



CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO COM ESTIMAÇÃO DE DISTÚRBIOS PARA PLANTAS MONOVARIÁVEIS

Igor Medeiros Moreira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Amit Bhaya

Rio de Janeiro
Dezembro de 2013

CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO COM ESTIMAÇÃO DE
DISTÚRBIOS PARA PLANTAS MONOVARIÁVEIS

Igor Medeiros Moreira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Amit Bhaya, Ph.D.

Prof. João Carlos dos Santos Basilio, D.Phil.

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 2013

Moreira, Igor Medeiros

Controle Preditivo Baseado em Modelo com Estimação de Distúrbios para Plantas Monovariáveis/Igor Medeiros Moreira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XV, 89 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Amit Bhaya

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 78 – 80.

1. Controle Preditivo Baseado em Modelo. 2. Estimação Distúrbio. 3. Plantas Monovariáveis. I. Bhaya, Amit. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*Aos meus pais Edson e Carmem
e minha querida irmã Bárbara.*

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Edson e Carmem, e minha irmã Bárbara, pelo seu amor, dedicação e pela força que me deram ao longo desta jornada.

Agradeço aos professores do PEE/COPPE, em especial ao Prof. Amit Bhaya pela sua paciência, interesse e valiosos conselhos na orientação da minha dissertação.

Agradeço ao Gabriele Pannocchia pela disponibilidade e prestatividade em responder meus questionamentos.

À toda equipe de profissionais do Núcleo de Computação de Alto Desempenho (NACAD), em especial à Sandra, com sua alegria contagiante. Aos amigos Fábio, Letícia, e Rodrigo, pelos momentos de descontração e ajuda nos momentos de dificuldade. Ao colega Rolando um agradecimento especial pela sua colaboração com a simulação do algoritmo de otimização côncava-convexa.

Meus agradecimentos aos colegas de turma, que se tornaram amigos e me brindaram com sua companhia e apoio moral durante o mestrado: Diego, Alessandro, Kleber, Luciano, Nerito e Felipe. Em especial ao amigo Diego pela grande ajuda com os códigos LaTeX.

Aos colegas de trabalho do Instituto Federal Fluminense pelo apoio durante a fase de disciplinas, em especial à Romilda, Anderson, Victor, Adriana, Damião e ao meu grande amigo Luiz Antônio.

À minha namorada Lara por todo carinho, paciência e compreensão.

Aos colegas de trabalho da FMC Technologies, pelo apoio durante a fase final deste trabalho, em especial ao Giuliano, Jonas, Bruno, Campelo, Vitor e Claudio.

Com vocês, divido a alegria desta experiência.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTROLE PREDITIVO BASEADO EM MODELO COM ESTIMAÇÃO DE DISTÚRBIOS PARA PLANTAS MONOVARIÁVEIS

Igor Medeiros Moreira

Dezembro/2013

Orientador: Amit Bhaya

Programa: Engenharia Elétrica

Esta dissertação revisita o problema regulatório para sistemas de entrada e saída única. O presente trabalho investiga o potencial de uma alternativa ao controlador clássico proporcional-integral-derivativo (PID), denominada MPC-P, proposto por Pannocchia et al., que utiliza controle preditivo baseado em modelo. Realiza-se um estudo comparativo do MPC-P contra duas técnicas de sintonia de PID propostas por Skogestad e Hast et al., respectivamente, utilizando sistemas SISO de relevância prática, tais como: planta de primeira ordem com tempo morto, sistema de tanques duplos, planta de segunda ordem sobre amortecida e planta integradora com atraso. Um guia para implementação do MPC-P em hardware de controle industrial é desenvolvido, mostrando que sua complexidade é similar à do PID.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

MODEL PREDICTIVE CONTROL WITH DISTURBANCE ESTIMATION FOR
SISO SYSTEMS

Igor Medeiros Moreira

December/2013

Advisor: Amit Bhaya

Department: Electrical Engineering

This dissertation revisits the problem of set point regulation for single-input single-output systems. It investigates the potential of an alternative denominated MPC-P to the classical proportional-integral-derivative (PID) control, proposed by Pannocchia et al., and based on model predictive control. A comparative study of MPC-P versus two PID tuning methods due to Skogestad and Hast et al., respectively, is carried out using SISO systems of practical relevance, such as first-order plant with dead time, a double tank system, a second-order over damped system and an integrator with time delay. A guide for MPC-P implementation in industrial hardware is developed, showing that its complexity is similar to that of a PID implementation.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Abreviaturas	xv
1 Introdução	1
1.1 Objetivo	3
1.2 Estrutura da Dissertação	4
2 Controle Linear Quadrático e Estimação de Estados	5
2.1 Controlador Linear Quadrático	5
2.1.1 Motivação: O Problema Regulatório	5
2.1.2 Obtenção da Forma do Critério de Desempenho	7
2.1.3 Obtenção da Equação de Riccati	9
2.2 Estimação de Estados - Filtro de Kalman	10
2.2.1 Observador Assintótico	10
2.2.2 Filtro de Kalman	11
3 Controlador Linear Quadrático Monovariável com Restrição na entrada	14
3.1 Motivação: Controle Preditivo baseado em Modelo	14
3.2 Estratégia do MPC	16
3.3 Modelo do Sistema	18
3.4 Estimador de estados e distúrbio	20

3.5	Cálculo do Alvo Restrito	22
3.6	Otimização Dinâmica	23
3.6.1	Set-Point Viável	23
3.6.2	Set-Point Inviável	27
4	Implementação Eficiente do MPC-P	29
4.1	Cálculo do Alvo Restrito	29
4.2	Problema de Otimização Dinâmico com Restrição	31
4.2.1	Construção da Tabela	33
4.2.2	Método do Espaço Nulo	34
5	Simulações e Discussões	38
5.1	Metodologia de Simulação e Comparação dos Resultados	39
5.2	Algoritmos Genéticos - Global Optimization Tool	40
5.3	Tanques Duplos	42
5.3.1	Sintonia do MPC-P utilizando AG - Tanques Duplos	43
5.3.2	Comparação do Controlador MPC-P com PID	52
5.4	Sistema de Primeira ordem mais tempo morto (FOPTD)	54
5.4.1	Sintonia do MPC-P utilizando AG - FOPTD	55
5.4.2	Comparação com o Controlador PID	58
5.5	Sistema de Segunda ordem Sobre Amortecido	60
5.5.1	Sintonia do MPC-P utilizando AG	61
5.5.2	Comparação com Controlador PID	64
5.6	Sistema Integrador com atraso	66
5.6.1	Sintonia do MPC-P utilizando AG	67
5.6.2	Comparação com Controlador PID	71
5.7	Discussões e Comentários	73
6	Conclusões	75
6.1	Trabalhos Futuros	76

Referências Bibliográficas	78
A Guia para Implementação do MPC-P em Hardware de Controle	81
A.1 O padrão de programação IEC 61131-3	82
A.2 A implementação dos Algoritmos	83
A.2.1 Discutindo o caso $N = 3$	87

Lista de Figuras

3.1	Estratégia do MPC	16
3.2	Estrutura básica de um MPC.	18
3.3	Esquema do MPC-P.	19
5.1	Tela de Interface Gráfica da Ferramenta Global Optimization Tool.	42
5.2	Visão esquemática do processo de tanques duplos.	43
5.3	Evolução do Algoritmo Genético para otimização do critério de desempenho Φ para os parâmetros s e R_v do MPC.	44
5.4	Desempenho do MPC-P para o sistema de Tanques de Duplos para diferentes Horizontes de controle.	45
5.5	Comportamento do critério de desempenho do MPC-P para o sistema de Tanques para diferentes valores da penalidade s	46
5.6	(a)-(d) Estimação de estados e (e) distúrbio e (f) alvo restrito \bar{u} e \bar{x} para MPC-P ₁ e MPC-P ₂	47
5.7	(a) Sinal de controle u^* e (b) Resposta do sistema controlado para MPC-P ₁ e MPC-P ₂	48
5.8	(a)-(d) Estimação de estados e (e) distúrbio e (f) alvo restrito \bar{u} e \bar{x} para MPC-P ₁ e MPC-P ₂	50
5.9	(a) Sinal de controle u^* e (b) Resposta do sistema controlado para MPC-P ₁ e MPC-P ₂	51
5.10	Comparação MPC, PID-Skog e PID-CC-Ast para sistema de Tanques Duplos.	53

5.11	Evolução do Algoritmo Genético para o parâmetros do MPC-P para o sistema FOPTD.	55
5.12	Resultado da simulação do MPC para o sistema de primeira ordem com tempo morto $\theta = 2$ e $\theta = 5$	57
5.13	Comparação do MPC com o PID-Skog e PID-CC-Ast para o Sistema de primeira ordem com tempo morto: (a) Sistema Controlado - caso nominal (sem ruído); (b) Sinal de Controle - caso nominal; (c) Sistema Controlado - caso ruidoso; (d) Sinal de Controle - caso ruidoso;	59
5.14	Evolução do Algoritmo Genético para o parâmetros do MPC-P - Sistema segunda ordem sobre-amortecido.	61
5.15	Resultado da Simulação do MPC para o Sistema de segunda ordem sobre-amortecido com ganho $k = 1$, figuras (a) e (b) e $k = 10$, figuras (c) e (d).	63
5.16	Comparação do MPC-P com o PID-Skog e PID-CC-Ast para o Sistema de segunda ordem sobre-amortecido: (a) Sistema Controlado - caso nominal (sem ruído); (b) Sinal de Controle - caso nominal; (c) Sistema Controlado - caso ruidoso; (d) Sinal de Controle - caso ruidoso;	65
5.17	Evolução do Algoritmo Genético para o parâmetros do MPC-P para o sistema integrador com Atraso.	67
5.18	(a)-(b) Estimação de estados e (c) distúrbio e (d) alvo restrito \bar{u} e \bar{x} , (e) Sinal de controle u^* e (f) Resposta do sistema controlado para MPC-P ₁ e MPC-P ₂ para integrador com atraso.	68
5.19	(a)-(b) Estimação de estados e (c) distúrbio e (d) alvo restrito \bar{u} e \bar{x} , (e) Sinal de controle u^* e (f) Resposta do sistema controlado para MPC-P ₁ e MPC-P ₂ para integrador com atraso.	70
5.20	(a) Sinal de controle u^* e (b) Resposta do sistema integrador com atraso controlado pelo MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Ast, caso ruidoso.	72
A.1	Fluxograma do Progama do CLP.	85
A.2	Ilustração de um elemento de um array de uma dimensão.	88

Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros globais de simulação.	39
5.2	Parâmetros obtidos para o controlador MPC-P para o sistema Tanques Duplos através do AG.	44
5.3	Comparação do índice de desempenho do MPC-P para o sistema de Tanques Duplos.	52
5.4	Parâmetros de Sintonia do Controlador PID.	52
5.5	Comparação do índice de desempenho do MPC-P e PID para o sistema de Tanques Duplos.	54
5.6	Parâmetros obtidos para o controlador MPC-P para o sistema FOPTD através do AG.	56
5.7	Índice de desempenho para os sistemas de primeira ordem com tempo morto (FOPTD).	58
5.8	Sintonia do Controlador PID para o sistema FOPTD.	58
5.9	Comparação do índice de desempenho do MPC e PID para o sistema FOPTD.	60
5.10	Parâmetros obtidos para o controlador MPC-P para o sistema de segunda ordem sobre-amortecido através do AG.	61
5.11	Índice de desempenho para os sistemas de segunda ordem sobre-amortecido para diferentes valores de ganho.	64
5.12	Sintonia do Controlador PID para o sistema de segunda ordem sobre-amortecido.	64

5.13	Comparação do índice de desempenho do MPC-P e PID para o sistema FOPTD.	66
5.14	Parâmetros obtidos para o controlador MPC-P para o sistema FOPTD através do AG.	67
5.15	Índice de desempenho para o sistema integrado com atraso para diferentes sintonias do MPC-P.	71
5.16	Sintonia do Controlador PID para o sistema integrador com atraso.	71
5.17	Comparação do índice de desempenho do MPC-P e PID para o sistema integrador com atraso para o caso ruidoso.	72
5.18	Comparação do valores de sintonia e desempenho do MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Ast, para o caso ruidoso.	74
A.1	Lista do tipos de dados definidos pela norma IEC 61131-3.	83
A.2	Lista de Matrizes calculadas off-line para cada módulo do MPC-P.	84
A.3	Rotinas e linguagens de programação para implementação do MPC-P.	86
A.4	Lista de Matrizes calculadas off-line e suas dimensões, para o caso $N = 3$ e $n = 2$	87

Lista de Abreviaturas

AG	Algoritmos Genéticos, p. 38
CLP	Controlador Lógico Programável, p. 3
FOPTD	Sistema de Primeira Ordem Mais Tempo Morto, p. 54
KKT	Karush–Kuhn–Tucker, p. 32
LQR	Controlador Linear Quadrático, p. 17
MPC-P	Controlador Preditivo Baseado em Modelo Proposto por Pan- nochia et al., p. vi
MPC	Controle Preditivo Baseado em Modelo, p. 2
PID	Proporcional Integral Derivativo, p. 1
QP	Programa Quadrático, p. 32
SISO	Sistema de entradas e saídas únicas, p. 1
SLIT	Sistema Linear Invariante no Tempo, p. 5

Capítulo 1

Introdução

A economia depende de idéias inovadoras e de novas soluções para atender às necessidades das pessoas, dos mercados, dos serviços e processos cada vez mais eficientes, buscando melhorar a maneira como as coisas são feitas. Dentro desse contexto, geralmente é aceito que a maneira mais eficaz de gerar o maior lucro das plantas de um dado processo, respondendo às variações do mercado, é a partir da integração de todos os aspectos da automação do processo de decisão: medição, controle, otimização e logística. A integração de tais sistemas está forçando os processos a operarem em uma gama cada vez maior de condições. Um sistema de controle, portanto, deve ser capaz de atualizar a variável manipulada de forma a satisfazer múltiplos critérios de desempenho em face as mudanças nas características do processo [1].

Existe um consenso que, para sistemas de entradas e saídas únicas (SISO) , o controlador proporcional, integral, e derivativo (PID) , bem sintonizado, é tão bom quanto os controladores baseados em modelo e além disso, é mais robusto quanto a erros no modelo. Em [2] pergunta-se qual o motivo da popularidade do PID: ela pode ser atribuída a alguma vantagem tecnológica concreta, ou é um simples acidente histórico decorrente do sucesso do PID analógico?

Em controle de processos, mais de 95% das malhas de controle utilizam o controlador PID. Esses controladores são suficientes para muitos problemas de controle, particularmente quando a dinâmica do processo é favorável e os requisitos de desempenho são modestos [3]. As principais vantagens atribuídas ao PID são: sim-

plicidade, rapidez, fácil implementação em hardware e software, fácil sintonia, bom desempenho em média e robustez em relação a erros no modelo [2].

Apesar do controlador PID ter apenas três parâmetros, não é fácil, sem uma sistemática, encontrar bons valores de configuração. De fato, a visita a uma planta de processo mostrará que um grande número de controladores PID são mal sintonizados [1], apesar de métodos de sintonia serem campo de pesquisa recorrente, tanto no âmbito nacional [4], [5] e [6], quanto internacional [7], [8], [9],[10].

O termo MPC refere-se à família de controladores nos quais usa-se um modelo explícito do processo para obter o sinal de controle através da minimização de uma função objetivo. O interesse da indústria de processo nesse tipo de controlador ocorreu no final da década de 70, após publicação dos artigos [11] e [12], que descrevem aplicações de sucesso em colunas de destilação, geradores de vapor, torres de craqueamento de fluidos, entre outros.

O problema do MPC, é que, primeiramente, há a necessidade de um modelo explícito do sistema em questão e a necessidade de solucionar um problema de otimização a cada passo o que eleva o custo computacional e dificulta a implementação prática do mesmo [13].

O conceito básico do MPC pode ser resumido da seguinte forma: dadas informações sobre o estado atual do processo, utiliza-se um modelo para prever a resposta futura da sistema; em seguida, ajusta-se uma entrada de modo que a resposta prevista alcance um objetivo desejado. Tipicamente, a entrada do sistema é escolhida por meio de algum tipo de otimização, sujeita a restrições, em um horizonte de previsão. A lei de controle é normalmente implementada em um horizonte deslocado, ou seja, aplica-se apenas a entrada atual da seqüência, então o tempo avança um passo, atualiza-se a estimativa do estado e repete-se o procedimento [14].

O MPC foi inicialmente desenvolvido na indústria, onde a necessidade de operar os sistemas em seu limite para melhorar a produção passou a exigir controladores com capacidade superior ao controlador PID. Os controladores baseados no MPC têm encontrado grande aceitação na indústria e na academia, particularmente pelo

fato de sua formulação permitir diferentes tipos de modelos de predição e a capacidade de lidar com restrições. Os maiores obstáculos para penetração desses controladores no mercado onde o PID domina são: (i) custo da implementação, (ii) complexidade dos algoritmos de otimização e (iii) o fato do algoritmo não estar disponível no hardware de controle [15].

De acordo com [16], a utilização de técnicas multiparamétricas para solução do problema de otimização permite implementação do MPC em hardwares que vão desde do CLP existente no processo até microcontroladores e pequenos chips de memória. Aplicações em controle de glicose, reatores, válvulas atuadoras e plantas de separação de ar foram reportadas. Em todos os casos, o MPC teve desempenho superior ao clássico PID, devido à sua capacidade de lidar com restrições e ao mesmo tempo otimizar um índice de desempenho especificado.

Em [15] demonstrou-se que um controlador MPC auto-ajustável pode ser programado em um CLP industrial, utilizando o padrão de programação IEC 61131-3, com tempo de amostragem da ordem de milisegundos.

1.1 Objetivo

Este trabalho tem por objetivo um estudo comparativo de uma proposta alternativa, feita por Pannocchia et al., ao controle PID de sistemas SISO. Esta proposta utiliza a teoria de controle preditivo baseada em modelo para chegar ao projeto denominado MPC-P. Para realizar a comparação, foram escolhidos dois projetos de controladores PID. O primeiro desenvolvido por Skogestad e divulgado em um trabalho que possui 312 citações, até a data 21/11/2013 do levantamento, e o segundo, desenvolvido em 2013 por uma equipe sueco-americana, liderada pelos renomados pesquisadores Åström (especialista e autor de 3 patentes e 4 livros sobre controladores PID) e Boyd (especialista em otimização convexa e MPC). É interessante notar que o trabalho base desta dissertação, do Pannocchia et al., possui apenas 11 citações. Espera-se ao longo desta dissertação, mostrar que ele é de fato interessante e merecedor de mais atenção dos praticantes de controle de processos industriais. Um objetivo

secundário é apontar um caminho para implementação do controlador MPC-P em hardware industrial, mostrando que os cálculos “complexos” associados ao controle MPC pode ser simplificados ao ponto de permitir implementação nas plataformas industriais usuais.

1.2 Estrutura da Dissertação

Este trabalho está organizado de acordo com os seguintes capítulos:

No capítulo 2 é feita uma breve revisão acerca da teoria de controle Linear Quadrático e Estimação de Estados; conceitos importantes para o entendimento do Controlador Preditivo baseado em Modelo.

O terceiro capítulo descreve o Controlador Preditivo baseado em modelo, propriamente dito, proposto por [2]. O controlador é dividido em três módulos: estimador de estados e distúrbios, cálculo de alvo restrito e otimização dinâmica restrita.

No quarto capítulo são descritas as etapas para implementar o controlador de forma eficiente. Descreve-se o método de solução do Problema Quadrático de forma off-line, por meio da geração de uma tabela de soluções, o que permite sua implementação em hardware de controle, tal como Controladores Lógicos Programáveis.

O capítulo 5 apresenta os resultados obtidos a partir de testes de desempenho do MPC-P para sistemas SISO diversos, comparação do desempenho com o controlador PID sintonizados de acordo com [9] e [10], e por fim uma análise crítica dos resultados.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

O trabalho é finalizado com o apêndice A, no qual apresenta-se um guia para implementação do MPC-P em controladores Lógicos Programáveis industriais utilizando o padrão de programação IEC 61131-3.

Capítulo 2

Controle Linear Quadrático e Estimação de Estados

Neste capítulo será feita uma breve revisão sobre Controle Linear Quadrático e Estimação de Estados através do Filtro de Kalman, seguindo as referências [17] e [18], respectivamente.

2.1 Controlador Linear Quadrático

O controle linear ótimo é um tipo especial de controle. A planta controlada é suposta linear, e o controlador é obrigado a ser linear. Controladores lineares são alcançados escolhendo-se critérios de desempenho quadráticos. Tais métodos que alcançam controle ótimo linear utilizando critérios quadráticos são denominados métodos Linear Quadráticos (LQ) [17].

2.1.1 Motivação: O Problema Regulatório

Considere o SLIT representado pela equação de estados discreta:

$$x_{k+1} = Fx_k + Gu_k \tag{2.1}$$

$$y_k = Hx_k \quad (2.2)$$

sendo $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $H \in \mathbb{R}^{n \times p}$ matrizes do sistema, $x_k \in \mathbb{R}^n$ vetor de estados, $u_k \in \mathbb{R}^m$ a entrada, $y_k \in \mathbb{R}^p$ a saída, e $k \in \mathbb{Z}$.

Considere a lei de controle linear dada por:

$$u_k = Kx_k \quad (2.3)$$

para uma matriz K de dimensão apropriada.

Na abordagem de controle ótimo, supõe-se em primeira instância que os estados dos sistema estão disponíveis para medição. Se este não for o caso, é geralmente possível construir um observador capaz de reconstruir os estados do sistema a partir entrada e saída da planta. O estimador de estado será abordado na seção 2.2 no final deste capítulo.

O problema regulatório pode ser enunciado da seguinte forma: procura-se um controle capaz de levar o sistema de um estado inicial dado não-nulo a um estado final pre-especificado, que pode ser escolhido nulo, sem perda de generalidade, preferencialmente o mais rápido possível. Se o par $[F, G]$ for controlável, esta tarefa certamente é possível. No entanto, quanto mais próximo o tempo final T for de t_0 , o tempo inicial, maior será a quantidade de energia de controle requerida para executar a transferência de estado. Em qualquer sistema de engenharia a magnitude das variáveis é limitada; portanto, não seria possível realizar a transferência de estados em tempo arbitrariamente curto sem exceder esses limites.

Neste contexto, exige-se a minimização de

$$\sum_{k=t_0}^T u_k^T R_k u_k \quad (2.4)$$

onde R_k é uma matriz simétrica positiva definida para todo k .

Pode-se relaxar no objetivo de atingir o estado final nulo e requerer que alguma norma do estado torne-se pequena. Para um dado T pode-se exigir que $x_T^T S_T x_T$,

com S simétrica positiva definida, se torne pequena. Além disso, é usual exigir pequenas excursões do estado, i.e., manter $\|x_k\|$ pequeno para todo k no intervalo no qual o controle é aplicado, exigindo a minimização do somatório

$$\sum_{k=t_0}^T x_k^\top Q_k x_k \quad (2.5)$$

sendo Q_k uma matriz simétrica positiva definida.

Procura-se, portanto, um critério de desempenho capaz de atender aos requisitos anteriores, que leve a um controlador adequado para implementação e de preferência linear. Considere o critério $x_1^\top Q x_1 + u_0^\top R u_0$, onde $x_1 = F x_0 + G u_0$, para um dado x_0 . Após alguns cálculos diretos, pode-se mostrar que o mínimo é atingido através de $u_0 = -(G^\top Q G + R)^{-1} G^\top Q F x_0$. Note que u_0 depende linearmente de x_0 . Portanto, pode-se escolher o seguinte critério de desempenho quadrático a ser minimizado, para o problema regulatório do sistema por (2.1):

$$\begin{aligned} V(x_k, u_k, t_0) &= \sum_{k=t_0+1}^T [x_k^\top Q_k x_k + u_{k-1}^\top R_k u_{k-1}] \\ &= \sum_{k=t_0}^{T-1} [x_k^\top Q_k x_k + u_k^\top R_{k+1} u_k] \\ &\quad + x_T^\top S_T x_T - x_{t_0}^\top Q_{t_0} x_{t_0} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Observe que V depende do estado inicial x_{t_0} , do tempo t_0 e do controle no intervalo $[t_0, T]$. A função V é comumente chamada de função custo.

2.1.2 Obtenção da Forma do Critério de Desempenho

Será mostrado nesta seção que um critério de desempenho ótimo $V^*(x_k, k)$, se existir, deve ser da forma $x_T^\top P_T x_T$, no qual P_T é uma matriz simétrica.

Considere a seguinte notação:

$$V^*(x_k, k) = \min_{u_{[k, T]}} V(x_k, u_k, k) \quad (2.7)$$

Observe que V^* é independente de u_k , uma vez que o estado e tempo determinam

o controle u_k , pela exigência do controle minimizar $V(x_k, u_k, k)$.

