1k1=0, X2k1=0, X3k1=0, X4k1=0;

float A11= 0.8318, A12= 0.0002, A13= 0.0952, A14= 0.0463;
float A21= -0.0002, A22= 0.8318, A23= 0.0463, A24= -0.0952;
float A31= -0.0952, A32= -0.0464, A33= 0.9830, A34= -0.0002;
float A41= -0.0464, A42= 0.0952, A43= 0.0002, A44= 0.9830;

float B11= -3586.2546, B12 = -7101.8483;
float B21= -7101.8483, B22= 3586.2546;
float B31= -802.3303, B32= -609.9316;
float B41= 609.9316, B42= -802.3303;

float C11= -0.2868, C12= -0.5682, C13= 0.0642, C14= -0.0488;
float C21= -0.5682, C22= 0.2868, C23= 0.0488, C24= 0.0642;

//float D11= 2677.8016, D12= -0.2411;
//float D21= 0.2411, D22= 2677.8016;

float D11= 0, D12= 0;

```

```

float D21= 0, D22= 0;

//Período de amostragem para calculo das velocidades: pos_xd e pos_yd - Wilmar
int16 pos_xant=0, pos_yant=0;
int32 pos_xd=0, pos_yd=0, famostra= 12500;// 32780;
float fatorLQR=1.0;

// Plotar gráfico - Wilmar
//int16 graf_x[100],graf_y[100], iii=0;

int32 corr_A1=0, corr_A2=0,corr_A3=0,corr_A4=0,px=0,py=0,corr_B=0,veloc=0;
char chavear=1,acq=0;
Uint16 cnt=0,count=0,ma=0,i,k,c=1,adapt=0,t1=0,t2=0;
Uint32 i_a1off=0,i_a2off=0,i_a3off=0,i_a4off=0,i_boff=0,pos_xoff=0,pos_yoff=0,
veloff=0;

/* Vetores de ajuste do PID para controle adaptativo */
Uint16 vec_f[13],vec_d[13],nptos=13;

/* Definicao de funcoes auxiliares */
Uint16 ParamDeriv (Uint16 freq);

/* Definicao de interrupcoes */
interrupt void t2pint_isr(void);

/* Definicoes de objetos proprietarios */
PIDREG3  pidx=PIDREG3_DEFAULTS;
PIDREG3  pidy=PIDREG3_DEFAULTS;
PIDREG3  pivel=PIDREG3_DEFAULTS;

main () {
    /**Inicializacoes do sistema**/
    InitSysCtrl();

    //Inicializar PIE vector table:
    //Disable and clear all CPU interrupts:

```

```

DINT;    // disable Global interrupt INTM
DRTM; // disable Global realtime interrupt DBGM
SetDBGIER(0x0000);
IER = 0x0000;
IFR = 0x0000;

// Initialize Pie Control Registers To Default State:
InitPieCtrl();

// Initialize the PIE Vector Table To a Known State:
InitPieVectTable();

InitPeripherals(); //inicializa EV, Adc(warm up only), Sci;
InitGpio();        //GPIO_A->EVA,GPIO_B->EVB,GPIO_F->SCI_A;

/**Definicao dos ponteiros para ISRs; e habilitacao das interrupcoes**/
EALLOW; // This is needed to write to EALLOW protected registers
PieVectTable.T2PINT = &t2pint_isr;
EDIS;    // This is needed to disable write to EALLOW protected registers

//Habilitar interrupcoes no PIE (nivel dos perifericos)
PieCtrlRegs.PIEIER3.bit.INTx1 = 1; // habilita T2PINT;

// Habilitar interrupcoes na CPU; reset->clear IER; operacao de OR para set.
IER |= M_INT3;           // Habilita grupo INT3 (t2pint)
SetDBGIER (IER);

//Configurar ADC com initadc2
InitAdc2();

/**** Clear inicial do PIEACK e dos flags de interrupcao*****/
PieCtrlRegs.PIEACK.all = PIEACK_GROUP3; /* clear PIEACK to enable PIE int
request to CPU*/
EvaRegs.EVAIFRB.bit.T2PINT=1;          /* reset flag; nivel do periferico*/

/* inicializa pino de saida para medida de tempo de interrupcao */

```

```

//GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF4 = 0;

//Inicializa vetores para controle adaptativo
vec_f[0] = 0 ; vec_d[0] = 100;
vec_f[1] = 10 ; vec_d[1] = 150;
vec_f[2] = 20 ; vec_d[2] = 200;
vec_f[3] = 30 ; vec_d[3] = 250;
vec_f[4] = 40 ; vec_d[4] = 300;
vec_f[5] = 50 ; vec_d[5] = 350;
vec_f[6] = 60 ; vec_d[6] = 400;
vec_f[7] = 70 ; vec_d[7] = 450;
vec_f[8] = 80 ; vec_d[8] = 500;
vec_f[9] = 90 ; vec_d[9] = 550;
vec_f[10] = 100 ; vec_d[10] =600;
vec_f[11] = 110 ; vec_d[11] = 550;
vec_f[12] = 120 ; vec_d[12] = 500;

//Zera buffers
for(i=0;i<=NBUF;i++)
{
    a_corr_A1[i]=0;
    a_corr_A2[i]=0;
    a_corr_A3[i]=0;
    a_corr_A4[i]=0;
    a_corr_B[i]=0;
    a_px[i]=0;
    a_py[i]=0;
    a_velbuf[i]=0;
};

//referencias de correntes
i_a1ref=IREF;
i_a2ref=IREF;
i_a3ref=-IREF;
i_a4ref=-IREF;
i_bref =IREF;

//determina off-set
for(i=0;i<64;i++) //aquisita 64 pontos

```

```

{
    for(k=0;k<4096;k++);
    AdcRegs.ADCTRL2.bit.SOC_SEQ1=1;           //inicia conversao
    AdcRegs.ADCTRL2.bit.RST_SEQ1=1;         //reset adc
//    while(AdcRegs.ADCST.bit.SEQ1_BSY==1){} //espera o fim da conversao
    i_a1off+=AdcRegs.ADCRESULT0 >> 4;
    i_a2off+=AdcRegs.ADCRESULT1 >> 4;
    i_a3off+=AdcRegs.ADCRESULT2 >> 4;
    i_a4off+=AdcRegs.ADCRESULT3 >> 4;
    i_boff+=AdcRegs.ADCRESULT6 >> 4;
    veloff+=AdcRegs.ADCRESULT7 >> 4;
}

//faz a média
i_a1off = i_a1off >> 6;
i_a2off = i_a2off >> 6;
i_a3off = i_a3off >> 6;
i_a4off = i_a4off >> 6;
pos_xoff = pos_xoff >> 6;
pos_yoff = pos_yoff >> 6;
i_boff = i_boff >> 6;
veloff = veloff >> 6;

pivel.Kd_reg3 = 0;
pivel.Kp_reg3 = 800;
pivel.Ki_reg3 = 400;

// Inicialização dos parametros dos LQRs
famostra=12500; // famostra=1/tamostra
fatorLQR=4.39e-5; // fator de escala

// IREF = 300
f11=-8777*fatorLQR; // LQR descentralizado - 1a linha
f13=-79*fatorLQR;
// IREF = 600
f11=-21000*fatorLQR; // LQR descentralizado - 1a linha
f13=-120*fatorLQR;

f12=0;

```



```

f14=0;
f21=-f12;           // LQR descentralizado - 2a linha
f22=f11;
f23=f14;
f24=f13;

f11c=-8777*fatorLQR; // LQR centralizado - 1a linha
f12c=-0.01*fatorLQR; // deveria se -7
f13c= -79*fatorLQR;
f14c=0;
f21c=-f12c;        // LQR centralizado - 2a linha
f22c=f11c;
f23c=f14c;
f24c=f13c;

adapt=2;

ERTM; // Enable Global realtime interrupt DBGm
EINT; // enable Global interrupt INTM
ERTM; // Enable Global realtime interrupt DBGm
IREF = 600;