Uma condição suficiente e necessária para uma função $V^*(x, u, k)$ assumir a forma quadrática é que esta seja contínua em x_k e satisfaça às duas condições abaixo:

$$V^*(\lambda x, \lambda u, k) = \lambda^2 V^*(x, k) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

$$V^*(x_1, k) + V^*(x_2, k) = \frac{1}{2} [V^*(x_1 + x_2, k) + V^*(x_1 - x_2, k)] \quad (2.9)$$

Para demonstrar tal fato, será adotada a notação u_x^* para denotar o controle ótimo no intervalo $[k, T]$ quando o estado inicial é x_k no tempo k . As inequações seguem da otimalidade e as igualdades são baseadas na linearidade de (2.1) e na natureza quadrática de (2.6):

$$\begin{aligned} V^*(\lambda x, k) &\leq V(\lambda x, \lambda u_x^*(\cdot), k) = \lambda^2 V^*(x, k) \\ \lambda^2 V^*(x, k) &\leq \lambda^2 V(x, \lambda^{-1} u_{\lambda x}^*(\cdot), k) = V^*(\lambda x, k) \end{aligned}$$

Implicando diretamente em (2.8). Seguindo o mesmo raciocínio e utilizando $2x_1 = (x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)$ e $2x_2 = (x_1 + x_2) - (x_1 - x_2)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} V^*(x_1, k) + V^*(x_2, k) &= \frac{1}{4} [V^*(2x_1, k) + V^*(2x_2, k)] \\ &\leq \frac{1}{4} [V(2x_1, u_{x_1+x_2}^* + u_{x_1-x_2}^*, k) \\ &\quad + V(2x_2, u_{x_1+x_2}^* - u_{x_1-x_2}^*, k)] \quad (2.10) \\ &= \frac{1}{2} [V(x_1 + x_2, u_{x_1+x_2}^*, k) + V(x_1 - x_2, u_{x_1-x_2}^*, k)] \\ &= \frac{1}{2} [V^*(x_1 + x_2, k) + V^*(x_1 - x_2, k)] \end{aligned}$$

Utilizando os controles $u_{x_1}^*$ e $u_{x_2}^*$, pode-se estabelecer a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{2} [V^*(x_1 + x_2, k) + V^*(x_1 - x_2, k)] \leq V^*(x_1, k) + V^*(x_2, k) \quad (2.11)$$

Portanto, (2.8) e (2.11) implicam em (2.9). Uma vez que $V^*(x_k, k)$ é contínua em $x(k)$, pode-se concluir que $V^*(x_k, k)$ tem a forma:

$$V^*(x_k, k) = x_k^\top P_k x_k \quad (2.12)$$

2.1.3 Obtenção da Equação de Riccati

Nesta seção será obtida a matriz P_k que satisfaz à Equação Discreta de Riccati. Para isso o princípio da otimalidade será invocado.

Considere $V^*(x_k, k)$ o critério de desempenho ótimo associado ao estado inicial x_k no tempo k . Portanto, de acordo com o princípio de otimalidade e o sistema definido em (2.1), temos:

$$\begin{aligned} V^*(x_k, k) = \min_{u_k} \{ & [F_k x_k + G_k u_k]^\top Q_{k+1} [F_k x_k + G_k u_k] \\ & + u_k^\top R_{k+1} u_k \\ & + V^*(F_k x_k + G_k u_k, k + 1) \} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Após alguns cálculos, obtém-se:

$$\begin{aligned} V^*(x_k, k) = \min_{u_k} \{ & u_k^\top [G_k^\top Q_{k+1} G_k + R_{k+1}] u_k \\ & + 2x_k^\top F_k^\top Q_{k+1} G_k u_k + x_k^\top F_k^\top Q_{k+1} F_k x_k \\ & + V^*(F_k x_k + G_k u_k, k + 1) \} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Uma vez que a solução de $V^*(x_k, k)$ tem a forma quadrática $x_k^\top P_k x_k$, podemos reescrever (2.14) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V^*(x_k, k) = \min_{u_k} \{ & u_k^\top [G_k^\top Q_{k+1} G_k + R_{k+1}] u_k \\ & + 2x_k^\top F_k^\top Q_{k+1} G_k u_k + x_k^\top F_k^\top Q_{k+1} F_k x_k \\ & + x_k^\top F_k^\top P_{k+1} F_k x_k + 2x_k^\top F_k^\top P_{k+1} G_k u_k \\ & + u_k^\top G_k^\top P_{k+1} G_k u_k \} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Evidentemente, o controle u_k que minimiza o critério de desempenho é uma

função linear de x_k , i.e.,

$$u_k^* = K_k^\top x_k \quad (2.16)$$

A expressão para K_k' encontrada é

$$K_k^\top = -[G_k^\top Q_{k+1} G_k + R_{k+1} + G_k^\top P_{k+1} G_k]^{-1} [G_k^\top Q_{k+1} F_k + G_k^\top P_{k+1} F_k] \quad (2.17)$$

sendo

$$S_{k+1} = Q_{k+1} + P_{k+1} \quad (2.18)$$

A expressão para P_k é

$$P_k = F_k^\top \{S_{k+1} - S_{k+1} G_k [G_k^\top S_{k+1} G_k + R_{k+1}]^{-1} G_k^\top S_{k+1}\} F_k \quad (2.19)$$

O controle ótimo associado é dado por:

$$u^* = -[G_k^\top S_{k+1} G_k + R_{k+1}]^{-1} G_k^\top S_{k+1} F_k x_k \quad (2.20)$$

2.2 Estimação de Estados - Filtro de Kalman

O filtro de Kalman é um método computacional para reconstruir o estado de um modelo no espaço de estados de maneira estatisticamente ótima e faz parte de uma classe de filtros genericamente denominados observadores [18].

2.2.1 Observador Assintótico

Considere o SLIT representado pelo modelo no espaço de estados discreto:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (2.21)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (2.22)$$

$x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u_k \in \mathbb{R}$ é o vetor de entrada e $y_k \in \mathbb{R}$ é o vetor de saída.

Pode-se aproximar o estado de (2.21) utilizando o vetor de entradas u_k e a saída y_k . A estimativa pode ser melhorada pela introdução de um fator de correção, a matriz de ganhos L , multiplicando a diferença entre a saída real y_k e a estimada $\hat{y}_k = C\hat{x}_k + Du_k$, como se segue:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - (C\hat{x}_k + Du_k)) \quad (2.23)$$

O sistema representado por (2.23) é chamado de observador. A diferença e_k entre o estado estimado \hat{x}_k e o estado real x_k satisfaz:

$$e_{k+1} = (A - LC)(\hat{x}_k - x_k) \quad (2.24)$$

e conseqüentemente, se L for escolhido de forma que $(A - LC)$ seja assintoticamente estável, a diferença entre o estado estimado \hat{x}_k e o estado real x_k irá a zero quando $k \rightarrow \infty$. A escolha da matriz L determina a taxa de convergência de \hat{x}_k a x_k .

2.2.2 Filtro de Kalman

A diferença principal entre o observador descrito acima e o filtro de Kalman é que este leva o ruído em consideração. Considere o modelo do SLIT representado por (2.21) e (2.22) agora sujeitos a sequências de ruído aditivo w_k e v_k :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \quad (2.25)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k + v_k \quad (2.26)$$

O vetor $w_k \in \mathbb{R}^n$ é chamado de ruído do processo e $v_k \in \mathbb{R}^l$ é chamado de ruído de medição.

Utilizando o observador (2.23) para reconstruir o estado do sistema (2.25) e (2.26), a diferença $e_k = \hat{x}_k - x_k$ satisfaz:

$$e_{k+1} = (A - LC) e_k - w_k + Lv_k \quad (2.27)$$

Ainda que $A - LC$ seja assintoticamente estável, e_k não iria a zero para $k \rightarrow \infty$, pela presença de w_k e v_k . O objetivo agora é fazer com que e_k seja pequeno. Uma vez que e_k é um sinal aleatório, pode-se tentar fazer com que a média de e_k seja nula, pois isto não implica que e_k seja zero. É desejável também que a matriz de covariância seja tão pequena quanto possível, isto é, procura-se por um estimador de variância mínima.

A solução explícita para o problema do filtro de Kalman reformulada como um problema regulatório ótimo pode ser encontrada em [17]. As condições exatas para solução do problema do filtro de Kalman são resumidas a seguir, retirado de [18]:

Teorema 2.1 *Considere o SLIT representado por (2.25) e (2.26), com w_k e v_k sequências aleatórias com média zero e matriz de covariância:*

$$E \begin{bmatrix} w_k \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k^\top & v_k^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^\top & R \end{bmatrix} \Delta_{k-j} \quad (2.28)$$

tal que

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^\top & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.29)$$

e $R > 0$.

Se o par (A, C) for observável e o par $(A, Q^{1/2})$ for alcançável, então:

$$\Pi_{k|k-1} = E \left[(x_k - \hat{x}_{k|k-1}) (x_k - \hat{x}_{k|k-1})^\top \right] \quad (2.30)$$

onde $\hat{x}_{k|k-1} = E[x_k]$ satisfaz:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Pi_{k|k-1} = \Pi > 0 \quad (2.31)$$

para qualquer condição inicial simétrica $\Pi_{0|-1} > 0$, sendo Π a única solução da equação algébrica de Riccati:

$$\Pi = A\Pi A^T + Q - (S + A\Pi C^T)(C\Pi C^T + R)^{-1}(S + A\Pi C^T)^T \quad (2.32)$$

Se a matriz Π for usada para definir a matriz ganho de Kalman L como:

$$L = (S + A\Pi C^T)(C\Pi C^T + R)^{-1} \quad (2.33)$$

então a matriz $A - LC$ é assintoticamente estável.

sendo Δ_{k-j} o pulso unitário discreto e $E[x_k]$ a média de x_k .

Capítulo 3

Controlador Linear Quadrático

Monovariável com Restrição na entrada

Na prática, todos os processos são submetidos a restrições. Atuadores possuem faixa limitada de atuação e taxa de variação de seu curso, como no caso de válvulas de controle que são limitadas pela abertura mínima e máxima. Além disso, na prática, o ponto de operação das plantas são determinados de forma a satisfazer determinadas metas econômicas e estão na interseção de certas restrições. Os sistemas de controle normalmente operam próximos desses limites e violações das restrições são prováveis [13].

Neste capítulo será apresentado a teoria do controlador preditivo baseado em modelo, com Restrição proposto em [2] e os algoritmos para implementá-lo.

3.1 Motivação: Controle Preditivo baseado em Modelo

O termo MPC não se refere a um controle específico e sim a uma gama de métodos de controle que requerem o uso de um modelo explícito do processo para obter-se a

função de controle. As idéias por trás de toda a família de controladores preditivos são: uso explícito do modelo para prever a saída do processo em instantes futuros (horizonte); cálculo de uma sequência de controle que minimiza uma função objetivo e uma estratégia de recuo, de modo que, em cada instante, o horizonte é deslocado para o futuro, o qual envolve a aplicação do primeiro sinal da sequência calculada em cada passo de controle [13].

Apesar das idéias de horizonte de recuo e MPC terem origem na década de 60, o interesse neste campo surgiu na década de 80 após a publicação dos primeiros artigos em IDCOM (Identification and Command), [11] e DMC (Dynamic Matrix Control), [12]. Um modelo explícito do processo foi utilizado em ambos algoritmos (resposta ao impulso no primeiro e resposta ao degrau no segundo) para prever o efeito das ações de controle futuras na saída; estas eram determinadas através da minimização do erro predito sujeito a restrições operacionais.

Segundo [13] o MPC tornou-se popular rapidamente, particularmente na indústria de processos químicos, devido a simplicidade do algoritmo e ao uso de modelos obtidos por meio da resposta ao degrau e impulso. Em [1] pode ser encontrado um relatório completo das aplicações no setor petroquímico, cuja maioria dos sistemas testados eram multivariáveis com restrições. Apesar do sucesso, estas formulações careciam de teorias formais que fornecessem resultados de estabilidade e robustez.

Outras estratégias foram formuladas essencialmente para processos monovariáveis, tal como GPC (Generalized Predictive Control) desenvolvido por [19], considerado um dos métodos mais populares no momento [13]. Uma nova linha de trabalho em MPC foi desenvolvida nos anos 90 de forma a garantir estabilidade. Neste contexto, foi apresentado o GPC estável [20], uma formulação que garante estabilidade em malha fechada, na qual estabilizava-se o processo antes da minimização da função objetivo.

De acordo com [13], o MPC apresenta uma série de vantagens sobre os outros métodos, as quais destaca-se: particularmente atrativo ao pessoal com conhecimento

limitado da teoria de controle, pois os conceitos são bem intuitivos e a sintonia relativamente fácil; pode ser utilizado para controlar uma grande variedade de processos, incluindo sistemas com grandes atrasos de transporte; introduz o conceito de controle feed-forward de forma natural em sua concepção; o controlador resultante é uma lei de controle linear fácil de ser implementada. A principal desvantagem é que um modelo apropriado do processo é necessário.

MPC têm encontrado grande aceitação na indústria e na academia, principalmente pelo fato de ter uma formulação aberta que permite a incorporação de diferentes modelos de predição e a capacidade de lidar com restrições. No entanto, têm tido penetração relativamente pequena nos mercados onde a estratégia PID domina, apesar do fato do MPC ter muito a oferecer em sistemas SISO devido à sua maior capacidade de lidar com restrições e o controlador ser mais flexível que o PID [15].

3.2 Estratégia do MPC

A metodologia de todos os controladores pertencentes à família MPC é caracterizada pela seguinte estratégia, representada na figura 3.1:

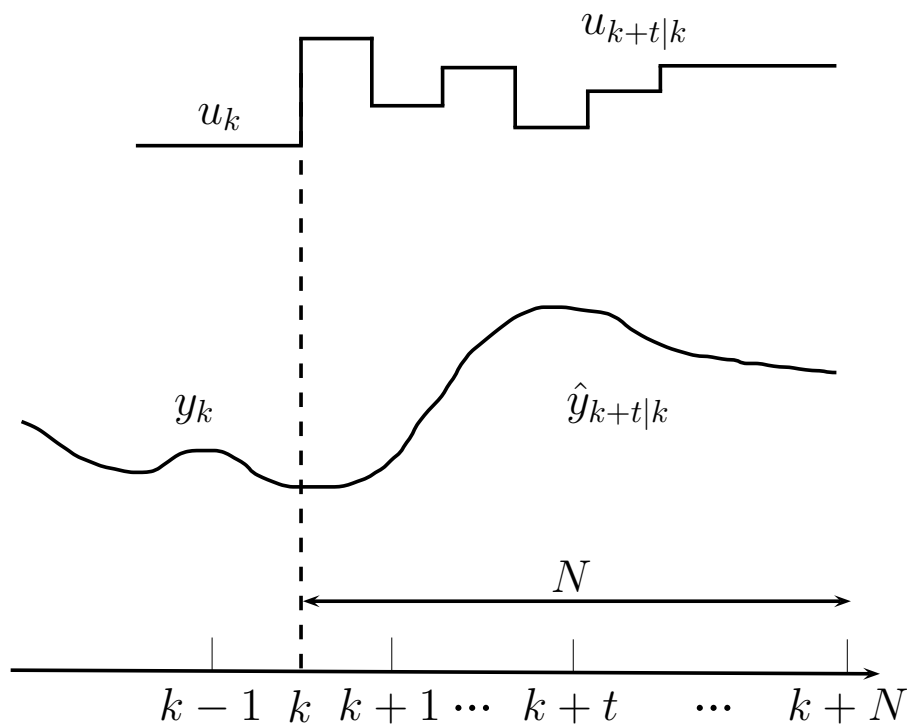


Figura 3.1: Estratégia do MPC

1. As saídas futuras para determinado horizonte N , chamado de horizonte de previsão, são previstas a cada instante de tempo k utilizando o modelo do processo. As saídas previstas $y_{k+t|t}$ para $t = 1 \dots N$ depende dos valores conhecidos até o instante t e dos controles futuros $u_{k+t|t}$, para $t = 1 \dots N - 1$, os quais são enviados para o sistema e calculados.
2. O conjunto de sinais de controle futuros são calculados pela otimização de um determinado critério, de forma a manter o processo o mais próximo da trajetória (set-point). Este critério geralmente toma a forma de uma função quadrática de erros entre o sinal de saída predito e o sinal de referência predito.
3. O sinal de controle $u_{k|k}$ é enviado ao processo enquanto o próximo sinal de controle calculado é rejeitado, uma vez que o próximo período de amostragem y_{k+1} já é conhecido, e o passo 1 é repetido com esse novo valor e toda a sequência é atualizada. Desse modo, $u_{k+1|k+1}$ é calculado utilizando o conceito de horizonte de recuo.

Quando o horizonte de controle e o horizonte de previsão se aproximam do infinito e quando não há restrições, obtém-se o controlador linear quadrático (LQR) padrão [21], conforme descrito no capítulo 2.

A fim de implementar esta estratégia, a estrutura básica de um MPC é mostrada na figura 3.2. Um modelo do sistema é utilizado para prever a saída da planta, baseado em valores passados e atuais e nas ações de controle ótima. As ações de controle ótima são calculadas por meio de um otimizador levando em conta a função custo e as restrições. O modelo do processo desempenha papel decisivo no controlador. O modelo escolhido deve ser capaz de capturar a dinâmica do processo, de modo a precisamente prever as saídas futuras, além de ser simples de ser implementado e entendido.

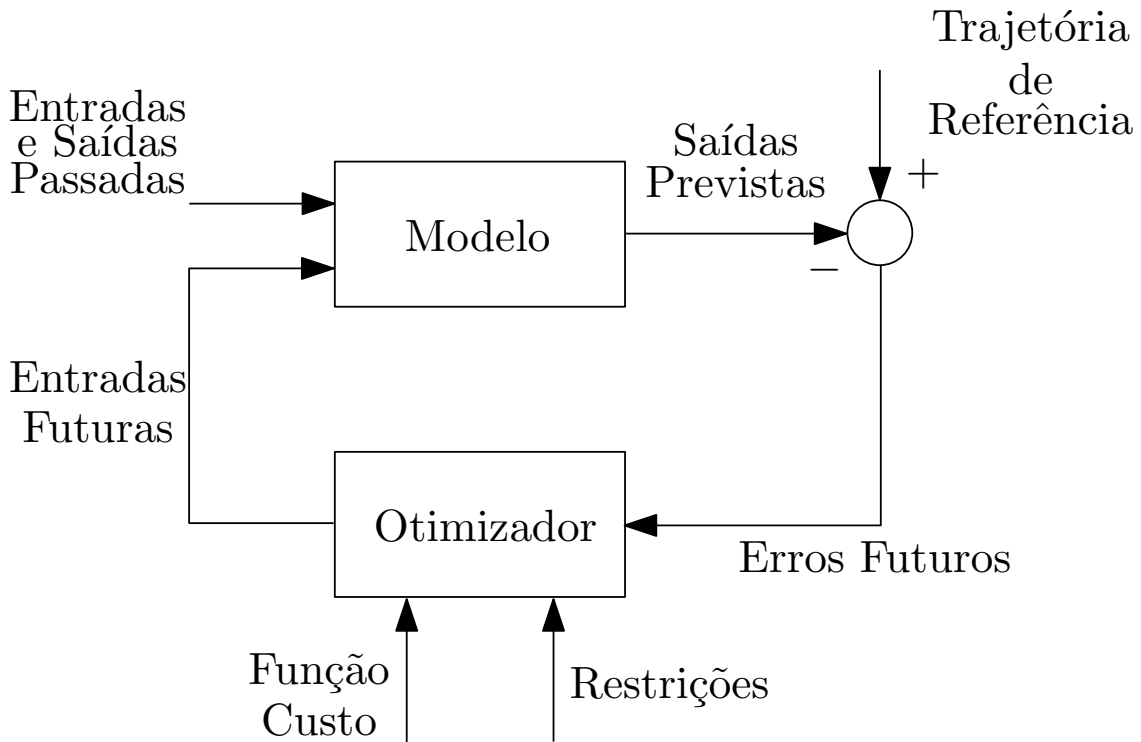


Figura 3.2: Estrutura básica de um MPC.

Na próxima seção será discutido o MPC-P, cujo diagrama de blocos é mostrado na figura 3.3. Os blocos Sistema, Estimador de Estados/Distúrbio, Cálculo de Alvo restrito e Otimizador serão discutidos com detalhes.

3.3 Modelo do Sistema

Pelo fato da maioria das regras de sintonia para PID exigir uma simples função de transferência do processo, supõe-se aqui que o modelo é conhecido. A partir desse ponto, os sistema considerados serão SISO. Considere o SLIT representado pelo modelo no espaço de estados discretos, mostrado abaixo:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_{k-m}$$

$$y_k = Cx_k \tag{3.1}$$

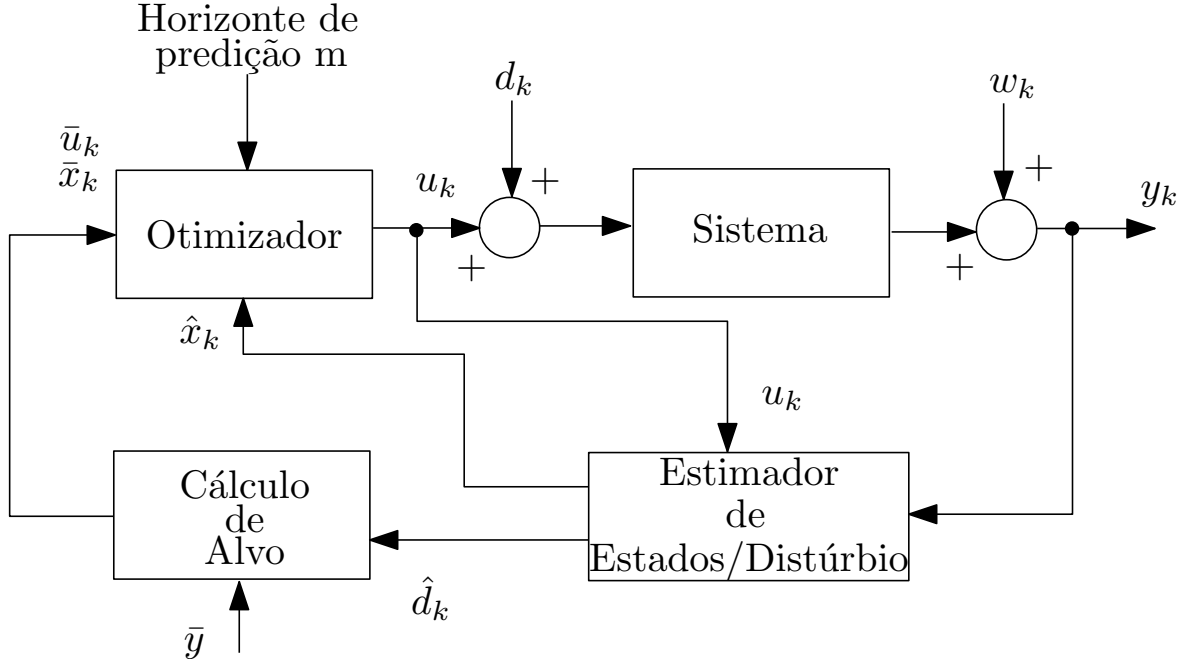


Figura 3.3: Esquema do MPC-P.

$x \in \mathbb{R}^n$ é vetor de estados; $u \in \mathbb{R}$ é a entrada, $y \in \mathbb{R}$ é a saída e m é um inteiro não negativo, o atraso de transporte.

Hipótese 1: Supõe-se que o par (A, B) seja controlável e (C, A) observável, e que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\text{posto} \left(\begin{bmatrix} I - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) = n + 1 \quad (3.2)$$

Note que, qualquer realização mínima no espaço de estados de uma função de transferência não singular satisfaz a hipótese 1.

Considere uma restrição na entrada u da seguinte forma:

$$u_{min} \leq u \leq u_{max} \quad (3.3)$$

De forma a garantir erro nulo em regime permanente na presença de distúrbios não modelados ou inconsistência no modelo, o sistema é aumentado seguindo procedimento proposto por [22]. A metodologia consiste em adicionar um numero de distúrbios igual ao numero de variáveis medidas, de forma que o sistema seja detectável. Neste caso, como o sistema é monovariável (SISO), é necessário adicionar

uma única variável de distúrbio. O sistema aumentado resultante é:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix}_{k+1} &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_{k-m} \\ y_k &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ d \end{bmatrix}_k \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.4 Estimador de estados e distúrbio

A cada período de amostragem, uma estimação do estado $\hat{x}_{k|k-1}$ e do distúrbio $\hat{d}_{k|k-1}$ baseado em medições prévias e da entrada, estão disponíveis. As equações de estimação do estado atual e do distúrbio, respectivamente, são mostradas abaixo:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= \hat{x}_{k|k-1} + L_x(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}) \\ \hat{d}_{k|k} &= \hat{d}_{k|k-1} + L_d(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

sendo $L_x \in \mathbb{R}^n$ e $L_d \in \mathbb{R}$ computados off-line. Para calcular as matrizes de ganho L_x e L_d , considere as matrizes aumentadas do sistema, note que, neste caso a matriz S da equação (2.29) foi considerada nula:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \hat{Q} = \begin{bmatrix} q_x I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

no qual q_x é um escalar não-negativo. Supondo R_v um escalar positivo, então a equação discreta de Riccati do estimador de estados de regime permanente será dada por:

$$\Pi = \hat{Q} + \hat{A}\Pi\hat{A}^\top - \hat{A}\Pi\hat{C}^\top(\hat{C}\Pi\hat{C}^\top + R_v)^{-1}\hat{C}\Pi\hat{A}^\top \quad (3.7)$$

sendo $\Pi \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ uma matriz simétrica positiva definida.

Os ganhos do estimador de estado L_x e do distúrbio L_d podem ser calculados conforme mostrado abaixo:

$$L = \begin{bmatrix} L_x \\ L_d \end{bmatrix} = A\Pi\hat{C}^\top(\hat{C}\Pi\hat{C}^\top + R_v)^{-1}, \quad (3.8)$$

q_x e R_v são os parâmetros de sintonia do estimador. O escalar q_x representa a razão entre a variância do ruído no estado e a variância no ruído do distúrbio: seu aumento torna o estimador menos “agressivo” em estimar o distúrbio. Em contra partida o escalar R_v representa a razão entre a variância do ruído da saída e a variância do ruído no distúrbio: aumentando-se R_v , torna o estimador menos “sensível” a ruídos na saída.

Finalmente, o estado e distúrbio estimados para o próximo período de amostragem são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= A\hat{x}_{k|k} + Bu_{k-m} + B\hat{d}_{k|k} \\ \hat{d}_{k+1|k} &= \hat{d}_{k|k} \end{aligned} \quad (3.9)$$

O pseudocódigo para implementação do estimador de estados e distúrbio é mostrado abaixo:

Algoritmo 1 Estimador de Estados e Distúrbio

- 1: **se** $k - m \leq 1$ **então** ▷ Simulação do Sistema
 - 2: $x_{k+1} \leftarrow Ax_k + Bu_1^* + Bdst_k$
 - 3: **senão**
 - 4: $x_{k+1} \leftarrow Ax_k + Bu_{k-m}^* + Bdst_k$;
 - 5: **fim se**
 - 6: $y_k \leftarrow Cx_k + w_k$
 - 7: $\hat{d}_{k+1} \leftarrow \hat{d}_k + Ld(y_k - C\hat{x}_k)$ ▷ Estimação do Distúrbio
 - 8: **se** $k - m \leq 1$ **então** ▷ Estimação do Estado
 - 9: $\hat{x}_{k+1} \leftarrow A\hat{x}_k + Bu_1^* + B\hat{d}_{k+1} + L_x(y_k - C\hat{x}_k)$
 - 10: **senão**
 - 11: $\hat{x}_{k+1} \leftarrow A\hat{x}_{k-m} + Bu_{k-m}^* + B\hat{d}_{k+1} + L_x(y_k - C\hat{x}_k)$
 - 12: **fim se**
-

3.5 Cálculo do Alvo Restrito

Nesta etapa, o objetivo é calcular o estado \bar{x}_k e entrada \bar{u}_k de forma que o sistema alcance o set-point. A cada período de amostragem, dado o distúrbio estimado $\hat{d}_{k|k}$ e a saída estimada \bar{y} , são calculados os alvos de regime permanente para a entrada e o estado. De (3.2), os alvos são a solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} I - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_k \\ \bar{u}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\hat{d}_{k|k} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

No entanto, a solução do sistema (3.10) pode violar (3.3). Por essa razão computam-se os alvos por meio da minimização do objetivo de soma ponderada, representada pelo programa quadrático a seguir:

$$\begin{aligned} (\bar{x}_k, \bar{u}_k) = \arg \min_{(\bar{x}, \bar{u})} \frac{1}{2} \{ & (C\bar{x} - \bar{y})^2 + \eta[(I - A)\bar{x} \\ & - B(\bar{u} + \hat{d}_{k|k})]^\top [(I - A)\bar{x} - B(\bar{u} + \hat{d}_{k|k})] \} \end{aligned} \quad (3.11)$$

sujeito a

$$u_{min} \leq \bar{u} \leq u_{max} \quad (3.12)$$

no qual η é um número positivo elevado. A penalidade elevada η é usada no segundo termo de (3.11) para garantir que (\bar{x}_k, \bar{u}_k) denote regime permanente, i.e., tal que $\bar{x}_k = A\bar{x}_k + B\bar{u}_k + B\hat{d}_{k|k}$ seja válida, sempre que o regime permanente existir [2]. É importante ressaltar que, se (\bar{x}_k, \bar{u}_k) , solução da equação (3.10), satisfizer $u_{min} \leq \bar{u}_k \leq u_{max}$, o programa quadrático expresso em (3.11) retorna o mesmo valor da equação (3.10), pois (3.11) é a solução em termos de mínimos quadrados restritos do sistema linear (3.10).

3.6 Otimização Dinâmica

Esta etapa envolve a construção do modelo e determinação do método de solução do problema de otimização. No entanto, para o problema proposto (3.1) podemos ter casos no qual o set-point é não-viável, devido ao alvo calculado na etapa anterior. Portanto o problema de otimização dinâmica será dividido em Set-point Viável e Set-Point Inviável.

3.6.1 Set-Point Viável

Dadas as estimativas atuais do estado e do distúrbio $\hat{x}_{k|k}$ e $\hat{d}_{k|k}$, respectivamente, e os alvos de regime permanente atuais (\bar{x}_k, \bar{u}_k) para o caso em que o set-point é viável, i.e., $C\bar{x}_k = \bar{y}$, a entrada de controle é calculada por meio do critério de desempenho com restrição:

$$\min_{\{v_j\}_{j=0}^{N-1}} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} w_j^T Q w_j + s(v_j - v_{j-1})^2 \right\} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_N \\ v_{N-1} \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} w_N \\ v_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.13a)$$

sujeito a:

$$w_0 = \hat{x}_{k+m|k} - \bar{x}_k = \left[A^m \hat{x}_{k|k} + \sum_{i=1}^m A^{i-1} B(u_{k-i} + \hat{d}_{k|k}) \right] - \bar{x}_k \quad (3.13b)$$

$$v_{-1} = u_{k-1} - \bar{u}_k \quad (3.13c)$$

$$w_{j+1} = Aw_j + Bv_j \quad (3.13d)$$

$$u_{min} - \bar{u}_k \leq v_j \leq u_{max} - \bar{u}_k \quad (3.13e)$$

sendo N um inteiro positivo, s um escalar positivo, e $Q = CC^\top$. Note que (3.13b) representa o desvio no estado, i.e., a diferença entre o estado estimado com horizonte m de previsão $\hat{x}_{k+m|k}$ e o estado alvo \bar{x}_k ; já (3.13c) representa o desvio no controle, i.e., a diferença entre a entrada de controle no passo anterior u_{k-1} e o sinal de controle alvo \bar{u}_k . A matriz $P \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ é a solução da equação discreta de Riccati:

$$P = \tilde{Q} + \tilde{A}^\top P \tilde{A} - \tilde{A}^\top P \tilde{B} (\tilde{B}^\top P \tilde{B} + s)^{-1} \tilde{B} P \tilde{A} \quad (3.14)$$

sendo

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}; \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Para o instante k tem-se as estimativas de $\hat{x}_{k|k}$ e $\hat{d}_{k|k}$ e os alvos restritos \bar{x}_k e \bar{u}_k . Calculando-se os desvios de estado e controle e aplicando-os ao sistema linear $w_{j+1} = Aw_j + Bv_j$ com a restrição $u_{min} - \bar{u}_k \leq v_j \leq u_{max} - \bar{u}_k$, tem-se um MPC para um sistema LQR com horizonte N de controle, e m de previsão.

Note que reescrevendo (3.13b) para o passo seguinte e aplicando ao sistema (3.1) e (3.10):

$$\begin{aligned} w_1 &= \hat{x}_{k+1+m|k+1} - \bar{x}_{k+1} \\ &= A\hat{x}_{k+m|k+1} + Bu_{k+1+m} + B\hat{d}_{k+1|k} - \left(A\bar{x}_{k+1} + B\bar{u}_{k+1} + B\hat{d}_{k+1|k} \right) \\ &= A(\hat{x}_{k+m|k+1} - \bar{x}_{k+1}) + B(u_{k+1-m} - \bar{u}_{k+1}) \\ &= Aw_j + Bv_j \end{aligned} \quad (3.16)$$

obtém-se (3.13d).

Seja $v := (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})$ um vetor coluna com N elementos. É possível escrever a equação (3.13a) como um problema quadrático convexo. Considere o caso $N = 4$, portanto $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$, reescrevendo (3.13a):

$$\begin{aligned}
& \min_{\{v_j\}_{j=0}^3} \frac{1}{2} \{w_0^\top Q w_0 + (Aw_0 + Bv_0)^\top Q (Aw_0 + Bv_0) \\
& \quad + (A^2 w_0 + ABv_0 + Bv_1)^\top Q (A^2 w_0 + ABv_0 + Bv_1) \\
& \quad + (A^3 w_0 + A^2 Bv_0 + ABv_1 + Bv_2)^\top Q (A^3 w_0 + A^2 Bv_0 + ABv_1 + Bv_2) \\
& \quad + s(v_0 - v_{-1})^2 + s(v_1 - v_0)^2 + s(v_2 - v_1)^2 + s(v_3 - v_2)^2\} \\
& \quad + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_4 \\ v_3 \end{bmatrix}^\top P \begin{bmatrix} w_4 \\ v_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
w_4 &= Aw_3 + Bv_3 \\
&= A(Aw_2 + Bv_2) + Bv_3 \\
&= A^2(Aw_1 + Bv_1) + ABv_2 + Bv_3 \\
&= A^3(Aw_0 + Bv_0) + A^2 Bv_1 + ABv_2 + Bv_3 \\
&= A^4 w_0 + A^3 Bv_0 + A^2 Bv_1 + ABv_2 + Bv_3
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Portanto, para o caso geral N o problema quadrático convexo pode ser escrito como:

$$\min_v \frac{1}{2} v^\top H v + v^\top \tilde{c} \tag{3.19a}$$

sujeito a:

$$\mathbf{1}(u_{min} - \bar{u}_k) \leq v \leq \mathbf{1}(u_{max} - \bar{u}_k) \tag{3.19b}$$

sendo $\mathbf{1}$ um vetor coluna de dimensão N com todos elementos iguais a 1 e as matrizes H e c definidas como:

$$H = \mathcal{B}^\top \mathcal{Q} \mathcal{B} + \mathcal{D}^\top \mathcal{R} \mathcal{D}$$

$$\tilde{c} = \mathcal{B}^\top \mathcal{L} \mathcal{A} w_0 + \mathcal{D}^\top \mathcal{R} \mathcal{L} v_{-1} \quad (3.20)$$

sendo

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \vdots & B \\ 0 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} Q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & Q & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

com as seguintes dimensões, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{(N \times n+1) \times n}$, $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{(N \times n+1) \times N}$, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{(n \times N+1) \times (N \times n+1)}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ e $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{N \times N}$.

Seja $v^* := (v_0^*, v_1^*, \dots, v_{N-1}^*)$ a solução ótima de (3.19a). Então, a entrada de controle ótima atual é definida utilizando-se uma implementação de horizonte recuado, i.e.,

$$u_k = \bar{u}_k + v_0^* \quad (3.24)$$

Além disso, a lei de controle irrestrita associada à função custo é:

$$v_j = K \begin{bmatrix} w_j \\ v_{j-1} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

sendo

$$K = -(s + \tilde{B}^T P \tilde{B})^{-1} \tilde{B}^T P \tilde{A} + \begin{bmatrix} 0_{1 \times n} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

3.6.2 Set-Point Inviável

Quando o set-point não é viável, isto é, quando os alvos de regime permanente possíveis são tais que:

$$\bar{y}_k = C\bar{x}_k \neq \bar{y} \quad (3.27)$$

o problema de otimização descrito em (3.13a) necessita ser modificado, uma vez que a entrada de controle ótima levaria a variável controlada ao set-point viável \bar{y}_k tão rápido quanto possível. De acordo com [2] o set-point pode se tornar inviável quando um distúrbio de grande magnitude entra no sistema e as restrições na entrada são tais que a entrada satura assintoticamente sem rejeitar completamente o distúrbio, gerando assim offset. É claro que, se o distúrbio continuar afetando o sistema, um offset em regime permanente se torna inevitável, no entanto mesmo nesses casos é desejável manter a variável controlada o mais próximo possível do valor desejado \bar{y} tanto tempo quanto possível. Esse objetivo pode ser atingido modificando-se o problema quadrático (3.13a) com uma penalidade linear, conforme mostrado abaixo:

$$\min_{\{v_j\}_{j=0}^{N-1}} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} w_j^T (Q w_j + 2q) + s(v_j - v_{j-1})^2 \right\} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_N \\ v_{N-1} \end{bmatrix}^T \left(P \begin{bmatrix} w_N \\ v_{N-1} \end{bmatrix} + 2p \right) \quad (3.28)$$

sujeito a (3.13b)-(3.13e). Sendo P calculado por (3.14) e

$$\begin{aligned}
q &= C^\top(\bar{y}_k - \bar{y}) \\
p &= (I - (\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K})^\top)^{-1} \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Note que se $\bar{y}_k = \bar{y}$, i.e., o set-point for viável, obtém-se a mesma formulação de (3.13a).

De forma similar ao caso anterior, seja $v := (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})$ um vetor coluna com N elementos. É possível reescrever (3.28) como um problema quadrático convexo, no qual H é o mesmo de (3.20), ao passo que \tilde{c} é dado por:

$$\tilde{c} = \mathcal{B}^\top \mathcal{Q} \mathcal{A} w_0 + \mathcal{B}^\top \mathcal{P} + \mathcal{D}^\top \mathcal{R} \mathcal{Q} v_{-1} \tag{3.30}$$

sendo

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} q^\top & \dots & q^\top & p^\top \end{bmatrix}^\top \tag{3.31}$$

Seja $v^* := (v_0^*, v_1^*, \dots, v_{N-1}^*)$ a solução ótima de (3.19a) com \tilde{c} dado por (3.30). Portanto, a entrada de controle continua definida pela equação (3.24).

É importante ressaltar que, diferentemente do PID, o controlador proposto não integra o erro de rastreamento, i.e., $\bar{y} - y_k$. Por meio das equações (3.5) e (3.9), pode-se escrever:

$$\hat{d}_{k+1|k} = \hat{d}_{k|k-1} + L_d(y_k - C\hat{x}_{k|k-1})$$

da qual observa-se que há integração do erro de estimação $y_k - C\hat{x}_{k|k-1}$, no entanto, esta abordagem não requer nenhuma estratégia de anti-windup quando a entrada satura (3.3).

Capítulo 4

Implementação Eficiente do MPC-P

Conforme apresentado no capítulo 3, os módulos de cálculo de alvo restrito e de otimização dinâmica requerem a solução de um programa quadrático a cada período de amostragem. Para que o MPC-P possa ser aplicável a hardware e linguagem de programação simples, será desenvolvido neste capítulo um método eficiente para solução dos QPs. Uma abordagem utilizando programação quadrática multiparamétrica para otimização off-line foi desenvolvida em [23] e [16]. Uma alternativa mais simples, proposta por [2], e especialmente adaptada para o caso SISO com restrição somente na entrada será abordada neste capítulo.

4.1 Cálculo do Alvo Restrito

O primeiro passo é calcular a solução para o problema sem restrição (3.10):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \bar{x}_k^* \\ \bar{u}_k^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B\hat{d}_{k|k} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B & 0_{n \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{d}_{k|k} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{d}_{k|k} \\ \bar{y} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

sendo $M_{11}, M_{22} \in \mathbb{R}^n$, $M_{12}, M_{21} \in \mathbb{R}$ calculados off-line. Se $u_{min} \leq u \leq u_{max}$, então $\bar{u}_k = \bar{u}^*$ and $\bar{x}_k = \bar{x}^*$, caso contrário

$$\bar{u}_k = sat(\bar{u}_k) = \begin{cases} u_{min} & \text{if } \bar{u}^* \leq u_{min} \\ u_{max} & \text{if } \bar{u}^* \geq u_{max} \end{cases} \tag{4.2}$$

e \bar{x}_k é calculado por meio do problema quadrático irrestrito, que é na verdade um problema de minimização de objetivo de soma ponderada:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_k = arg \min_{\bar{x}} \frac{1}{2} \{ & (C\bar{x} - \bar{y})^2 + \eta[(I - A)\bar{x} \\ & - B(\bar{u} + \hat{d}_{k|k})^\top][(I - A)\bar{x} - B(\bar{u} + \hat{d}_{k|k})] \}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

cuja solução é dada por:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_k = \overbrace{[C^\top C + \eta(I - A)^\top(I - A)]^{-1}}^W & [C^\top \bar{y} + \overbrace{\eta(I - A)^\top B}^V (\bar{u}_k \\ & + \hat{d}_{k|k})] = G_1 \hat{d}_{k|k} + G_2 \bar{y} + G_3 \bar{u}_k
\end{aligned} \tag{4.4}$$

no qual os vetores $G_1 \in \mathbb{R}^n$, $G_2 \in \mathbb{R}^n$ and $G_3 \in \mathbb{R}^n$, definidos como $G_1 = WC^\top$, $G_2 = WV$ e $G_3 = G_1$, computados off-line. O algoritmo descrito abaixo implementa o cálculo do alvo restrito.

Algoritmo 2 Cálculo Alvo Restrito

- 1: $\hat{d}_{k|k}, \bar{y}$ ▷ Dados de entrada
 - 2: $\bar{u}^* \leftarrow M_{21}\hat{d}_{k|k} + M_{22}\bar{y}$ ▷ Calcula a entrada alvo irrestrita
 - 3: **se** $u_{min} \leq u \leq u_{max}$ **então** ▷ Verifica se a entrada atende às restrições
 - 4: $\bar{u}_k \leftarrow \bar{u}^*$
 - 5: $\bar{x}_k \leftarrow M_{11}\hat{d}_{k|k} + M_{12}\bar{y}$ ▷ Calcula o estado alvo irrestrito
 - 6: **senão**
 - 7: $\bar{u}_k \leftarrow sat(\bar{u}^*)$ ▷ Satura a entrada
 - 8: $\bar{x}_k \leftarrow G_1\hat{d}_{k|k} + G_2\bar{y} + G_3\bar{u}_k$ ▷ Calcula o estado a partir da minimização de somas ponderadas
 - 9: **fim se**
-

4.2 Problema de Otimização Dinâmico com Restrição

Como mostrado no capítulo 3, o problema de otimização quadrática com restrição pode ser escrito como um problema de programação quadrática (3.19a), o qual necessita ser resolvido a cada período de amostragem. É importante notar que, na equação (3.19a), a matriz H é independente do tempo k ; no entanto, o vetor \tilde{c} muda a cada período de amostragem k por causa de w_0 e v_{-1} . Além disso, os limites de v são dependentes de k , porque \bar{u}_k pode mudar. Este problema pode ser resolvido definindo um novo vetor:

$$u = v + \mathbf{1}\bar{u}_k \tag{4.5}$$

permitindo reescrever (3.19a) como se segue:

$$\min_u \frac{1}{2} u^\top H u + u^\top c \tag{4.6}$$

sujeito a:

$$\mathbf{1}u_{min} \leq u \leq \mathbf{1}u_{max} \tag{4.7}$$

sendo:

$$c = \tilde{c} - H\bar{u}_k \tag{4.8}$$

Note que em (4.6) somente c depende do período de amostragem. Além disso,

está claro a partir das equações (3.24) e (4.5) que a entrada de controle u_k é definida como o primeiro elemento da solução ótima da equação (4.7). O método para solução do QP com restrição na entrada consiste em dois passos:

1. A geração off-line de uma tabela utilizando H , u_{min} e u_{max} : esse passo envolve a solução de equações lineares, i.e., inversão de matrizes, multiplicações e adições.
2. Realizar o escaneamento on-line da tabela, gerada no passo anterior, dado o valor de c no instante k : esse passo envolve somente multiplicações, adições e checagem de condicionais. Estas mesmas operações são requeridas no controle PID.

O problema descrito em (3.19a) pode ser reescrito em notação padrão de otimização:

$$\min_u \frac{1}{2} u^T H u + u^T c \quad (4.9a)$$

sujeito a:

$$D u \geq d \quad (4.9b)$$

sendo:

$$D = \begin{bmatrix} -I_N \\ I_N \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_N u_{max} \\ \mathbf{1}_N u_{min} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Uma vez que H é positiva definida, o programa quadrático tem uma única solução u^* , a qual deve satisfazer as condições de KKT a seguir:

$$H u^* + c - A_a^T \lambda^* = 0 \quad (4.11a)$$

$$A_r u^* \geq b_r \quad (4.11b)$$

$$\lambda^* \geq 0 \quad (4.11c)$$

$$A_a u^* = b_a \quad (4.11d)$$

na qual $\lambda^* \in \mathbb{R}^l$; $A_a \in \mathbb{R}^{l \times N}$ e $b_a \in \mathbb{R}^l$ são formadas pelo empilhamento das linhas de D e d correspondentes às restrições ativas no ponto de ótimo, e $A_r \in \mathbb{R}^{(2N-l) \times N}$ e $b_r \in \mathbb{R}^{2N-l}$ são formadas pelo empilhamento das linhas remanescentes de D e d , respectivamente. A propriedade a seguir é válida:

$$l \leq N \quad \text{rank}(A_a) = l \quad (4.12)$$

Além disso, se $l \geq 0$, então

$$A_a A_a^\top = I_l \quad (4.13)$$

4.2.1 Construção da Tabela

Cada componente de u pode estar no limite inferior, no limite superior, ou em algum lugar entre esses limites. Portanto, pode-se construir todas as combinações de possibilidades de restrições ativas e inativas, cujo número é igual a 3^N . Para cada $i = 1, 2, \dots, 3^N$ serão denotados como A_i and b_i as linhas de D e d correspondentes às restrições ativas da i -ésima solução possível. A tabela é gerada off-line conforme algoritmo 2.

Será denotado por u_i a solução do seguinte programa quadrático com restrição de igualdade:

$$\min_u \frac{1}{2} u^\top H u + u^\top c \quad (4.14a)$$

$$A_i u = b_i \quad (4.14b)$$

cuja solução é dada pelo seguinte sistema linear:

$$\begin{bmatrix} H & -A_i^\top \\ A_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b_i \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

A solução u_i tem a seguinte forma:

$$u_i = K_i c + B_i \quad (4.16)$$

sendo $K_i \in \mathbb{R}^{N \times N}$ e $B_i \in \mathbb{R}^N$ calculados off-line do correspondente sistema KKT utilizando o método do espaço nulo, a ser detalhado na próxima seção.

4.2.2 Método do Espaço Nulo

A seguir será descrito como obter as matrizes K_i e B_i por meio do método do espaço nulo, (ver mais detalhes em [24] e [25]). Dado o i -ésimo conjunto de matrizes e vetores (A_i, b_i) , constrói-se o vetor \bar{u}_i da seguinte maneira:

$$A_i \bar{u}_i = b_i \quad (4.17)$$

Uma vez que a propriedade (4.13) é válida, tal vetor pode ser reescrito como:

$$\bar{u}_i = A_i^\top b_i \quad (4.18)$$

Portanto, pode-se expressar a solução de (4.14), u_i , como $u_i = \bar{u}_i + p_i$ e reescrever o sistema linear (4.15) como se segue:

$$\begin{bmatrix} H & -A_i^\top \\ A_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ \lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(H\bar{u}_i + c) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Note que o segundo bloco linha de (4.19) implica em $A_i p_i = 0$, i.e., p_i pertence ao espaço nulo de A_i . Seja $Z_i \in \mathbb{R}^{N \times (N-l)}$ a matriz cujas colunas formam uma base para o espaço nulo de A_i . Então pode-se escrever p_i como:

$$p_i = Z_i r_i \quad (4.20)$$

sendo $r_i \in \mathbb{R}^{N-l}$ a ser calculado. Da primeira bloco linha de (4.19) pode-se escrever:

$$HZ_i r_i - A_i^T \lambda_i = -(H\bar{u}_i + c) \quad (4.21)$$

multiplicando pela esquerda por Z_i^T , obtém-se:

$$Z_i^T H Z_i r_i = -Z_i^T (H\bar{u}_i + c), \quad (4.22)$$

que é sistema linear cuja solução r_i é dada por:

$$r_i = -(Z_i^T H Z_i)^{-1} Z_i^T (H\bar{u}_i + c) \quad (4.23)$$

Portanto, a solução u_i pode ser escrita como:

$$u_i = \bar{u}_i + p_i = \bar{u}_i + Z_i r_i = \bar{u}_i - Z_i (Z_i^T H Z_i)^{-1} Z_i^T (H\bar{u}_i + c) \quad (4.24)$$

Finalmente a forma de (4.16) é obtida:

$$K_i = -Z_i (Z_i^T H Z_i)^{-1} Z_i^T \quad B_i = \bar{u}_i - Z_i (Z_i^T H Z_i)^{-1} Z_i^T H \bar{u}_i \quad (4.25)$$

O pseudo-código para obtenção da tabela com as combinações das restrições ativas para solução do problema quadrático com restrição na entrada é mostrado a seguir:

Algoritmo 3 Construção da Tabela para Solução do QP com restrição

1: H, N, u_{max}, u_{min} ▷ Dados de entrada
2: $D := \begin{bmatrix} -I_N \\ I_N \end{bmatrix}; \quad d := \begin{bmatrix} -\mathbf{1}_N u_{max} \\ \mathbf{1}_N u_{min} \end{bmatrix}$
3: $r \leftarrow 1$
4: **para** $i=1:N$ **faça** ▷ Gera combinações restrições ativas limite superior
5: $A_i\{r\} \leftarrow D(i, :); \quad b_i\{r\} \leftarrow d(i); \quad r \leftarrow r + 1$
6: **para** $k=i+1:N$ **faça**
7: $A_i\{r\} \leftarrow [D(i, :); D(k, :)]; \quad b_i\{r\} \leftarrow [d(i); d(k)]; \quad r \leftarrow r + 1$
8: **para** $k=i+1:N$ **faça**
9: $A_i\{r\} \leftarrow [D(i, :); D(k, :); D(m, :)]; \quad b_i\{r\} \leftarrow [d(i); d(k); d(m)]$
10: $r \leftarrow r + 1$
11: **para** $k=i+1:N$ **faça**
12: $A_i\{r\} \leftarrow [D(i, :); D(k, :); D(m, :); D(n, :)]$
13: $b_i\{r\} \leftarrow [d(i); d(k); d(n); d(m)]; \quad r \leftarrow r + 1$
14: **fim para**
15: **fim para**
16: **fim para**
17: **fim para**
18: **para** $j=i+1:2N$ **faça** ▷ Gera combinações restrições ativas limite inferior
19: $A_i\{r\} \leftarrow D(j, :); \quad b_i\{r\} \leftarrow d(j); \quad r \leftarrow r + 1$
20: **para** $k=j+1:2N$ **faça**
21: $A_i\{r\} \leftarrow [D(j, :); D(k, :)]; \quad b_i\{r\} \leftarrow [d(j); d(k)]; \quad r \leftarrow r + 1$
22: **para** $m=k+1:2N$ **faça**
23: $A_i\{r\} \leftarrow [D(j, :); D(k, :); D(m, :)]; \quad b_i\{r\} \leftarrow [d(j); d(k); d(m)]$
24: $r \leftarrow r + 1$
25: **para** $n=m+1:2N$ **faça**
26: $A_i\{r\} \leftarrow [D(j, :); D(k, :); D(m, :); D(n, :)]$
27: $b_i\{r\} \leftarrow [d(j); d(k); d(n); d(m)]; \quad r \leftarrow r + 1$
28: **fim para**
29: **fim para**
30: **fim para**
31: **fim para**
32: $l \leftarrow (r - 1); \quad n \leftarrow l/2$
33: **para** $k=1:n$ **faça** ▷ Gera combinações do limite superior com inferior
34: **para** $t=n+1:l$ **faça**
35: **se** $(rank([A_i\{k\}; A_i\{t\}]) \leq rank(A_{ik}) + rank(A_{it}))$ **então**
36: **senão**
37: $A_i\{r\} \leftarrow [A_i\{k\}; A_i\{t\}]; \quad b_i\{r\} \leftarrow [b_i\{k\}; b_i\{t\}]$
38: $r \leftarrow r + 1$
39: **fim se**
40: **fim para**
41: **fim para**
42: **para** $r=1:3^N$ **faça** ▷ Computa K_i e B_i
43: $\bar{u}_i\{r\} \leftarrow A_i\{r\}^\top b_i\{r\}; \quad Z_i\{r\} \leftarrow \text{null}(A_i\{r\})$
44: $K_i\{r\} \leftarrow -Z_i\{r\}(Z_i\{r\}^\top H Z_i\{r\})Z_i\{r\}^\top$
45: $B_i\{r\} \leftarrow \bar{u}_i\{r\} - Z_i\{r\}(Z_i\{r\}^\top H Z_i\{r\})Z_i\{r\}^\top H \bar{u}_i\{r\}$
46: **fim para**

Supondo que a tabela (Algoritmo 3) contendo K_i , B_i e A_i para $i = 1, 2, \dots, 3^N$ é conhecida, pode-se calcular u^* , a solução ótima por meio da consulta à tabela de acordo com o algoritmo 4, mostrado abaixo:

Algoritmo 4 Otimização Dinâmica Restrita

```

1:  $(K_i, B_i, A_i, c, i)$  ▷ Dados de Entrada
2: para  $i=1:3^N$  faça
3:    $u_i \leftarrow K_i c + B_i$  ▷ Computa a i-ésima solução
4:   se  $Du_i \geq d$  então ▷ Calcula os multiplicadores de Lagrange para restrições
   ativas
5:      $\lambda_i = A_i(Hu_i + c)$ 
6:     se  $\text{all } \lambda \geq 0$  então ▷ Verifica se todos multiplicadores de Lagrange são
   não-negativos
7:        $u_{k+1}^* \leftarrow u_i(1)$ 
8:     senão
9:        $i \leftarrow i + 1$ 
10:    fim se
11:  senão
12:     $i \leftarrow i + 1$ 
13:  fim se
14: fim para

```

Capítulo 5

Simulações e Discussões

Este capítulo apresentará os resultados obtidos das simulações de diversos sistemas SISO para o MPC-P com restrição na entrada e para o PID anti-windup, descritos nos capítulos 4 e 5, respectivamente. Para tanto, esse capítulo se dividirá em três partes principais. Na primeira parte será descrita a metodologia das simulações e comparação dos resultados, em seguida a metodologia de obtenção dos parâmetros de sintonia do MPC-P através do Algoritmo Genético por meio do Global Optimization Toolbox do MATLAB[®].