/* Loop eterno */
while(1) {

};
} //fim do main
/*-----*/
interrupt void t2pint_isr(void) {

    GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF4 = 1; //medida inicio da interrupt
    GpioDataRegs.GPBDAT.bit.GPIOB0 = 1; //medida inicio da interrupt
    AdcRegs.ADCTRL2.bit.SOC_SEQ1=1; //inicia conversao
    AdcRegs.ADCTRL2.bit.RST_SEQ1=1; //reset adc
    // while(AdcRegs.ADCST.bit.SEQ1_BSY==1){} //espera o fim da conversao

    // Aquisita os valores dos sensores de posição e corrente
    iabuf_1 = AdcRegs.ADCRESULT0 >> 4;
    iabuf_2 = AdcRegs.ADCRESULT1 >> 4;

```

```

iabuf_3 = AdcRegs.ADCRESULT2 >> 4;
iabuf_4 = AdcRegs.ADCRESULT3 >> 4;
pxbuf = AdcRegs.ADCRESULT4 >> 4;
pybuf = AdcRegs.ADCRESULT5 >> 4;
ibbuf = AdcRegs.ADCRESULT6 >> 4;
velbuf = AdcRegs.ADCRESULT7 >> 4;

//Filtro média móvel
corr_A1 = corr_A1 + iabuf_1 - a_corr_A1[ma];
a_corr_A1[ma]=iabuf_1;
i_a1=corr_A1>>3;

corr_A2 = corr_A2 + iabuf_2 - a_corr_A2[ma];
a_corr_A2[ma]=iabuf_2;
i_a2=corr_A2>>3;

corr_A3 = corr_A3 + iabuf_3 - a_corr_A3[ma];
a_corr_A3[ma]=iabuf_3;
i_a3=corr_A3>>3;

corr_A4 = corr_A4 + iabuf_4 - a_corr_A4[ma];
a_corr_A4[ma]=iabuf_4;
i_a4=corr_A4>>3;

px = px + pxbuf - a_px[ma];
a_px[ma]=pxbuf;
pos_x=px>>3;

py = py + pybuf - a_py[ma];
a_py[ma]=pybuf;
pos_y=py>>3;

corr_B = corr_B + ibbuf - a_corr_B[ma];
a_corr_B[ma]=ibbuf;
i_b=corr_B>>3;

veloc = veloc + velbuf - a_velbuf[ma];
a_velbuf[ma]=velbuf;
sensorvel=veloc>>3;

```

```

if(++ma==NBUF) ma=0;

//Retira off-set
i_a1-=i_a1off;
i_a2-=i_a2off;
i_a3-=i_a3off;
i_a4-=i_a4off;
i_b-=i_boff;
pos_x-=posxoff;
pos_y-=posyoff;
sensorvel-=veloff;

//correcao do angulo dos sensores
posx_old = pos_x;
pos_x=(pos_x*_IQ15cosPU(ang)+pos_y*_IQ15sinPU(ang))>>15;
pos_y=(pos_y*_IQ15cosPU(ang)+posx_old*_IQ15sinPU(ang))>>15;

/*
c=0 => controle de posição sem realimentação
c=1 e adapt=0 => posição PID fixo      + Velocidade PI
c=1 e adapt=1 => posição PID adaptativo + Velocidade PI
c=1 e adapt=2 => posição LQR descentralizado + Velocidade PI
c=1 e adapt=3 => posição LQR centralizado + Velocidade PI
Controle entra: pos_x, pos_y e sensorvel
                sai: dx, dy e f
*/

//calcula PID de posicao e PI de velocidade
if (c==1){

    if (adapt==1) {

        // entra: pos_x e pos_y
        //  sai: dx e dy

pos_x = -pos_x;
pos_y = -pos_y;

```

```

X1k1 = A11*X1 + A12*X2 + A13*X3 + A14*X4 + B11*pos_x + B12*pos_y;
X2k1 = A21*X2 + A22*X3 + A23*X3 + A24*X4 + B21*pos_x + B22*pos_y;
X3k1 = A31*X2 + A32*X3 + A33*X3 + A34*X4 + B31*pos_x + B32*pos_y;
X4k1 = A41*X2 + A42*X3 + A43*X3 + A44*X4 + B41*pos_x + B42*pos_y;

```

```

dx = C11*X1 + C12*X2 + C13*X3 + C14*X4 + D11*pos_x + D12*pos_y;
dy = C21*X1 + C22*X2 + C23*X3 + C24*X4 + D21*pos_x + D22*pos_y;

```

```

X1 = X1k1;
X2 = X2k1;
X3 = X3k1;
X4 = X4k1;

```

```

}

```

```

if (adapt == 2) {
    // ***** Controle LQR DESCENTRALIZADO
    // entra: pos_x e pos_y
    // sai: dx e dy

    pos_xd=(pos_x-pos_xant)*(long)famostra;
    pos_yd=(pos_y-pos_yant)*(long)famostra;
    dx=(pos_x*f11 + pos_xd*f13);
    dy=(pos_y*f22 + pos_yd*f24);

    // IREF=300;
    // IREF=600;
    pos_xant=pos_x;
    pos_yant=pos_y;
};

// *****
// Acrescentar neste ponto outro tipo de controle
// *****

// Controle de velocidade PI

```

```

//Atribuicao dos sinais de entrada controlador de velocidade
pivel.pid_ref_reg3 = vref;
pivel.pid_fdb_reg3 = sensorvel;

//Saturacao de saida do pid de velocidade
pivel.pid_out_max = 400;
pivel.pid_out_min = -400;

//Chama o metodo para calculo do PI de velocidade
pivel.calc(&pivel);
if (cnt==0) f = (pivel.pid_out_reg3 + sensorvel)/30;

// Limita velocidade entre 300 e 3600rpm
if (f < 10) f = 10;
    else if (f > 120) f = 120;

} // fim do if (c==1)

cnt++;
if (cnt>6553) cnt = 0;

// step de posição em Y com sinal de sincronismo
if(acq==1){
    if (adapt==0||adapt==1){          // PID
        yref=500;
        GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF5 = 1;
    } else
        if (adapt==2||adapt==3){ // LQR
            GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF5 = 1;
            IREFaux=100;};
};
if(acq==0){
    IREFaux=0;
    yref=0;
    GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF5 = 0;
}

//dy = dy+IREFaux;
dx = dx+IREFaux;

```

```

//Saturação da corrente incremental
if (dx>=IREF) dx = IREF;
if (dx<=-IREF) dx = -IREF;
if (dy>=IREF) dy = IREF;
if (dy<=-IREF) dy = -IREF;

// if ((iii>=0) && (iii<100)){ // monta gráfico
    // graf_x[iii]=dx;
    // graf_y[iii]=pos_x;
    // iii++;
    // //dx1=dx;
    // //dy1=dy;
    // } else iii=0;
//gera as correntes senodais
i_a1ref=(IREF+dx)*_IQ15cosPU(f*count)>>15;
i_a2ref=(IREF-dy)*_IQ15cosPU(f*count)>>15;
i_a3ref=(IREF-dx)*_IQ15cosPU(f*count)>>15;
i_a4ref=(IREF+dy)*_IQ15cosPU(f*count)>>15;
i_bref=IREFB*_IQ15sinPU(f*count)>>15;
++count;

//saturação
if (i_a1ref>Imax) i_a1ref=1885;
if (i_a1ref<-Imax) i_a1ref=-1885;

if (i_a2ref>Imax) i_a2ref=1885;
if (i_a2ref<-Imax) i_a2ref=-1885;

if (i_a3ref>Imax) i_a3ref=1885;
if (i_a3ref<-Imax) i_a3ref=-1885;

if (i_a4ref>Imax) i_a4ref=1885;
if (i_a4ref<-Imax) i_a4ref=-1885;

if (i_bref>Imax) i_bref=1885;
if (i_bref<-Imax) i_bref=-1885;

// ***** Início Bang-bang alterado

```

```

// canal Saída Digital do DSP com problema
//Implementação controlador de corrente (bang-bang)

if (chavear) {
    // controle corrente A1
    if (i_a1<(i_a1ref-bmorta)) {
        GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA7=0;    // MI A- = MS A1 A-
        GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA6=1;    // MI A+ = MS A0 A+
    }
    else if (i_a1>(i_a1ref+bmorta)) {
        GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA6=0;    // MI A+ = MS A0 A+
        GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA7=1;    // MI A- = MS A1 A-
    };

    // controle corrente A2
    if (i_a2<(i_a2ref-bmorta)) {
        GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA12=0;   // MI B- = MS A3 B-
        GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA11=1;   // MI B+ = MS A2 B+
    }
    else if(i_a2>(i_a2ref+bmorta)) {
        GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA11=0;   // MI B+ = MS A2 B+
        GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA12=1;   // MI B- = MS A3 B-
    };

    // controle corrente A3
    if (i_a3<(i_a3ref-bmorta)) {
        GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF0=0;    // MI C- = MS A5 C-
        GpioDataRegs.GPEDAT.bit.GPIOF0=1;    // MI C+ = MS A4 C+
    }
    else if (i_a3>(i_a3ref+bmorta)) {
        GpioDataRegs.GPEDAT.bit.GPIOF0=0;    // MI C+ = MS A4 C+
        GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF0=1;    // MI C- = MS A5 C-
    };

    // controle corrente A4
    if (i_a4<(i_a4ref-bmorta)) {
        GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF1=0;    // MI D- = MS B1 D-
        GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF6=1;    // MI D+ = MS B5 D+
    }
}

```

```

else if (i_a4>(i_a4ref+bmorta)){
    GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF6=0;    // MI D+ = MS B5 D+
    GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF1=1;    // MI D- = MS B1 D-
};

if (operacao==0){ // sistema parado - não parte o motor
GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF2=0;    // vago = MS B3 Fb-
GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF3=0;    // vago - MS B4 Fb+
};

if (operacao==1) { // sistema em operação
    if (i_b<i_bref) {
        GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF2=0;    // MI vago = MS B3 Fb-
        GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF3=1;    // MI vago = MS B4 Fb+
    } else {
        GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF3=0;    // MI vago = MS B4 Fb+
        GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF2=1;    // MI vago = MS B3 Fb-
    }
};

if (operacao==2){ //parar sistema - desligas todas as fases
GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA6=0;    // MI A+ = MS A0 A+
GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA7=0;    // MI A- = MS A1 A-
GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA11=0;    // MI B+ = MS A2 B+
GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA12=0;    // MI B- = MS A3 B-
GpioDataRegs.GPEDAT.bit.GPIOE0=0;    // MI C+ = MS A4 C+
GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF0=0;    // MI C- = MS A5 C-
GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF1=0;    // MI D- = MS B1 D-
GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF6=0;    // MI D+ = MS B5 D+
GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF2=0;    // vago = MS B3 Fb-
GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF3=0;    // vago - MS B4 Fb+
};
}
else {
//Desliga todas as fases
GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA6=0;    // MI A+ = MS A0 A+
GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA7=0;    // MI A- = MS A1 A-
GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA11=0;    // MI B+ = MS A2 B+

```



```

GpioDataRegs.GPADAT.bit.GPIOA12=0; // MI B- = MS A3 B-
GpioDataRegs.GPEDAT.bit.GPIOE0=0; // MI C+ = MS A4 C+
GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF0=0; // MI C- = MS A5 C-
GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF1=0; // MI D- = MS B1 D-
GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF6=0; // MI D+ = MS B5 D+
GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF2=0; // vago = MS B3 Fb-
GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF3=0; // vago - MS B4 Fb+
} // fim do if chavear

// ***** fim bang-gang alterado

PieCtrlRegs.PIEACK.all = PIEACK_GROUP3;
EvaRegs.EVAIFRB.bit.T2PINT=1;

// teste Wilmar
if (i_a1 > corr_max) erro_corr=0;
    else if (i_a2 > corr_max) erro_corr=0;
    else if (i_a3 > corr_max) erro_corr=0;
    else if (i_a4 > corr_max) erro_corr=0;
    else if (i_b > corr_max) erro_corr=0;

if (i_a1 > maximo) maximo=i_a1; // determina corrente máxima
    else if (i_a2 > maximo) maximo=i_a2;
    else if (i_a3 > maximo) maximo=i_a3;
    else if (i_a4 > maximo) maximo=i_a4;
    else if (i_b > maximo) maximo=i_b;

if (i_a1 < minimo) minimo=i_a1; // determina corrente mínima
    else if (i_a2 < minimo) minimo=i_a2;
    else if (i_a3 < minimo) minimo=i_a3;
    else if (i_a4 < minimo) minimo=i_a4;
    else if (i_b < minimo) minimo=i_b;

GpioDataRegs.GPBDAT.bit.GPIOB0 = 0; //medida fim da interrupt
GpioDataRegs.GPFDAT.bit.GPIOF4 = 0; //medida fim da interrupt
} // fim da interrupcao
/*-----*/

```

```

Uint16 ParamDeriv (Uint16 freq) {

    int i,a,b,deriv;