Na segunda parte serão apresentados os resultados para cada um dos sistemas SISO analisados: sistema de Tanques Duplos, planta de primeira ordem com tempo morto, integrador com atraso e um sistema de segunda ordem sobre-amortecido. Apresentar-se-á a representação gráfica de todas as variáveis relevantes para o entendimento e avaliação dos mesmos.

Por fim, será feita a análise dos resultados, de forma a estabelecer as vantagens e desvantagens do MPC-P frente ao PID, sintonizados através dos métodos descritos em [9] e [10], referenciados neste trabalho como PID-Skog e PID-CC-Ast, respectivamente.

O Toolbox de Algoritmo Genético será utilizado neste trabalho para minimização do critério de desempenho Φ , a ser definido na seção 5.1, e os detalhes da definição do problema de AG encontram-se na seção 5.2.

5.1 Metodologia de Simulação e Comparação dos Resultados

As simulações serão realizadas conforme parâmetros globais dispostos na tabela abaixo, os casos que utilizarem parâmetros diferentes terão devida indicação.

Parâmetro	Valor
T_s	0.25 seg
N	4
u	$0 \leq u \leq 1.5$
\bar{y}	1

Tabela 5.1: Parâmetros globais de simulação.

- O set-point \bar{y} muda de 0 para 1 em $t = 0$;
- No tempo $t = 25$ seg um distúrbio de magnitude $d = -0.25$ entra no sistema;
- Em $t = 50$ seg a magnitude do distúrbio aumenta para $d = -1$;
- Finalmente, em $t = 75$ seg a magnitude do distúrbio se torna $d = -25$ novamente;
- O ruído gaussiano w tem média nula e variância $\sigma^2 = 10^{-3}$.

Para fins de comparação com o controlador MPC-P, será utilizando um PID com a estratégia anti-windup. De acordo com [23] o método de anti-windup é o método mais popular para lidar com saturação. O PID utilizado é um do tipo série e é representado pela seguinte equação de recorrência, (ver mais detalhes em [26]):

$$u_k = u_{k-1} + K_c \left[\left(1 + \frac{T_s}{T_i} + \frac{T_d}{T_s} \right) e_k - \left(1 + 2\frac{T_d}{T_s} \right) e_{k-1} + \frac{T_d}{T_s} e_{k-2} \right] \quad (5.1)$$

O algoritmo para implementação do PID série com anti-windup é mostrado a seguir.

Algoritmo 5 PID com Anti-Windup

- 1: $(y_k, u_{k-1}, e_{-1}, e_{-2})$ ▷ Dados de Entrada no tempo k
 - 2: $e_k \leftarrow \bar{y}_k - y_k$ ▷ Calcula o erro de rastreamento
 - 3: $\delta u_k \leftarrow K_c(e_k - e_{k-1}) + \frac{K_c T_s}{T_i} e_k + \frac{K_c T_d}{T_s} (e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2})$ ▷ Calcula a entrada sem restrição
 - 4: $u_k \leftarrow u_{k-1} + \delta u_k$
 - 5: **se** $u_k \geq u_{min}$ **então** ▷ Checa saturação
 - 6: $u_k \leftarrow u_{min}$
 - 7: **senão**
 - 8: $u_k \leftarrow u_{max}$
 - 9: **fim se**
 - 10: $k \leftarrow k + 1$ ▷ Injeta u_k na planta e volta ao passo 1.
-

Para realizar uma comparação entre os controladores, faz-se necessário definir um critério de desempenho. O critério de desempenho escolhido é um custo quadrático que leva em consideração o erro de rastreamento (RE) bem como o movimento de entrada (ME):

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \overbrace{(y_k - \bar{y})^2}^{RE} + \overbrace{(u_k - u_{k-1})^2}^{ME} \quad (5.2)$$

5.2 Algoritmos Genéticos - Global Optimization Tool

O Toolbox de Algoritmo Genético (AG) integra o Global Optimization Toolbox do MATLAB, que é uma ferramenta útil para resolver problemas de otimização. O algoritmo genético é um método para resolver problemas de otimização baseado na seleção natural de indivíduos, o processo que impulsiona a evolução biológica. O algoritmo genético modifica repetidamente uma população de indivíduos. A cada passo, denominado época ou geração, o algoritmo genético seleciona os indivíduos aleatoriamente da população atual para serem pais de acordo com critérios de aptidão (fitness). Os pais selecionados geram os filhos que vão compor a próxima geração, novamente de acordo com a aptidão. Ao longo de sucessivas gerações, a

população “evolui” em direção a uma população de indivíduos com aptidão média alta. O indivíduo com a melhor aptidão é reportada como uma boa aproximação da solução ótima [27].

Para utilizar esta ferramenta de otimização, primeiro deve-se inserir as seguintes informações:

- **Função Objetivo** que se pretende minimizar. É um arquivo .m que gera as aptidões para os indivíduos.
- **Número de variáveis**, i.e., o comprimento do vector de entrada para a função objetivo.

A função objetivo utilizada neste trabalho foi o critério de desempenho Φ , definido em 5.1 e as variáveis foram a penalidade s e a correlação R_v , com limite inferior $[4, 0.001]$ e superior $[50, 10]$. A figura 5.1 mostra o painel de opções para o algoritmo genético.

A seguir são mostradas as configurações do problema de otimização utilizando algoritmos genéticos usados neste trabalho:

- PopulationType: 'doubleVector'
- Generations: 50
- StallGenLimit: 30
- TolFun: 1.0000e-003
- CreationFcn: @gacreationlinearfeasible
- CrossoverFcn: @crossoversinglepoint
- MutationFcn: [@mutationuniform]
- Display: 'off'

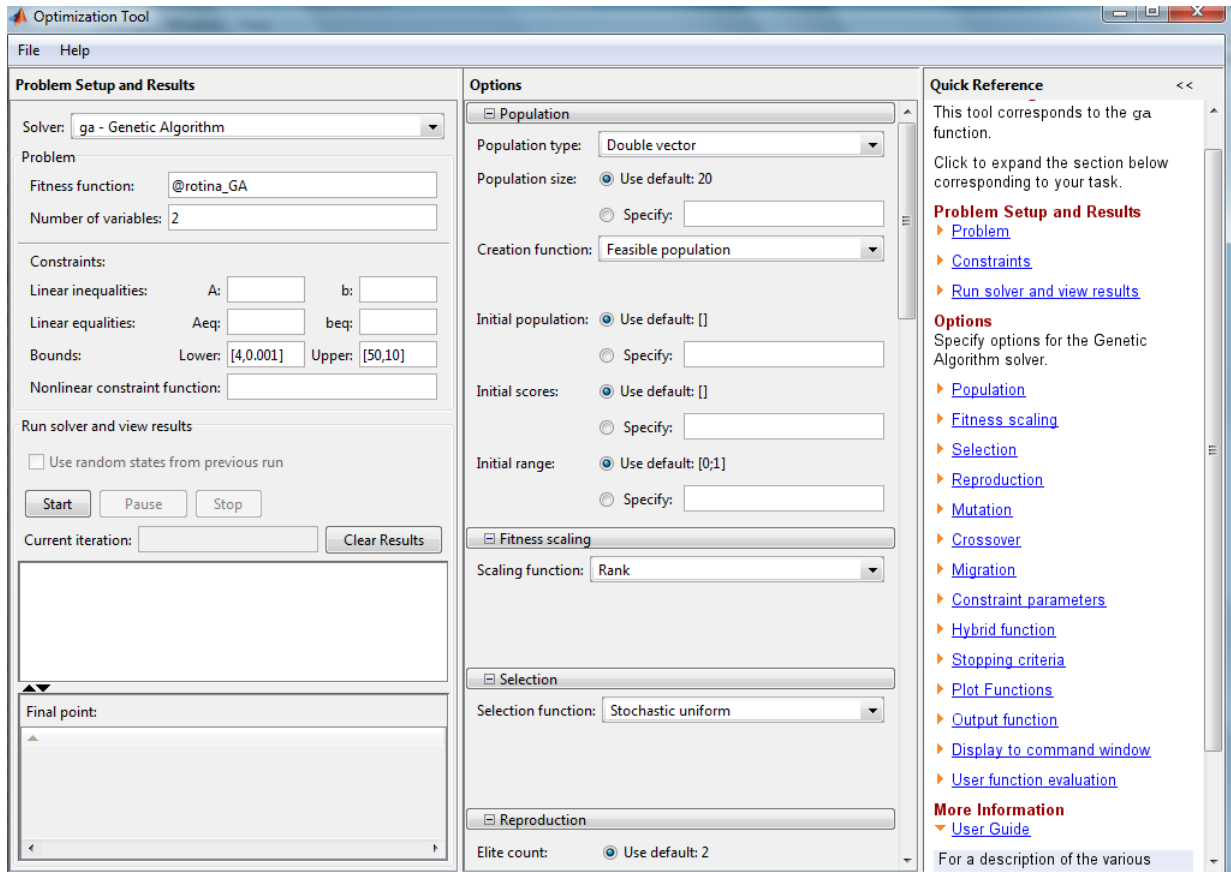


Figura 5.1: Tela de Interface Gráfica da Ferramenta Global Optimization Tool.

- PlotFcns: [@gaplotbestf]

O único arquivo .m desenvolvido foi a Função Objetivo, @rotina_AG, e as outras funções mencionadas anteriormente, iniciadas com o símbolo @ são padrões da ferramenta.

5.3 Tanques Duplos

O primeiro exemplo utilizado para validação do MPC-P é um sistema com tanques duplos ilustrado em 5.2, retirado de [18]. Esse processo é caracterizado por dois estados x_1 e x_2 , os quais representam o nível de fluido nos tanque superior e inferior, respectivamente. O sinal de entrada u é a tensão elétrica na bomba e a saída $y = x_2$ é o nível no tanque inferior.

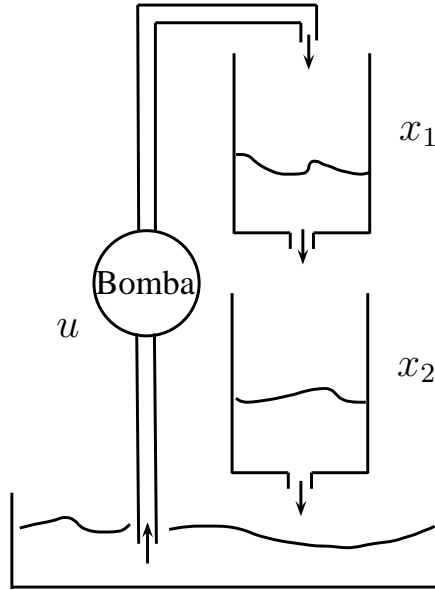


Figura 5.2: Visão esquemática do processo de tanques duplos.

O modelo do sistema de tanques duplos é representado pelo modelo no espaço de estados discreto a seguir:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.8825 & 0 \\ 0.1103 & 0.8825 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.235 \\ 0.01438 \end{bmatrix} u_k \quad (5.3)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k \quad (5.4)$$

5.3.1 Sintonia do MPC-P utilizando AG - Tanques Duplos

A figura 5.3 mostra a evolução do AG para a minimização do desempenho Φ para uma população com range $[4 : 50]$ para penalidade s , e $[0.001 : 10]$ para correlação R_v , enquanto a correlação q_x foi mantida fixo. Os parâmetros resultantes para a melhor desempenho são mostrados na tabela 5.2.

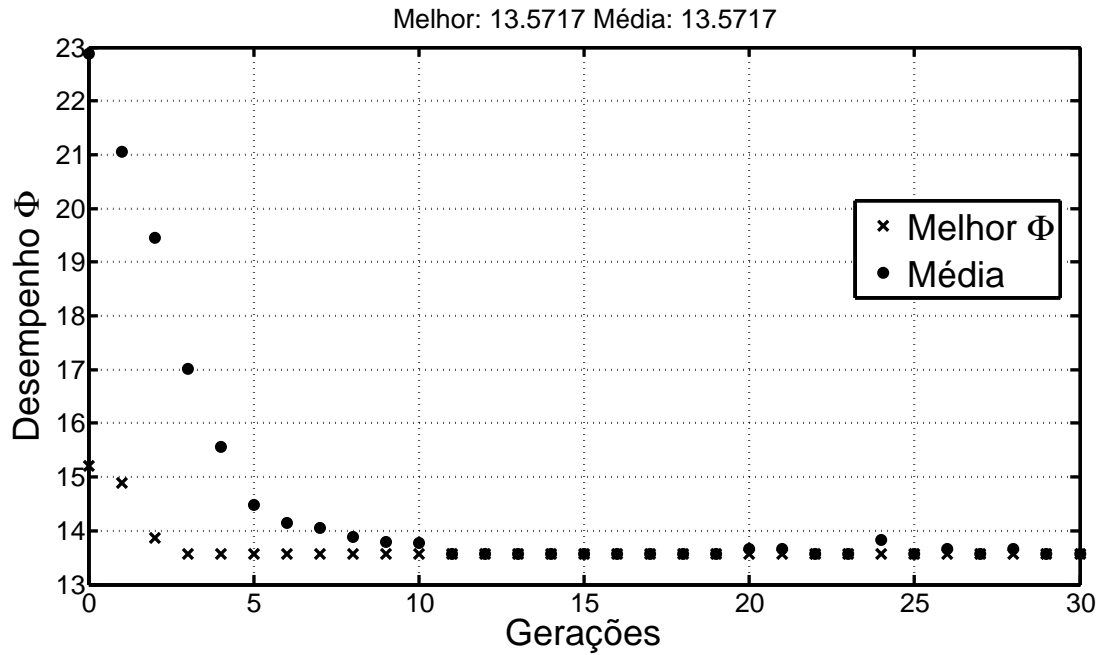


Figura 5.3: Evolução do Algoritmo Genético para otimização do critério de desempenho Φ para os parâmetros s e R_v do MPC.

Parâmetro	Valor
s	4
q_x	0.05
R_v	0.0443
Φ	13.5717

Tabela 5.2: Parâmetros obtidos para o controlador MPC-P para o sistema Tanques Duplos através do AG.

Uma comparação do desempenho do MPC-P utilizando os parâmetros de sintonia da tabela 5.2 para horizonte de controle $N = 2, 3$ e 4 para o sistema de tanques duplos é mostrado na figura 5.4

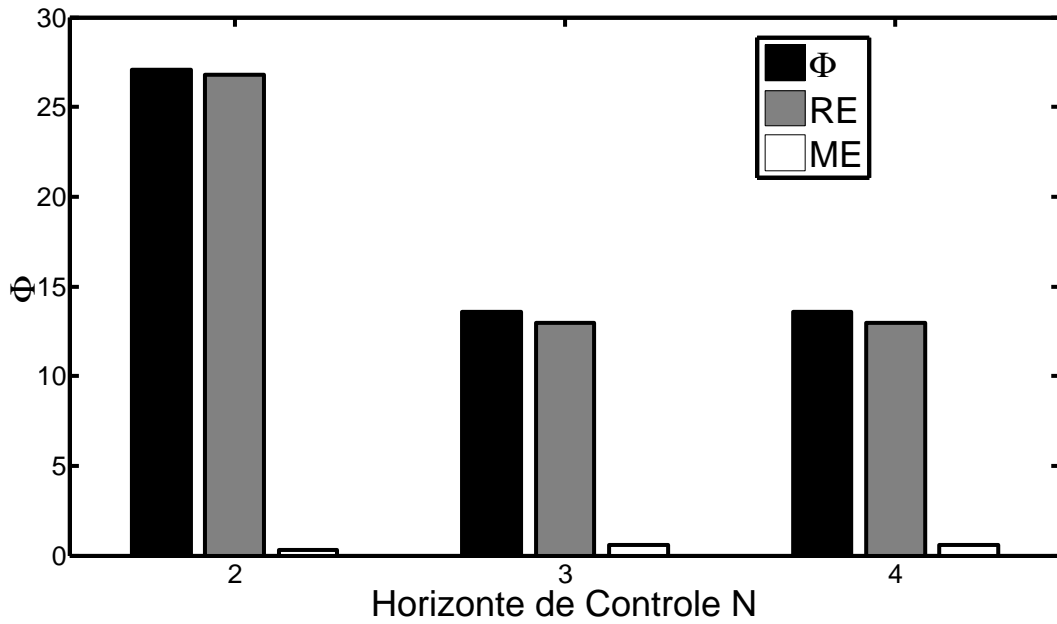


Figura 5.4: Desempenho do MPC-P para o sistema de Tanques de Duplos para diferentes Horizontes de controle.

Observe pela figura 5.4 que houve uma melhora considerável no desempenho do controlador com o aumento do horizonte de controle N de 2 para 3, de cerca de 45%. No entanto, aumentar o horizonte de controle de 3 para 4 não apresentou grande impacto no desempenho do sistema. Em termos práticos, o aumento de N acarreta aumento das matrizes do sistema conforme discutido no capítulo 3, portanto, para aplicações práticas, conforme discutido no capítulo A, $N = 3$ pode ser utilizado sem grandes prejuízos no desempenho do controlador. Para fins de simulação neste capítulo, $N = 4$ será utilizado, conforme tabela 5.1.

A figura 5.5 mostra o comportamento do critério de desempenho Φ com a variação da penalidade s mantendo-se q_x e R_v fixos.

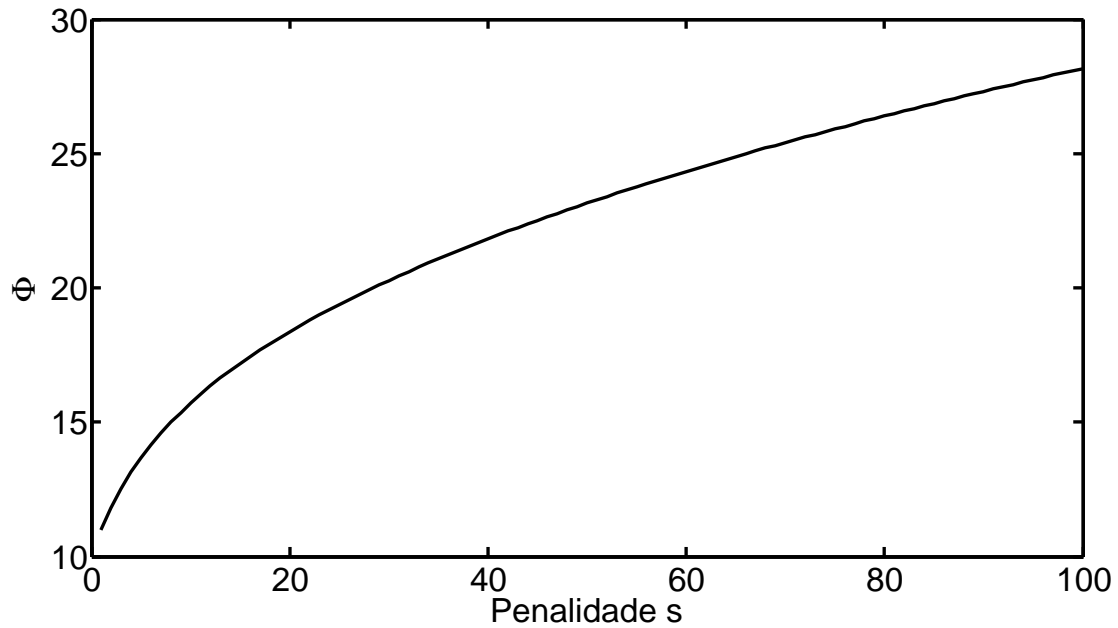
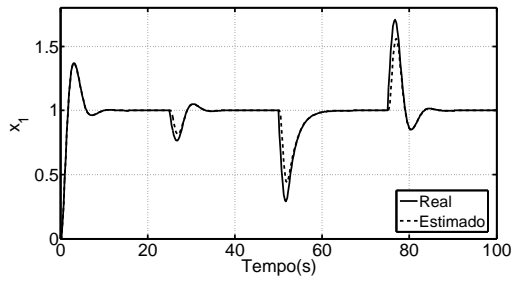
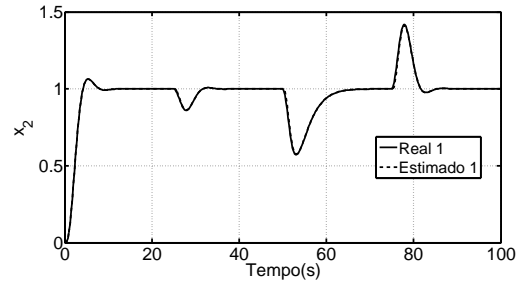


Figura 5.5: Comportamento do critério de desempenho do MPC-P para o sistema de Tanques para diferentes valores da penalidade s .

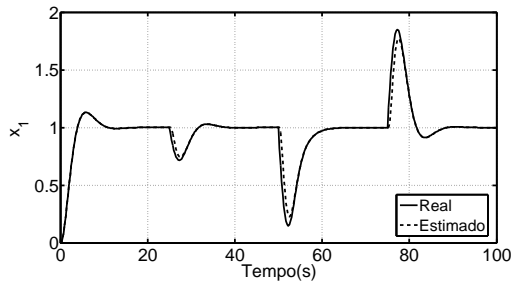
Pode-se observar pela figura 5.5 o efeito da penalidade s no controlador MPC-P, quanto menor o valor de s , mais “agressivo” o controlador, e menor o valor de Φ , portanto, melhor o desempenho do sistema controlado. Será analisado graficamente a influência da penalidade s no desempenho do controlador MPC-P. Serão simulados dois casos distintos, caso nominal, sem ruído na saída, no qual o MPC-P₁ tem penalidade $s = 4$ e MPC-P₂ utiliza penalidade $s = 60$, os valores das correlações q_x e R_v são iguais para ambos controladores e estão listados na tabela 5.2. Os resultados são mostrados na figura 5.6.



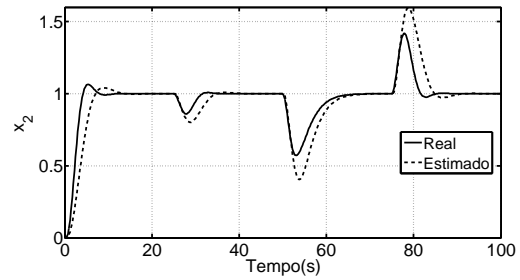
(a) Estado x_1 estimado pelo MPC-P₁.



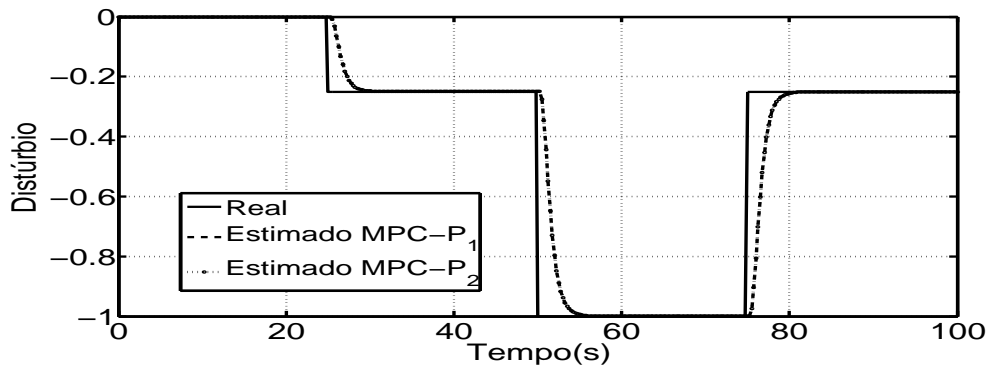
(b) Estado x_2 estimado pelo MPC-P₁.



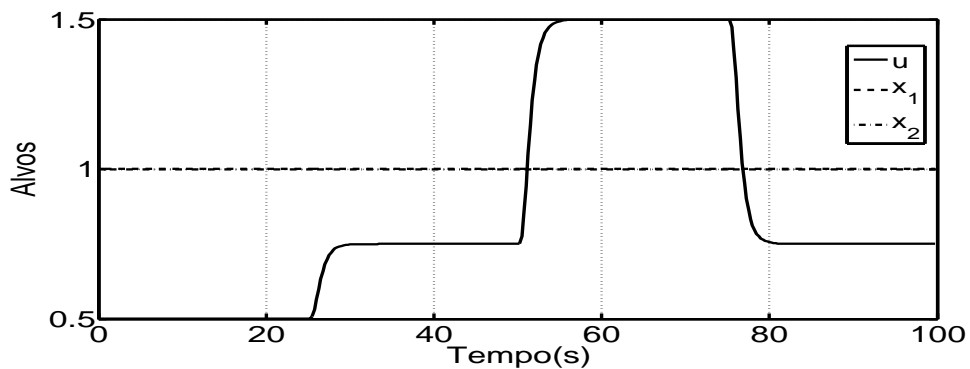
(c) Estado x_1 estimado pelo MPC-P₂.



(d) Estado x_2 estimado pelo MPC-P₂.

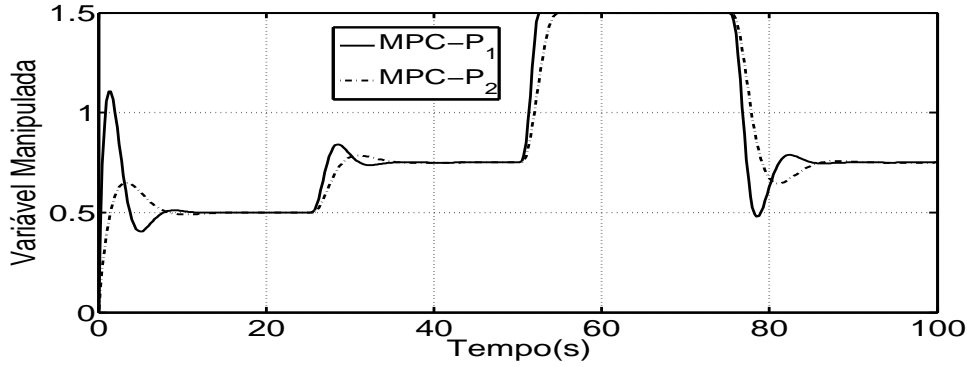


(e) Distúrbio d estimado pelo MPC-P₁ e MPC-P₂.

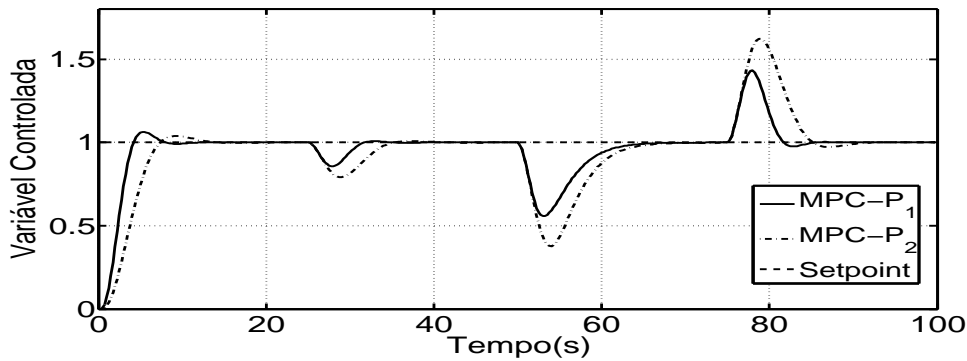


(f) Alvo \bar{u} e \bar{x} para MPC-P₁ e MPC-P₂.

Figura 5.6: (a)-(d) Estimação de estados e (e) distúrbio e (f) alvo restrito \bar{u} e \bar{x} para MPC-P₁ e MPC-P₂.



(a) Entrada de controle u^* .



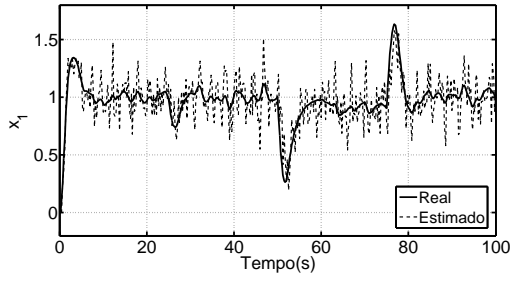
(b) Resposta do sistema controlado.

Figura 5.7: (a) Sinal de controle u^* e (b) Resposta do sistema controlado para MPC-P₁ e MPC-P₂.

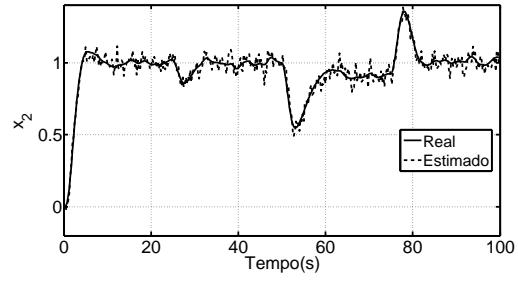
Para o caso sem ruído, pode-se observar pela figura 5.6(a)–5.6(d) que os estados x_1 e x_2 foram estimados corretamente, com transitórios nos momentos de aplicação do distúrbio d . A diferença no gráfico de estados deve-se à penalidade s , que levou o sistema controlado pelo MPC-P₁ a ficar mais “agressivo”, refletindo assim na trajetória do estado. A figura 5.6(e) mostra a estimação do distúrbio, os sinais estimados são iguais para os dois casos de sintonia do MPC-P, uma vez que não depende de s . Note pela figura 5.6(f) que no instante $t = 50$ seg, quando a magnitude do distúrbio aumentou para $d = -1$, o set-point ficou inviável, levando o alvo \bar{u} a saturar. Após a retirada do mesmo, no instante $t = 75$ seg, a entrada alvo \bar{u} voltou a variar. O mesmo pode ser observado na figura 5.7(a), para a entrada u^* . Pode ser visto pela figura 5.7(b) que o MPC-P foi capaz de rastrear a entrada com sucesso. Note que o MPC-P₁ é mais “agressivo” que o MPC-P₂, já que a penalidade utilizada foi menor. Os índices de desempenho obtidos foram $\Phi = 13.5715$ para MPC-

P_1 e $\Phi = 25.4730$ para MPC-P₂. Em ambos os casos o MPC-P respondeu de forma suave às mudanças no set-point e à perturbação na carga (distúrbio).

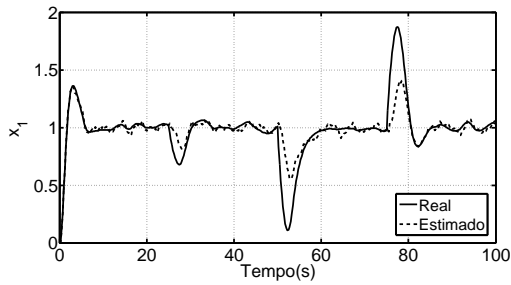
Será analisada agora a influência do parâmetro R_v no índice de desempenho do MPC-P. Para tanto, o sistema de tanques duplos será simulado com ruído gaussiano de média nula e variância $\sigma^2 = 10^{-3}$ na saída, i.e., no sensor. Os valores de sintonia para o MPC-P₁ serão: $s = 4$, $q_x = 0.05$ e $R_v = 0.01$ e para o MPC-P₂: $s = 4$, $q_x = 0.05$ e $R_v = 10$. Os resultados são mostrados à seguir:



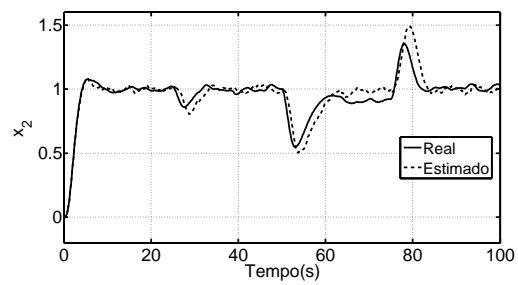
(a) Estado x_1 estimado pelo MPC-P₁.



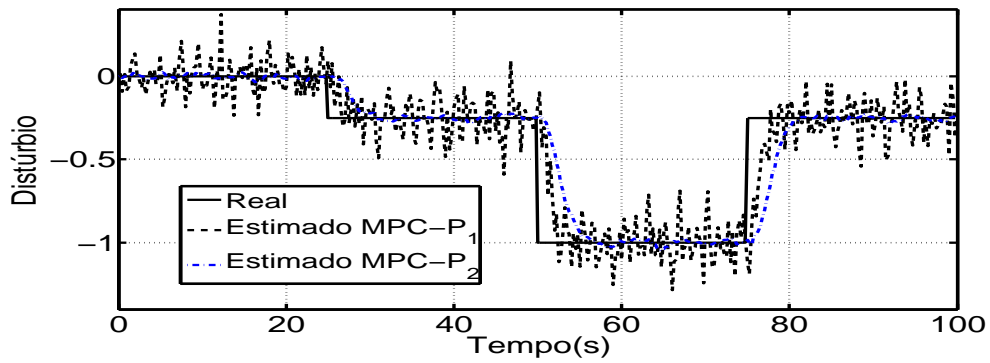
(b) Estado x_2 estimado pelo MPC-P₁.



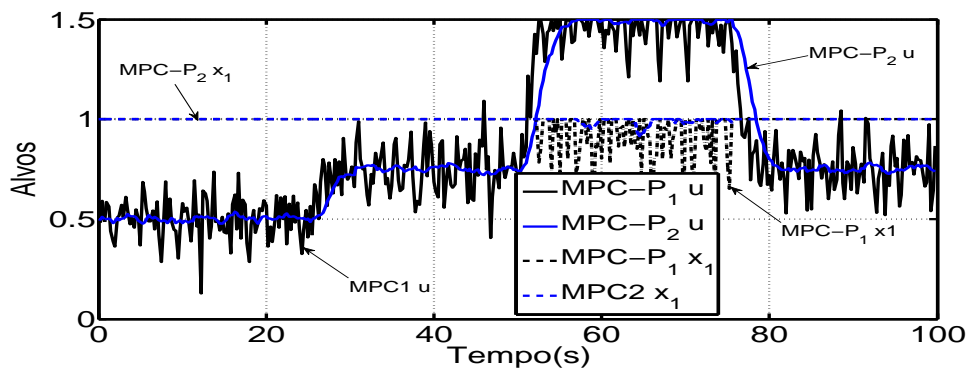
(c) Estado x_1 estimado pelo MPC-P₂.



(d) Estado x_2 estimado pelo MPC-P₂.

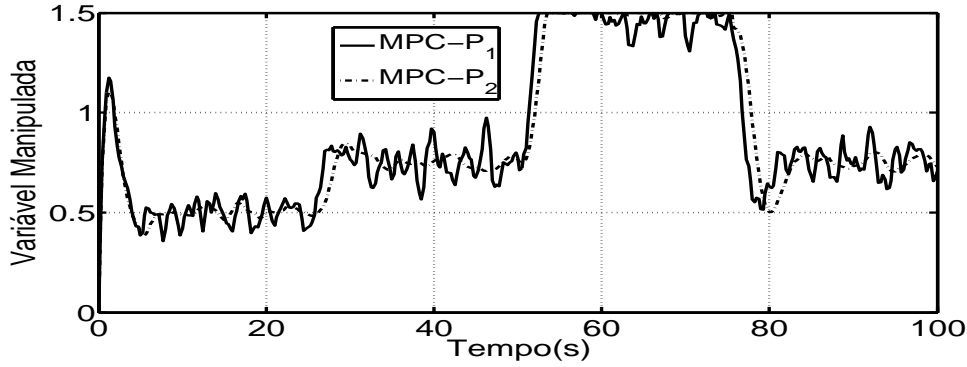


(e) Distúrbio d estimado pelo MPC-P₁ e MPC-P₂

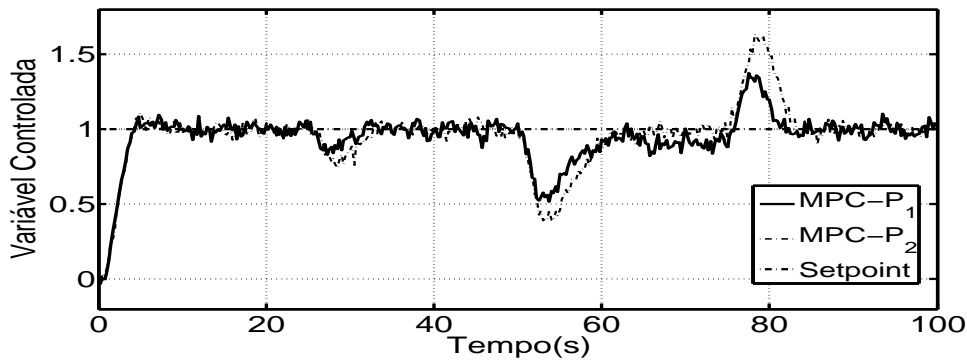


(f) Alvo \bar{u} e \bar{x} para MPC-P₁ e MPC-P₂.

Figura 5.8: (a)-(d) Estimação de estados e (e) distúrbio e (f) alvo restrito \bar{u} e \bar{x} para MPC-P₁ e MPC-P₂.



(a) Entrada de controle u^* .



(b) Resposta do sistema controlado.

Figura 5.9: (a) Sinal de controle u^* e (b) Resposta do sistema controlado para MPC-P₁ e MPC-P₂.

Para o caso com ruído na saída (sensor), pode-se observar pelas figuras 5.8(a) e 5.8(b) que os estados x_1 e x_2 para o MPC-P₁ foram mais afetados pelo ruído do sensor, (mais evidente em x_1) do que os estados estimados pelo MPC-P₂, conforme pode ser visto nas figuras 5.8(c) e 5.8(d). O distúrbio estimado pelo MPC-P₂ também foi menos afetado pelo ruído conforme mostrado na figura 5.8(e), influenciando no cálculo dos alvos \bar{x} e \bar{u} , como mostrado em 5.8(f). Conseqüentemente, o controle ficou mais suave, ver figura 5.9(a) pelo sistema controlado pelo MPC-P₂, no entanto, o índice de desempenho total Φ foi menor. Os índices de desempenho obtidos foram $\Phi = 14.6361$ para MPC-P₁ e $\Phi = 20.5016$ para MPC-P₂. Vale a pena ressaltar que o valor do movimento na entrada do controlador MPC-P₂ foi menor, devido ao aumento de R_v , $ME = 0.5568$ contra $ME = 1.1934$ do MPC-P₁, 5.9(b). Portanto, aumentando-se o valor de R torna o controlador menos “sensível” ao ruído do sensor. Note que, mesmo na presença do ruído o MPC-P respondeu bem à mudança do set-

point e às perturbações. Esse é um sistema de segunda ordem simples, sem tempo morto, e portanto um bom desempenho era esperado. O índice de desempenho para o caso ruidoso para os dois controladores MPC-P₁ e MPC-P₂ são mostrados na tabela 5.3.

	Φ	RE	ME
MPC-P ₁	14.6361	13.4427	1.1934
MPC-P ₂	20.5016	19.9448	0.5568

Tabela 5.3: Comparação do índice de desempenho do MPC-P para o sistema de Tanques Duplos.

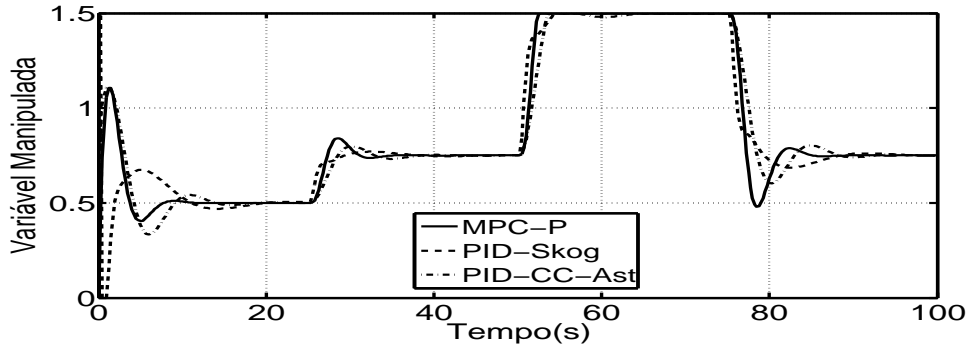
5.3.2 Comparação do Controlador MPC-P com PID

Os parâmetros de sintonia dos controladores PID-Skog e PID-CC-Ast foram obtidos conforme metodologia descrita em [9] e [10], respectivamente, e estão compilados na tabela 5.4.

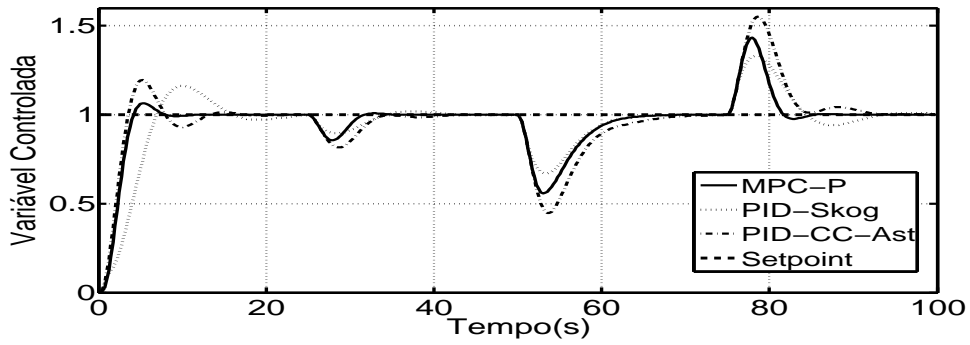
Parâmetro	PID-Skog	PID-CC-Ast
k_c	1	0.89
T_i	2	3.35
T_d	2	0

Tabela 5.4: Parâmetros de Sintonia do Controlador PID.

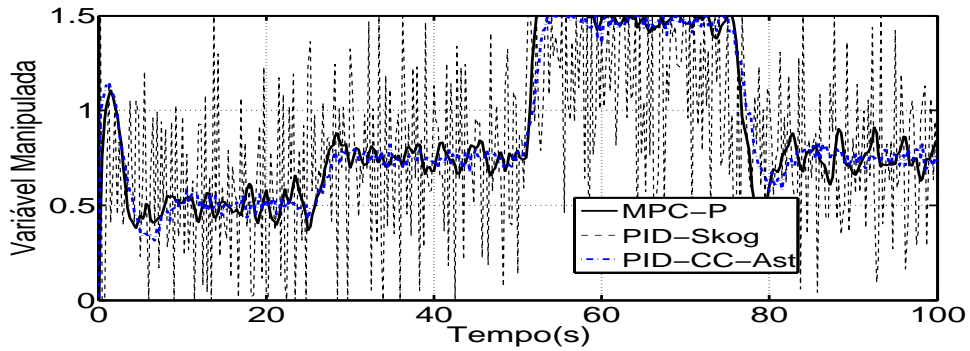
O sistema de Tanques Duplos será simulado para o caso nominal (sem ruído) e para o caso ruidoso e os parâmetros utilizados no MPC serão mesmos mostrados na tabela 5.2: $s = 4$, $q_x = 0.05$ e $R_v = 0.0443$. Os gráficos da variável controlada e manipulada são mostrados à seguir.



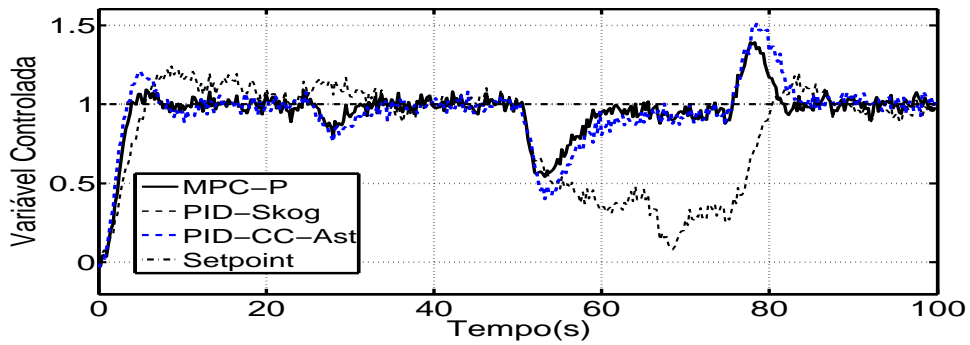
(a) Comparação do Sinal de Controle para Sistema de Tanques para MPC, PID-Skog e PID-CC-Ast, caso nominal.



(b) Comparação da Resposta do Sistema controlado para MPC, PID-Skog e PID-CC-Ast, caso nominal.



(c) Comparação do Sinal de Controle para Sistema de Tanques para MPC, PID-Skog e PID-CC-Ast, caso ruidoso.



(d) Comparação da Resposta do Sistema controlado para MPC, PID-Skog e PID-CC-Ast, caso ruidoso.

Figura 5.10: Comparação MPC, PID-Skog e PID-CC-Ast para sistema de Tanques Duplos.

Para o caso nominal, figuras 5.10(a) e 5.10(b), os índices de desempenho foram $\Phi = 13.5715$, $\Phi = 21.2139$ e $\Phi = 18.1389$, para o MPC, PID-Skog e PID-CC-Ast, respectivamente. Para o caso ruidoso, 5.10(c) e 5.10(d), os índices de desempenho foram os seguintes: $\Phi = 14.3316$ para o MPC, $\Phi = 196.0023$ para o PID-Skog e $\Phi = 19.0256$ para o PID-CC-Ast. Em ambos os casos MPC obteve melhor desempenho tanto para mudanças no set-point quando perturbações na carga. O desempenho ruim do PID-Skog deve-se ao fato do ruído ter sido amplificado pela presença da ação derivativa do controlador. Por essa razão, em muitos PIDs industriais, escolhe-se o $T_d = 0$ e a saída do sensor é geralmente filtrada. Os índices de desempenho para o sistema de tanques duplos para as diferentes estratégias e cenários simulados são mostrados na tabela 5.5.

	Caso Nominal			Caso Ruidoso		
	Φ	RE	ME	Φ	RE	ME
MPC	13.5715	12.9773	0.5941	14.3316	13.2643	1.0673
PID-Skog	21.2139	16.4682	4.7456	196.0023	55.5425	140.4598
PID-CC-Ast	18.1389	17.0660	1.0728	19.0256	17.3338	1.6918

Tabela 5.5: Comparação do índice de desempenho do MPC-P e PID para o sistema de Tanques Duplos.

5.4 Sistema de Primeira ordem mais tempo morto (FOPTD)

O sistema de primeira ordem mais tempo morto é representado pela seguinte função de transferência:

$$G_1(s) = \frac{e^{-\theta s}}{10s + 1} \quad (5.5)$$

sendo θ o valor do tempo morto, ou tempo de transporte.

O modelo do FOPTD é representado pelo modelo no espaço de estados discreto a seguir:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9753 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.2469 \end{bmatrix} u_k \quad (5.6)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix} x_k \quad (5.7)$$

5.4.1 Sintonia do MPC-P utilizando AG - FOPTD

A figura 5.11 mostra a evolução do AG para a minimização do índice de desempenho Φ para uma população com range $[4 : 50]$ para s , e $[0.001 : 10]$ para R_v para o sistema (5.5) para $\theta = 2$ seg. Os parâmetros resultantes são mostrados na tabela 5.6. O parâmetro q foi fixado em 0.05.

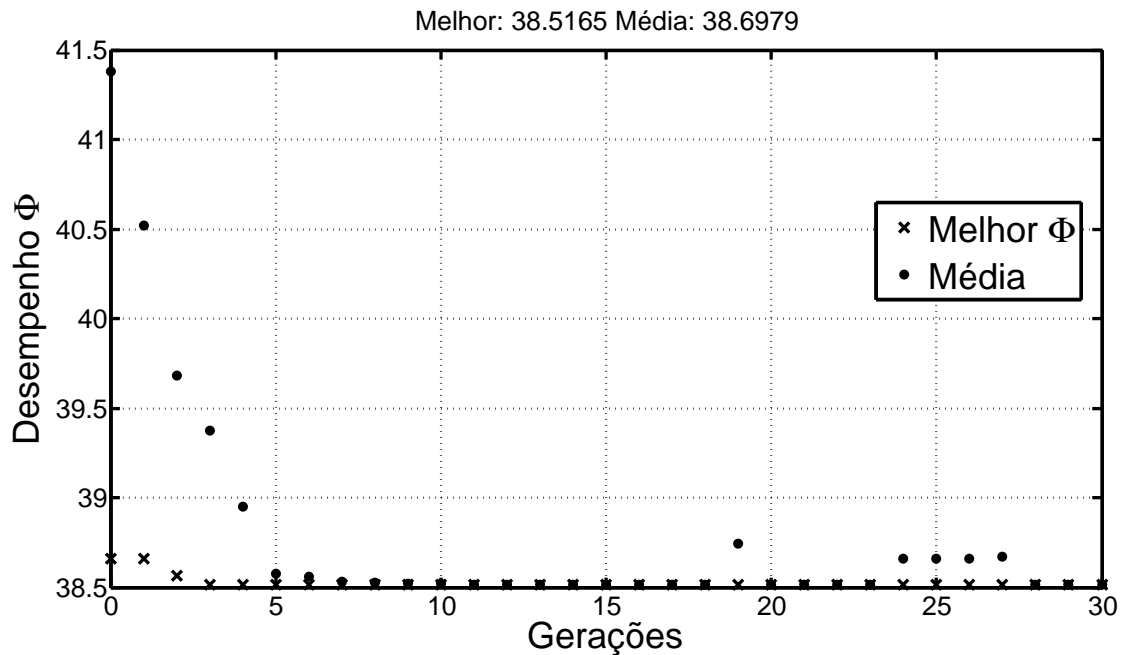


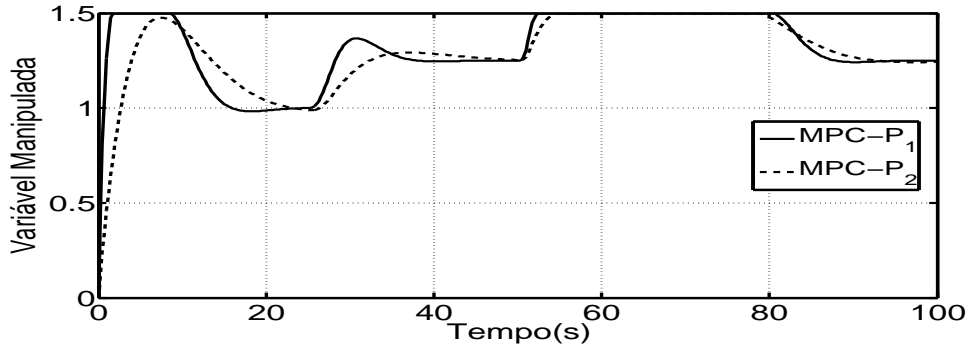
Figura 5.11: Evolução do Algoritmo Genético para o parâmetros do MPC-P para o sistema FOPTD.

A seguir serão apresentados os gráficos de simulação do MPC-P para o sistema de primeira ordem com tempo morto $\theta = 2$ seg e $\theta = 5$ seg, o MPC-P₁ foi sintonizado conforme valores mostrados na tabela 5.6 e no MPC-P₂ a penalidade foi aumentada

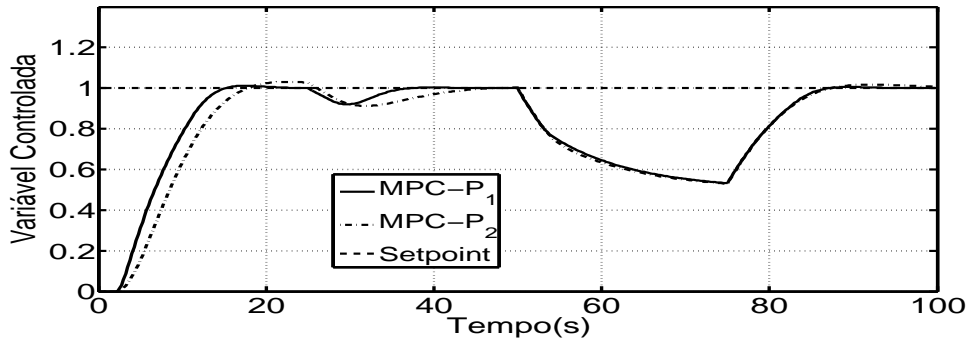
Parâmetro	Valor
s	4
q	0.05
R_v	0.1207
Φ	38.5165

Tabela 5.6: Parâmetros obtidos para o controlador MPC-P para o sistema FOPTD através do AG.

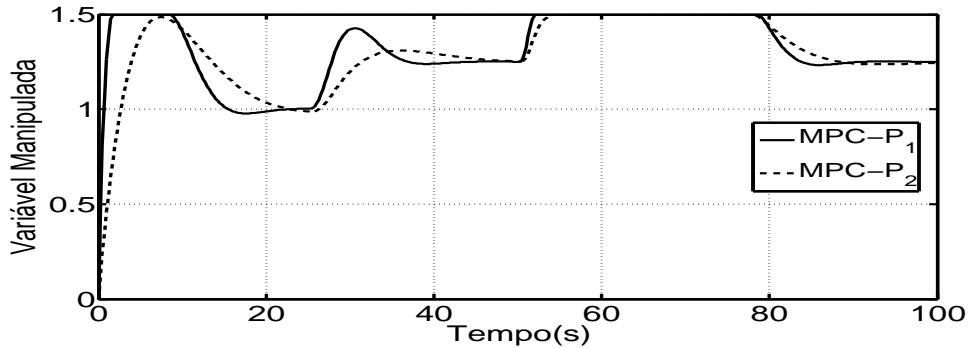
para $s = 60$, mantendo-se os valores de q_x e R_v .



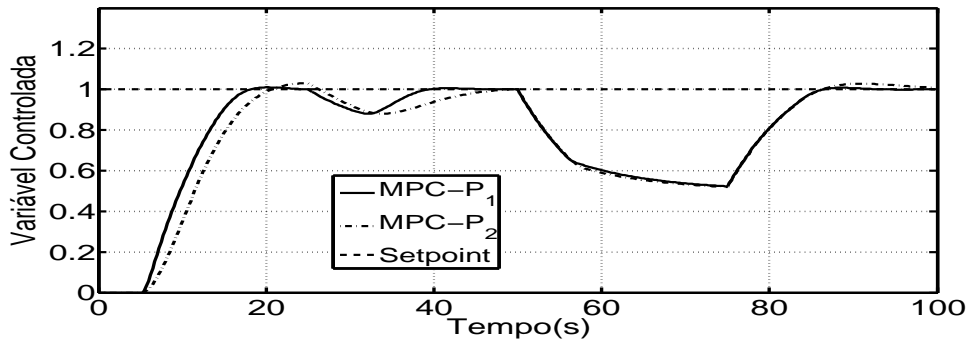
(a) Comparação do Sinal de Controle para Sistema FOPTD para MPC-P₁ e MPC-P₂, com $\theta = 2$.



(b) Comparação da Resposta do Sistema controlado FOPTD para MPC-P₁ e MPC-P₂, com $\theta = 2$.



(c) Comparação do Sinal de Controle para Sistema FOPTD para MPC-P₁ e MPC-P₂, com $\theta = 5$.



(d) Comparação da Resposta do Sistema controlado FOPTD para MPC-P₁ e MPC-P₂, com $\theta = 5$.

Figura 5.12: Resultado da simulação do MPC para o sistema de primeira ordem com tempo morto $\theta = 2$ e $\theta = 5$.

Tendo em vistas as figuras 5.12(a)–5.12(d), pode-se afirmar que o controlador MPC teve bom desempenho para o sistema de primeira ordem com tempo morto, tanto para mudanças no set-point quanto perturbações na carga, tendo resposta suave para ambos os controladores testados, como era esperado, já o tempo morto está inserido na formulação do controlador. Vale ressaltar que os parâmetros utilizados para os MPCs não foram alterados, somente os valores de θ , portanto, o MPC foi capaz de controlar os dois sistemas com bom desempenho sem necessitar realizar nova sintonia, demonstrando dessa forma, robustez paramétrica. O desempenho do MPC para os sistema de primeira ordem com tempo morto $\theta = 2$ seg e $\theta = 5$ seg são mostrados na tabela abaixo:

	$\theta = 2$	$\theta = 5$
MPC-P ₁	38.5165	52.7314
MPC-P ₂	44.5858	58.7257

Tabela 5.7: Índice de desempenho para os sistemas de primeira ordem com tempo morto (FOPTD).

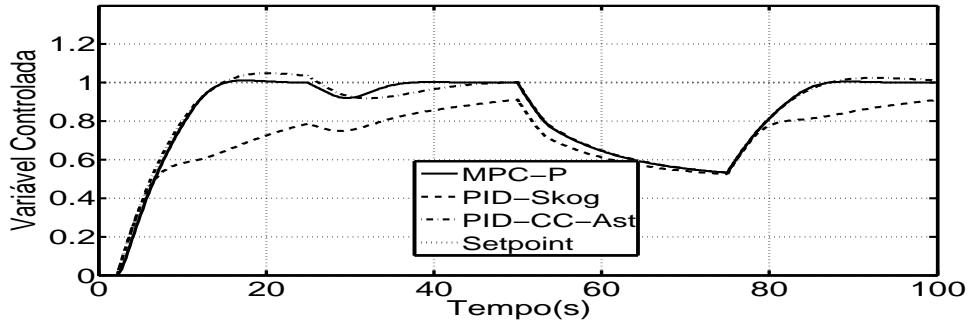
5.4.2 Comparação com o Controlador PID

Nesta seção o controlador MPC será comparado com o PID para o sistema de primeira ordem com tempo morto. A tabela 5.8 mostra os valores de sintonia do PID. O MPC foi sintonizado de acordo com a tabela 5.6: $s = 4$; $q_x = 0.05$ e $R_v = 0.1207$.

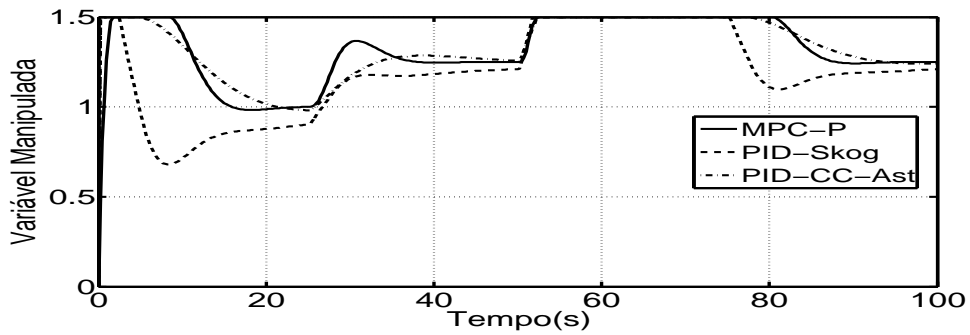
Parâmetro	PID-Skog	PID-CC-Ast
k_c	2.51	1.48
T_i	17	5.87
T_d	0	0

Tabela 5.8: Sintonia do Controlador PID para o sistema FOPTD.

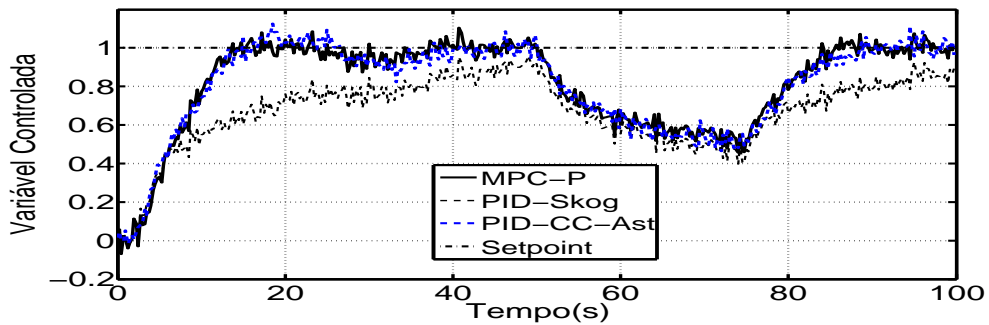
O sistema de primeira ordem com tempo morto igual a $\theta = 2$ seg será simulado para o caso nominal (sem ruído) e para o caso ruidoso. Os gráficos da variável controlada e manipulada são mostrados à seguir:



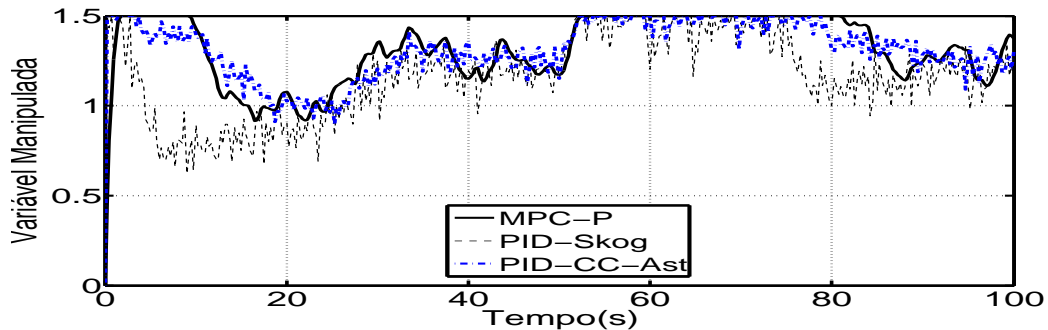
(a) Comparação do Sinal de Controle para Sistema FOPTD para MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Hast.



(b) Comparação da Resposta do Sistema controlado FOPTD para MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Hast.



(c) Comparação do Sinal de Controle para Sistema FOPTD para MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Hast.



(d) Comparação da Resposta do Sistema controlado FOPTD para MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Hast.

Figura 5.13: Comparação do MPC com o PID-Skog e PID-CC-Ast para o Sistema de primeira ordem com tempo morto: (a) Sistema Controlado - caso nominal (sem ruído); (b) Sinal de Controle - caso nominal; (c) Sistema Controlado - caso ruidoso; (d) Sinal de Controle - caso ruidoso;

	Caso Nominal			Caso Ruidoso		
	Φ	RE	ME	Φ	RE	ME
MPC	38.5165	38.0211	0.4954	39.0086	38.5892	0.6244
PID-Skog	53.0701	50.7555	2.3146	64.5763	56.2301	6.0599
PID-CC-Ast	38.7841	36.5191	2.2650	42.4514	38.6651	3.6473

Tabela 5.9: Comparação do índice de desempenho do MPC e PID para o sistema FOPTD.

Pode-se observar através das figuras 5.13(a) e pela tabela 5.9 que o desempenho do MPC foi superior ao dos PID-Skog e PID-CC-Ast, no entanto o erro de rastreamento (RE) para o PID-CC-Ast foi melhor que o do MPC-P, ver 5.13(b). Já no caso ruidoso 5.13(c)–5.13(d) o MPC-P teve desempenho superior aos PIDs tanto no erro de rastreamento quanto no movimento da entrada, e conseqüentemente, melhor desempenho para mudanças no set-point e na carga.

5.5 Sistema de Segunda ordem Sobre Amortecido

O terceiro sistema a ser analisado é um sistema sobreamortecido, representado pela função de transferência mostrada abaixo:

$$G_3(s) = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \quad (5.8)$$

sendo: k é ganho do sistema, τ a constante de tempo e ζ o coeficiente de amortecimento.

O modelo do sistema representado no espaço de estados discreto, para $k = 1$, $\tau = 5$ e $\zeta = 0.2$, é mostrado a seguir:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.979 & -0.009897 \\ 0.2474 & 0.9988 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.2474 \\ 0.03104 \end{bmatrix} u_k \quad (5.9)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0.04 \end{bmatrix} x_k \quad (5.10)$$

5.5.1 Sintonia do MPC-P utilizando AG

A figura 5.14 mostra a evolução do AG para a minimização do índice de desempenho Φ para uma população com range $[4 : 50]$ para penalidade s , e $[0.001 : 10]$ para correlação R_v , o valor da correlação q_x foi mantida fixo para os sistema representado pela (5.8), com $k = 1, \tau = 5$ e $\zeta = 0.2$. Os parâmetros resultantes da otimização do desempenho Φ através do AG são mostrados na tabela 5.10.

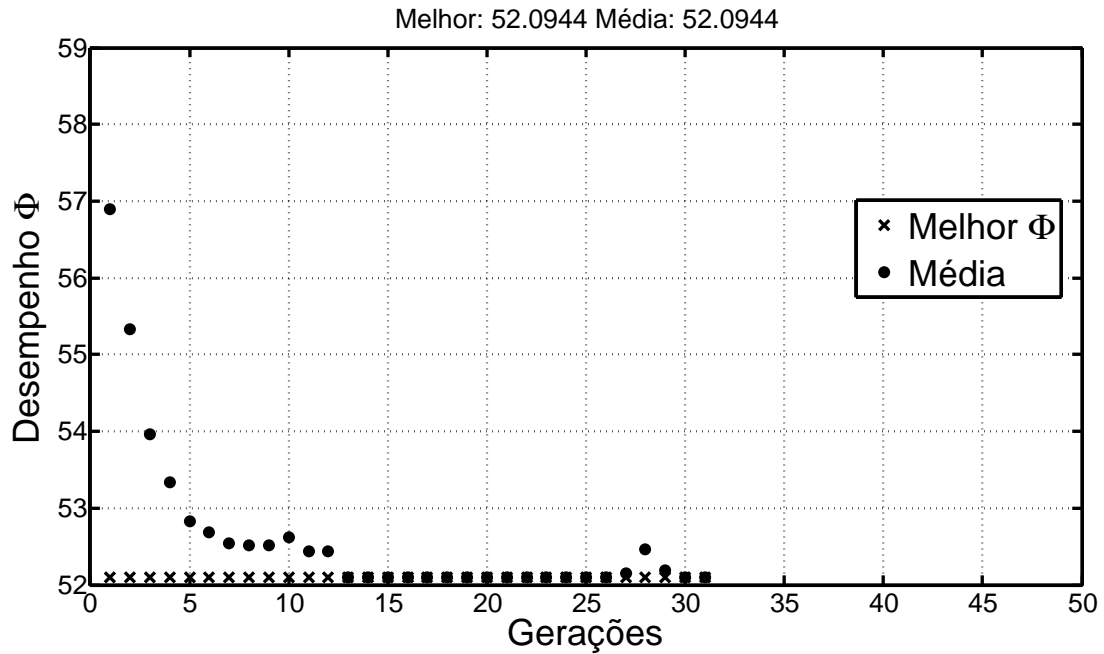


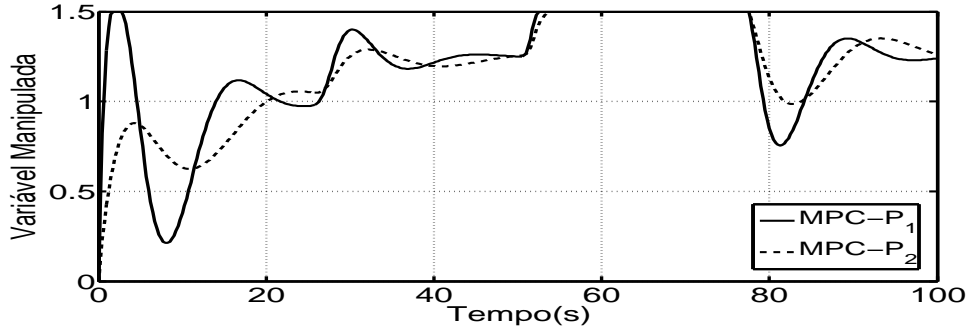
Figura 5.14: Evolução do Algoritmo Genético para o parâmetros do MPC-P - Sistema segunda ordem sobre-amortecido.

Parâmetro	Valor
s	4
q_x	0.05
R_v	0.001
Φ	52.0944

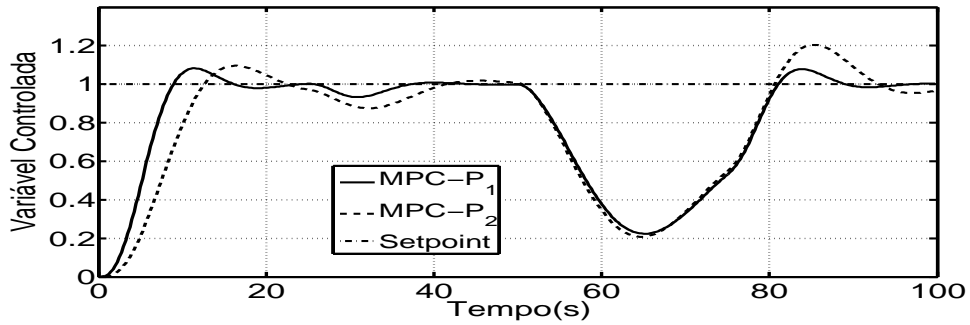
Tabela 5.10: Parâmetros obtidos para o controlador MPC-P para o sistema de segunda ordem sobre-amortecido através do AG.

De forma a verificar a robustez paramétrica do controlador MPC-P, serão simulados dois sistemas de segunda ordem sobre-amortecido com os seguintes parâmetros:

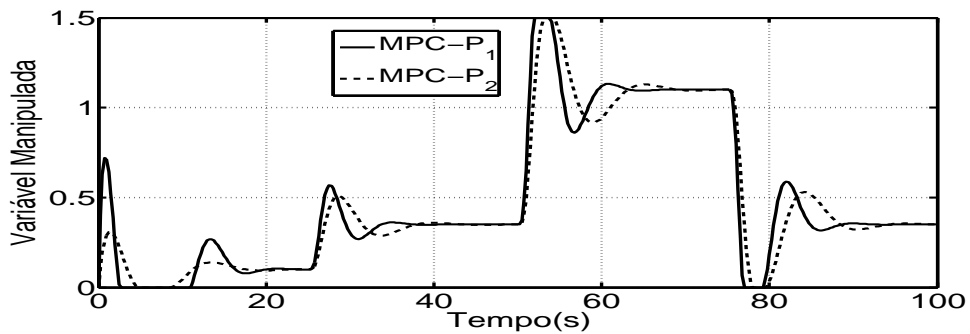
$k = 1$, $\tau = 5$ e $\zeta = 0.2$ para o primeiro caso e $k = 10$, $\tau = 5$ e $\zeta = 0.2$ para o segundo caso, i.e., portanto, testaremos a robustez do controlador com relação à variações no ganho do sistema. O MPC-P terá a mesma sintonia para os dois casos, cujo parâmetros estão na tabela 5.10. Os resultados são mostrados à seguir:



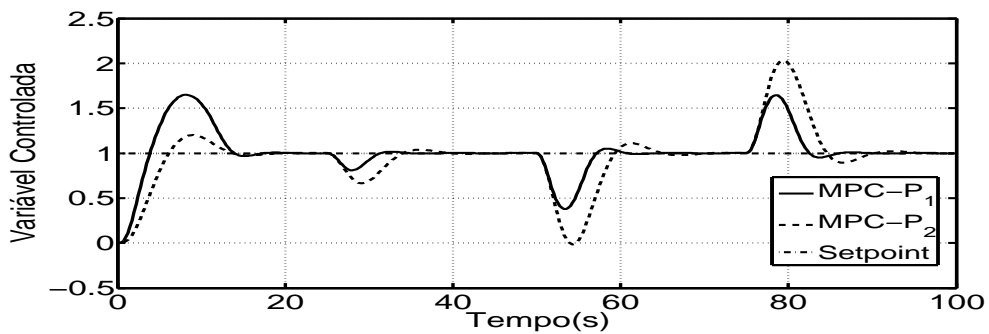
(a) Comparação do Sinal de Controle para Sistema Segunda ordem sobre-amortecido para MPC-P₁ e MPC-P₂, com $k = 1$.



(b) Comparação da Resposta do Sistema de segunda ordem sobre-amortecido controlado para MPC-P₁ e MPC-P₂, com $k = 1$.



(c) Comparação do Sinal de Controle para Sistema de segunda ordem sobre-amortecido para MPC-P₁ e MPC-P₂, com $k = 10$.



(d) Comparação da Resposta do Sistema de segunda ordem sobre-amortecido controlado para MPC-P₁ e MPC-P₂, com $k = 10$.

Figura 5.15: Resultado da Simulação do MPC para o Sistema de segunda ordem sobre-amortecido com ganho $k = 1$, figuras (a) e (b) e $k = 10$, figuras (c) e (d).

O desempenho do MPC-P para os sistema de segunda ordem sobre-amortecido com ganho $k = 1$ (Caso 1) e $k = 10$ (Caso 2) são mostrados na tabela 5.11.

	Caso 1	Caso 2
MPC-P ₁	52.2769	27.3066
MPC-P ₂	61.3813	44.5858

Tabela 5.11: Índice de desempenho para os sistemas de segunda ordem sobre-amortecido para diferentes valores de ganho.

Tendo em vista as figuras 5.15(a)–5.15(b), o controlador MPC-P mostrou bom desempenho tanto para mudanças no set-point como na carga para o sistema de segunda ordem sobre-amortecido para diferentes valores do ganho k , mostrando, dessa forma ser robusto quando a incompatibilidade de ganhos, ou inconsistência no modelo.

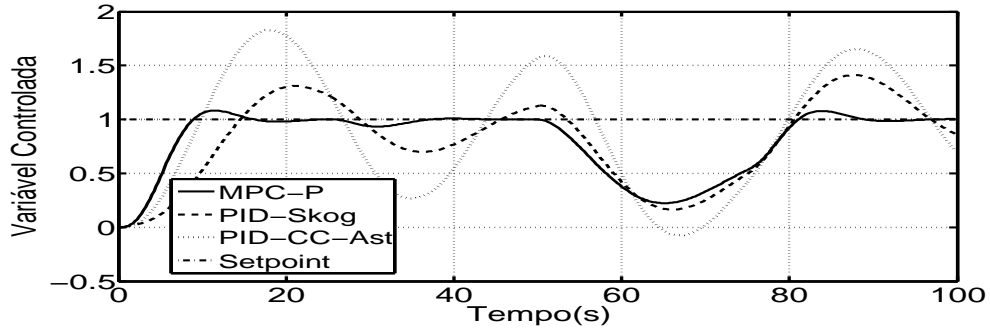
5.5.2 Comparação com Controlador PID

Nesta seção o controlador MPC-P será comparado com o PID para o sistema de segunda sobre-amortecido. A tabela 5.12 mostra os valores de sintonia do PID. O MPC-P foi sintonizado de acordo com a tabela 5.10: $s = 4; q_x = 0.05$ e $R_v = 0.001$.

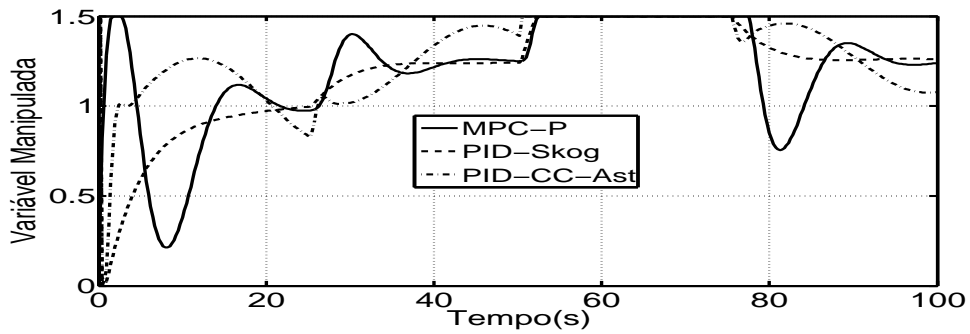
Parâmetro	PID-Skog	PID-CC-Ast
k_c	0.40	0.24
T_i	2	0.24
T_d	12.5	115.7

Tabela 5.12: Sintonia do Controlador PID para o sistema de segunda ordem sobre-amortecido.

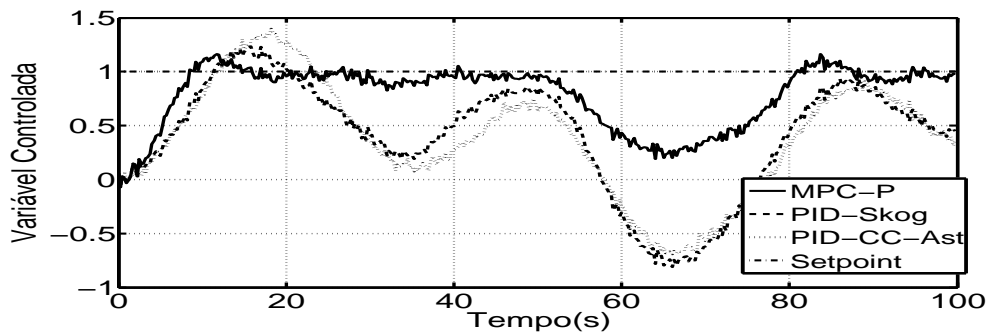
O sistema de segunda ordem sobre-amortecido com ganho $k = 1$ será simulado para o caso nominal (sem ruído) e para o caso ruidoso. Os gráficos da variável controlada e manipulada são mostrados à seguir:



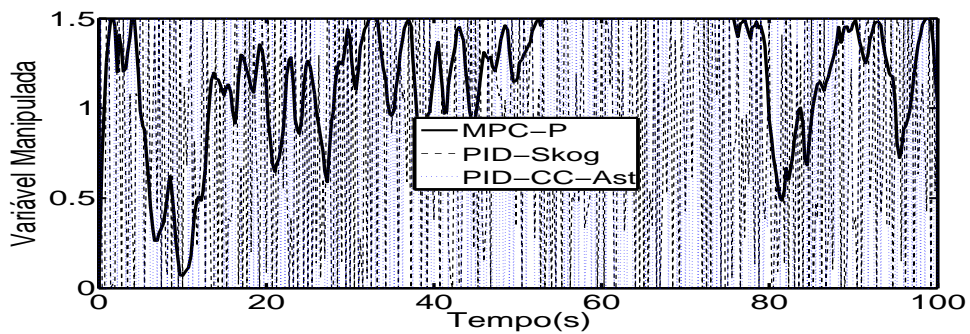
(a) Comparação do Sinal de Controle para Sistema sobre-amortecido para MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Ast, com $k = 1$, caso nominal.



(b) Comparação da Resposta do Sistema sobre-amortecido para para MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Ast, com $k = 1$, caso nominal.



(c) Comparação do Sinal de Controle para Sistema sobre-amortecido para MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Ast, com $k = 1$, caso ruidoso.



(d) Comparação da Resposta do Sistema sobre-amortecido para MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Ast, com $k = 5$, caso ruidoso.

Figura 5.16: Comparação do MPC-P com o PID-Skog e PID-CC-Ast para o Sistema de segunda ordem sobre-amortecido: (a) Sistema Controlado - caso nominal (sem ruído); (b) Sinal de Controle - caso nominal; (c) Sistema Controlado - caso ruidoso; (d) Sinal de Controle - caso ruidoso; 65

	Caso Nominal			Caso Ruidoso		
	Φ	RE	ME	Φ	RE	ME
MPC-P	52.2769	51.5892	0.6876	55.2353	52.1036	3.1317
PID-Skog	83.4439	78.9054	4.5385	669.356	247.7100	421.6460
PID-CC-Ast	143.4281	138.7027	4.7254	876.2215	257.1055	619.1116

Tabela 5.13: Comparação do índice de desempenho do MPC-P e PID para o sistema FOPTD.

Pode-se observar através das figuras 5.16(a) e 5.16(b) e pela tabela 5.13 que o desempenho geral do MPC-P foi superior ao do PID-Skog e PID-CC-Ast, para o caso nominal, cerca de 60% e 175%, respectivamente. Já no caso ruidoso 5.16(c) e 5.16(d) o MPC-P teve desempenho muito superior aos PIDs tanto no erro de rastreamento quanto no movimento da entrada, 1116% e 1493%, respectivamente.

5.6 Sistema Integrador com atraso

O último sistema a ser testado é um sistema integrador com atraso, representado pela função de transferência mostrada abaixo:

$$G_2(s) = \frac{e^{-2s}}{s} \quad (5.11)$$

O modelo representado no espaço de estados discreto é mostrado a seguir:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.25 \end{bmatrix} u_k \quad (5.12)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} x_k \quad (5.13)$$

De acordo com [9], sistemas integradores são comuns na indústria, devido à presença de tanques e vasos, no entanto, o desempenho do controlador é geralmente pobre.

5.6.1 Sintonia do MPC-P utilizando AG

A figura 5.17 mostra a evolução do AG para a minimização do índice de desempenho Φ para uma população com range $[4 : 50]$ para penalidade s , e $[0.001 : 10]$ para correlação R_v para o sistema (5.11). Os parâmetros resultantes são mostrados na tabela 5.14. A correlação q_x foi fixado em 0.05.

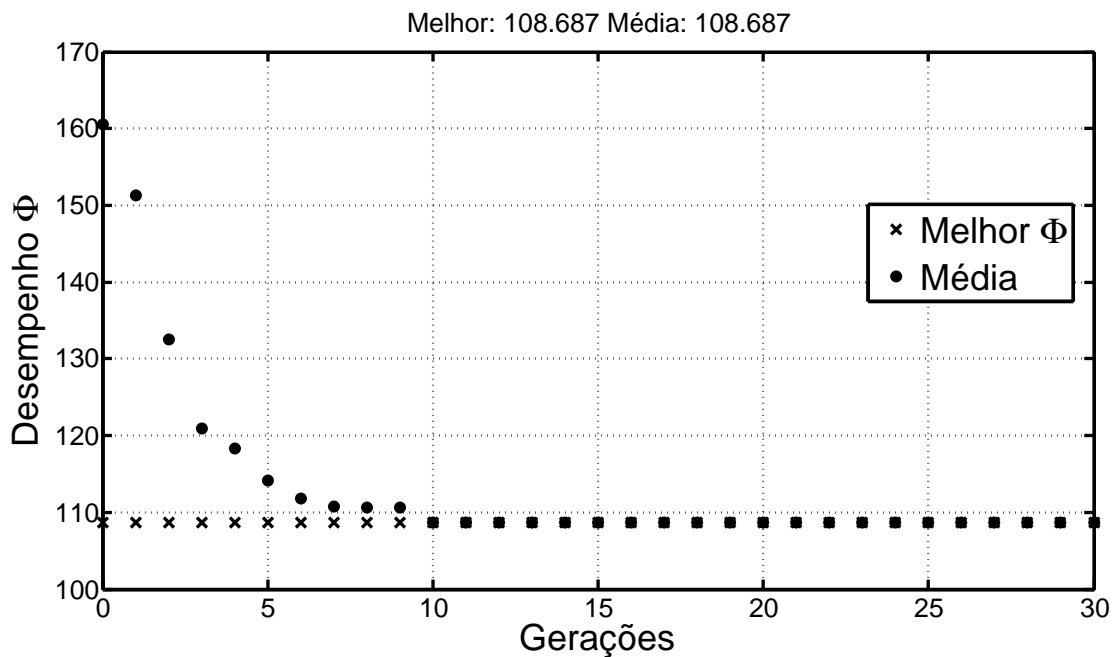
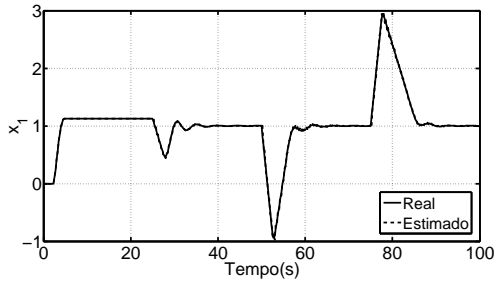


Figura 5.17: Evolução do Algoritmo Genético para o parâmetros do MPC-P para o sistema integrador com Atraso.

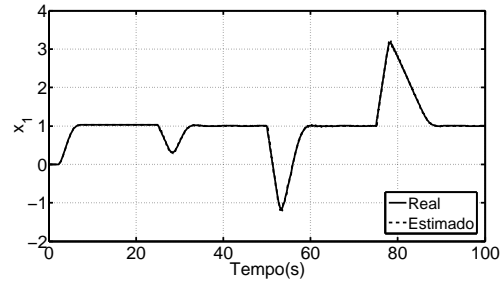
Parâmetro	Valor
s	4
q	0.05
R_v	0.001
Φ	108.6870

Tabela 5.14: Parâmetros obtidos para o controlador MPC-P para o sistema FOPTD através do AG.

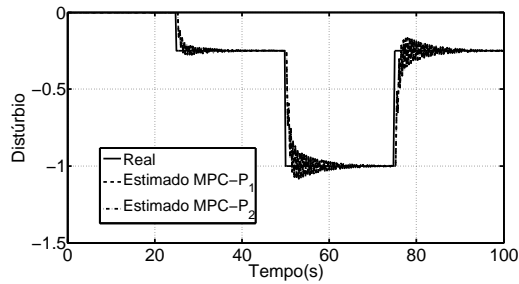
O sistema integrador com atraso será simulado para o caso nominal para o MPC- P_1 com os parâmetros encontrados via AG dispostos na tabela 5.14 e para o MPC- P_2 a penalidade será aumentada para $s = 60$ (Caso 1). Os resultados são mostrados abaixo:



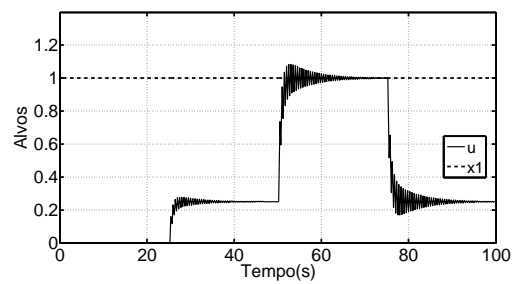
(a) Estado x_1 estimado pelo MPC-P₁ para o sistema Integrador com atraso.



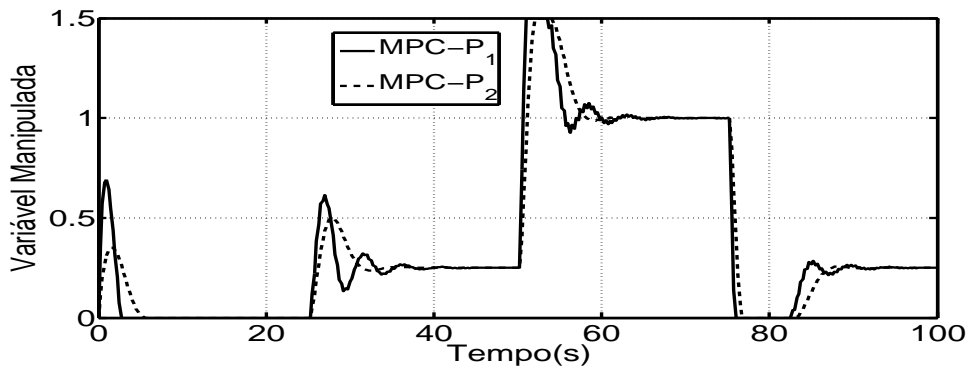
(b) Estado x_1 estimado pelo MPC-P₂ para o sistema Integrador com atraso.



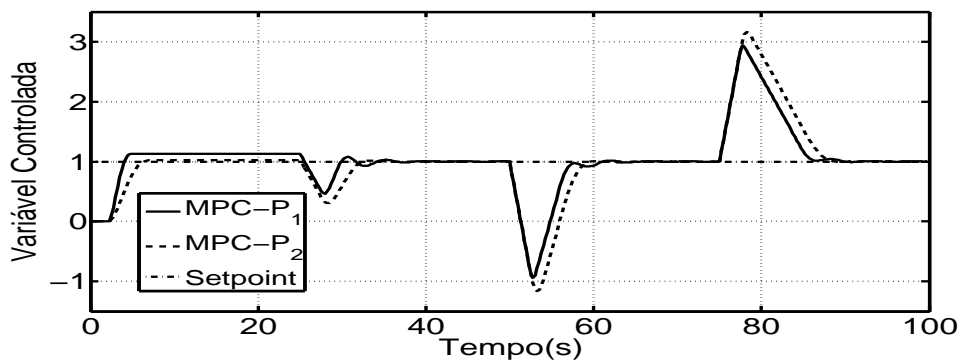
(c) Distúrbio d estimado pelo MPC-P₁ e MPC-P₂ para o sistema Integrador com atraso.



(d) Alvo restrito \bar{u} e \bar{x} para MPC-P₁ e MPC-P₂.



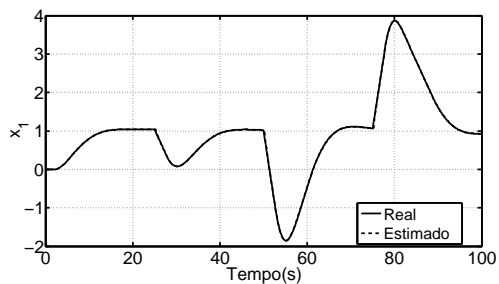
(e) Entrada de controle u^* para o sistema integrador com atraso.



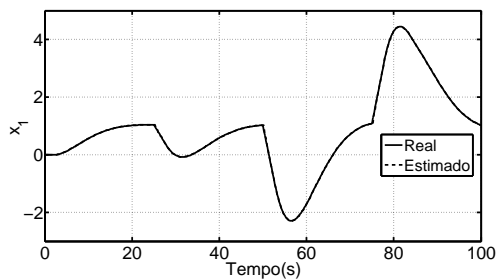
(f) Resposta do sistema controlado para MPC-P₁ e MPC-P₂ para o integrador com atraso.

Figura 5.18: (a)-(b) Estimação de estados e (c) distúrbio e (d) alvo restrito \bar{u} e \bar{x} , (e) Sinal de controle u^* e (f) Resposta do sistema controlado para MPC-P₁ e MPC-P₂ para integrador com atraso.

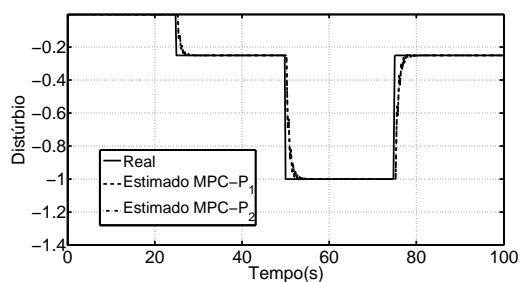
Note que o sistema foi simulado para o caso nominal e pode-se ver grande oscilação para estimação do distúrbio 5.18(c) e para cálculo do alvo \bar{x} e \bar{u} , 5.18(d). Além do off-set na saída do sistema 5.18(f). Estas oscilações são causadas pelo baixo valor da penalidade s para o sistema integrador, uma vez que o mesmo é instável, se torna sensível às variações na entrada de controle e uma penalidade baixa faz com que controlador MPC-P seja muito “agressivo”. O sistema será simulado novamente com penalidade $s = 2500$ e $R_v = 0.01$ para o MPC-P₁ e $s = 12000$ e $R_v = 0.01$ para o MPC-P₂ (Caso 2). Veja os resultados abaixo:



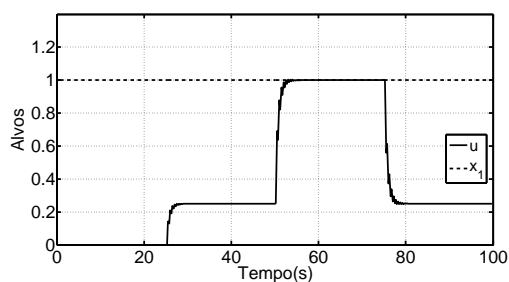
(a) Estado x_1 estimado pelo MPC-P₁ para o sistema Integrador com atraso.



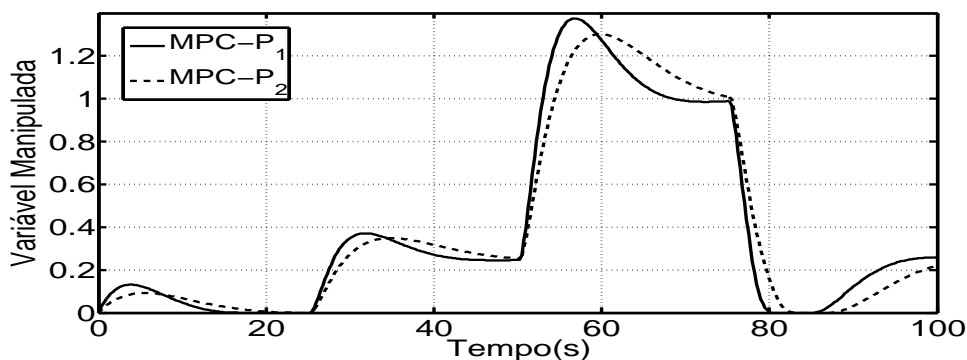
(b) Estado x_1 estimado pelo MPC-P₂ para o sistema Integrador com atraso.



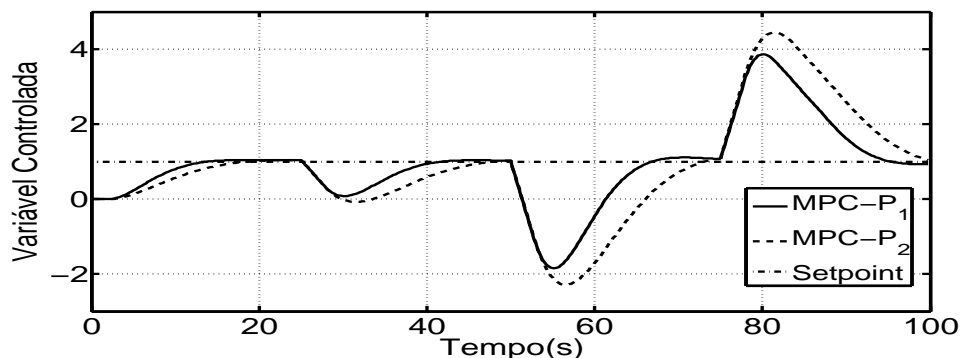
(c) Distúrbio d estimado pelo MPC-P₁ e MPC-P₂ para o sistema Integrador com atraso.



(d) Alvo restrito \bar{u} e \bar{x} para MPC-P₁ e MPC-P₂.



(e) Entrada de controle u^* para o sistema integrador com atraso.



(f) Resposta do sistema controlado para MPC-P₁ e MPC-P₂ para integrador com atraso.

Figura 5.19: (a)-(b) Estimação de estados e (c) distúrbio e (d) alvo restrito \bar{u} e \bar{x} , (e) Sinal de controle u^* e (f) Resposta do sistema controlado para MPC-P₁ e MPC-P₂ para integrador com atraso.

Observe, que as oscilações reduziram consideravelmente para estimação do distúrbio 5.19(c) e para cálculo do alvo \bar{x} e \bar{u} , 5.19(d). Conseqüentemente, o off-set na saída do sistema 5.19(f) foi eliminado. Em contrapartida o desempenho geral do sistema piorou consideravelmente, conforme pode ser visto na tabela a seguir:

	Caso 1	Caso 2
MPC-P ₁	111.0872	474.1417
MPC-P ₂	162.3631	946.6116

Tabela 5.15: Índice de desempenho para o sistema integrado com atraso para diferentes sintonias do MPC-P.

Ao aumentarmos o valor da penalidade s do controlador MPC-P, o desempenho do sistema piorou em cerca de 45% (Caso 1) e 100% (Caso 2).

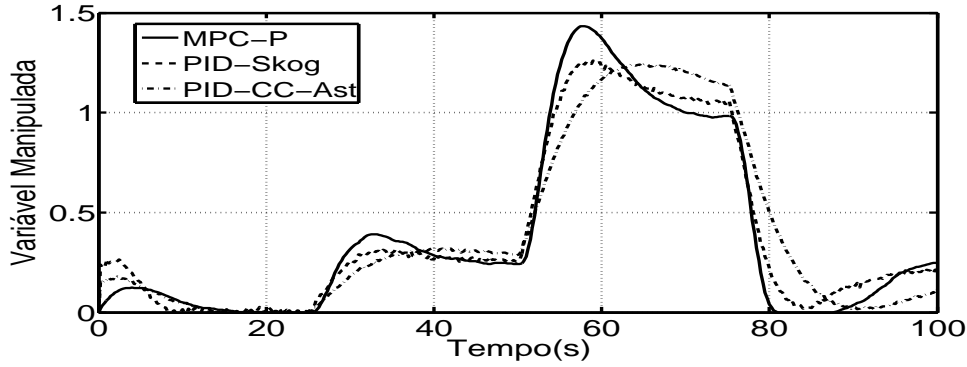
5.6.2 Comparação com Controlador PID

Nesta seção o controlador MPC-P será comparado com o PID para o sistema integrador com atraso. A tabela 5.16 mostra os valores de sintonia do PID.

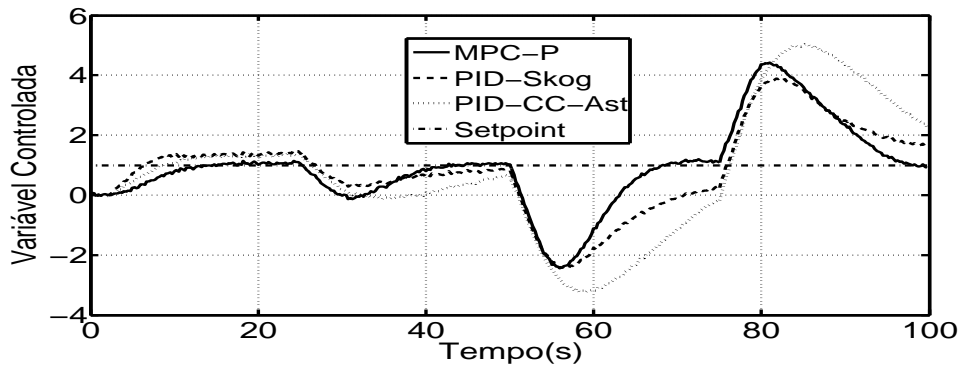
Parâmetro	PID-Skog	PID-CC-Ast
k_c	0.23	0.15
T_i	17	14.70
T_d	0	0

Tabela 5.16: Sintonia do Controlador PID para o sistema integrador com atraso.

Abaixo serão mostrado os resultados da simulação. O MPC-P foi sintonizado da seguinte forma: $s = 2500$; $q_x = 0.05$ e $R_v = 10$ e ruído na saída. Note que R_v foi aumentado de forma a obter-se uma resposta mais suave na saída e tornar o sistema menos sensível ao ruído.



(a) Entrada de controle u^* para o sistema integrador com atraso, caso ruidoso.



(b) Resposta do sistema controlado pelo MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Ast, caso ruidoso.

Figura 5.20: (a) Sinal de controle u^* e (b) Resposta do sistema integrador com atraso controlado pelo MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Ast, caso ruidoso.

Na tabela a seguir são mostrados os índices de desempenho:

	Φ	RE	ME
MPC-P	740.0171	739.8815	0.1356
PID-Skog	816.0519	815.8656	0.18624
PID-CC-Ast	1825.4445	1825.3527	0.0918

Tabela 5.17: Comparação do índice de desempenho do MPC-P e PID para o sistema integrador com atraso para o caso ruidoso.

Pode-se observar pela figura 5.20 e pela tabela 5.17 que o desempenho do MPC-P foi novamente superior ao desempenho do PID-Skog e PID-CC-Ast. O PID-CC-Ast teve um melhor desempenho no movimento da entrada de controle, no entanto, teve o pior desempenho entre os três controladores testados para o erro de rastreamento. O MPC-P teve uma resposta suave quanto a mudanças no set-point e perturbações na carga, mesmo na presença do ruído.

5.7 Discussões e Comentários

Os resultados apresentados na seção anterior deixaram claro a capacidade do MPC-P em lidar com restrições e ao mesmo tempo otimizar o critério de desempenho estabelecido. Os sistemas controlados pelo MPC-P obtiveram desempenho Φ superior em todos os casos discutidos, superando o PID-Skog e PID-CC-Ast tanto para mudanças no set-point quanto rejeição ao distúrbio. Foi possível verificar que o MPC-P pode ser sintonizado de forma a garantir um baixo movimento na entrada (ME), através do aumento do valor da correlação R_v , na presença do ruído, tornando o movimento na entrada de controle mais suave, sem piorar a regulação, através da diminuição no valor da penalidade s , como pode ser observado através da figura 5.9 e tabela 5.3. Esta característica do MPC-P permite um aumento na vida útil do atuador, refletido em ganho direto de custos em manutenção. Os PIDs analisados, de forma contrária, quando possuem ação derivativa, no intuito de melhorar a resposta do sistema (RE), tendem a piorar o movimento na entrada (ME), resultando em movimento intenso do atuador, como foi observado na figura 5.10 e tabela 5.5 para o PID-Skog e em 5.16 e 5.13 para o PID-Skog e PID-CC-Ast.

Uma outra característica observada no controlador MPC-P foi a robustez paramétrica, uma vez que o controlador foi capaz de controlar diferentes processos, com a mesma sintonia, e apresentando bom desempenho, como foi mostrado graficamente em 5.12 e 5.15 e pela tabela de desempenho 5.7 e 5.11. Portanto, pode-se afirmar que o MPC-P tem grande robustez quanto a inconsistências no modelo, seja no ganho ou no tempo morto. A tabela abaixo reúne os parâmetros de sintonia do MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Ast de todos os sistemas estudados, para o caso ruidoso.

Sistema	MPC-P			PID-Skog				PID-CC-Ast			
	s	R_v	Φ	K_c	T_i	T_i	Φ	K_c	T_i	T_i	Φ
Tanques Duplos	4	0.044	14.33	1	2	2	196.00	0.89	3.35	0	19.02
FOPTD	4	0.120	39.00	2.51	17	0	64.57	1.48	5.87	0	42.45
Sobre-amortecido	4	0.001	55.23	0.40	2	12.5	669.35	0.24	0.24	115.7	876.22
Integrador atraso	2500	0.01	739.88	0.23	17	0	816.05	0.15	14.70	0	1825.44

Tabela 5.18: Comparação do valores de sintonia e desempenho do MPC-P, PID-Skog e PID-CC-Ast, para o caso ruidoso.

Note, que com exceção do sistema integrador com atraso, que é um sistema instável, os outros sistemas SISO foram controlados pelo MPC-P com o mesmo valor da penalidade s , parâmetro com maior influência no desempenho do MPC-P. Portanto, pode-se afirmar baseado na tabela 5.18 que os parâmetros de sintonia do MPC-P, uma vez ajustados, controlam com bom desempenho os sistemas investigados. Além do fato, da penalidade s e correlação R_v terem efeito intuitivo no desempenho do sistema, conforme foi mostrado, a penalidade s torna o sistema mais “agressivo”, melhorando o desempenho geral do sistema. Neste trabalho foram utilizadas penalidades na faixa $[4 : 12000]$, e o controlador MPC-P mostrou bom desempenho, considerado a particularidade de cada sistema testado. Já a correlação R_v afeta a sensibilidade do sistema ao ruído do sensor. Seu aumento torna o sistema menos sensível ao ruído, os valores simulados estão dentro da faixa de $[0.001 : 20]$.

Por fim, o AG foi utilizado neste trabalho para efetuar a sintonia dos parâmetros do controlador MPC-P, penalidade s e correlação R_v , para cada sistema SISO (caso nominal), através da minimização do critério de desempenho Φ . Foi observado que os valores encontrados para a penalidade s foram iguais para todos os casos, e os valores da correlação R_v muito próximos, ver tabela 5.18. Portanto, após varredura paramétrica feita pelo AG pode-se verificar que o MPC-P uma vez sintonizado é capaz de controlar com bom desempenho diversos sistemas SISO, sem necessitar de uma nova sintonia, com exceção do sistema integrador com atraso, no qual a penalidade s foi aumentada de forma a eliminar off-set.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho um controlador linear quadrático com horizonte de controle finito, estimação de distúrbio e restrição na entrada para sistemas SISO foi analisado. Foi mostrada uma forma eficiente da implementação do mesmo, que requer baixo custo computacional e, portanto, pode ser implementada em hardware de controle industrial.

Foram simulados quatro processos típicos de controle industrial. Um sistema de controle de nível para tanques duplos, um sistema de primeira ordem com tempo morto, um sistema de segunda ordem sobre-amortecido e por último, um sistema integrador com atraso. Foi mostrado, que em todos os casos o MPC-P superou o controlador PID para mudanças no set-point e rejeição à distúrbio, tanto para o caso nominal quanto na presença de ruído na saída. Analisou-se a robustez do controlador MPC-P em relação aos parâmetros de sintonia através da simulação de inconsistências no modelo e diferentes cenários de ganho e tempo morto para os sistemas experimentados. Observou-se que os valores obtidos para penalidade s e correlação R_v através do AG foram capazes de controlar diversos sistemas SISO com bom desempenho. Além disso, mostrou-se que sintonizar o MPC-P é mais simples que o PID, uma vez que os parâmetros de sintonia do MPC-P, a penalidade s e R_v , tem efeito intuitivo no desempenho do controlador em malha fechada.

Não foi observado em [2] e [28] metodologia para escolha dos parâmetros do MPC-P, portanto, a principal contribuição deste trabalho foi o estudo sistemático

da escolha da penalidade s e da correlação R_v para diferentes sistemas SISO de forma a obter-se bom desempenho, tanto para movimento na entrada quanto erro de rastreamento.

A contribuição secundária foi o desenvolvimento de um guia para implementação do MPC-P proposto em um Controlador Lógico Programável industrial utilizando a norma IEC 61131-3, onde as operações necessárias foram rearrumadas de forma a realizar apenas cálculos simples tais como: soma, multiplicação, comparação e multiplicação de matrizes. Esta contribuição torna acessível a possibilidade de um controle mais eficiente em malhas de controle nas quais o PID teria baixa eficiência, devido a suas limitações em lidar com restrições ou pela dificuldade de sintonia.

O método recente de sintonia do PID-CC-Ast via otimização convexa, proposto por [10] mostrou desempenho muito próximo ao MPC-P para o caso de tanques duplos e para o sistema de primeira ordem com tempo morto. O comportamento do PID-CC-Ast em alguns casos se confunde com o do MPC-P, mostrando-se assim um método robusto de sintonia de PIDs, para os casos citados. No entanto, para o sistema de segunda ordem sobre-amortecido e integrador com atraso o método de sintonia não teve desempenho satisfatório.

Embora o MPC seja uma realidade industrial, em contextos mais complexos, ainda há muito a ser explorada e desenvolvida. Este trabalho procurou mostrar que suas vantagens são consideráveis com relação ao PID em diversos casos importantes na prática. Entretanto, a penetração do MPC na indústria depende da implementação do software por parte dos fornecedores de hardwares de controle.

6.1 Trabalhos Futuros

Sugere-se como trabalhos futuros:

- Explorar o compromisso entre robustez e desempenho do MPC-P comparado com PID através das métricas de desempenho estabelecidos em [29].
- Programar em CLP e implementar o controlador MPC-P em planta de ensino,

tanques duplos ou similar, de forma a verificar a eficiência computacional do método.

- Estender o método para plantas instáveis e sistemas de fase não mínima de forma a torná-lo mais abrangente.
- Estender o método para plantas com n entradas e saídas, utilizando critérios de pareamento de entrada/saída e comparação com controladores multivariáveis plenos.

Referências Bibliográficas

- [1] GARCÍA, C. E., PRETI, D. M., MORARI, M. “Model Predictive Control : Theory and Practice a Survey”, *Automatica*, v. 25, n. 3, pp. 335–348, 1989.
- [2] PANNOCCHIA, G., LAACHI, N., RAWLINGS, J. B. “A candidate to replace PID control: SISO-constrained LQ control”, *AIChE Journal*, v. 51, n. 4, pp. 1178–1189, abr. 2005.
- [3] ASTROM, K., HAGGLUND, T. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. 2 ed. New York, ISA, 1995.
- [4] NOGUEIRA, V. N. *Uso de algoritmos genéticos no projeto de controladores PID ótimos para plantas estáveis ou instáveis*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2006.
- [5] PENADILLOS, M. M. E. *Auto-Sintonia Robusto de Controladores PID Usando Algoritmos Genéticos*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1997.
- [6] BIDONI, R. A. *Desenvolvimento de Um Algoritmo de Ajuste Automatizável de Controladores PID*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1992.
- [7] BASILIO, J., MATOS, S. “Design of PI and PID Controllers with Transient Performance Specification”, *IEEE Transactions on Education*, v. 45, n. 4, nov. 2002.
- [8] ALCÁNTARA, S., VILANOVA, R., PEDRET, C. “PID control in terms of robustness/performance and servo/regulator trades-off: A unifying approach to balanced autotuning”, *Journal of Process Control*, v. 23, pp. 527–542, 2013.
- [9] SKOGESTAD, S. “Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning”, *Journal of Process Control*, v. 13, n. 4, pp. 291–309, 2003.

- [10] HAST, M., ASTROM, K., BERNHARDSSON, B., et al. “PID Design by Convex-Concave Optimization”, *Proceedings European Control Conference*, pp. 4460–4465, 2013.
- [11] RICHALET, J., RAULT, A., TESTUD, J., et al. “Model Predictive Heuristic Control : Applications to Industrial Processes”, *Automatica*, v. 14, pp. 413–428, 1978.
- [12] CUTLER, R. “Dynamic Matrix Control - A Computer Control Algorithm”, *Automatica Control Conference*, 1980.
- [13] CAMACHO, E., BORDONS, C. *Model Predictive Control*. 1 ed. New York, Springer-Verlag, 1998.
- [14] GOODWIN, G., CARRASCO, D., SERON, M. “Predictive control: a historical perspective”, *Int. J. Robust. Nonlinear Control*, v. 22, n. May, pp. 1296–1313, 2012.
- [15] VALENCIA-PALOMO, G., ROSSITER, J. A. “Programmable logic controller implementation of an auto-tuned predictive control based on minimal plant information.” *ISA Transactions*, v. 50, n. 1, pp. 92–100, jan. 2011.
- [16] DUA, P., KOURAMAS, K., DUA, V., et al. “MPC on a chip - Recent advances on the application of multi-parametric model-based control”, *Computers & Chemical Engineering*, v. 32, n. 4-5, pp. 754–765, abr. 2008.
- [17] ANDERSON, B., MOORE, J. B. *Optimal Control - Linear Quadratic Methods*. 1 ed. New York, Prentice-Hall, 1989.
- [18] VERHAEGEN, M., VERDULT, V. *Filtering and System Identification - A Least Square Approach*. 1 ed. New York, Cambridge University Press, 2007.
- [19] CLARKE, D., MOHTADI, C., TUFFS, P. “Generalized Predictive Control. Part I. The Basic Algorithm.” *Automatica*, v. 25(6), pp. 137–148, 1987.
- [20] KOUVARITAKIS, B., ROSSITER, J., CHANG, A. “Stable Generalized Predictive Control: An algorithm with Guaranteed Stability.” *Proceeding IEE*, pp. 327–332, 1992.
- [21] MORARI, M., LEE, J. H. “Model predictive control: past, present and future”, *Computers & Chemical Engineering*, v. 23, pp. 667–682, 1999.

- [22] PANNOCCHIA, G., RAWLINGS, J. B. “Disturbance Models for Offset-Free Model-Predictive Control”, *AIChE Journal*, v. 49, n. 2, pp. 426–437, fev. 2003.
- [23] BEMPORAD, A., MORARI, M., DUA, V., et al. “The explicit linear quadratic regulator for constrained systems”, *Automatica*, v. 38, pp. 3–20, 2002.
- [24] NOCEDAL, J., WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. 2 ed. New York, Springer, 2000.
- [25] STRANG, G. *Linear Algebra and Its Applications*. 3 ed. New York, Thomson Learning, 1988.
- [26] FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D., WORKMAN, M. L. *Digital Control of Dynamic Systems*. 3 ed. California, Addison-Wesley, 1998.
- [27] MATHWORKS. *Global Optimization Toolbox*. fev. 2013.
- [28] PANNOCCHIA, G., LAACHI, N., RAWLINGS, J. B. “United States Patent”. <http://www.warf.org/documents/ipstatus/P04113US.PDF>, 2008. [Online; accessed 11-04-2013].
- [29] TAN, W., LIU, J., CHEN, T., et al. “Comparison of some well-known PID tuning formulas”, *Computers & Chemical Engineering*, v. 30, pp. 1416–1423, 2006.
- [30] JOHN, K., TIEGELKAMP, M. *IEC 61131-3: Programming Industrial Automation Systems*. 2 ed. New York, Springer, 2010.

Apêndice A

Guia para Implementação do MPC-P em Hardware de Controle

O objetivo deste capítulo é descrever como o MPC-P para sistemas SISO com restrição na entrada abordado no capítulo 4 pode ser implementado eficientemente, em um controlador lógico programável (CLP), utilizando o padrão de programação IEC 61131-3 abordado em [30].

Os CLPs são, de longe, os controladores mais aceitos na indústria, pois eles oferecem um sistema confiável e robusto, são relativamente simples de programar e incluem interface de entrada e saída dedicadas, comunicação, expansão de memória, entre outros. Além disso, os CLPs atuais oferecem a vantagem de permitir a monitoração on-line do programa. Análises de mercados confiáveis foram realizadas revelando a tendência crescente nas vendas desse hardware [15].

Existem diversos tipos de CLPs, que cobrem amplo aspecto de tarefas, desde pequenos computadores e unidades compactas distribuídas até sistemas modulares, tolerantes a falha e de alto desempenho. Eles diferem em características de desempenho tais como: velocidade de processamento, capacidade de memória, seleção de módulos de Entrada/Saída, entre outros.

A.1 O padrão de programação IEC 61131-3

O padrão IEC 61131-3 estabelece cinco linguagens, sendo três linguagens gráficas e duas linguagens textuais para implementação de programas. As linguagens gráficas são:

- **Diagrama Ladder (LD)**: formada por elementos booleanos (contatos e bobinas), similar aos circuitos controlados por relé. A lógica ladder, portanto, possui interpretação visual intuitiva e é fácil de entender e diagnosticar;
- **Diagrama de Blocos Funcionais (FBD)**: conexão gráfica de blocos aritméticos, booleanos e outros elementos funcionais;
- **Mapa de Sequência Funcional (SFC)** (versão gráfica): derivada a partir das técnicas conhecidas como Redes de Petri, descreve os programas pela definição de quais ações devem ser habilitadas ou desabilitadas ou terminadas em um dado instante. Geralmente utilizada com o propósito de estruturar os programas no CLP.

As linguagens textuais são:

- **Lista de Instrução (IL)**: linguagem de baixo nível orientada à máquina, é frequentemente utilizada como uma linguagem intermediária comum na qual as outras linguagens textuais e gráficas são geralmente traduzidas;
- **Texto Estruturado (ST)**: linguagem de alto nível, similar à linguagem C, que permite rotinas de controle, bem como cálculos matemáticos complexos;

De acordo com [30], as principais vantagens do uso das linguagens de programação estabelecidas pelo padrão IEC 61131-3 são: conveniência e segurança com variáveis e tipos de dados; blocos de funções com amplas capacidades; linguagens de programação uniformes; programas bem estruturados, i.e., criação de rotinas e subrotinas. Com relação aos tipos de dados pré-definidos, o programador pode criar matrizes e outras estruturas complexas de dados de acordo com a aplicação, por meio das linguagens de alto nível.

A.2 A implementação dos Algoritmos

Conforme observado por [15], alguns parâmetros críticos para implementação de MPC devem ser considerados. Limitação de alocação de matrizes na memória, limitação na capacidade de cálculo, por exemplo, operações rotineiras com matrizes não são realizados facilmente, como transposição, inversão e multiplicação, é necessário codificar tais funções, o que é possível através da linguagem de Texto Estruturado, embora não seja uma tarefa trivial. Abaixo, pode-se verificar a lista de tipos de dados definidos pela norma IEC 61131-3:

Tipo	Descrição	Range
BOOL	1 bit booleano	0 – 1
SINT	1 byte inteiro	–127 a +128
INT	2 bytes inteiros	–32, 768 a 32, 767
DINT	4 bytes inteiros	–2, 147, 483, 648 a 2, 147, 483, 648
REAL	4 bytes ponto flutuante	$3.402823e^{38}$ a $-1.1754944e^{-38}$; 0 e $1.1754944e^{-38}$ a $3.402823e^{38}$

Tabela A.1: Lista do tipos de dados definidos pela norma IEC 61131-3.

A metodologia proposta em [15] para implementação de um MPC auto-ajustável do tipo GPC (Controle Preditivo Generalizado) em um CLP inclui cálculos complexos para determinação do controle ótimo, já que todos os cálculos matriciais complexos são executados no CLP, além da simulação da planta e sintonia do MPC. A metodologia descrita neste trabalho é mais simples no sentido de implementação, uma vez que, considera-se a tabela descrita em 4.2.1 e as matrizes do estimador de estados discutido em 2.2 previamente calculadas, evitando assim, cálculos complexos como: transposição e solução de sistemas lineares (inversão de matrizes). Será indicado portanto o caminho para implementação dos algoritmos 1, 2 e 4 por meio do padrão de programação IEC 61131-3; para obter mais detalhes deve ser consultado o conjunto de sintaxes do fabricante do CLP.

De forma a evitar transposição de matrizes durante a otimização, a equação (3.20) será reescrita da seguinte forma:

$$\tilde{c} = \mathcal{W}w_0 + \mathcal{V}v_{-1}$$

sendo $\mathcal{W} = \mathcal{B}^\top \mathcal{Q} \mathcal{A}$ e $\mathcal{V} = \mathcal{D}^\top \mathcal{R} \mathcal{Q}$, onde $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ e $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^N$ calculados de forma off-line.

A seguir são listadas as matrizes pré-cálculadas e inseridas nas rotinas e subrotinas correspondentes no programa do CLP.

Matriz	Módulo
A, B, C, L_x, L_d	Estimador de Estados e Distúrbio
$M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$	Cálculo de Alvo Irrestrito
G_1, G_2, G_3	Cálculo de Alvo Restrito
$\mathcal{W}, \mathcal{V}, H, A_i, B_i, K_i$	Otimização Dinâmica

Tabela A.2: Lista de Matrizes calculadas off-line para cada módulo do MPC-P.

O programa desenvolvido no CLP seguirá o fluxograma descrito na figura A.1:

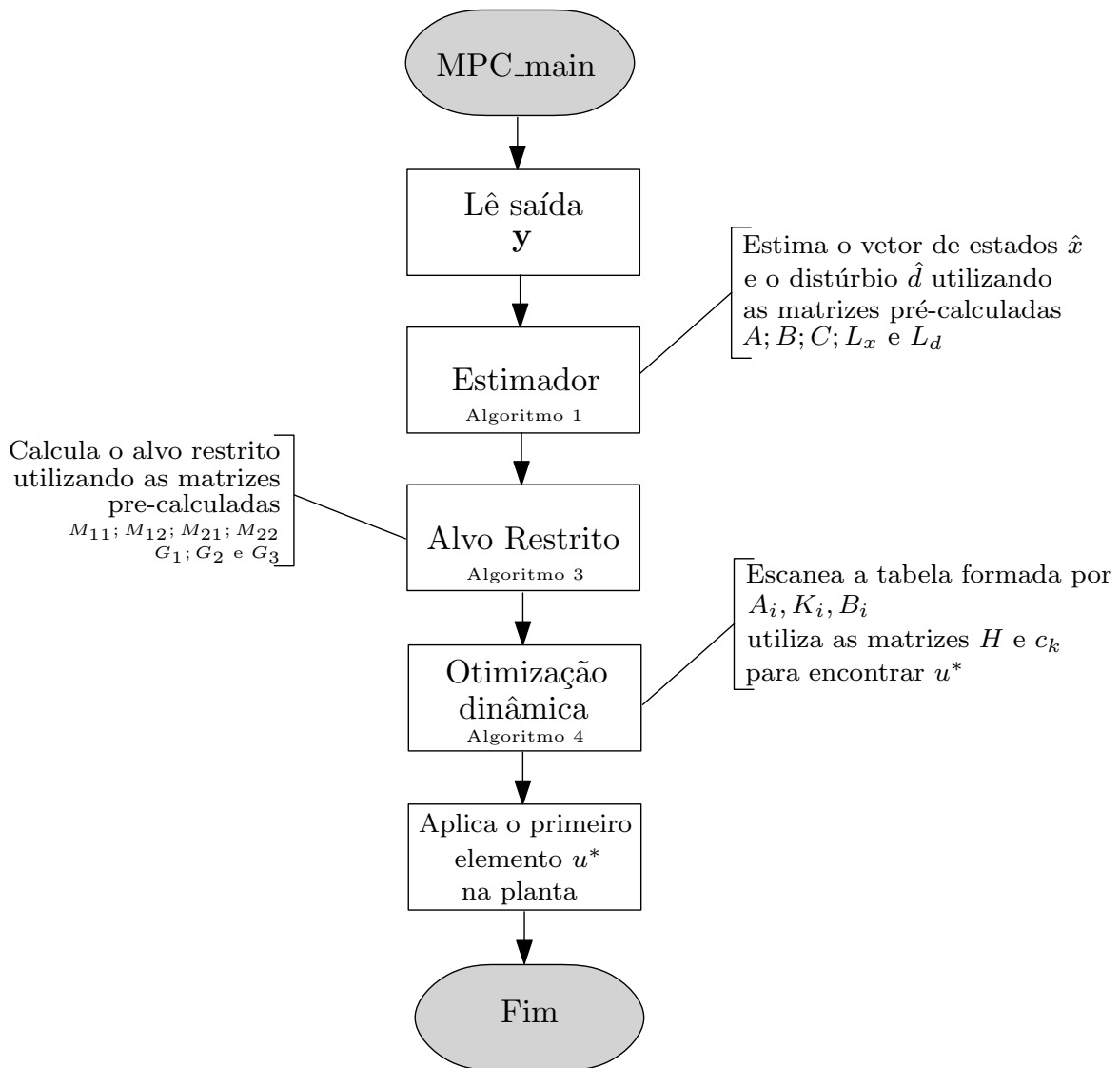


Figura A.1: Fluxograma do Progama do CLP.

O programa poderá ser composto pelas rotinas resumidas na tabela A.3, detalhadas a seguir.

	Nome da Rotina	Linguagem de Programação
1	MPC-P_MAIN	Logica Ladder
2	FORMATACAO_MATRIZES	Texto Estruturado
3	MULTIPLICACAO_MATRIZES	Texto Estruturado
4	ESTIMADOR	Texto Estruturado
5	ALVO_RESTRITO	Texto Estruturado
6	OTIMIZACAO	Texto Estruturado

Tabela A.3: Rotinas e linguagens de programação para implementação do MPC-P.

MPC-P_MAIN. É a rotina principal do programa e tem como objetivo controlar a execução do mesmo, além de chamar as subrotinas. Programada em Ladder, pode ser utilizado para realizar a leitura da variável controlada y e enviar o sinal de controle u^* para a planta por meio dos cartões de I/O analógicos. Entre a leitura da saída da planta e o envio da entrada de controle para a saída, as subrotinas são invocadas conforme fluxograma mostrado na figura A.1.

FORMATACAO_MATRIZES. Essa subrotina é chamada pelo MPC-P_MAIN com o objetivo de realizar operações necessárias nas matrizes para que as mesmas sejam utilizadas nos subrotinas posteriores. É executada somente uma vez, na inicialização do programa. Após a sua execução, a mesma é desabilitada. Aqui podem ser feita todas as declarações das matrizes descritas na tabela A.2. A linguagem de texto estruturado é a mais indicada devido à vantagem dessa linguagem em realizar cálculos matemáticos.

ESTIMADOR. Será utilizada para implementar o filtro de kalman que irá estimar os estados da planta e o distúrbio, conforme algoritmo 2.2. A implementação desta subrotina deverá ser feita utilizando texto estruturado, devido à facilidade em programar as equações de recorrência. Essa rotina será chamada a cada laço de execução do MPC-P_MAIN, i.e., a cada rotina de execução do programa principal. As operações realizadas serão: soma, subtração, multiplicação escalar e matricial.

ALVO_RESTRITO. Essa subrotina tem o objetivo de calcular os alvos para o controlador MPC-P, implementando-se o algoritmo 2, a partir da linguagem de texto estruturado. As operações realizadas aqui são: comparação, soma, e multiplicação matricial. O laço IF poderá ser usado para realizar as comparações necessárias.

OTIMIZACAO. Nessa subrotina, o problema quadrático será resolvido. É a rotina mais complexa do programa, pois envolve a consulta à tabela, gerada off-line, por meio do algoritmo 4 a cada laço de execução do programa principal. Utilizará laços de FOR para varrer a tabela de acordo com o horizonte de controle N e laços IF para realizar comparações. As operações realizadas operações são comparação, subtração, soma e multiplicação de matrizes.

MULTIPLICACAO_MATRIZES. Essa subrotina será invocada sempre que uma matriz necessitar ser multiplicada por outra matriz, vetor, ou escalar e vice-versa. Já que o CLP não possui comandos para realização de multiplicação matricial, o mesmo deverá ser implementado do zero. Sendo portanto, programada em texto estruturado.

A.2.1 Discutindo o caso $N = 3$

Suponha um horizonte de controle $N = 3$ e um sistema de segunda ordem, i.e., $n = 2$, portanto, as matrizes teriam as seguintes dimensões, especificadas na tabela A.4:

Matriz	Dimensão
A	$\mathbb{R}^{2 \times 2}$
B	$\mathbb{R}^{1 \times 2}$
C	$\mathbb{R}^{2 \times 1}$
L_x	\mathbb{R}^2
L_d	\mathbb{R}^1
M_{11}, M_{12}	\mathbb{R}^2
M_{21}, M_{22}	\mathbb{R}^1
G_1, G_2, G_3	\mathbb{R}^2
\mathcal{W}	$\mathbb{R}^{3 \times 2}$
\mathcal{V}	$\mathbb{R}^{3 \times 1}$
H	$\mathbb{R}^{3 \times 3}$

Tabela A.4: Lista de Matrizes calculadas off-line e suas dimensões, para o caso $N = 3$ e $n = 2$.

A_i, B_i, K_i , são tabelas compostas por 27 matrizes de ordem 5×3 , 3×1 e 3×3 , respectivamente, utilizadas na solução do problema quadrático com restrição, conforme

discutido no capítulo 4. O problema da implementação do MPC-P em hardware de controle foi abordado anteriormente, e refere-se à limitação do CLP em realizar cálculos matriciais complexos, tais como: transposição e inversão de matrizes, com exceção dos cálculos unidimensionais, cálculos multidimensionais devem ser programados do zero por meio dos recursos disponíveis pela linguagem estruturada, conforme estabelece o padrão de programação IEC 61131-3.

Essa tarefa ser implementada de forma mais eficaz através da utilização de “arrays”. Um “array” pode ser acessado com o auxílio de um índice dentro dos limites especificados pelo fabricante do CLP. Como o objetivo deste trabalho é implementar um MPC-P de forma eficiente no CLP, “arrays” podem ser utilizadas para implementação das matrizes nas subrotinas do CLP.

De acordo com [30], há alguns parâmetros importantes que devem ser observados para implementação do MPC com relação ao uso dos arrays, a saber: o número máximo de elementos em array (número de índices) e o tamanho do array (número de bytes). Portanto, o CLP escolhido para implementação deve satisfazer tais critérios, que dependem das matrizes da tabela A.4. Abaixo tem-se o exemplo de um array de uma dimensão:

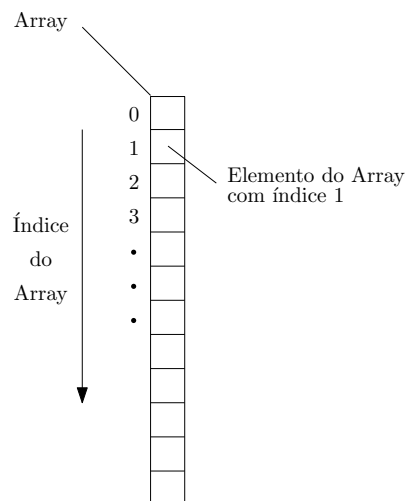


Figura A.2: Ilustração de um elemento de um array de uma dimensão.

De acordo com [15], em alguns CLPs os arrays podem ter até três dimensões, onde o número total de elementos é o produto do número de elementos em cada

dimensão, permitindo que sejam endereçados um maior número de elementos em um mesmo array, que podem ser utilizados para implementar as matrizes especificadas na tabela A.4.