    for(i=0;i<nptos;i++) {
        if (freq == vec_f[i] && i<nptos) {
            deriv=vec_d[i];
            return (deriv);
        }
        else if ((vec_f[i] < freq) && (freq < vec_f[i+1]) && i<nptos) {
            a = (vec_d[i+1] - vec_d[i])/(vec_f[i+1] - vec_f[i]);
            b = vec_d[i] - a*vec_f[i];
            deriv = a*freq+b;
            return(deriv);
        }
        else if (i>=nptos) {
            deriv = vec_d[nptos-1];
            return(deriv);
        }
    }
    return (deriv);
}

```

# Apêndice C

## Artigo publicado

# COMPARAÇÕES ENTRE CONTROLE $\mathcal{H}_\infty$ E LQR PARA UM MOTOR MANCAL MAGNÉTICO

ALEX RIBEIRO FRANCO\*, JOSÉ D. G. GARCIA\*, AFONSO C. D. N. GOMES†, RICHARD M. STEPHAN\*

\*LASUP PEE/UFRJ, Sala I148 CT Ilha do Fundão, CP 68553, 21941-972 Rio de Janeiro RJ

†PEE-COPPE/UFRJ, Sala H321 CT Ilha do Fundão Rio de Janeiro RJ

Emails: alex@pee.ufrj.br, jose.garcia@ifrj.edu.br, afel@coep.ufrj.br,  
richard@dee.ufrj.br

**Abstract**— Active Magnetic Bearings and Self Bearing Motors are increasingly being used in industrial applications because of their advantages: improved efficiency, higher rotation speeds, lower vibration, among others. In Active Magnetic Bearings the restoring forces are generated by electromagnets; in Self Bearing Motors a single element is used for spinning and positioning the rotor. A prototype of a vertical rotor is in development at COPPE/UFRJ. In its current stage the rotor vertical position is kept by a mechanical bearing and it is angularly driven and horizontally stabilized by a bearingless motor. Aspects of the modelling procedures for the device are reported in this paper, as well as details of  $\mathcal{H}_\infty$  and LQR control laws and also a performance comparison method for classifying these controllers.

**Resumo**— Mancais Magnéticos Ativos (MMAs) e Motores Mancais Magnéticos (MMMs) possuem aplicação crescente na indústria, por apresentarem vantagens como: grande eficiência, maiores velocidades de rotação, menores vibrações geradas, entre outras. Em MMAs as forças restauradoras são geradas por eletroímãs; em MMMs um único elemento é usado para girar e posicionar radialmente o rotor. Um protótipo de um motor vertical está em desenvolvimento na COPPE/UFRJ. No estágio atual o posicionamento vertical do rotor é mantido por um mancal mecânico, e o conjunto é girado e posicionado horizontalmente pelo MMM. Procedimentos e aspectos da modelagem para o equipamento são descritos neste trabalho, bem como detalhes de leis de controle  $\mathcal{H}_\infty$  e LQR, e também um método de comparação de desempenhos para classificar estes controladores.

## 1 Introdução

Mancais Magnéticos Ativos visam centralizar rotores. Uma vasta literatura já foi redigida sobre o assunto, (Knospe and Collins, 1996), (David et al., 2000), (Chiba et al., 2005), (Schweitzer and Maslen, 2009), entre muitos outros. Um controle ativo é necessário para operar estes mancais: as correntes de acionamento dependem da velocidade e da posição do rotor. Em um sistema tradicional utiliza-se um dispositivo para girar e outro para sustentar o eixo. No entanto é possível empregar um único componente para gerar torque e posicionar o rotor. Esta solução é conhecida como Motor Mancal Magnético. Neste trabalho se estudará o protótipo de MMM desenvolvido na COPPE-UFRJ, (Salazar and Stephan, 1993), (Santisteban et al., 1997), (Nicolosky et al., 1999), (Nicolosky et al., 2000), (David, 2000), (Kauss, 2008), mostrado na figura 1.

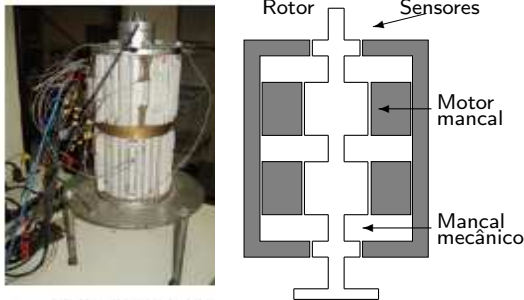


Figura 1: Protótipo: foto e diagrama

Para o controle da posição radial via MMMs, já foram testadas várias soluções do tipo PID e LQR como por exemplo (David, 2000), (Cardoso, 2003), (Nascimento Jr, 2005), (Gomes, 2007) e (Kauss, 2008). Neste artigo será desenvolvida uma lei de controle  $\mathcal{H}_\infty$ , bem como um método de aferição de desempenhos de controladores, para classificar e qualificar as diversas possíveis soluções.

## 2 O Motor Mancal Magnético

O MMM usado no protótipo foi adaptado de um motor de indução convencional, bifásico e de 4 pólos, de modo a exercer forças axiais além do torque. A fase *B* tem seus enrolamentos conectados em série ( $B_2B_3, B_4B_5, B_6B_7$ ), vide figura 2, sendo percorrida por uma corrente  $i_B(t) = I_0 \cos \omega t$  entre os terminais  $B_1$  e  $B_8$ . A fase *A* apresenta correntes diferentes em seus 4 enrolamentos e o controle da posição radial do rotor é exercido variando as intensidades destas correntes.

Bobinas opostas da fase *A* são percorridas por uma corrente de base  $i_A(t) = I_0 \sin \omega t$  somada ou subtraída de uma corrente diferencial  $i_x(t) = u_x \sin \omega t$  ou  $i_y(t) = u_y \sin \omega t$ , cujas amplitudes  $u_x$  e  $u_y$  serão as variáveis de controle.

$$\begin{aligned} i_l(t) &= i_A(t) - i_x(t) & i_r(t) &= i_A(t) + i_x(t) \\ i_u(t) &= i_A(t) - i_y(t) & i_d(t) &= i_A(t) + i_y(t) \end{aligned}$$

Como mostrado em (David, 2000), as forças exercidas nas direções ortogonais são

$$f_x = 2k_p x + k_i [1 - \cos(2\omega t)] u_x \quad (1)$$

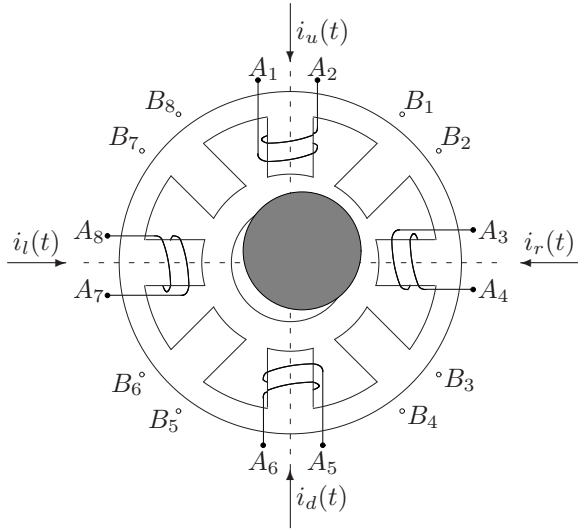


Figura 2: Esquema do MMM com 4 pólos e 2 fases

$$f_y = 2k_p y + k_i [1 - \cos(2\omega t)] u_y \quad (2)$$

onde  $x$  e  $y$  são os deslocamentos do rotor nessas direções e

$$k_p = \frac{\mu_0 a_g n_e^2 I_0^2}{h^3} \rho^2 \quad k_i = \frac{\mu_0 a_g n_e^2 I_0}{h^2} \rho \quad (3)$$

Nestas expressões, obtidas em (David, 2000) após análise detalhada dos fluxos magnéticos e da geometria dos pólos, a área aproximada do gap é  $a_g$ ,  $h$  é uma medida linear de sua espessura,  $n_e$  é o número de espiras “equivalentes” e  $\mu_0$  é constante. Os parâmetros  $k_p$  e  $k_i$  não são constantes, pois  $\rho = \rho(\omega, \sigma)$ , definido em (David, 2000), depende do escorregamento  $\sigma$  e da frequência elétrica  $\omega$ .

Para posicionar o mancal deve-se modificar as amplitudes  $u_x$  e  $u_y$  e consequentemente as forças  $f_x$  e  $f_y$ . Duas importantes constatações:

1. Os MMMs são mais complexos que os mancais magnéticos tradicionais, mas as expressões das forças radiais são semelhantes, principalmente quando o termo  $\cos 2\omega t$  puder ser negligenciado.
2. As duas forças que atuam nos eixos  $x$  e  $y$  são totalmente desacopladas.

Vários dispositivos podem ser usados para desempenhar as funções de mancal axial, desde um simples apoio ou calço a um sofisticado mancal supercondutor (SC) (David, 2000).

### 2.1 Modelos Mecânicos

Considera-se rotor rígido e coordenadas padronizadas, vistas na figura 3, como em (David, 2000), (Chiba et al., 2005) e (Schweitzer and Maslen, 2009). Há um MMM na posição  $b$ , sensores na cota  $d$  e um mancal mecânico em  $c$  que, além de suportar o peso do rotor, pode ser considerado uma articulação perfeita. As cotas são medidas

com relação ao CM (centro de massa) da peça, donde  $b > 0$ ,  $d > 0$  e  $c < 0$ . O sistema inercial de referências é colocado na cota  $c$ .

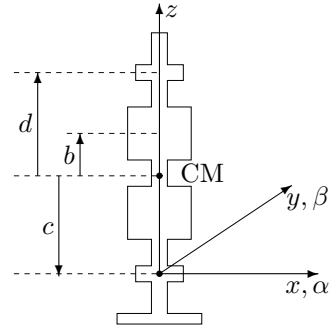


Figura 3: Diagrama do rotor

A posição do CM é determinada apenas pelos ângulos  $\beta$  e  $\alpha$ . Sendo  $J_x$  e  $J_y$  os momentos de inércia com relação à articulação, por simetria e pelo teorema dos eixos paralelos:  $J_x = J_y = J = I + mc^2$  onde  $I = I_x = I_y$  é o momento de inércia com relação ao CM e  $m$  é a massa do rotor. Considerando operação muito próxima da vertical, as equações de Newton rotacionais bastam para estabelecer o modelo dinâmico.

$$J\ddot{\beta}(t) - \omega_r I_z \dot{\alpha}(t) = P_y(t) \quad (4)$$

$$J\ddot{\alpha}(t) + \omega_r I_z \dot{\beta}(t) = P_x(t) \quad (5)$$

onde  $\omega_r$  é a velocidade angular em torno do eixo  $z$  e  $I_z$  o momento de inércia do rotor em torno dele;  $P_y(t)$  e  $P_x(t)$  são os torques externos. Nota-se o efeito giroscópico causado pela rotação da peça com  $\omega_r$ ; este efeito gera interferência dos movimentos de uma direção na outra, que pode ou não ser significativa. Os deslocamentos angulares do CM são armazenados em  $z$ ; os índices  $B$  e  $S$  indicam vetores com os deslocamentos nas cotas do MMM e na dos sensores.

$$z = \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} \quad z_B = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} \quad z_S = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix}$$

As amplitudes das correntes diferenciais formam o vetor de controle  $u = [u_{bx} \ u_{by}]^T$ . Manipulando as equações anteriores vem

$$M\ddot{z}(t) + G\dot{z}(t) = e(t) \quad (6)$$

onde a matriz de inércia  $M$ , a giroscópica  $G$  e o vetor de excitações externas  $e$  são

$$M = JI_2 \quad G = \omega_r I_z \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} P_y \\ -P_x \end{bmatrix}$$

As excitações externas vêm do MMM (gravidade desprezada). Suas forças restauradoras, dadas por (1) e (2) podem ser agrupadas como  $f_B = [f_{bx} \ f_{by}]^T = K_z z_B + K_u u$ , onde

$$K_z = 2k_{pb} I_2 \quad K_u = k_{ib} (1 - \cos 2\omega t) I_2 \quad (7)$$

Estas **não** são matrizes constantes pois  $k_{pb}$  e  $k_{ib}$  dependem, vide (3), de  $\rho = \rho(\sigma, \omega)$  e  $K_u$  ainda depende explicitamente de  $t$ . Os efeitos destas forças são apenas momentos em relação à articulação

$$p_{1x} = -f_{by}(b-c)\cos\alpha \quad \text{e} \quad p_{1y} = f_{bx}(b-c)\cos\beta$$

Como os deslocamentos angulares são pequenos,  $\cos\alpha \approx \cos\beta \approx 1$ , donde

$$\mathbf{e} = (b-c) \begin{bmatrix} f_{bx} \\ f_{by} \end{bmatrix} = T_{bc}K_z\mathbf{z}_B + T_{bc}K_u\mathbf{u}$$

onde  $T_{bc} = (b-c)$ . Mas  $\sin\beta = x_b/(b-c)$  e  $\sin\alpha = -y_b/(b-c)$  donde, notando novamente que os ângulos são pequenos, temos

$$\mathbf{z}_B = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \end{bmatrix} = (b-c) \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} = T_{bc}\mathbf{z}$$

que permite reescrever  $\mathbf{e} = K_z(b-c)^2\mathbf{z} + K_u(b-c)\mathbf{u}$  e assim detalhar (6) em termos de  $\mathbf{z}$ :

$$J\ddot{\mathbf{z}} + G\dot{\mathbf{z}} - K_z(b-c)^2\mathbf{z} = K_u(b-c)\mathbf{u}$$

Ângulos pequenos garantem que  $\sin\beta \approx \beta = x_d/(d-c)$  e  $\sin\alpha \approx \alpha = y_d/(d-c)$ , levando a

$$\mathbf{z}_S = \begin{bmatrix} x_d \\ y_d \end{bmatrix} = (d-c) \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha \end{bmatrix} = (d-c)\mathbf{z}$$

que permite a forma final

$$\ddot{\mathbf{z}}_S + G_r\dot{\mathbf{z}}_S - K_{zr}\mathbf{z}_S = K_{ur}\mathbf{u}$$

onde  $G_r = J^{-1}G$ ,  $K_{zr} = K_zJ^{-1}(b-c)^2$  e  $K_{ur} = J^{-1}(d-c)(b-c)K_u$ . Definindo o vetor de estados  $\mathbf{x} = [x_d \ y_d \ \dot{x}_d \ \dot{y}_d]^T$  as equações dinâmicas são

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + \Delta(t)\mathbf{u}(t) \quad (8)$$

onde  $A$  e  $\Delta(t)$  são matrizes  $4 \times 4$  dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

sendo  $A_{21} = K_{zr}$ ,  $A_{22} = -G_r$  e  $\Delta_2(t) = K_{ur}$ . A matriz  $A_{21}$  depende de  $K_{zr}$  e de  $K_z$ ;  $G_r$  depende de  $G$  que depende da velocidade  $\omega_r$  do rotor. Isto significa que a matriz de dinâmica do modelo,  $A$ , varia com os parâmetros e pode ser considerada fixa apenas em regime. A matriz  $\Delta_2(t) = K_{ur}(t)$  depende de  $K_u$ , logo seus elementos dependem dos parâmetros  $\omega$  e  $\sigma$ . Explicitando esta matriz chega-se a um modelo linear para descrever o posicionamento radial do rotor:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) - B\mathbf{u}(t)\cos(2\omega t) \quad (10)$$

onde  $B^T = [0 \ B_2^T]$  com  $B_2 = J^{-1}(b-c)(d-c)k_{ib}I_2$ . Este modelo, em regime, pode ser visto como linear e fixo, com uma entrada de controle  $\mathbf{u}$  de baixa frequência que também atua, após modulação por  $\cos 2\omega t$ , como um distúrbio. Veja a ilustração da figura 4.

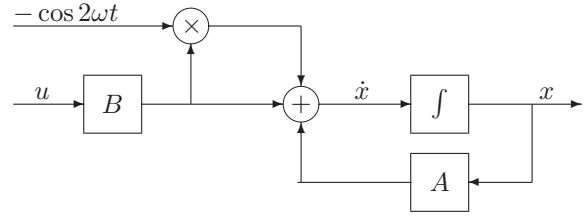


Figura 4: Modelo LTI para o posicionamento

A principal diferença entre os mancais magnéticos e os MMM, sem contar o fato de a dinâmica ser constante apenas em regime, está no termo  $\cos 2\omega t$  de (10): haverá distúrbios de alta frequência. Costuma-se supor que o sistema global contenha inércias mecânicas suficientes para absorver as frequências de  $\cos 2\omega t$ , e um modelo mais simples resultaria desprezando estes distúrbios:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad (11)$$

É cômodo considerar que este modelo (11), com matrizes constantes, descreve totalmente a realidade e usá-lo no projeto de leis de controle. Isto já foi feito — (David, 2000), (Cardoso, 2003), (Kauss, 2008) e (Gomes, 2007) por exemplo — e os resultados são razoáveis. Mas as situações estudadas eram de regime, ou seja, supunha-se constante a velocidade  $\omega_r$  do rotor e verificava-se a capacidade de posicionamento do MMM. Que acontece quando o rotor é acelerado do repouso a uma dada velocidade final? Nestes casos talvez os distúrbios de  $\cos 2\omega t$  não possam ser desprezados, e as incertezas da planta certamente afetarão os resultados, pois as matrizes  $A$  e  $B$  variarão. Uma lei de controle robusta precisa ser projetada.

### 3 Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$

Robustez é essencial em controle, pois sistemas reais estão sempre sujeitos a distúrbios externos, ruídos de medidas e a erros de modelagem e um certo nível de desempenho deve ser mantido nestas condições adversas. A ênfase das primeiras técnicas de controle estava em obter um bom desempenho, sem a preocupação com robustez (Gu et al., 2005). Trabalhos posteriores, iniciados por (Zames, 1981), desencadearam resultados conhecidos como controle  $\mathcal{H}_\infty$ , e esta teoria tem tido bastante sucesso em garantir desempenho e estabilidade robusta na presença do “pior caso”.

O espaço  $\mathcal{H}_\infty$  é composto pelas funções analíticas estáveis e próprias, sendo  $\mathcal{RH}_\infty$  o subespaço de todas as funções de transferências reais e racionais dele. Mais detalhes sobre este tema podem ser encontrados em (Zhou et al., 1999) ou (Green and Limebeer, 1994). O uso da “norma infinita” é apropriado para se caracterizar uma relação de ganho em sistemas multivariáveis, ou de “tamanho” de uma matriz de transferência. Para

esse fim usa-se a grandeza  $\|G(s)\|_\infty$  que denota a norma infinita da função  $G(s)$  e que pode ser obtida pela decomposição em valores singulares (SVD) de  $G(s)$ :

$$\|G(s)\|_\infty = \max_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (12)$$

O teorema do Pequeno Ganho é de central importância em testes de estabilidade (Green and Limebeer, 1994), (Zhou et al., 1999); ele se aplica quando diversos blocos constituem um sistema. Pode-se enunciá-lo para o sistema realimentado da figura 5, composto por dois blocos representando sistemas lineares invariantes no tempo.

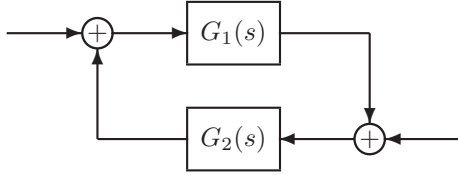


Figura 5: Conexão de dois SLITs  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$

**Teorema 3.1** Para  $G_1$  e  $G_2$  estáveis e  $G_{1,2}(s) \in \mathcal{H}_\infty$  o sistema em malha fechada é internamente estável se

$$\|G_1(s)G_2(s)\|_\infty < 1 \quad \text{e} \quad \|G_2(s)G_1(s)\|_\infty < 1$$

Para uma aplicação, seja o sistema realimentado na figura 6, onde a planta nominal é  $G(s)$  e  $\Delta(s)$  modela incertezas aditivas.

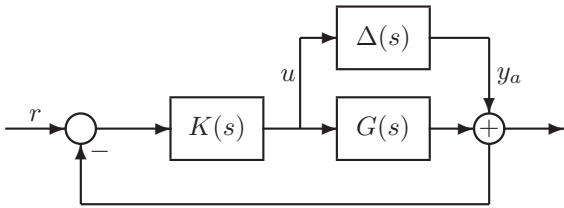


Figura 6: Sistema com perturbação aditiva

O controlador  $K$  será **robusto quanto à estabilidade** se mantiver a estabilidade interna da malha para variações, quanto mais extensas melhor, de  $\Delta(s)$ . É fácil ver que

$$u(s) = T_{au}(s)y_a(s) = -K(s)(I+G(s)K(s))^{-1}y_a(s)$$

e que o diagrama acima pode ser modificado para o mostrado na figura 7, e o Teorema 3.1 pode ser particularizado.

**Teorema 3.2** Para cada  $\Delta(s)$  estável, o sistema em malha fechada na figura 7 é robustamente estável se o controlador  $K(s)$  estabiliza a planta nominal  $G(s)$  e são válidas as expressões

$$\|\Delta H\|_\infty < 1 \quad \text{e} \quad \|H\Delta\|_\infty < 1$$

onde  $H = K(I + GK)^{-1}$ .

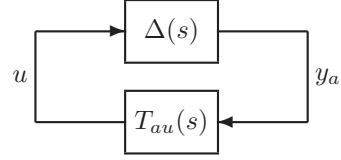


Figura 7: Perturbação explicitada

Uma propriedade das normas infinitas garante que estas expressões podem ser reescritas como

$$\|H\|_\infty \|\Delta\|_\infty < 1 \quad (13)$$

de onde se percebe que quanto menor o valor de  $\|H\|_\infty$  maior poderá ser o das incertezas, medido por  $\|\Delta\|_\infty$ , e que para maximizar a robustez do sistema realimentado o problema de controle se torna também um problema de otimização:

$$\min f(K) = \|H\|_\infty = \|K(I + GK)^{-1}\|_\infty \quad (14)$$

com a restrição de haver estabilidade interna na malha.

As técnicas  $\mathcal{H}_\infty$  também atacam outras situações, como por exemplo a rejeição de distúrbios exógenos. Em geral o problema é o de encontrar um compensador  $K(s)$  que minimiza a norma infinita de uma função de transferência  $H(s)$  com a restrição de estabilidade interna da malha. Algumas vezes é necessário encontrar um filtro ou função ponderadora  $W(s)$  para modular  $H(s)$ , ou seja a função objetivo a ser minimizada passa a ser  $\|WH\|_\infty$ , sempre com a restrição de estabilidade. Como exemplo, o problema de **Rejeição de Distúrbios** é representado pela figura 8, onde  $G$  é a planta e  $K$  o controlador. Os sinais externos presentes são a referência  $r$ , os distúrbios  $d$  e  $d_i$  e o ruído de sensor representado por  $n$ .

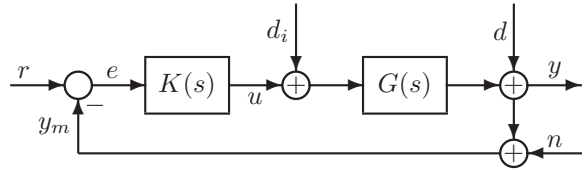


Figura 8: Rejeição de sinais externos

Com base na figura 8 pode-se definir as seguintes funções de transferência básicas

$$S = (I + GK)^{-1} \quad (15)$$

$$T = GK(I + GK)^{-1} \quad (16)$$

onde a notação  $(s)$  foi omitida.  $S(s)$  é chamada de Sensibilidade e  $T(s)$  de Sensibilidade Complementar. É fácil ver que  $y$  e  $u$  são dados por

$$y = T(r - n) + SGd_i + Sd \quad (17)$$

$$u = KS(r - n) - KSGd_i - K Sd \quad (18)$$

Note-se que  $KS = K(I+GK)^{-1}$  é a função  $H$  que aparece em (13) e cuja norma deveria ser minimizada no problema anterior. Pela análise das expressões anteriores fica claro que para atenuar o efeito dos distúrbios externos  $d$  e  $d_i$  em  $y$  deve-se minimizar a (norma da) sensibilidade  $S(s)$ , e para rejeitar o ruído de sensor  $n$ , minimiza-se a sensibilidade complementar  $T(s)$ . Como  $T + S = I$  não é possível minimizar as duas funções ao mesmo tempo. Felizmente as energias destes distúrbios ocorrem em regiões de frequências diferentes, devendo portanto ser minimizadas nas faixas de interesse. De forma análoga ao desenvolvido na estabilidade robusta, esta situação seria transformada em um problema de otimização:

$$\min f(K) = \|W_p H\|_\infty = \|W_p K(I + GK)^{-1}\|_\infty$$

com a restrição de haver estabilidade interna na malha. O filtro  $W_p$  define o desempenho desejado, ou seja, ajusta as frequências de interesse.

### 3.1 Projeto de um estabilizador $\mathcal{H}_\infty$

Em (13) relacionou-se  $H(s)$  à estabilidade robusta, com o propósito de maximizar a margem de estabilidade do sistema realimentado na presença de incertezas do modelo. Da mesma forma, a sensibilidade  $S(s)$  foi relacionada à redução do efeito de distúrbios externos. O método de projeto de controle  $\mathcal{H}_\infty$  por sensibilidade mista consiste em moldar as funções  $S(s)$  e  $H(s)$  para reduzir o efeito dos sinais externos, normalmente de baixa frequência, e elevar a robustez da malha para insensibilizá-la contra incertezas do modelo matemático utilizado. A especificação do projeto objetivando robustez e rejeição requer a escolha de um controlador estabilizante que minimize a norma infinita dada por

$$\|T_{zw}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u K S \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (19)$$

A figura 9 mostra o diagrama contendo os pesos para conformar  $S(s)$  e  $H(s)$ . Note-se que o distúrbio  $d_i$  foi desprezado.

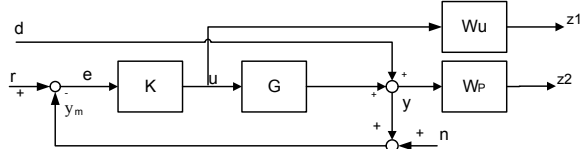


Figura 9: Planta e pesos de conformação.

Para a composição da planta generalizada  $P(s)$ , os blocos  $G(s)$ ,  $W_u(s)$  e  $W_p(s)$  deverão compor um único bloco segregado do controlador. É fácil relacionar os sinais de entrada e saída e obter

a planta generalizada:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} d \\ r \\ u \end{bmatrix} \implies P = \begin{bmatrix} W_p & -W_p S \\ 0 & W_u \\ I & -G \end{bmatrix}$$

A escolha dos pesos  $W_p$  e  $W_u$  segue os procedimentos usuais:

$$W_p = \frac{s/M + \omega_B}{s + \omega_B A_p} I_2 \quad W_u = \frac{s/M_u + \omega_u/M_u}{A_u s + \omega_u} I_2$$

onde  $I_2$  representa a matriz identidade. A função  $W_p$  é normalmente um filtro passa-baixas, e sua inversa modela a resposta da função sensibilidade desejada. A largura de banda é  $\omega_B$  e  $M$  o valor máximo especificado para a norma infinita. Acima de  $\omega_B$  a sensibilidade terá ganho  $\geq 1$  e a malha não mais atenuará os distúrbios. O parâmetro  $A_p$  relaciona o erro de regime  $e_r$  e a sensibilidade  $S(s)$ : a redução de  $e_r$  decorece da redução da sensibilidade nas baixas frequências, logo deve-se escolher valores pequenos para  $A_p$ . Para  $e_r = 0$  seria necessário  $A_p = 0$ , mas isto implica em um pólo da malha fechada sobre o eixo imaginário, o que torna o sistema não detectável e estabilizável (Zhou et al., 1999).

Os valores para os parâmetros desses filtros não são únicos, mas deve haver cuidado em suas escolhas para evitar resultados estranhos no posicionamento do rotor e na função sensibilidade. Os valores, para este trabalho, foram obtidos por tentativa e erro, em um procedimento bastante trabalhoso, repetitivo e com uso intenso de apoio computacional (MatLab). Os resultados:  $M = 2$ ,  $\omega_B = 1$ ,  $A_p = 1$ ,  $M_u = 0,25 \times 10^6$ ,  $\omega_u = 176,8$  e  $A_u = 1$ .

Com auxílio da toolbox Controle Robusto do pacote Matlab pode-se obter controladores estabilizantes, e por meio de simulação é possível avaliar alguns resultados, como os abaixo. A figura 10 mostra a influência de  $M$  nas curvas da função sensibilidade.

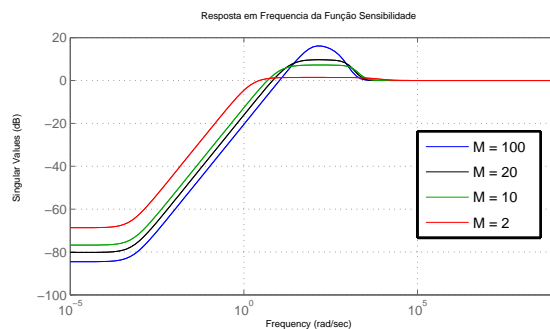


Figura 10: Resposta em frequência das funções sensibilidade

As curvas do posicionamento do eixo de um rotor submetido a um deslocamento inicial, mostradas apenas na direção  $x$ , estão na figura 11,



onde foram utilizados os valores do parâmetro  $M$  indicados acima.

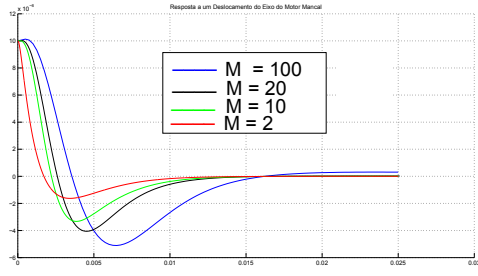


Figura 11: Repositionamento do eixo

O controle  $\mathcal{H}_\infty$  usado foi projetado para estabilizar robustamente, compensando as incertezas da planta. Para avaliar satisfatoriamente seu desempenho seria necessário analisar situações em que a planta varia, como quando a velocidade angular  $\omega_r$  muda. O caso de aceleração do repouso a uma velocidade final seria bom, mas isto não será apresentado aqui.

### 3.2 Termo cossenoidal como distúrbio externo

No projeto anterior o termo  $\cos 2\omega t$  foi desconsiderado, e ele está presente na modelagem mais geral vista em (10). Este fator pode ser tratado como um distúrbio aplicado ao sinal de controle da planta modulado pelo próprio sinal de controle. Para enfatizar a redução deste efeito deve-se acrescentar outro bloco de peso, indicado na equação (20), à função  $W_p$ , a fim de reduzir a sensibilidade do sistema de malha fechada ao distúrbio cossenoidal.

$$W_s = \frac{s^2 + \zeta_1 s + \phi^2}{s^2 + \zeta_2 s + \phi^2} I_{22} \quad (20)$$

Fixando  $\zeta_1 = 1$  e parametrizando os outros valores em termos de  $\omega$  como  $\zeta_2 = 4\omega$  e  $\phi = 2\omega$  resulta em

$$W_s = \frac{s^2 + 4\omega s + 4\omega^2}{s^2 + s + 4\omega^2} I_{22} \quad (21)$$

O que se obtém é um filtro rejeita faixa com atenuação de 70db na frequência  $2\omega$  e ganho unitário nas demais frequências. A função peso é então descrita pela equação

$$W_P = \frac{s/M + w_B}{s + w_B A} \frac{s^2 + 4\omega s + 4\omega^2}{s^2 + s + 4\omega^2} \quad (22)$$

Foi obtido um controlador estabilizante com 12 estados por meio da toolbox Controle Robusto do pacote Matlab. Por simulação, a resposta a um deslocamento inicial do mancal é mostrado na figura 12.

O fator  $\cos 2\omega t$  é um distúrbio de alta frequência, diferentemente dos distúrbios considerados pelo projeto como sendo de baixa frequência. Sem

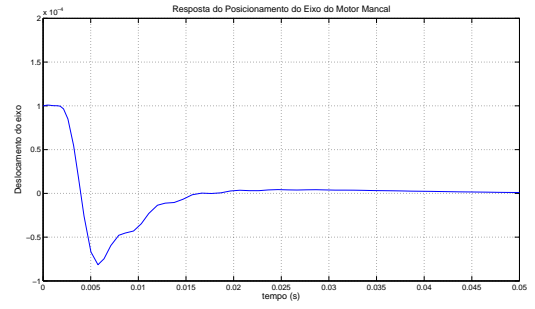


Figura 12: Resposta com distúrbio  $2\omega t$  ( $M=100$ )

esta alteração o sistema apresentaria alta sensibilidade a este distúrbio. A inclusão deste bloco rejeita faixa é um método de se rejeitar um determinado distúrbio quando não é possível a extensão da região de baixa sensibilidade devido aos fatores de compromisso da função sensibilidade e da função sensibilidade complementar. A curva da função sensibilidade obtida é mostrada na figura 13.

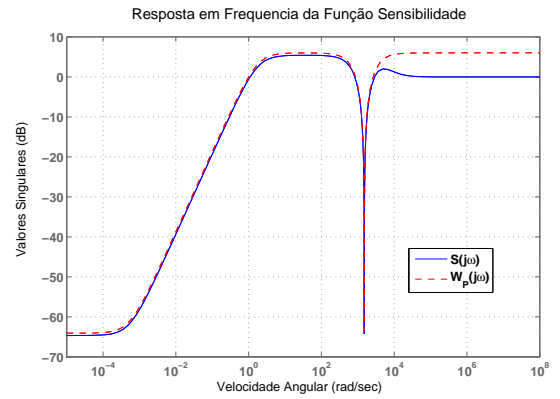


Figura 13:  $S(j\omega)$  e  $W_P(j\omega)$  com distúrbio  $\cos 2\omega t$

## 4 Análise de desempenho

O controlador  $\mathcal{H}_\infty$  projetado foi submetido a uma comparação de desempenho com um controlador LQR descentralizado anteriormente projetado em (Kauss, 2008) para o mesmo sistema. Esta comparação foi baseada no critério MVC (Minimum Variance Controller), proposto em (Qin, 1998) e que se fundamenta no desempenho teórico que pode ser obtido pela aplicação de um controlador de mínima variância. Pode-se mostrar que a variância obtida quando se implementa um tal controlador é dada por

$$\sigma_{MV}^2 = 1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{b-1}^2 \sigma_w^2$$

sendo os  $\psi_i$  os coeficientes da resposta ao impulso do sistema em malha fechada. O algoritmo proposto por (Qin, 1998) para esta comparação de desempenho é resumido abaixo.

1. Estima-se o atraso  $b$  do processo.
2. Identifica-se o modelo de malha fechada, relacionando a saída ao ruído  $w$ . Usa-se para tanto um modelo ARMAX (auto-regressive, moving average with external noise).
3. Obtem-se a resposta ao impulso, considerando os  $b - 1$  coeficientes:

$$\text{saída}(k) = w(k) + \sum_{i=1}^{b-1} \psi_i w(k-i) + \text{resto}$$

4. Calcula-se a estimativa de mínima variância, dada por

$$\sigma_{MV}^2 = (1 + \sum_{i=1}^{b-1} \psi_i^2(i)) \sigma_w^2$$

5. Estima-se a variância da saída da planta  $\sigma_s^2$
6. Calcula-se o índice  $\xi$  baseado na expressão  $\xi = \sigma_s^2 / \sigma_{MV}^2$ .

Este procedimento foi aplicado tanto ao controlador  $\mathcal{H}_\infty$  quanto ao controlador LQR. Os modelos ARMAX obtidos para a simulação de ambos controladores estão na tabela 1 abaixo; as respostas ao impulso, obtidas por divisão contínua dos polinômios, são apresentadas na tabela 2. As variâncias estimadas para o sistema sob MVC e as variâncias calculadas para as séries de saída da planta para cada controlador, são apresentadas na tabela 3, bem como o resultante índice de desempenho para cada malha de controle.

	direção $x$
$\mathcal{H}_\infty$	$1+0.302z^{-11}-2.135z^{-1}+1.468z^{-2}-0.310z^{-3}$
LQR	$1-0.801z^{-11}-2.741z^{-1}+2.537z^{-2}-0.794z^{-3}$
	direção $y$
$\mathcal{H}_\infty$	$1+0.087z^{-11}-2.353z^{-1}+1.888z^{-2}-0.518z^{-3}$
LQR	$1+0.126z^{-11}-1.852z^{-1}+0.867z^{-2}$

Tabela 1: Modelos ARMAX para  $\mathcal{H}_\infty$  e LQR

	direção $x$
$\mathcal{H}_\infty$	$1+3,09z^{-1}+3,89z^{-2}+4,68z^{-3}+5,24z^{-4}+\dots$ $\dots+5,52z^{-5}+5,55z^{-6}$
LQR	$1+1,94z^{-1}+2,78z^{-2}+3,49z^{-3}+4,06z^{-4}+\dots$ $\dots+4,47z^{-5}+4,74z^{-6}+4,86z^{-7}$
	direção $y$
$\mathcal{H}_\infty$	$1+2,44z^{-1}+3,85z^{-2}+4,98z^{-3}+5,70z^{-4}+\dots$ $\dots+6,01z^{-5}$
LQR	$1+1,98z^{-1}+2,80z^{-2}+3,46z^{-3}+3,99z^{-4}+\dots$ $\dots+4,39z^{-5}+4,66z^{-6}+4,83z^{-7}$

Tabela 2: Respostas ao impulso para  $\mathcal{H}_\infty$  e LQR

O que se observa é que não existe uma diferença significativa de desempenho com estas diferentes abordagens de controle, sendo equivalentes do ponto de vista de precisão do controle obtido.

direção $x$			
	$\sigma_{MV}^2$ em $x$	$\sigma_x^2$	$\xi_x$
$\mathcal{H}_\infty$	$1,14 \times 10^{-9}$	$2,29 \times 10^{-9}$	2,02
LQR	$7,7 \times 10^{-11}$	$1,83 \times 10^{-10}$	2,39
direção $y$			
	$\sigma_{MV}^2$ em $y$	$\sigma_y^2$	$\xi_y$
$\mathcal{H}_\infty$	$1,18 \times 10^{-9}$	$2,81 \times 10^{-9}$	2,83
LQR	$7,0 \times 10^{-11}$	$1,67 \times 10^{-10}$	2,38

Tabela 3: Índices de desempenho

## 5 Conclusões

O presente artigo, incluído na linha de pesquisa dos MMMs, mostra aplicações iniciais das técnicas  $\mathcal{H}_\infty$  para a correção de deficiências das estratégias de controle anteriormente aplicadas. O modelo deduzido para a planta é bastante complexo, pois apresenta dinâmica variante com as condições de operação e presença de distúrbios de alta frequência. Como as abordagens anteriores desprezavam estes distúrbios e consideravam plantas fixas, optou-se por usar o controle  $\mathcal{H}_\infty$  para simultaneamente estabilizar com incertezas e rejeitar distúrbios.

Também se usou neste trabalho um método de comparação de desempenho de controladores, pela primeira vez, a nosso conhecimento, em um problema de dinâmicas rápidas como o dos MMMs. Os resultados da comparação mostram desempenhos equivalentes para estratégias LQR e  $\mathcal{H}_\infty$ , mas isto se deve, provavelmente, à pouca profundidade dos resultados deste último método. Com o aprofundamento das pesquisas, e com a aplicação dos controladores em situações distantes da nominal de operação, espera-se que o controle baseado no método  $\mathcal{H}_\infty$  se mostre mais eficaz para um sistema que, como nosso, emprega um modelo matemático que sofreu simplificações por negligenciamento de componentes de sua dinâmica.

## Referências

- Cardoso, N. N. (2003). *Controle Simultâneo De Velocidade e Posição Em Mancais Motores Magnéticos*, M. Sc. tese, COPPE-UFRJ.
- Chiba, A., Fukao, T., Ichikawa, O., Oshima, M., Takemoto, M. and Dorrell, D. (2005). *Magnetic Bearings and Bearingless Drives*, Newnes-Elsevier.
- David, D. F. B. (2000). *Levitação de Rotor por Mancais-motores Radiais Magnéticos e Mancais Axial SC Auto-estável*, D. Sc. tese, COPPE-UFRJ.
- David, D. F. B., Gomes, A. C. D. N., Santisteban, J. A., Ripper, A., de Andrade Jr., R.

- and Nicolsky, R. (2000). A hybrid levitating rotor with radial electromagnetic motor-bearings and axial sc bearing, *Proceedings of the MAGLEV 2000*, Rio, pp. 441–446.
- Gomes, R. R. (2007). *Motor Mancal Com Controle Implementado em um DSP*, M. Sc. tese, COPPE–UFRJ.
- Green, M. and Limeeber, D. (1994). *Linear Robust Control*, Pearson Education, Inc.
- Gu, D. W., Petkov, P. H. and Konstantinov, M. M. (2005). *Robust Control Design with Matlab*, Springer.
- Kauss, W. L. (2008). *Motor Mancal Magnético Com Controle Ótimo Implementado em um DSP*, M. Sc. tese, COPPE–UFRJ.
- Knospe, C. R. and Collins, E. G. (1996). Introduction to the special issue on magnetic bearing control, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **4**(5): 481–483.
- Nascimento Jr, R. (2005). *Controle Por Tensão De Velocidade Em Mancais Motores Magnéticos*, M. Sc. tese, COPPE–UFRJ.
- Nicolsky, R., de Andrade Jr., R., Ripper, A., David, D. F. B., Santisteban, J. A., Stephan, R. M., Gawalek, W., Habisreuther, T. and Strasser, T. (2000). Superconducting electromagnetic hybrid bearing using ybco bulk blocks for passive axial levitation, *Superconductor Science and Technology* **13**: 1–5.
- Nicolsky, R., Gorelov, Y., Pereira, A. S., David, D. F. B., Santisteban, J. A., Stephan, R. M., Ripper, A., de Andrade Jr., R., Gawalek, W., Habisreuther, T. and Strasser, T. (1999). Superconducting axial bearing for induction machines with active radial magnetic bearings, *IEEE Trans. on Applied Superconductivity* **9**: 964–967.
- Qin, S. J. (1998). Control performance monitoring — a review and assessment, *Computers and Chemical Engineering* (23): 173–186.
- Salazar, A. O. and Stephan, R. M. (1993). A bearingless method for induction machines, *IEEE Transactions on Magnetism* **29**: 2965–2967.
- Santisteban, J. A., David, D. F. B., Noronha, R., Ripper, A. and Stephan, R. M. (1997). Controller design for a bearingless electric motor, *Proc. of DYNAMÉ—7th Intl. Conf. on Dynamic Problems in Mechanics*, pp. 169–171.
- Schweitzer, G. and Maslen, E. (2009). *Magnetic Bearings: Theory, Design and Applications to Rotating Machinery*, Springer-Verlag.
- Zames, G. (1981). Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses, *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Zhou, K., Doyle, J. C. and Glover, K. (1999). *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall.