



CONTROLE ROBUSTO SUAVE APLICADO AO POUSO DE QUADRIRROTORES

Paulo Roberto Yamasaki Catunda

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Alessandro Jacoud Peixoto

Rio de Janeiro
Março de 2016

CONTROLE ROBUSTO SUAVE APLICADO AO POUSO DE
QUADRIRROTORES

Paulo Roberto Yamasaki Catunda

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Alessandro Jacoud Peixoto, D.Sc.

Prof. Anna Carla Monteiro de Araujo, D.Sc.

Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha, D.Sc.

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2016

Catunda, Paulo Roberto Yamasaki

Controle Robusto Suave Aplicado ao Pouso de
Quadrirrotores/Paulo Roberto Yamasaki Catunda. – Rio
de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

XVII, 154 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Alessandro Jacoud Peixoto

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de
Engenharia Elétrica, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 103 – 115.

1. Quadrirrotor. 2. VANT. 3. Controle Robusto.
4. SSC. 5. Pouso. I. Peixoto, Alessandro Jacoud.
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE,
Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

Aos meus pais e à minha família.

Agradecimentos

Aos meu pais, Toshiko Yamasaki e Rubem Marcos Catunda, e minha família por terem permitido que este trabalho se concretizasse.

Ao meu orientador, Alessandro Jacoud Peixoto, pela sua confiança, dedicação e paciência infinita.

Ao companheiro de residência, Aluizio Netto, pelo convívio e dicas de grande valor nos aspectos experimentais.

A minha namorada Natália Pimentel pela compreensão e pelo tempo compartilhado.

Aos integrantes da Equipe Hefestos UFRJ, em especial aos que me acolheram no início das atividades no laboratório, Gabriel Lira, Gabriel Ribeiro, José Monteiro, Lívia Paravidino e Raphael Parreira.

A todos os habitantes do laboratório LABECA por levantarem meu ânimo diariamente e em especial ao Rafael Accácio Nogueira, pela colaboração contínua em assuntos gerais.

Aos amigos Rafael Faria, Fernando Venceslau, Fernanda Duarte, Felipe Senra e André Figueiró, pelo compartilhamento de ideias e convívio diário.

Aos professores José Paulo Vilela Soares da Cunha, Anna Carla Monteiro de Araujo e Ramon Romankevicius Costa por suas recomendações e correções.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos de Mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTROLE ROBUSTO SUAVE APLICADO AO POUSO DE QUADRIRROTORES

Paulo Roberto Yamasaki Catunda

Março/2016

Orientador: Alessandro Jacoud Peixoto

Programa: Engenharia Elétrica

Neste trabalho, o problema de pouso autônomo de um quadricóptero em uma plataforma que oscila verticalmente é abordado. Um esquema de controle adaptativo robusto de altitude é proposto, baseado no controle suave por modos deslizantes, para lidar com o efeito aerodinâmico denominado *Efeito Solo* e com a variação de massa durante a tarefa de captação/liberação de carga. A análise de estabilidade assumindo a disponibilidade da velocidade vertical para realimentação é apresentada. No caso onde o *Efeito Solo* pode ser parametrizado, o algoritmo de Mínimos Quadrados Normalizados (NLS) é utilizado para estimar os parâmetros desconhecidos. Sendo assim, um controlador proporcional derivativo com ganhos variantes no tempo é desenvolvido com base no algoritmo NLS. Para o controle de posição e orientação do quadricóptero é empregada uma abordagem de controle hierárquico com uma malha interna e uma malha externa. A malha interna controla a orientação do veículo, enquanto a malha externa controla a posição ao longo de uma trajetória. Controladores do tipo proporcional derivativo juntamente com parcela antecipativa e linearização por realimentação são considerados. Além disso, é desenvolvido um modelo não-linear de um quadricóptero seguindo os formalismos de Newton-Euler e de Euler-Lagrange para corpos rígidos. As aproximações tradicionalmente utilizadas no desenvolvimento dos modelos são avaliadas. Os desempenhos dos métodos propostos são ilustrados por meio de simulações numéricas e resultados experimentais obtidos com o quadricóptero e a bancada experimental desenvolvidos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SMOOTH ROBUST CONTROL APPLIED TO QUADROTOR LANDING

Paulo Roberto Yamasaki Catunda

March/2016

Advisor: Alessandro Jacoud Peixoto

Department: Electrical Engineering

In this work the problem of autonomous landing of a quadrotor on a vertically oscillating platform is addressed. It is proposed an adaptive robust altitude control scheme based on a smooth sliding mode controller to deal with the aerodynamic *Ground Effect* and the mass variation during a pick and place task. The stability analysis assuming that velocity is available for feedback is provided. For the case where the *Ground Effect* can be parameterized, a Normalized Least Squares (NLS) algorithm is used for estimate the unknown parameters. In this case, a proportional derivative controller with time-varying gains is developed based on the NLS algorithm. For position and attitude control a hierarchical control approach which is common for quadrotors is employed in two nested loops. The inner loop is the vehicle attitude control, while the outer loop is the position control along a trajectory. Proportional derivative type controllers along with feedforward and feedback linearization are considered. In addition, it is developed a nonlinear model of a quadrotor following the Newton-Euler and Euler-Lagrange formalisms for rigid bodies. The traditional approximations used in the development of the models are evaluated. The performance of the proposed methods are illustrated through numerical simulations and experimental results obtained with the developed quadrotor and experimental setup.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xvi
Lista de Abreviaturas	xvii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	3
1.2 Revisão da Literatura	4
1.3 Conceitos Básicos	8
1.4 Objetivos	11
1.5 Notação e Terminologia	12
1.6 Visão Geral da Dissertação	13
2 Modelagem do Quadrirrotor	14
2.1 Atuador	15
2.2 Corpo Rígido	17
2.3 Modelo Não-Linear Aproximado	19
2.3.1 Dinâmica da Orientação Aproximada: Modelo I	19
2.3.2 Dinâmica da Orientação Aproximada: Modelo II	20
2.4 Modelo Linearizado	22
2.5 Conclusão	23
3 Controle de Posição e Orientação do Quadrirrotor	25
3.1 Formulação do Problema	26
3.1.1 Particionamento da Dinâmica do Quadrirrotor	27
3.1.2 Objetivo de Controle	28
3.1.3 Topologia Tradicional de Controle de Quadrirrotores	29
3.2 Linearização por Realimentação	31
3.2.1 Dinâmica Rotacional	31
3.2.2 Dinâmica Translacional	33
3.3 Realimentação de Estado: Modelo Linearizado	35

3.3.1	Controle via Realimentação Linear de Estado	35
3.4	Controle PD	36
3.4.1	PD sem Realimentação de Velocidade	37
3.5	Simulações Numéricas	38
3.5.1	Avaliação da Relevância da Velocidade Líquida Ω_R	38
3.5.2	Desempenho dos Controladores	39
3.6	Conclusão	44
4	Pouso em uma Plataforma que Oscila Verticalmente	49
4.1	Formulação do Problema com Efeito Solo	50
4.1.1	Objetivo de Controle	52
4.2	Controle Adaptativo Robusto	53
4.3	Controle Suave por Modos Deslizantes	57
4.3.1	O SSC como um Controle Adaptativo Robusto	60
4.4	Simulações Numéricas	61
4.5	Reformulando o Problema: Particularização do Efeito Solo	66
4.5.1	Estimador por Mínimos Quadrados Normalizado	68
4.5.2	Estimando Massa e Efeito Solo	69
4.5.3	Controlador PD Variante no Tempo	71
4.5.4	Proposta de Reinicialização do Estimador	73
4.5.5	Simulações Numéricas	73
5	Hardware, Software e Experimentos	77
5.1	Descrição do <i>Hardware</i>	77
5.1.1	Estrutura Mecânica Sem Proteção e Limitada por Cabos	77
5.1.2	Estrutura Mecânica Com Proteção para os Rotores	79
5.1.3	Atuadores	79
5.1.4	Sensores	80
5.1.5	Eletrônica Embarcada	81
5.1.6	Comunicação	81
5.2	<i>Software</i> Embarcado	81
5.2.1	Filtro Complementar (ϕ e θ) e Sonar Ultrassônico (z)	81
5.2.2	Rotinas de Controle e Telemetria	83
5.3	Estimador de Posição (x , y e ψ)	83
5.4	Interface Gráfica	84
5.5	Experimentos Preliminares	86
5.5.1	Ensaio de Orientação: <i>Roll</i> e <i>Pitch</i>	86
5.5.2	Ensaio de Rumo: <i>Yaw</i>	87
5.5.3	Ensaio de Altitude: z	89
5.6	Experimentos de Voo	90

5.6.1	Regulação de Rumo	92
5.6.2	Rastreamento de Rumo	95
5.7	Conclusão	96
6	Considerações Finais e Discussões	99
6.1	Propostas para Trabalhos Futuros	101
	Referências Bibliográficas	103
A	Contribuição	117
B	Orientação de Corpo Rígido	118
B.1	Rotações Elementares	118
B.1.1	Interpretações da Matriz de Rotação	119
B.1.2	Composição de Matrizes de Rotação	119
B.2	Rotação ZYZ	121
B.3	Roll-Pitch-Yaw (Jogo-Arfagem-Rumo)	122
B.4	Jacobianos	123
C	Modelo de um Quadrirrotor: Newton-Euler	124
C.1	Atuador: Momento Angular	126
C.2	Atuador: Momento Linear	128
C.3	Estrutura: Momento Angular	129
C.4	Estrutura: Momento Linear	132
D	Equações de Euler-Lagrange para um Corpo Rígido	134
D.1	Demonstração do Teorema 5	137
D.2	Demonstração do Teorema 6	138
E	Modelo de um Quadrirrotor: Euler-Lagrange	141
E.1	Rotina Desenvolvida em <i>Matlab</i>	143
F	Teoremas Auxiliares	148
F.1	Centro de Massa de um Corpo Rígido	148
F.2	Energia Cinética de um Corpo Rígido	148

Lista de Figuras

1.1	Versões dos quadrirrotores desenvolvidos.	1
2.1	Desenho dos empuxos (T) e velocidades angulares dos rotores (Ω) e a distância (d) dos rotores no sistema de coordenadas corpo (XYZ). . .	14
3.1	Topologia de controle utilizada formada por uma malha interna (orientação) e uma malha externa de posição e duas malhas desacopladas, uma para altitude e outra para o rumo do quadrirrotor.	30
3.2	Simulação da avaliação da relevância da velocidade líquida Ω_R . Exemplo com referência de posição senoidal. Sinais de saída x , y , z e ψ da planta modelo completo (linha azul) e da planta aproximada (linha verde) e suas respectivas referências x_r , y_r , z_r e ψ_r (linhas tracejadas em vermelho).	39
3.3	Simulação da avaliação da relevância da velocidade líquida Ω_R . Exemplo com referência de posição senoidal. Sinais de saída ϕ e θ da planta modelo completo (linha azul) e da planta aproximada (linha verde) e suas respectivas referências ϕ_r e θ_r (linhas tracejadas em vermelho).	40
3.4	Simulação da avaliação da relevância da velocidade líquida Ω_R . Exemplo com referência de posição em degrau. Sinais de saída x , y , z e ψ da planta modelo completo (linha azul) e da planta aproximada (linha verde) e suas respectivas referências x_r , y_r , z_r e ψ_r	40
3.5	Simulação da avaliação da relevância da velocidade líquida Ω_R . Exemplo com referência de posição em degrau. Sinais de saída ϕ e θ da planta modelo completo (linha azul) e da planta aproximada (linha verde) e suas respectivas referências ϕ_r e θ_r (linhas tracejadas em vermelho)	41
3.6	Controle I: sinais de saída x , y , z e ψ (linha azul) e suas respectivas referências (linha vermelha tracejada).	43
3.7	Controle I: sinais de erro de rastreamento x_e , y_e , z_e e ψ_e	43
3.8	Controle I: sinais de controle F_z , M_x , M_y e M_z	44

3.9	Controle II: sinais de saída x , y , z e ψ (linha azul) e suas respectivas referências (linha vermelha tracejada).	44
3.10	Controle II: sinais de erro de rastreamento x_e , y_e , z_e e ψ_e .	45
3.11	Controle II: sinais de controle F_z , M_x , M_y e M_z .	45
3.12	Controle III: com a planta linearizada. Sinais de saída x , y , z e ψ (linha azul) e suas respectivas referências (linha vermelha tracejada).	46
3.13	Controle III: com a planta linearizada. Sinais de erro de rastreamento x_e , y_e , z_e e ψ_e .	46
3.14	Controle III: com a planta linearizada. Sinais de controle F_z , M_x , M_y e M_z .	47
3.15	Controle III: com o modelo (3.1). Sinais de saída x , y , z e ψ (linha azul) e suas respectivas referências (linha vermelha tracejada).	47
3.16	Controle III: com o modelo (3.1). Sinais de erro de rastreamento x_e , y_e , z_e e ψ_e .	48
3.17	Controle III: com o modelo (3.1). Sinais de controle F_z , M_x , M_y e M_z .	48
4.1	Esquemático da planta destacando a variável auxiliar σ .	54
4.2	Topologia do Controle Suave por Modos Deslizantes (<i>SSC - Smooth Sliding Control</i>).	57
4.3	Resultados de simulação. Rastreamento: (a) altura z_d [m] da plataforma (verde tracejado), trajetória desejada z_r [m] (vermelho), altura z [m] do quadricóptero considerando o controlador adaptativo robusto (azul pontilhado), altura z [m] considerando o controlador <i>SSC</i> (magenta ponto traço); (b) Ampliação para ilustrar os efeitos da variação de massa em $t = 30$ s.	63
4.4	Resultados de simulação. (a) Controle F_z [N] considerando o controlador adaptativo robusto e (b) Controle F_z [N] considerando o <i>SSC</i> (magenta).	64
4.5	Resultados de simulação. Sinais auxiliares dos controladores: (a) Parâmetro θ [kg] adaptado (magenta) e o correspondente valor real θ^* [kg] (azul pontilhado), (b) superfície de deslizamento $\tilde{\sigma}$ do <i>SSC</i> e (c) ampliação do gráfico (b).	64
4.6	Resultados de simulação. Controlador AR com parcela adaptativa. Sem presença de efeito solo. Sinais de altitude z (azul) e referência z_r (vermelho pontilhado).	65
4.7	Resultados de simulação. Controlador AR com parcela adaptativa. Sem presença de efeito solo. Sinais de controle F_z e respectivo F_z valor médio.	65

4.8	Resultados de simulação. Controlador AR com parcela adaptativa. Sem presença de efeito solo. Parâmetros de adaptação θ^* (vermelho pontilhado) e θ (azul). Sinal de perturbação d proveniente da adaptação de θ	66
4.9	Resultados de simulação. Sem presença de efeito solo. Controlador AR sem parcela adaptativa. Sinais de altitude z (azul) e referência z_r (vermelho pontilhado).	67
4.10	Resultados de simulação. Controlador SSC com parcela adaptativa. Na presença de efeito solo e variação de massa. Sinais de altitude z (azul) e referência z_r (vermelho pontilhado).	68
4.11	Resultados de simulação. Controlador SSC com parcela adaptativa. Na presença de efeito solo e variação de massa. Sinais de altitude z (azul) e referência z_r (vermelho pontilhado).	69
4.12	Resultados de simulação. Controlador SSC com parcela adaptativa. Na presença de efeito solo e variação de massa. Sinais de altitude z (azul) e referência z_r (vermelho pontilhado).	70
4.13	Resultados de simulação. Trajetória desejada z_r (vermelho traço ponto), altura z_d da plataforma (verde tracejado), altura do quadricóptero considerando o controlador PD+NLS (z_1 azul escuro) e altura do quadricóptero considerando um controlador PD com ganhos fixos (z_2 azul claro pontilhado).	75
4.14	Resultados de simulação. Sinais de erro de rastreamento. Com relação a z_1 (PD+NLS, azul) e com relação a z_2 (PD, vermelho pontilhado)	75
4.15	Resultados de simulação. Sinais de controle F_{z_1} (PD+NLS, azul) e F_{z_2} (PD, vermelho pontilhado).	76
4.16	Resultados de simulação. Sinais do Estimador NLS: (a) Massa estimada \hat{m} (azul) e massa teórica m (vermelho pontilhado), (b) Parâmetro estimado $\hat{\rho}$ (azul) e parâmetro teórico ρ (vermelho pontilhado).	76
5.1	Quadricóptero com componentes em evidência. Em (a) Motor, (b) Hélices, (c) ESC, (d) ARM, (e) IMU, (f) Sonar Ultrassônico, (g) Bateria de LiPo, (h) Hastes em alumínio e (i) Estrutura central em plástico.	78
5.2	Esquemático geral de conexão dos componentes de <i>hardware</i>	78
5.3	Peça central do quadricóptero em plástico ABS	79
5.4	Quadricóptero com proteção para os rotores.	80
5.5	Esquemático do Filtro Complementar.	82

5.6	Fluxograma geral das rotinas de controle e telemetria.	84
5.7	Visão superior dos marcadores coloridos no quadricóptero.	85
5.8	Interface de Usuário em Labview	85
5.9	Esquemático do experimento de caracterização da dinâmica de orientação (<i>roll</i> e <i>pitch</i>).	86
5.10	Experimento de caracterização da dinâmica de orientação. Ângulo <i>pitch</i> θ (azul) e correspondente referência θ_r (vermelho tracejado), onda quadrada com amplitude de 5°	87
5.11	Experimento de caracterização da dinâmica de orientação. Ângulo de <i>pitch</i> (θ - azul) e correspondente referência (θ_r - vermelho) onda quadrada com amplitude de 10°	88
5.12	Esquemático do experimento de caracterização da dinâmica rotacional do rumo (<i>yaw</i>).	88
5.13	Experimento de caracterização da dinâmica de orientação. Ângulo de <i>pitch</i> θ (azul) e correspondente referência θ_r (vermelho tracejado), onda quadrada com amplitude de 10°	89
5.14	Experimento de altitude, posição x (azul) e correspondente referência x_r (vermelho tracejado). Detalhe em $t \approx 9$ correspondente a falha na detecção do marcador colorido.	90
5.15	Experimento de altitude, posição y (azul) e correspondente referência y_r (vermelho tracejado). Detalhe em $t \approx 9$ e $t \approx 14$ correspondente a falha na detecção do marcador colorido.	91
5.16	Experimento de altitude, ângulo de <i>roll</i> ϕ (azul) e correspondente referência ϕ_r (vermelho tracejado). Detalhe em $t \approx 9$ e $t \approx 14$ correspondente a falha na detecção do marcador colorido.	91
5.17	Experimento de altitude, ângulo de <i>pitch</i> θ (azul) e correspondente referência θ_r (vermelho tracejado).	92
5.18	Experimento de altitude, posição z (azul) e correspondente referência z_r (vermelho tracejado).	92
5.19	Experimento de altitude, trajetória experimental x , y e z	93
5.20	Experimento de regulação de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente e com controle de orientação PD. Sinais de posição x (azul) e de referência x_r (vermelho tracejado). Ângulo θ (azul) e respectivo valor médio (em verde tracejado) e controle θ_r (vermelho traço ponto).	93

5.21	Experimento de regulação de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente e com controle de orientação PD. Sinais de posição y (azul) e de referência y_r (vermelho tracejado). Ângulo ϕ (azul), respectivo valor médio (em verde tracejado) e controle ϕ_r (vermelho traço ponto).	94
5.22	Experimento de regulação de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente e com controle de orientação PD. Sinais de rumo ψ (azul), referência ψ_r (vermelho tracejado). Controle M_z (azul). . . .	94
5.23	Experimento de regulação de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente e com controle de orientação PD. Sinais de altura z (azul) e do <i>offset</i> do sensor ultrassônico de altitude (verde tracejado). Controle F_z (azul) e produto $F_z k_h$ (azul).	95
5.24	Experimento de rastreamento de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente pelo operador e com controle de orientação pelo PD interno. Sinais de posição x (azul) e referência x_r (vermelho tracejado). Ângulo θ (azul) e referência θ_r (vermelho tracejado). . . .	96
5.25	Experimento de rastreamento de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente pelo operador e com controle de orientação pelo PD interno. Sinais de posição y (azul) e referência y_r (vermelho tracejado). Ângulo ϕ (azul) e referência ϕ_r (vermelho tracejado). . . .	96
5.26	Experimento de rastreamento de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente pelo operador e com controle de orientação pelo PD interno. Sinais de posição z (azul) e <i>offset</i> do sensor ultrassônico (verde tracejado). Controle F_z (azul) e produto $F_z k_h$ (azul).	97
5.27	Experimento de rastreamento de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente pelo operador e com controle de orientação pelo PD interno. Sinais de rumo ψ (azul) e referência ψ_r (vermelho tracejado). Controle M_z (azul).	97

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros do Quadrrrotor X4	38
4.1	Parâmetros do modelo do quadrrrotor apresentado em (4.1).	61
4.2	Parâmetros do modelo do quadrrrotor apresentado em (4.1).	73
4.3	Parâmetros do Controle PD	74

Lista de Abreviaturas

ARM	Advanced RISC Machine, p. 81
BEC	Battery Eliminator Circuit, p. 80
EEPROM	Electrically Erasable Programmable Read-Only Memory, p. 81
ESC	Electronic Speed Controller, p. 79
FPU	Floating Point Unit, p. 81
IMU	Inertial Measurement Unit, p. 7
LABECA	Laboratório de Engenharia de Controle e Automação, p. 4
LiPo	Lithium polymer, p. 79
MRAC	Model Reference Adaptive Control, p. 6
NLS	Normalized Least-Squares, p. 8
PD	Proporcional Derivativo, p. 7
PWM	Pulse Width Modulation, p. 80
SRAM	Static random-access memory, p. 81
UART	Universal Asynchronous Receiver/Transmitter, p. 81
VANTs	Veículos Aéreos Não-Tripulados, p. 1
VTOL	Vertical Take-Off and Landing, p. 1

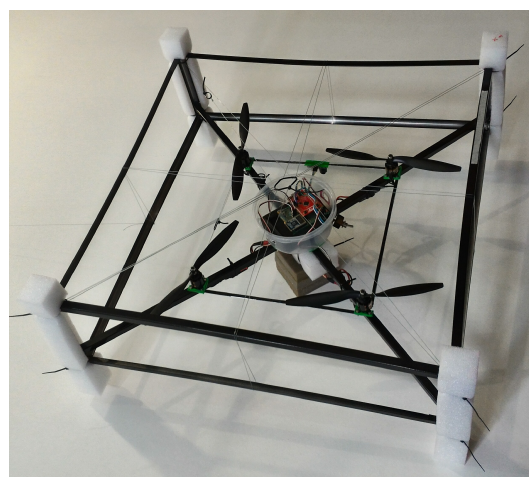
Capítulo 1

Introdução

O estudo de Veículos Aéreos Não-Tripulados (VANTs) tem tido um crescimento rápido e novos interesses e aplicações tem emergido regularmente deste campo. Pode-se dizer que alguns dos fatores responsáveis são os avanços tecnológicos na área de microeletrônica que permitiram o desenvolvimento de circuitos de controle com possibilidade de embarcação em microaeronaues. De forma geral, o campo de estudos de Robótica Aérea apresentou um grande crescimento e popularização na última década, em particular no que se refere ao controle de quadricópteros – uma categoria de aeronaves do tipo *Vertical Take-Off and Landing* (VTOL) de asa rotativa, com quatro rotores dispostos geralmente de forma simétrica e usualmente montados nas extremidades de uma estrutura em forma de cruz, como pode ser observado no quadricóptero desenvolvido neste trabalho e ilustrado nas Figuras 1.1(a) e 1.1(b). Os quadricópteros são aeronaves versáteis por serem capazes de decolar e



(a) Versão sem estrutura de proteção.



(b) Versão com estrutura de proteção.

Figura 1.1: Versões dos quadricópteros desenvolvidos.

aterrissar verticalmente (VTOL), pairar no ar (*hovering*), girar em torno de seu eixo

vertical, se moverem lateralmente e longitudinalmente em avanço e recuo. Além disso, constituem uma plataforma popular devido a sua simplicidade estrutural, facilidade de manutenção e reparo, entre outros fatores. A disposição simétrica dos rotores os atribui simplicidade mecânica quando comparados aos helicópteros convencionais. De fato, o rotor de cauda encontrado em helicópteros convencionais e o aparato mecânico utilizado para variar o ângulo de ataque das hélices podem ser substituídos no caso do quadrirrotor por quatro rotores com ângulo fixo de ataque das hélices, reduzindo a quantidade de partes móveis e a necessidade de manutenção. Esta substituição possibilita a redução das dimensões das hélices tornando o veículo mais seguro, leve e compacto e com excelentes propriedades associadas ao voo pairado (*hovering*) [1, 2].

Com a tecnologia atual, a modulação do empuxo é frequentemente feita pela variação da velocidade de rotação dos rotores. Entretanto, pode-se encontrar quadrirrotores com atuação no ângulo de ataque das hélices, permitindo inverter o sentido do empuxo gerado mantendo a rotação da hélice com velocidade constante, o que resulta numa maior manobrabilidade do veículo [3, 4], em um aumento da capacidade de variação de empuxo e dos limites de saturação da ação de controle. Os multirrotores que apresentam mais de quatro rotores geralmente estão associados à necessidade de uma maior capacidade de carga (*payload*) e robustez com respeito a falha nos atuadores (redundância).

O *Estado da Arte* de quadrirrotores pode ser brevemente caracterizado por robôs com uma ampla faixa de dimensão física, capazes de executar manobras e malabarismos inusitados, com autonomia significativa e equipados com uma gama de sensores e algoritmos de navegação. Os quadrirrotores atuais já possuem autonomia e capacidade de carga suficientes para aplicações comerciais, como por exemplo o modelo AR.Drone [5] com tempo médio de voo de 36 minutos. Do ponto de vista das aplicações, destacam-se pesquisas relacionadas com: exploração e mapeamento de ambientes tridimensionais, transporte de pequenas cargas, manipulação de objetos e manobras acrobáticas [6]. Neste sentido, diversos centros de pesquisa vêm desenvolvendo seus próprios modelos de quadrirrotores, como por exemplo: o quadrirrotor *OS4* do laboratório de Sistema Autônomos da Escola Politécnica Federal de Lausana [7], o *STARMAC* da Universidade de Stanford [8] e o *X-4 Flyer Mark III* da Universidade Nacional da Austrália [2, 9]. Em especial, deve-se destacar o laboratório do Instituto Federal de Tecnologia de Zurique, denominado de *Flying Machine Arena*, local dedicado a experimentação com veículos aéreos tendo quadrirrotores como principal foco de pesquisa [10].

1.1 Motivação

Quadrirrotores tiveram seu desenvolvimento impulsionado pelo surgimento de diversas aplicações. A utilização de quadrirrotores permitiu uma maior eficiência principalmente em tarefas de difícil alcance e no trabalho humano em ambientes hostis e não estruturados. Em geral, as aeronaves em escala reduzida atendem aos requisitos de capacidade de carga útil e autonomia e tem como vantagens adicionais um menor custo e mais agilidade.

Neste contexto, filmagem em locais perigosos ou inacessíveis, vigilância e reconhecimento são aplicações mais divulgadas, entretanto algumas das inúmeras aplicações envolvendo quadrirrotores/multirrotores são:

1. Robótica em Áreas Hostis - quadrirrotores surgem como alternativa para a realização de tarefas em ambientes onde a presença humana é inviável ou arriscada. Como exemplo, na obtenção de informações e mapeamento 3D de terrenos após desastres [11, 12] ou na coleta de imagens durante manifestações populares, etc. Tarefas e atividades repetitivas ou que apresentam riscos para seres humanos como rondas e inspeções [13–15].
2. Robótica Espacial - como uma ideia ainda embrionária pode-se mencionar o possível uso de quadrirrotores para inspecionar a superfície de outros planetas, como Marte [16, 17].
3. Medicina - vale destacar uma aplicação ainda também embrionária que trata do uso de um desfibrilador transportado por um quadrirrotor [18] e a distribuição de remédios em locais de difícil acesso terrestre, como comunidades isoladas na África. Destaca-se também o uso em vigilância sanitária para o mapeamento de potenciais criadouros de mosquitos transmissores de Dengue e da Malária [19] por meio de fotografias aéreas.
4. Agricultura - quadrirrotores são utilizados para pulverização de lavouras [20], para mapeamento térmico visando encontrar locais de potencial vazamento de água, focos de pragas [21] e com larga aplicação em agricultura de precisão [22, 23]. Além de aplicações embrionárias para reflorestamento em escala industrial [24].
5. Educacional - há também aplicações em plataformas educacionais para ensino interdisciplinar de mecatrônica e computação [25, 26].

Dentro dos exemplos de aplicações de quadrirrotores podemos ressaltar ainda as que possuem dispositivos mecânicos adicionais com diferentes propósitos. Como em [27] no qual o dispositivo clássico da área de controle, o pêndulo invertido, foi anexado

a um quadricóptero. Para aplicações do tipo **Captação/Liberação (*pick-and-place*) de carga**, como em [28] e [29], que utiliza um quadricóptero com pêndulo simples, ou em [30] que utiliza um manipulador robótico.

No início de 2013, um Projeto Final de Graduação, CATUNDA e VASCONCELOS [31], foi elaborado no DEL/Poli/UFRJ¹ que tratava do desenvolvimento de um quadricóptero para equipar uma bancada do Laboratório de Engenharia de Controle e Automação (LABECA) da Poli/UFRJ. Posteriormente um Projeto Final de Graduação, GOMES e LEAL [32], foi desenvolvido na FEN/UERJ² abordando o controle de um quadricóptero *Parrot* por servovisão. Além disso, mais recentemente outro Projeto Final de Graduação, MONTEIRO [33] Poli/UFRJ, foi desenvolvido utilizando um quadricóptero da *Parrot* nas instalações da UERJ.

Em particular, a motivação deste trabalho vem da dificuldade de realizar um pouso preciso de quadricópteros em locais móveis como um bote em alto mar, por exemplo. Do ponto de vista acadêmico, a motivação para o desenvolvimento do *hardware* foi a elaboração de uma plataforma experimental educacional para implementação de algoritmos de controle aplicados a quadricópteros. Uma vez que sistemas comerciais similares atualmente podem ter custos proibitivos, planejar e construir um sistema similar com uma fração do valor se mostrou uma alternativa interessante.

1.2 Revisão da Literatura

Nesta seção será apresentado um histórico a fim de situar a contribuição desta Dissertação. Inicialmente apresenta-se uma revisão bibliográfica de aplicações e teoria de controle associados a quadricópteros e, por fim, apresenta-se um resumo da literatura de quadricópteros com foco no problema de pouso/decolagem visando deixar claro o ponto de partida deste trabalho.

Na modelagem de um quadricóptero, alguns autores consideram tanto os efeitos aerodinâmicos que atuam sobre cada hélice individualmente quanto a interferência mútua dos rotores. Porém, se os atuadores estiverem suficientemente distantes uns dos outros e os efeitos giroscópicos forem desprezados, é possível considerá-los desacoplados aos pares. O modelo dinâmico do quadricóptero geralmente é desenvolvido na literatura a partir das equações de Euler-Lagrange ou Newton-Euler aplicadas a um corpo rígido ora livre de efeitos aerodinâmicos secundários [7] e ora com efeitos aerodinâmicos como a distorção da pá do quadricóptero (*blade flapping*) [1, 34, 35]. Além disso, aproximações para ângulos pequenos na orientação [7, 34] e modelos

¹Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação, Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

²Faculdade de Engenharia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

linearizados em um ponto de operação, como o voo pairado (*hovering*) [36–38], vem sendo abordados na literatura.

Em geral, nestes modelos a dinâmica dos atuadores são desprezadas e o sinal de controle é composto pelos momentos em torno do centro de massa do veículo e pela força de sustentação vertical. Entretanto, quando se faz necessário, a dinâmica dos atuadores pode ser levada em consideração [7, 39]. Em particular, em BOUABDALAH *et al.* [7], a modelagem do rotor é obtida para um pequeno motor de corrente contínua (motor CC) com baixa indutância.

Em MAHONY *et al.* [6], um tutorial descreve os fundamentos da dinâmica do quadricóptero e controle para veículos com peso inferior a 1kg . Vale destacar que em HAMEL *et al.* [40] foi proposto um modelo dinâmico para o quadricóptero (*X₄-Flyer*), considerando a dinâmica dos rotores, a aerodinâmica e os efeitos giroscópicos.

Quadricópteros também têm sido utilizados como plataformas de teste para verificação de desempenho de algoritmos de estabilização, posicionamento, rastreamento de trajetórias e de operação autônoma. Nas últimas décadas, um esforço de pesquisa considerável tem sido realizado para identificar uma solução robusta para o problema de rastreamento e para aumentar a autonomia do tempo de voo de quadricópteros.

Dentre os desafios a cerca do controle de quadricópteros destacam-se: o controle de orientação [41], o rastreamento de trajetória e o planejamento de trajetória [42]. A posição, altitude, orientação e rumo do quadricóptero podem ser basicamente controladas por meio da manipulação apropriada da velocidade de rotação de cada hélice. Enquanto em geral o rastreamento de trajetória de altitude (z) e de rumo (ψ) são obtidos por meio de controle independentes entre si, o controle para a orientação (*roll* e *pitch*) e para posição (x, y) é obtido por meio da conjugação de algoritmos de controle em uma topologia hierárquica de malhas aninhadas sendo uma malha externa para a posição e uma malha interna para orientação [7, 30, 38] [39, 43, 44].

Em MAHONY *et al.* [6], um esquema de controle hierárquico, frequentemente encontrado na literatura, é abordado onde o controle da dinâmica do motor (considerada de primeira ordem) é o controle de “nível” mais baixo na hierarquia, seguido do controle de orientação e por fim o controle de posição ao longo de uma trajetória.

Em relação aos esquemas convencionais, dois controladores PID discretos desacoplados (um para o controle do ângulo de *pitch* e outro para o ângulo de *roll*), ambos monovariáveis, foram abordados em [1] visando regulação da orientação do quadricóptero. Outras aplicações com o emprego de controladores PID convencionais podem ser encontradas em [38, 43, 45–48].

Esquemas para rastreamento de saída, via realimentação de estado, foram tratados em [36, 37, 43, 49]. Nesta linha, estratégias baseadas na filosofia do *backstepping* foram projetadas para estabilização da malha interna de orientação [30, 38, 50]. Controle Adaptativo por Modelo de Referência (*Model Reference Adaptive Control* -

MRAC) [51] e estratégias baseadas em redes neurais [52], também foram exploradas na literatura de controle de quadricópteros. Por outro lado, esquemas que utilizam apenas realimentação de saída foram explorados em [52, 53], via redes neurais, e em [54] o controle de orientação foi projetado baseado na representação por *quaternions*.

Dos esquemas adaptativos baseado em modelo para o controle de quadricópteros destacam-se ainda [36, 49, 55] e outras estratégias adaptativas podem ser encontradas em [36, 56], baseadas em redes neurais [57, 58] e em *backstepping* [59, 60].

Abordando separadamente as dinâmicas do corpo rígido e do atuador (rotor), em [40], um controlador foi projetado baseado em funções de *Lyapunov* e a compensação dos efeitos aerodinâmicos (*blade flapping*) é obtida por meio de linearização por realimentação em [35].

De forma geral, controle utilizando servovisão vem ganhando espaço em diversas aplicações como em [61–65]. Em [66] a decolagem e o pouso de um quadricóptero em uma plataforma móvel utilizando IBVS (*image-based visual servoing*) foram considerados em conjunto com um controlador por modos deslizantes adaptativo. Em [67], foi abordado o problema de desvio de obstáculos frontais utilizando um dispositivo monocular, levando em conta o tamanho relativo do objeto que se aproxima e considerando as diferenças entre ambientes artificiais e naturais. Um método de localização em ambiente 3D (*kinect Monte Carlo localization*), descrito em [68], utiliza um mapa prévio com baixa fidelidade da área de operação em conjunto com odometria visual (*particle propagation*). Em [69], foi tratado um sistema completamente autônomo baseado em visão (*optical flow*) para localização autônoma do quadricóptero.

Alguns trabalhos, além da modelagem e do controle, focam nas especificações do *hardware* embarcado utilizado nos experimentos com quadricópteros [1] e com hexacópteros [39]. Adicionalmente, problemas específicos da implementação real de quadricópteros vêm sendo considerados, como o efeito da perda de carga das baterias que teve sua compensação estudada em [43]. Vale destacar o desenvolvimento de um quadricóptero de porte médio com aproximadamente $4kg$ e capacidade de carga de até $1kg$ descrito em [1], onde o posicionamento longitudinal (altura) dos atuadores com relação ao centro de massa é analisado. Um posicionamento suficientemente preciso é essencial para um bom desempenho do veículo, em particular, para o *X4Flyer* a melhor posição prática do plano dos atuadores localiza-se ligeiramente acima do centro de massa. Fugindo um pouco do esquema convencional, em [70], o processamento de controle é executado em um computador não embarcado localizado na base de operação e o sinal de controle é transmitido via comunicação sem fio (*fly-by-wireless*). Os efeitos do atraso de transmissão no desempenho do controle do quadricóptero são modelados. Experimentos são realizados em [7] com a plataforma de teste *OS4 Project (Autonomous Systems Laboratory - EPFL)*, focado no

desenvolvimento de um micro VTOL – um quadricóptero de pequeno porte – completamente autônomo para ambientes internos. Um quadricóptero do tipo *open-source* é considerado em [44] onde seus parâmetros são identificados.

Grande parte das especificações de *hardware* incluem sensores como acelerômetros, giroscópios, magnetômetros, barômetros, sonares e câmeras para obter a orientação (ângulos de Euler) e altitude do veículo. Entretanto, nem todos as variáveis de estado da dinâmica estão disponíveis por meio desses sensores convencionais. Para isso, diversos estimadores de estado podem ser encontrados na literatura [6], como os estimadores de orientação em [71] que utilizam por exemplo a matriz cosseno diretor e filtragem de Kalman. Os estimadores de orientação, em sua maioria, são baseados nos dados obtidos por uma unidade inercial de medidas (*Inertial Measurement Unit*, IMU) embarcada. Frequentemente encontramos implementações de filtros complementares devido a sua simplicidade computacional e eficiência, para estimação de velocidade translacional [37, 44] e orientação [72, 73] [37]. Em particular, um exemplo de estimador não linear de orientação pode ser encontrado em [74] e um estimador de posição em [75].

Pode-se concluir do histórico apresentado até o momento que a maioria dos trabalhos que tratam do controle da orientação de quadricópteros propõe esquemas em malhas aninhadas baseados em controladores do tipo proporcional-derivativo (PD) e que, dentre os esquemas mais avançados, predominam estratégias que combinam alto ganho, modos deslizantes, controles adaptativos e *backstepping*. Além disso, aplicações com servovisão e estimadores de estado via fusão sensorial vem sendo estudadas.

Diversas aplicações justificam a presença de um veículo do tipo VTOL em uma embarcação, como no suporte ao monitoramento: da costa, da vida selvagem e de *icebergs*, por exemplo. Um aspecto crítico relacionado ao pouso de quadricópteros é executá-lo em um alvo móvel como por exemplo uma embarcação em alto mar. Desenvolver esquemas de controle visando habilitar o quadricóptero a realizar pouso em uma plataforma que oscila verticalmente pode ter um impacto significativo em aplicações marítimas para veículos autônomos e do tipo VTOL. Entretanto, pousar em uma embarcação ou plataforma oscilatória não é uma tarefa trivial principalmente devido a dinâmica não linear do quadricóptero, incertezas e perturbações no sistema e devido a natureza variante no tempo do movimento em alto mar gerada por ventos, correntezas e ondas.

Para tratar o problema do pouso em embarcações uma gama de esquemas de controle vêm sendo desenvolvida na literatura, como algoritmos baseados em fluxo óptico [76] e algoritmos para auxiliar no pouso autônomo de helicópteros [77]. Baseado em visão, um esquema de controle foi desenvolvido em [78, 79] para realizar o pouso de um quadricóptero em uma plataforma móvel.

O movimento vertical de uma embarcação em alto mar, em geral pode ser modelado como uma superposição de funções senoidais com amplitudes, frequência e fase diferentes [80, 81]. Entretanto, o movimento da onda é em geral desconhecido e precisa ser estimado. Diversos métodos podem ser encontrados na literatura, como métodos recursivos de mínimos quadrados [82] e filtragem de Kalman [83–85]. Se a estimativa do movimento marítimo for disponível, o problema do pouso autônomo pode ser encarado como um problema de rastreamento convencional, onde técnicas de controle robusto por exemplo podem se utilizadas.

A decolagem e o pouso de um quadricóptero em uma plataforma móvel e inclinada foi abordado em [86, 87], enquanto que em [66], a decolagem e o pouso foram tratados por servovisão (*Image-Based Visual Servoing* - IBVS) em conjunto com um controlador por modos deslizantes adaptativo.

As dificuldades inerentes ao pouso são tratadas em diversos trabalhos. Em particular, a validação de um modelo considerando *Efeito Solo* para quadricópteros é apresentada em [88]. Controladores de altitude com compensadores de *Efeito Solo* são apresentados em [89, 90].

Neste trabalho, ênfase é dada ao problema do pouso em uma plataforma que oscila verticalmente para realizar a tarefa de Captação/Liberação (*pick-and-place*) de carga. Considera-se ainda a presença do *Efeito Solo*. A proposta deste trabalho é solucionar o problema por meio de um esquema de controle composto por uma parcela robusta e outra adaptativa. Este esquema foi inspirado no controlador adaptativo robusto de [89], onde a idéia central é substituir a parcela robusta pelo controle suave por modos deslizantes desenvolvido em [91–94]. Além disso, uma segunda alternativa é proposta: um controlador PD com ganhos variantes no tempo. Estes ganhos são obtidos via estimação de parâmetros pelo método dos mínimos quadrados normalizado (NLS) [95]. Este trabalho apresenta ainda o desenvolvimento completo do modelo quadricóptero desconsiderando alguns efeitos aerodinâmicos secundários, além dos modelos aproximados largamente encontrados na literatura [6, 34]. São desenvolvidos controladores lineares tradicionais para posicionamento e orientação [45–48], que não são o foco desta Dissertação, porém fornecem subsídios na elaboração de controladores mais sofisticados. Simulações e experimentos ilustram o desempenho dos controladores assim como a validação dos modelos considerados.

1.3 Conceitos Básicos

Esta seção apresenta resumidamente os conceitos básicos utilizados nesta Dissertação, que estão bem apresentados nos livros [96–98] e em [99].

Sistemas Multivariáveis

Seja (A, B, C) uma realização da função de transferência $m \times m$ racional, estritamente própria e não-singular dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

- O *índice de observabilidade* do par $\{C, A\}$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$) é o menor inteiro ν_g , ($1 \leq \nu \leq n$), tal que

$$\mathcal{O}_\nu = [C^T (CA)^T \dots (CA^{\nu-1})^T]^T \quad (1.1)$$

tenha posto completo [100]. Este índice possui uma interpretação interessante: $(\nu_g - 1)$ é o maior número de derivadas temporais da saída necessário para se determinar a condição inicial do sistema descrito por (A, B, C) [101] (pp. 356–357).

- A matriz *interactor* associada à $G(s)$ é uma matriz triangular inferior da forma [102]:

$$\xi_G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21}(s) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{m1}(s) & h_{m2}(s) & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{diag} \{s^{\rho_1}, \dots, s^{\rho_q}\}, \quad (1.2)$$

onde os polinômios $h_{ij}(s)$ são nulos ou divisíveis por s e tais que o HFG de $G(s)$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_G(s)G(s) \quad (1.3)$$

é finito e não-singular. Vale ressaltar que $\xi_G(s)$ definida em (1.2) é única e invariante com relação a compensações dinâmicas [102]. O *grau relativo* de uma planta MIMO está relacionado com o conceito da *matriz interactor* $\xi_G(s)$ associada a $G(s)$ [102], [103]. Em particular, se $G(s)$ possuir *grau relativo uniforme* $\rho \geq 1$ então:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} s^\rho G(s). \quad (1.4)$$

Conceitos de Robótica

Considere dois sistemas de coordenadas dextrógiros [?], formado por vetores unitários $\bar{E}_a = [\bar{x}_a \ \bar{y}_a \ \bar{z}_a]$ e $\bar{E}_b = [\bar{x}_b \ \bar{y}_b \ \bar{z}_b]$, sendo \bar{E}_a o sistema de coordenadas inercial³ e \bar{E}_b o sistema de coordenadas do corpo. Sendo $x_{ab} \in \mathbb{R}^3$, $y_{ab} \in \mathbb{R}^3$, $z_{ab} \in \mathbb{R}^3$ as coordenadas de $\bar{x}_b, \bar{y}_b, \bar{z}_b$ que definem

³Podem ser referenciado também por sistema de coordenadas da base.

\bar{E}_b no sistema de coordenadas \bar{E}_a , tem-se que

$$\begin{aligned}\vec{x}_b &= \bar{E}_a x_{ab}, \\ \vec{y}_b &= \bar{E}_a y_{ab}, \\ \vec{z}_b &= \bar{E}_a z_{ab}.\end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever

$$\bar{E}_b = \underbrace{[\bar{E}_a x_{ab}]_{\vec{x}_b}}_{\vec{y}_b} \underbrace{[\bar{E}_a y_{ab}]_{\vec{y}_b}}_{\vec{z}_b} \underbrace{[\bar{E}_a z_{ab}]_{\vec{z}_b}}_{R_{ab}} = \bar{E}_a \underbrace{[x_{ab} \ y_{ab} \ z_{ab}]_{R_{ab}}} = \bar{E}_a R_{ab},$$

sendo que R_{ab} é chamada de **matriz de rotação, orientação ou atitude**

$$R_{ab} = [x_{ab} \ y_{ab} \ z_{ab}] = \bar{E}_a^* \bar{E}_b,$$

e \bar{E}_a^* o conjugado de \bar{E}_a . Vale ressaltar que toda matriz de rotação é um elemento de $SO(3)$ (*Special Orthogonal Group*) [104]. Para simplificar a apresentação doravante considere a seguinte notação: $\{A\} := \bar{E}_a$ e $\{B\} := \bar{E}_b$.

Para a representação da orientação do quadrirrotor serão considerados os ângulos de *Euler* (neste caso também denominados de *Tait-Bryan*) ϕ (*roll*), θ (*pitch*) e ψ (*yaw*) relacionados com os eixos respectivamente x , y e z do sistema de coordenadas da base

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T \quad (1.5)$$

A matriz de rotação que relaciona o sistema inercial e o sistema do corpo é uma composição de rotações elementares na ordem Z-X-Y. (ver Apêndice B.1) na forma $R = R_{ab} = R_z(\psi)R_x(\phi)R_y(\theta)$, sendo dada por

$$R = \begin{bmatrix} c\psi c\theta - s\phi s\psi s\theta & -c\phi s\psi & c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi \\ c\theta s\psi + c\psi s\phi s\theta & c\phi c\psi & s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi \\ -c\phi s\theta & s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

A relação entre a velocidade angular do corpo rígido e as derivadas dos ângulos de *Euler* é dada pelo jacobiano da representação. De fato, considerando (1.5) a representação da orientação $R \in SO(3)$, é possível estabelecer a seguinte relação

$$\dot{\Phi} = J_r(\Phi) \omega, \quad (1.7)$$

sendo ω a velocidade angular do corpo e J_r o **jacobiano da representação** [104]

dado por

$$J_r = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -c\phi s\theta \\ 0 & 1 & s\phi \\ s\theta & 0 & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

e seu correspondente inverso

$$J_r^{-1} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ t\phi s\theta & 1 & -c\theta t\phi \\ -s\theta/c\phi & 0 & c\theta/c_\phi \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

1.4 Objetivos

Os principais objetivos específicos da presente Dissertação são:

- Apresentar o desenvolvimento detalhado do modelo do quadricóptero evidenciando de forma clara as hipóteses e aproximações usualmente encontradas na literatura de quadricópteros. Para isso a modelagem será conduzida por dois caminhos: via formalismo de Newton-Euler e via formalismo de Euler-Lagrange.
- Projetar, construir e testar uma plataforma experimental educacional de baixo custo para implementação de algoritmos de controle aplicados a quadricópteros, incluindo: a estrutura mecânica do quadricóptero, toda a sua instrumentação para posicionamento e orientação e a estação de comando de solo com a interface de operação. A principal motivação para desenvolver a plataforma experimental educacional é permitir a realização de testes com diversas técnicas avançadas de controle e comparações com técnicas tradicionais como os controladores PD. Esta plataforma poderá vir a servir a futuros trabalhos de projetos de controladores que permitam manobras completamente autônomas e, ainda, para o planejamento de trajetórias.
- Projetar um controlador para a altitude do quadricóptero visando realizar a Tarefa de Captação/Liberação de carga durante o pouso em uma plataforma que oscila verticalmente. O controlador deve ser robusto o suficiente para rejeitar a perturbação devido a variação de massa e ao efeito aerodinâmico que se manifesta durante a aproximação do solo (aumento de empuxo), denominado *Efeito Solo*.
- Desenvolver um simulador em ambiente Matlab/Simulink que inclua aspectos práticos como: dinâmica não modelada dos atuadores, saturações, *Efeito Solo*, ruídos de medição e parâmetros físicos de quadricópteros reais.

- Realizar testes experimentais com o quadrirrotor desenvolvido.

1.5 Notação e Terminologia

- O máximo intervalo de tempo de definição de uma dada solução da equação diferencial que rege a dinâmica da planta em malha fechada é representado por $\mathcal{I}_0 := [0, t_M)$, onde t_M pode ser finito ou infinito. Para qualquer $t_* \in \mathcal{I}_0$ seja $\mathcal{I}_* := [t_*, t_M)$.
- O símbolo Ω_\times denota uma matriz antissimétrica tal que $\Omega_\times v = \Omega \times v$ sendo $v \in \mathbb{R}^3$ um vetor genérico qualquer.
- A norma Euclidiana de um vetor x e a correspondente norma induzida de uma matriz A são denotadas por $|x|$ and $|A|$, respectivamente, enquanto que a norma $\mathcal{L}_{\infty e}$ de um sinal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é definida como em [105, 106] e descrita por:

$$\|x_{t,t_*}\| := \sup_{t_* \leq \tau \leq t} |x(\tau)|.$$

Para $t_* = 0$ a notação $\|x_t\|$ é adotada. Utiliza-se $\lambda[A]$ para denotar o espectro de uma matriz A e $\lambda_m[A] := \max_i \{Re\{\lambda[A]\}\}$.

- Uma função $\Psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ pertence à classe \mathcal{K} se for contínua, crescente e $\Psi(0) = 0$. Diz-se que $\Psi(a) \in \mathcal{K}_\infty$ se $\Psi(a) \in \mathcal{K}$ e $\lim_{a \rightarrow +\infty} \Psi(a) = +\infty$. Uma função $\Pi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ pertence à classe \mathcal{KL} se, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, $\Pi(\cdot, t) \in \mathcal{K}$ e, para cada $a \in \mathbb{R}_+$, $\Pi(a, \cdot)$ é decrescente com $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Pi(a, t) = 0$. As definições de funções \mathcal{K} , \mathcal{K}_∞ e \mathcal{KL} estão de acordo com [97, p. 144].
- O símbolo “ s ” representa tanto a variável de Laplace quanto o operador diferencial “ d/dt ”, de acordo com o contexto. Assim como em [105], a saída y de um sistema linear e invariante no tempo (LTI) com função de transferência $H(s)$ e entrada u é denotada por $H(s)u$. A convolução $h(t) * u(t)$, sendo $h(t)$ a resposta impulsiva de $H(s)$, será representada eventualmente por $H(s) * u$.
- Seja (A_h, B_h, C_h, D_h) uma realização para o sistema LTI, com estado x_h . Esta representação para a convolução é útil principalmente quando o sistema LTI for BIBO estável pois, neste caso, a saída y pode ser representada por $y = H(s) * u + \pi$, com $\pi = C_h e^{A_h(t-t_*)} x_h(t_*)$ sendo um termo exponencialmente decrescente.
- O símbolo Π representará uma função \mathcal{KL} genérica:

$$\Pi(\cdot, t) = \Psi(\cdot) e^{-\gamma_\pi(t-t_*)}, \quad \forall t \in \mathcal{I}_*,$$

onde $\gamma_\pi > 0$ é uma constante genérica e $\Psi \in \mathcal{K}_\infty$. Eventualmente, será evidenciada apenas a dependência do tempo, i.e., $\Pi(t)$.

- Diz-se que uma constante positiva k é de ordem $\tau \in \mathbb{R}^+$ quando existir outra constante positiva \bar{k} , independente de τ , que satisfaça $k \leq \tau \bar{k}$. O símbolo $\mathcal{O}(\tau)$ será utilizado para representar uma constante genérica de ordem τ .

1.6 Visão Geral da Dissertação

No **Capítulo 1** é apresentada a revisão da literatura, conceitos básicos, notação e objetivos deste trabalho. No **Capítulo 2**, os diferentes modelos dinâmicos do quadricóptero são definidos assim como as hipóteses necessárias. No **Capítulo 3**, soluções para o controle de orientação e de posição com controladores convencionais são propostas e no **Capítulo 4** soluções robustas são consideradas para o controle de altitude e pouso em um plataforma que oscila verticalmente. Os resultados experimentais com o quadricóptero desenvolvido neste trabalho são apresentados no **Capítulo 5**. Conclusões sobre o trabalho e propostas para trabalhos futuros encontram-se no **Capítulo 6**. Para facilitar a leitura, os apêndices serão destinados a detalhes técnicos e a um resumo das contribuições obtidas durante o desenvolvimento desta Dissertação. No **Apêndice A** são apresentadas as contribuições desta dissertação. No **Apêndice B** os conceitos básicos sobre orientação de corpo rígido. No **Apêndice D** o desenvolvimento das equações de Euler-Lagrange. Nos **Apêndices C** e **E** o desenvolvimento do modelo do quadricóptero por meio do formalismo de Newton-Euler e de Euler-Lagrange, respectivamente. Por fim, no **Apêndice F** alguns teoremas auxiliares.

Capítulo 2

Modelagem do Quadrirrotor

O modelo do quadrirrotor considerado nesta Dissertação é formado com base na interação dos corpos rígidos que o constituem e das forças e efeitos aerodinâmicos. Dois principais métodos são geralmente empregados na obtenção do modelo de corpo rígido, são eles a formulação de *Newton-Euler* e de *Euler-Lagrange*. Neste trabalho, ambos os formalismos concluem no mesmo modelo, porém apresentam hipóteses e aproximações por vezes diferentes.

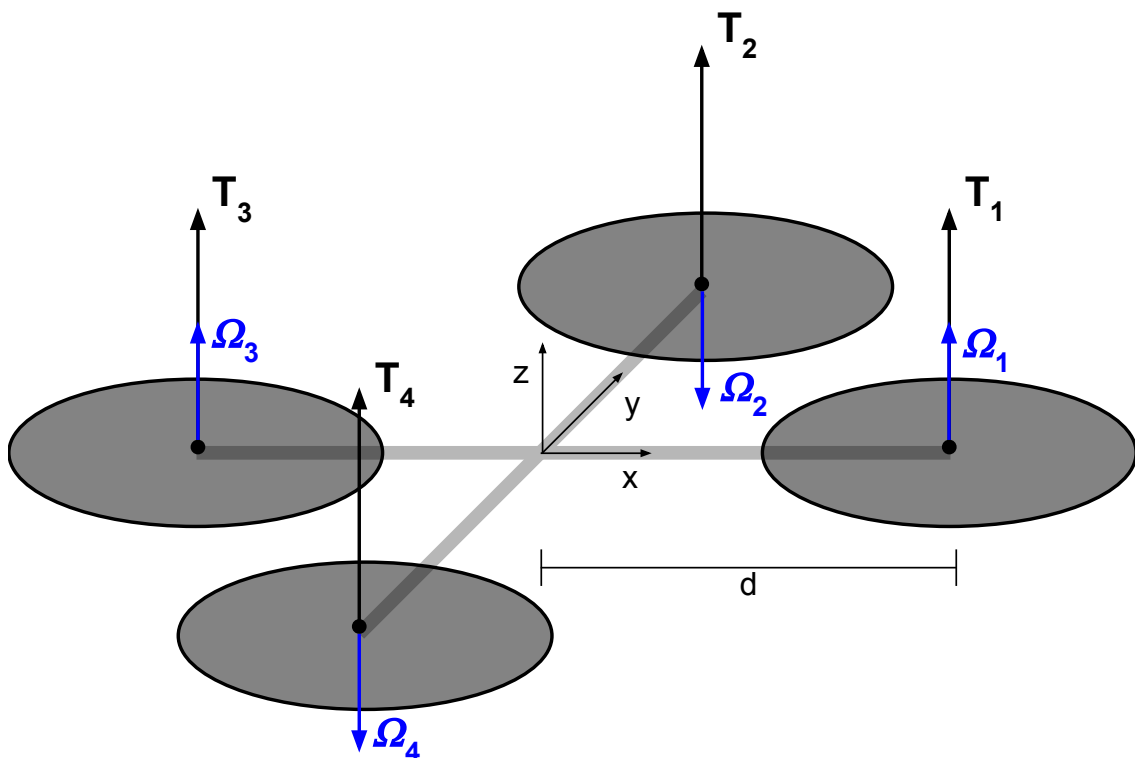


Figura 2.1: Desenho dos empuxos (T) e velocidades angulares dos rotores (Ω) e a distância (d) dos rotores no sistema de coordenadas corpo (XYZ).

Um quadrirrotor possui quatro hélices geralmente dispostas em forma de cruz e com os respectivos vetores velocidade angular alinhados na mesma direção. A

alteração da orientação do veículo é possível por meio da modulação individual das velocidades angulares de cada rotor. Assim como o posicionamento do veículo é consequência da ação combinada da orientação e da força de empuxo resultante dos atuadores.

Considere a Figura 2.1. Sendo *roll*, *pitch* e *yaw* definidos em 1.5, basicamente para o aumento do ângulo de *roll* é necessário obter um empuxo maior no rotor 2 do que no rotor 4 (respectivamente T_2 e T_4) e para o aumento do ângulo de *pitch* é necessário obter um empuxo maior no rotor 3 do que no rotor 1 (respectivamente T_3 e T_1). Entretanto para o aumento do ângulo de rumo (*yaw*), baseando-se no princípio de conservação do momento angular, é necessário que a soma das velocidades angulares dos rotores 2 e 4 (respectivamente ω_2 e ω_4) seja maior que a soma das correspondentes velocidades angulares do rotores 1 e 3 (respectivamente ω_1 e ω_3). Ao inclinar o quadrirrotor da sua posição inicial de voo pairado (*hovering*) há a formação de componentes horizontais da força de empuxo total que sustenta o veículo, ver Figura 2.1. Desta forma com o controle dos ângulos de orientação é possível controlar a posição x e y . Por fim o controle de altitude é dado pela variação dos empuxos de uma mesma quantidade.

Os quadrirrotores podem apresentar vantagens em relação a outros veículos do tipo *VTOL* como por exemplo: o tamanho reduzido e o baixo custo de fabricação e de manutenção. Por outro lado não deixa de apresentar algumas complexidades do ponto de vista de controle. Diante dos seis graus de liberdade do corpo rígido do veículo, tem-se apenas quatro atuadores, sendo portanto impossível controlar todos os graus de liberdade independentemente, resultando em um sistema subatuado. O sistema em malha aberta é instável e apresenta não linearidades, além da dinâmica acoplada entre a translação e a rotação. A seguir será apresentado o desenvolvimento das partes que definem o modelo do quadrirrotor. Antes de apresentar o modelo de *Newton-Euler*, descrevendo a dinâmica dos corpos rígidos, o atuador será considerado.

2.1 Atuador

A estrutura física do atuador é composta pelo motor e sua respectiva hélice. Neste trabalho modela-se o atuador com base apenas nos efeitos proporcionados pela rotação da hélice e da carcaça do motor, considerando a dinâmica dos motores como uma dinâmica não modelada no sistema. A modelagem básica da hélice considerando apenas a aerodinâmica dominante pode ser feita utilizando a Teoria Clássica de Momento de *Rankine-Froude*¹ [107] na qual as seguintes hipóteses são considera-

¹Referenciada na literatura também como *Momentum Theory* ou *Froude's Momentum Theory for an Actuator Disk*.

das

(H-0.a) A hélice girando é encarada como um disco rígido que acrescenta momento e energia ao fluxo de ar. O disco apresenta espessura nula.

(H-0.b) O fluxo de ar é considerado incompressível, unidimensional e uniforme através do rotor do disco.

Desta forma para o caso em que o veículo está pairando, o **empuxo aerodinâmico** proporcionado por uma hélice rígida capaz de atuar em ambos os sentidos de rotação² no ar obedece as equações a seguir, ver Figura 2.1:

$$T_i^b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_i \end{bmatrix} := (-1)^{i+1} C_T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Omega_i |\Omega_i|, \quad (2.1)$$

$$C_T := c_T \rho A_i r_i^2, \quad (2.2)$$

sendo T_i e Ω_i as componentes do empuxo (T_i^b) e da velocidade angular (Ω_i^b), respectivamente, do rotor i na direção de \vec{z}_b (vetor unitário da direção \vec{z} do sistema de coordenadas $\{B\}$), ρ a densidade do ar, A_i a área do disco do rotor i (área varrida pelas pás do rotor), r_i o raio do rotor i e c_T o coeficiente aerodinâmico de empuxo. A parcela $(-1)^{i+1}$ refere-se a construção da hélice que pode ser própria para gerar empuxo no sentido positivo de \vec{z}_b quando o vetor Ω_i está no mesmo sentido de \vec{z}_b ($i = 1, 3$) ou no sentido oposto³ ($i = 2, 4$) como na Figura 2.1. O **torque de arrasto** sofrido pelos rotores pode ser definido por

$$\tau_{qi}^b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_i \end{bmatrix} := -C_Q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Omega_i |\Omega_i|, \quad (2.3)$$

sendo Q_i a componente do torque de arrasto (τ_{qi}^b) do rotor i na direção de \vec{z}_b , C_Q o correspondente coeficiente de arrasto que pode ser obtido por testes estáticos e depende de A_i , r_i e ρ . O empuxo resultante nas coordenadas de $\{B\}$ pode ser descrito por

$$F_z^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_i \end{bmatrix} = C_T \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-1)^{i+1} \Omega_i |\Omega_i| \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

²Sem perda de generalidade, neste trabalho, o empuxo e a velocidade angular de cada atuador têm o sentido fixo.

³Para $i = 2$, por exemplo, tem-se $\Omega_2 < 0$ porém $T_2 = -C_T \Omega_2 |\Omega_2| > 0$.

Uma vez que o empuxo gerado pelos rotores é descrito pela relação (2.1) e a distância dos atuadores ao centro de massa do corpo é d , tem-se que o **torque de atuação**⁴ M^b no corpo é dado por

$$M^b = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_z \end{bmatrix}^T = \sum_{i=1}^4 (\tau_{qi}^b) + \sum_{i=1}^4 (d_i^b \times T_i^b), \quad (2.5)$$

sendo M_x , M_y e M_z as componentes de torque definidas no sistema inercial

$$d_1^b = \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_2^b = \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_3^b = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } d_4^b = \begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Desta forma fica evidente que

$$\begin{aligned} M_x &= d(T_2 - T_4), \\ M_y &= d(T_3 - T_1), \\ M_z &= \sum_{i=1}^4 Q_i. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Além disso considerando a relação explícita em Ω_i dada em (2.1) pode-se escrever que

$$\begin{aligned} M_x &= dC_T(-\Omega_2 |\Omega_2| + \Omega_4 |\Omega_4|), \\ M_y &= dC_T(\Omega_3 |\Omega_3| - \Omega_1 |\Omega_1|), \\ M_z &= -C_Q(\Omega_1 |\Omega_1| + \Omega_2 |\Omega_2| + \Omega_3 |\Omega_3| + \Omega_4 |\Omega_4|). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Finalmente, em forma matricial a relação entre a velocidade angular dos rotores e as forças/torques é descrita pela **matriz de acoplamento**:

$$\begin{bmatrix} F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_T & -C_T & C_T & -C_T \\ 0 & -dC_T & 0 & dC_T \\ -dC_T & 0 & dC_T & 0 \\ -C_Q & -C_Q & -C_Q & -C_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 |\Omega_1| \\ \Omega_2 |\Omega_2| \\ \Omega_3 |\Omega_3| \\ \Omega_4 |\Omega_4| \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

2.2 Corpo Rígido

Seguindo os passos descritos no Apêndice B, por meio das equações de Newton-Euler, pode-se desenvolver a dinâmica do quadrirrotor. Para a modelagem foram

⁴Observe que o torque de atuação não é o torque resultante aplicado ao corpo rígido, pois não considera o efeito giroscópico proveniente dos rotores (hélices) e perturbações externas.

consideradas as seguintes hipóteses básicas:

(H-0.c) A estrutura na qual a eletrônica embarcada e os rotores são fixados é considerada rígida e simétrica.

(H-0.d) A origem do sistema de coordenadas do corpo $\{B\}$ está no centro de massa do quadrirrotor.

(H-0.e) O momento de inércia do atuador é aproximado pelo momento de inércia equivalente ao de um cilindro.

(H-0.f) Os módulos do empuxo e do arrasto são proporcionais ao quadrado da velocidade angular do rotor.

Seguindo o Apêndice B, e adequando a notação apenas para simplificar a apresentação, ou seja, substituindo $I_{xx}^b = I_x$, $I_{yy}^b = I_y$, $I_{zz}^b = I_z$ e $\mathcal{I}_{zz}^b = \mathcal{I}_r$, tem-se o denominado **modelo não linear** do quadrirrotor na forma

$$\begin{aligned}
I_x \dot{\omega}_x^b &= (\omega_y^b \omega_z^b)(I_y - I_z) - \omega_y^b \Omega_R \mathcal{I}_z + M_x, \\
I_y \dot{\omega}_y^b &= (\omega_x^b \omega_z^b)(I_z - I_x) + \omega_x^b \Omega_R \mathcal{I}_z + M_y, \\
I_z \dot{\omega}_z^b &= (\omega_x^b \omega_y^b)(I_x - I_y) - \dot{\Omega}_R \mathcal{I}_z + M_z, \\
m \ddot{x} &= (c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi)F_z, \\
m \ddot{y} &= (s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi)F_z, \\
m \ddot{z} &= -mg + (c\phi c\theta)F_z,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

sendo I_x , I_y e I_z os momentos de inércia da estrutura, \mathcal{I}_z o momento de inércia do atuador em torno do eixo \vec{z}_b ; ω_x^b , ω_y^b e ω_z^b as componentes da velocidade angular da estrutura, todos expressos em $\{B\}$ e Ω_R a soma das velocidades angulares dos rotores (velocidade "líquida") dada por

$$\Omega_R = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 \tag{2.11}$$

Note que M_x , M_y , M_z e F_z estão representados em $\{B\}$, porém as acelerações \ddot{x} , \ddot{y} e \ddot{z} estão representadas em $\{A\}$.

As três primeiras equações de (2.10) são referenciadas, neste trabalho, por **dinâmica rotacional** e as três equações seguintes por **dinâmica translacional** do modelo. Observe que a dinâmica rotacional é completamente desacoplada da dinâmica translacional, entretanto a dinâmica translacional depende dos estados referentes a dinâmica rotacional.

De outra forma pode-se incorporar em (2.10) as expressões do empuxo (2.1) e do torque de arrasto (2.3) gerados pelos atuadores. Assim tem-se a equação do modelo

em termos da velocidade de rotação Ω_i dos atuadores, denominado de **modelo não linear em termos do atuador**

$$\begin{aligned}
I_x \dot{\omega}_x^b &= (\omega_y^b \omega_z^b)(I_y - I_z) - \omega_y^b \Omega_R \mathcal{I}_z + C_T d(\Omega_4 |\Omega_4| - \Omega_2 |\Omega_2|), \\
I_y \dot{\omega}_y^b &= (\omega_x^b \omega_z^b)(I_z - I_x) + \omega_x^b \Omega_R \mathcal{I}_z + C_T d(\Omega_3 |\Omega_3| - \Omega_1 |\Omega_1|), \\
I_z \dot{\omega}_z^b &= (\omega_x^b \omega_y^b)(I_x - I_y) - \dot{\Omega}_R \mathcal{I}_z + C_Q (-\Omega_1 |\Omega_1| - \Omega_2 |\Omega_2| - \Omega_3 |\Omega_3| - \Omega_4 |\Omega_4|), \\
m \ddot{x} &= (c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi) C_T \sum_{i=1}^4 (\Omega_i |\Omega_i| - \Omega_2 |\Omega_2| + \Omega_3 |\Omega_3| - \Omega_4 |\Omega_4|), \\
m \ddot{y} &= (s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi) C_T \sum_{i=1}^4 (\Omega_i |\Omega_i| - \Omega_2 |\Omega_2| + \Omega_3 |\Omega_3| - \Omega_4 |\Omega_4|), \\
m \ddot{z} &= -mg + (c\phi c\theta) C_T \sum_{i=1}^4 (\Omega_i |\Omega_i| - \Omega_2 |\Omega_2| + \Omega_3 |\Omega_3| - \Omega_4 |\Omega_4|). \tag{2.12}
\end{aligned}$$

2.3 Modelo Não-Linear Aproximado

Nesta seção serão considerados duas aproximações para a dinâmica da orientação. A primeira considera as aproximações mais usuais acerca de movimentos pequenos de *roll* e *pitch* e a segunda aborda o caso de rumo (*yaw*) constante.

2.3.1 Dinâmica da Orientação Aproximada: Modelo I

Nesta seção será apresentada uma aproximação tradicional [34] encontrada na literatura para a dinâmica da orientação (2.10) do quadrirrotor. Considere as seguintes hipóteses

(H-1.a) Os ângulos de *Euler* ϕ , θ e ψ são tais⁵ que $\sin(\phi) \approx 0$ rad, $\sin(\theta) \approx 0$ rad, $\sin(\psi) \approx 0$ rad, $\cos(\phi) \approx 1$ rad, $\cos(\theta) \approx 1$ rad e $\cos(\psi) \approx 1$ rad.

Note que por consequência de (H-1.a) o Jacobiano 1.8 é aproximado por $J_r \approx I$. Sendo assim, as velocidades angulares são tais que $\omega_x^b \approx \dot{\phi}$, $\omega_y^b \approx \dot{\theta}$ e $\omega_z^b \approx \dot{\psi}$. Além disso, para as segundas derivadas, tem-se que $\dot{\omega}_x^b \approx \ddot{\phi}$, $\dot{\omega}_y^b \approx \ddot{\theta}$ e $\dot{\omega}_z^b \approx \ddot{\psi}$.

⁵Aproximação para ângulos pequenos.

Sendo assim as equações (2.10) podem ser reescritas de forma que tem-se o **modelo não linear aproximado I** dado por

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi} \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) - \frac{\mathcal{I}_r \dot{\theta} \Omega_R}{I_x} + \frac{M_x}{I_x}, \\
\ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi} \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{\mathcal{I}_r \dot{\phi} \Omega_R}{I_y} + \frac{M_y}{I_y}, \\
\ddot{\psi} &= \dot{\phi}\dot{\theta} \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) - \frac{\mathcal{I}_r \dot{\psi} \Omega_R}{I_z} + \frac{M_z}{I_z}, \\
m\ddot{x} &= (c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi)F_z, \\
m\ddot{y} &= (s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi)F_z, \\
m\ddot{z} &= -mg + (c\phi c\theta)F_z.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

2.3.2 Dinâmica da Orientação Aproximada: Modelo II

Para o controle da orientação de *roll* e *pitch*, os valores de velocidade angular dos rotores variam para a estabilização do quadricóptero, portanto seria razoável não desprezar os termos que contém Ω_R e/ou $\dot{\Omega}_R$. No entanto, intuitivamente pode-se observar que durante a regulação de *roll* e *pitch* o acréscimo de velocidade angular de um rotor é igual em módulo ao decréscimo no rotor diametralmente oposto. Portanto durante a regulação de *roll* e *pitch* a soma das velocidades angulares dos rotores pode ser considerada nula⁶, ou seja, $\Omega_R = 0$. Sendo assim, é razoável considerar a seguinte hipótese:

(H-2) As velocidades angulares dos rotores são tais que o somatório $\Omega_R \approx 0$ e $\dot{\Omega}_R \approx 0$.

Por outro lado o controle do ângulo *yaw* atua por meio da diferença das velocidades angulares (quadráticas) dos motores em sentido horário e anti-horário. Porém se a referência do ângulo *yaw* se mantiver constante, ou variar lentamente a Hipótese (H-2) não será restritiva.

⁶Um possível descasamento do momento de inércia dos motores, ou da construção das hélices dos atuadores pode proporcionar uma condição de voo pairado com Ω_R diferente de zero. Entretanto neste trabalho considera-se que o descasamento é desprezível.

Destá forma, considerando a Hipótese (H-2), tem-se o seguinte **modelo não linear aproximado II**:

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi} \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) + \frac{M_x}{I_x}, \\
\ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi} \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{M_y}{I_y}, \\
\ddot{\psi} &= \dot{\phi}\dot{\theta} \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{M_z}{I_z}, \\
m\ddot{x} &= (c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi)F_z, \\
m\ddot{y} &= (s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi)F_z, \\
m\ddot{z} &= -mg + (c\phi c\theta)F_z.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Reescrevendo (2.14) na forma geral de espaço de estados tem-se a seguinte classe de sistemas não-lineares:

$$\dot{x}_p = f(x_p, t) + B(x_p, t)u, \quad \mathcal{Y} = C_p x_p, \tag{2.15}$$

sendo $x_p = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ é o estado da planta, $u \in \mathbb{R}^q$ é a entrada de controle, $y \in \mathbb{R}^q$ é a saída medida, $n \geq q \geq 1$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{n \times q}$. Os termos f e B são funções suficientemente suaves e consideradas incertas. A matriz constante C_p pode ser incerta. Note que apenas sistemas multivariáveis quadrados (mesmo número de entradas e saídas) estão sendo abordados. A variável de estado do sistema é definida por

$$x_p(t) = [x \ y \ z \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \phi \ \theta \ \psi \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T, \tag{2.16}$$

sendo $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}$ e \dot{z} as componentes de posição e velocidade do centro de gravidade do quadrirrotor no sistema de coordenadas da base e $\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ os ângulos e respectivas derivadas de *roll*, *pitch*, *yaw*. A entrada do sistema é dada por

$$u(t) = [F_z \ M_x \ M_y \ M_z]^T, \tag{2.17}$$

sendo F_z o empuxo total e M_x, M_y e M_z as componentes de torque anteriormente definidos em (2.4) e (2.5), respectivamente. No caso do modelo (2.14) tem-se

$$f(x_p, t) = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, 0, 0, -g, \dot{\theta}\dot{\psi} \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right), \dot{\phi}\dot{\psi} \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right), \dot{\phi}\dot{\theta} \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right)]^T, \tag{2.18}$$

e

$$B(x_p, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi)}{m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi)}{m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi)}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

2.4 Modelo Linearizado

O modelo linearizado é frequentemente utilizado na literatura [36, 108] no projeto do controlador. De forma que torna-se interessante obter o modelo linearizado em torno de um ponto de operação, não para fins de simulação, mas como uma ferramenta de projeto. Definindo as variáveis auxiliares \tilde{x}_p e \tilde{u}

$$\tilde{x}_p := x_p - \bar{x}_p, \quad \tilde{u} := u - \bar{u}, \quad (2.20)$$

sendo \bar{x}_p e \bar{u} o vetor de estado e a entrada, respectivamente, no ponto de operação.

Expandindo o campo vetorial de (2.14) na série de Taylor em torno do ponto de operação dado pela condição de voo pairado, tem-se:

$$\dot{x}_p = f(x_p, u) = f(\bar{x}_p, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x_p} \Big|_{(\bar{x}_p, \bar{u})} (x_p - \bar{x}_p) + \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(\bar{x}_p, \bar{u})} (u - \bar{u}) + (T.O.S). \quad (2.21)$$

Desprezando os termos de ordem superior (T.O.S) e desenvolvendo (2.21), pode-se expressar o modelo linear do quadricóptero por

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_p &= A_p \tilde{x}_p + B_p \tilde{u}, \\ y &= C_p \tilde{x}_p, \end{aligned} \quad (2.22)$$

sendo as matrizes de estado, de entrada e de saída dadas por

$$A_p = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & A_t & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & A_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}, \quad (2.23)$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 3} \\ B_t & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 1} & B_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 4}, \quad (2.24)$$

com A_t , A_r , B_t e B_r dados por

$$A_t = \begin{bmatrix} (c\bar{\phi}c\bar{\theta}s\bar{\psi}) & (c\bar{\psi}c\bar{\theta} - s\bar{\phi}s\bar{\psi}s\bar{\theta}) & -(s\bar{\psi}s\bar{\theta} - c\bar{\psi}c\bar{\theta}s\bar{\phi}) \\ -(c\bar{\phi}c\bar{\psi}c\bar{\theta}) & (c\bar{\theta}s\bar{\psi} + c\bar{\psi}s\bar{\phi}s\bar{\theta}) & (c\bar{\psi}s\bar{\theta} + c\bar{\theta}s\bar{\phi}s\bar{\psi}) \\ -(c\bar{\theta}s\bar{\phi}) & -(c\bar{\phi}s\bar{\theta}) & 0 \end{bmatrix} \frac{\bar{F}_z}{m}, \quad (2.25)$$

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(I_y\dot{\psi} - I_z\dot{\psi})}{I_x} & \frac{(I_y\dot{\theta} - I_z\dot{\theta})}{I_x} \\ -\frac{(I_x\dot{\psi} - I_z\dot{\psi})}{I_y} & 0 & -\frac{(I_x\dot{\phi} - I_z\dot{\phi})}{I_y} \\ \frac{(I_x\dot{\theta} - I_y\dot{\theta})}{I_z} & \frac{(I_x\dot{\phi} - I_y\dot{\phi})}{I_z} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

$$B_t = \begin{bmatrix} (c\bar{\psi}s\bar{\theta} + c\bar{\theta}s\bar{\phi}s\bar{\psi}) \\ (s\bar{\psi}s\bar{\theta} - c\bar{\psi}c\bar{\theta}s\bar{\phi}) \\ (c\bar{\phi}c\bar{\theta}) \end{bmatrix} \frac{1}{m} \quad (2.27)$$

e

$$B_r = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

2.5 Conclusão

Neste capítulo foram detalhados o funcionamento físico básico do quadrrrotor como um corpo rígido sujeito a atuação externa da gravidade e de rotores, além das características de subatuação e natureza instável do sistema. Foram apresentados diferentes modelos do quadrrrotor que serão utilizados nos capítulos seguintes. Os modelos desenvolvidos neste capítulo podem ser utilizados não apenas como uma planta realista do quadrrrotor, mas também como parâmetro de projeto de controle.

Primeiramente, um modelo não linear de corpo rígido foi desenvolvido por meio dos formalismos de *Newton-Euler* (Apêndice B) e de *Euler-Lagrange* (Apêndice C). As aproximações e simplificações de cada um dos métodos, por vezes inerente ao

método utilizado, foram evidenciadas. Frequentemente na literatura de quadricópteros, observa-se a utilização de um modelo aproximado ou de um modelo linear. Para o desenvolvimento destes outros modelos são assumidas aproximações que foram analisadas em detalhe neste capítulo.

No próximo capítulo os modelos desenvolvidos serão utilizados no projeto e avaliação dos controladores de posição e orientação. Além disso, uma aproximação do modelo será avaliada via simulação numericamente em malha fechada com um controlador.

Capítulo 3

Controle de Posição e Orientação do Quadrrrotor

Neste capítulo, considera-se o controle de orientação e posição do quadrrrotor objetivando o seguimento de uma trajetória desejada para o centro de massa e para o rumo do veículo. Uma topologia de controle aninhada, frequentemente encontrada na literatura, será abordada considerando um modelo não-linear para o quadrrrotor. Simulações numéricas são utilizadas para justificar as simplificações adotadas neste modelo. Além disso, por meio de simulações realistas (incluindo ruído de medição, perturbações de entrada e dinâmica não-modelada) avalia-se os desempenhos em malha fechada dos esquemas de controle utilizando tanto o modelo simplificado quanto o simulador completo desenvolvido neste trabalho. Inicialmente, assumindo conhecimento perfeito da planta, dois esquemas de controle serão explorados. O primeiro trata do controle convencional Proporcional Derivativo (PD) (com ação antecipativa¹) em conjunto com linearização por realimentação e o segundo esquema trata de uma realimentação linear de estado projetada utilizando uma linearização em torno de um adequado ponto de operação do modelo não-linear considerado.

Estes dois esquemas preliminares de controle fornecem subsídios para o projeto e sintonia de controladores PD com ação antecipativa sintonizados sem o conhecimento exato dos parâmetros da dinâmica do quadrrrotor e sem utilizar realimentação de velocidade (medindo apenas ângulos de *Euler* e posição cartesiana do centro de massa). Além disso, estas estratégias preliminares formam a base de esquemas adaptativos e esquemas robustos de controle encontrados na literatura, como em SELFRIDGE e TAO [36].

¹Feedforward

3.1 Formulação do Problema

Nesta seção considera-se o modelo do quadricóptero apresentado em (2.14), reescrito como

$$\begin{aligned}
 \ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) + \frac{M_x}{I_x}, \\
 \ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) + \frac{M_y}{I_y}, \\
 \ddot{\psi} &= \dot{\phi}\dot{\theta}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) + \frac{M_z}{I_z}, \\
 \ddot{x} &= (c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi)\frac{F_z}{m}, \\
 \ddot{y} &= (s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi)\frac{F_z}{m}, \\
 \ddot{z} &= -g + (c\phi c\theta)\frac{F_z}{m},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}$ e \dot{z} as componentes de posição e velocidade do centro de gravidade² do quadricóptero no sistema de coordenadas da base (inercial) e $\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ os ângulos de *roll*, *pitch*, *yaw* e suas derivadas temporais, respectivamente. Considerando o vetor de estado 2.16, repetido a seguir por conveniência,

$$x_p(t) := [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi \ \dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T,$$

o sistema (3.1) pode ser reescrito como a seguinte classe de sistemas não-lineares afins no controle u

$$\dot{x}_p = f(x_p, t) + B(x_p, t)u, \quad \mathcal{Y} = C_p x_p, \tag{3.2}$$

sendo $f(x_p, t)$ e $B(x_p, t)$ dados por

$$f(x_p, t) = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi} \ 0 \ 0 \ -g \ \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) \ \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) \ \dot{\phi}\dot{\theta}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right)]^T \tag{3.3}$$

²Neste trabalho considera-se que o centro de massa e o centro de gravidade (C.G.) do quadricóptero coincidem.

$$B(x_p, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi)}{m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi)}{m} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi)}{m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

e

$$C_p := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

A entrada u de controle é dada por

$$u(t) := [F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z]^T, \quad (3.6)$$

sendo M_x , M_y e M_z as componentes de torque representado no sistema de coordenadas do corpo e F_z a componente z do empuxo total também representado no sistema de coordenadas do corpo, ver (2.4) e (2.5), respectivamente. Por outro lado, a saída da planta $\mathcal{Y}(t)$ é representada no sistema de coordenadas da base e é dada por

$$\mathcal{Y}(t) := [z \quad y \quad x \quad \psi]^T. \quad (3.7)$$

Considera-se também que $f(x_p, t)$ e $B(x_p, t)$ são localmente Lipschitz em x_p ($\forall x_p$), sendo B contínua por partes em t e f suficientemente suave em seus argumentos, ou seja, as componentes de f são funções reais de x_p, t com derivadas parciais de qualquer ordem, definidas e contínuas [96, pp. 6].

3.1.1 Particionamento da Dinâmica do Quadrrrotor

Neste capítulo, será utilizado um particionamento da dinâmica do quadrrrotor (3.1), frequentemente encontrado na literatura [7] [6] [34], motivado pelo fato de que a dinâmica rotacional do quadrrrotor (ângulos de *Euler*) não depende³ da dinâmica

³Note que não vale a recíproca.

translacional (posição do centro de massa), ou seja, existe um desacoplamento inerente em (3.1).

Seja $p := \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ a posição cartesiana (parcial) do centro de massa do quadrirrotor, no sistema de coordenadas inercial $\{A\}$. Portanto, de (3.1) pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= (c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi) \frac{F_z}{m}, \\ \ddot{y} &= (s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi) \frac{F_z}{m},\end{aligned}\tag{3.8}$$

ou na forma matricial

$$\ddot{p} = R_\psi \begin{bmatrix} s\theta \\ -c\theta s\phi \end{bmatrix} \frac{F_z}{m}, \quad R_\psi = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi \\ s\psi & c\psi \end{bmatrix}.\tag{3.9}$$

Agora, denotando $q := \begin{bmatrix} \theta & \phi \end{bmatrix}^T$ como a **orientação parcial do quadrirrotor** (*roll* e *pitch*), pode-se escrever de (3.1) que

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi} \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) + \frac{M_x}{I_x}, \\ \ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi} \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{M_y}{I_y},\end{aligned}\tag{3.10}$$

ou, equivalentemente,

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} 0 & (\frac{I_z - I_x}{I_y}) \\ (\frac{I_y - I_z}{I_x}) & 0 \end{bmatrix} \dot{\psi} \dot{q} + \begin{bmatrix} 0 & 1/I_y \\ 1/I_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix}.\tag{3.11}$$

Para finalizar a partição, as dinâmicas do rumo e da altitude são repetidas a seguir respectivamente:

$$\ddot{\psi} = \dot{\phi}\dot{\theta} \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{M_z}{I_z},\tag{3.12}$$

$$\ddot{z} = -g + (c\phi c\theta) \frac{F_z}{m}.\tag{3.13}$$

3.1.2 Objetivo de Controle

Especificada uma *trajetória desejada* $\mathcal{Y}_r(t)$ suficientemente suave, neste capítulo aborda-se o problema de rastreamento de trajetória, que consiste em projetar uma lei de controle (u) que assegure a convergência assintótica do *erro de saída* (ou *erro de rastreamento*)

$$e(t) := \mathcal{Y}_r(t) - \mathcal{Y}(t),\tag{3.14}$$

para zero, ou para uma pequena vizinhança do zero, mantendo todos os sinais do sistema em malha fechada uniformemente limitados, independentemente das incertezas.

Trajatória Desejada

A trajetória desejada ($\mathcal{Y}_r \in \mathbb{R}^4$) é especificada por:

$$\mathcal{Y}_r(t) = M(s) r(t), \quad M(s) = \text{diag} \left\{ \frac{k_r}{L_1(s)}, \dots, \frac{k_r}{L_4(s)} \right\}, \quad (3.15)$$

sendo $k_r > 0$ e $L_i(s) = s^{\rho_i-1} + a_{\rho_i-2}s^{\rho_i-2} + \dots + a_0$ um polinômio Hurwitz ($\forall i \in \{1, \dots, 4\}$) de grau $\rho_i - 1$. Supõe-se que o sinal de referência $r(t) \in \mathbb{R}^4$ é contínuo por partes e uniformemente limitado. Note que se impõe um modelo sem zeros e que se pressupõe o conhecimento de $\mathcal{Y}_r(t)$ e de suas derivadas temporais. Vale ressaltar que há casos em que apenas a trajetória \mathcal{Y}_r é considerada conhecida [109].

Observação 1 (Planejamento de Trajetória) *O planejador de trajetórias garante que a trajetória desejada para o quadrirrotor seja rastreável. Algumas trajetórias não respeitam a dinâmica subatuada do sistema e por isso não podem ser rastreadas. De acordo com [6], o sistema que descreve a dinâmica do quadrirrotor é diferencialmente plano e qualquer trajetória diferenciável quatro vezes é de possível realização. Uma forma possível de garantir que a trajetória desejada sempre será diferenciável quatro vezes é gerando a trajetória por um filtro passa baixas de terceira ordem.*

3.1.3 Topologia Tradicional de Controle de Quadrirrotores

Neste capítulo, será utilizada uma topologia de controle aninhado frequentemente encontrada na literatura [7] [6] [34] e composta por quatro controladores:

- Controlador de Posição (x e y).
- Controlador de Orientação (ϕ e θ).
- Controlador de Altitude (z).
- Controlador de Rumo (ψ).

Os dois primeiros controladores são aninhados em uma malha interna (orientação) e uma externa (posição), enquanto que os dois últimos são desacoplados, ver Figura 3.1.

Esta topologia aninhada (**malhas de controle interna e externa**) está diretamente motivada pelo desacoplamento inerente em (3.1).

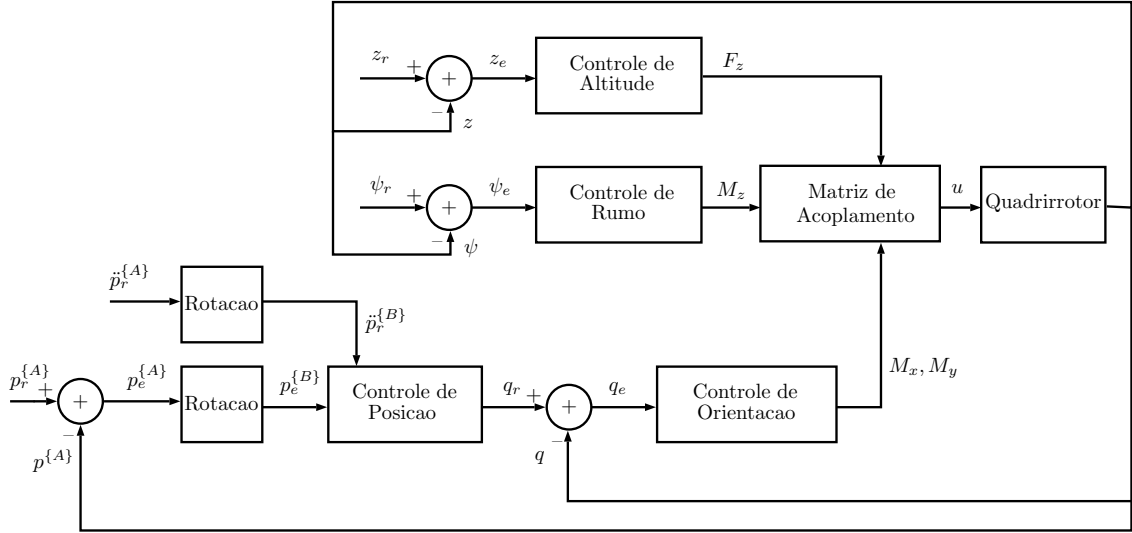


Figura 3.1: Topologia de controle utilizada formada por uma malha interna (orientação) e uma malha externa de posição e duas malhas desacopladas, uma para altitude e outra para o rumo do quadricóptero.

Na malha interna, o *controlador de orientação* (ϕ e θ) gera os sinais de controle M_x e M_y com o objetivo de rastrear o sinal de referência de orientação $q_r := \begin{bmatrix} \theta_r & \phi_r \end{bmatrix}^T$ proveniente do controlado de posição da malha externa. Ou seja, o sinal de controle do controlador de posição serve de referência para malha interna de orientação. Adicionalmente, considere como *erro de orientação* o sinal⁴ definido por

$$q_e := \begin{bmatrix} \theta_r \\ \phi_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

sendo $q = \begin{bmatrix} \theta & \phi \end{bmatrix}^T$ a orientação parcial do quadricóptero (*roll* e *pitch*). A malha interna deve ser rápida quando comparada com a malha externa de posição para que o *controlador de posição*, por meio dos ângulos de *roll* e *pitch* controle o posicionamento do quadricóptero, realimentando as componentes translacionais (x e y).

Variáveis de Erro de Rastreamento

De acordo com a estrutura aninhada de controle e o particionamento da dinâmica do quadricóptero é conveniente representar o erro de rastreamento (3.14) utilizando a notação e nomenclatura a seguir. Daqui por diante, denomina-se de **erro de posição** a quantidade

$$p_e := \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

⁴Note que este sinal pode ser considerado disponível por meio de um sensor inercial, mas não foi incluído como saída de interesse (3.7) por se tratar de um sinal interno na topologia de controle adotada neste capítulo.

sendo $p_r := \begin{bmatrix} x_r & y_r \end{bmatrix}^T$ e $p := \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ os sinais de referência de posição fornecido pelo planejador de trajetória e a posição cartesiana (parcial) do centro de gravidade do quadricóptero, respectivamente, ambos no sistema de coordenadas inercial $\{A\}$. Além disso, sejam os erros de **rumo** (ψ_e) e **altitude** (z_e) definidos por

$$\psi_e := \psi_r - \psi, \quad (3.18)$$

$$z_e := z_r - z, \quad (3.19)$$

sendo ψ_r e z_r os sinais de referência de rumo (ψ) e de altitude (z), respectivamente, com z (e z_r) sendo a terceira componente do vetor posição do C.G. no sistema de coordenadas inercial $\{A\}$.

3.2 Linearização por Realimentação

Como abordagem inicial, considere o modelo dinâmico do quadricóptero (3.9) (3.11) (3.12) (3.13) perfeitamente conhecido de tal forma que seja possível linearizar o sistema via realimentação dos ângulos de *roll* e *pitch* e do rumo.

3.2.1 Dinâmica Rotacional

Com o objetivo de cancelar as não linearidades da dinâmica da orientação (3.11) é proposto o sistema

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_x \\ I_y & 0 \end{bmatrix} \left\{ - \begin{bmatrix} 0 & (\frac{I_z - I_x}{I_y}) \\ (\frac{I_y - I_z}{I_x}) & 0 \end{bmatrix} \dot{\psi} \dot{q} + \begin{bmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.20)$$

sendo \bar{M}_x , \bar{M}_y sinais de controle auxiliares a serem definidos mais a frente. Substituindo (3.20) na dinâmica da orientação dada em (3.11), tem-se a dinâmica da orientação linearizada⁵

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Para completar a linearização da dinâmica rotacional, considere o seguinte sinal de controle de rumo para controlar 3.12

$$M_z = I_z \left\{ -\dot{\phi}\dot{\theta} \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \bar{M}_z \right\}, \quad (3.22)$$

⁵Daqui por diante, a notação com o sobrescrito “barra” (por exemplo \bar{M}_x) denota a variável de controle que efetivamente aciona o sistema após a linearização por realimentação.

sendo \bar{M}_z um sinal de controle auxiliar a ser definido no que segue, resultando na seguinte dinâmica linear para o rumo

$$\ddot{\psi} = \bar{M}_z. \quad (3.23)$$

Controle PD com Ação Antecipativa

É sabido que um controlador PD com ação antecipativa pode assegurar rastreamento exato quando a planta é um duplo integrador. Portanto, para o controlador de orientação a lei de controle auxiliar é dada na forma

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \end{bmatrix} = K_p^q q_e + K_d^q \dot{q}_e + v_q. \quad (3.24)$$

sendo $K_p^q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $K_d^q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ as matrizes de ganho proporcional e derivativo, respectivamente, e v_q termo a ser definido adiante. Agora, considerando (3.24) e o modelo resultante da linearização por realimentação (3.21) obtém-se

$$\ddot{q} = K_p^q q_e + K_d^q \dot{q}_e + v_q, \quad (3.25)$$

e subtraindo \ddot{q}_r de ambos os lados de (3.25) tem-se que

$$\ddot{q} - \ddot{q}_r = K_p^q q_e + K_d^q \dot{q}_e + v_q - \ddot{q}_r, \quad (3.26)$$

ou

$$\ddot{q}_e + K_p^q q_e + K_d^q \dot{q}_e = -v_q + \ddot{q}_r, \quad (3.27)$$

após reorganizar os termos. Para uma escolha apropriada de K_p^q e K_d^q podemos assegurar a convergência do erro para zero ($q_e \rightarrow 0$) em (3.27). Para a referência q_r constante (regulação) a derivada \ddot{q}_r é nula de forma que $v_q = 0$ garante que o erro de orientação q_e convirja para zero, ou seja, $q_e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Porém, sabe-se que para rastreamento de trajetória, a parcela antecipativa $v_q = \ddot{q}_r$ faz-se necessária para assegurar que $q_e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

De forma análoga, o controlador de rumo dado na forma

$$\bar{M}_z = K_p^\psi \psi_e + K_d^\psi \dot{\psi}_e + v_\psi, \quad (3.28)$$

assegura que ψ_e convirja para zero, para uma escolha apropriada de K_p^ψ e K_d^ψ . Para a referência ψ_r constante (regulação) a derivada $\ddot{\psi}_r$ é nula de forma que $v_\psi = 0$ garante que o erro de posição ψ_e convirja para zero, ou seja, $\psi_e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Porém, para rastreamento de trajetória, o termo antecipatório (*feedforward*) $v_\psi = \ddot{\psi}_r$ faz-se necessário para assegurar que $\psi_e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

3.2.2 Dinâmica Translacional

Para a linearização por realimentação da dinâmica da posição (3.9) propõe-se atuar nos sinais de referência de orientação, ou seja, os sinais ϕ_r e θ_r e supor que o controlador de orientação (malha interna) está adequadamente sintonizado de forma a assegurar o rastreamento de ϕ e θ , respectivamente.

Uma vez que o quadricóptero atua pairando, é razoável considerar $|\phi(t)| < 5^\circ$ e $|\theta(t)| < 5^\circ$ e, conseqüentemente, $c\theta(t) \neq 0, \forall t$. Sendo assim, propõe-se o seguinte sinal de referência para a malha interna de controle de orientação

$$q_r = \begin{bmatrix} \theta_r \\ \phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arcsin\left(\frac{\theta'_r m}{F_z}\right) \\ \arcsin\left(-\frac{\phi'_r m}{c\theta_r F_z}\right) \end{bmatrix}, \quad q'_r = \begin{bmatrix} \theta'_r \\ \phi'_r \end{bmatrix} := R_{\psi_r}^{-1} \bar{q}_r, \quad (3.29)$$

sendo $\bar{q}_r = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_r & \bar{\phi}_r \end{bmatrix}^T$ o sinal, a ser definido mais a frente, que atuará na planta linearizada. Agora uma análise aproximada será conduzida. Considerando a dinâmica da malha fechada interna de orientação rápida o suficiente para aproximá-la como um sistema estático, pode-se considerar que $q \approx q_r$ e $\psi \approx \psi_r$, portanto, de (3.9) tem-se que

$$\ddot{p} \approx R_{\psi_r} \begin{bmatrix} s\theta_r \\ -c\theta_r s\phi_r \end{bmatrix} \frac{F_z}{m} = R_{\psi_r} \begin{bmatrix} \left(\frac{\theta'_r m}{F_z}\right) \\ -c\theta_r \left(-\frac{\phi'_r m}{c\theta_r F_z}\right) \end{bmatrix} \frac{F_z}{m}, \quad (3.30)$$

onde a última igualdade vem do fato que $s\theta_r = \frac{\theta'_r m}{F_z}$ e $s\phi_r = -\frac{\phi'_r m}{c\theta_r F_z}$. Logo tem-se que

$$\ddot{p} \approx R_{\psi_r} q'_r, \quad (3.31)$$

resultando aproximadamente na seguinte dinâmica linearizada para a posição do quadricóptero

$$\ddot{p} \approx \bar{q}_r. \quad (3.32)$$

Da mesma forma pode-se propor o seguinte subsistema de controle para linearizar a dinâmica da altitude (3.13):

$$F_z = \frac{m}{c\phi c\theta} (\bar{F}_z), \quad (3.33)$$

resultando na seguinte dinâmica linear

$$\ddot{z} = \bar{F}_z - g. \quad (3.34)$$

com \bar{F}_z a ser definido no que segue.

Controle PD com Ação Antecipativa

Assim como para o controle do subsistema rotacional, propõe-se utilizar um controlador PD para o subsistema translacional. Para o controlador de posição a lei de controle é dada por

$$\bar{q}_r = K_p^p p_e + K_d^p \dot{p}_e + v_p. \quad (3.35)$$

sendo $K_p^p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $K_d^p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ as matrizes de ganho proporcional e derivativo, respectivamente, e v_p termo a ser definido adiante. Para uma escolha apropriada de K_p^p e K_d^p esta lei assegura a convergência do erro de rastreamento para uma vizinhança de zero. De fato, para a referência p_r constante (regulação) a derivada \ddot{p}_r é nula de forma que $v_p = 0$ garante que o erro de posição p_e tenda para próximo de zero. Para rastreamento de trajetória, a parcela antecipativa (*feedforward*) $v_p = \ddot{p}_r$ faz-se necessária⁶ para assegurar que $p_e(t) \approx 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Analogamente, para o controle da altitude considere

$$\bar{F}_z = K_p^z z_e + K_d^z \dot{z}_e + v_z. \quad (3.36)$$

Neste caso, para uma escolha apropriada de K_p^z e K_d^z e para referência z_r constante (regulação) a derivada \ddot{z}_r é nula de forma que $v_z = g$ garante que o erro de posição z_e convirja para zero, ou seja, $z_e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. O caso de rastreamento de trajetória é resolvido agregando-se o termo antecipativa $v_z = \ddot{z}_r + g$ que faz-se necessária para assegurar que $z_e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Observação 2 (*Linearização por Realimentação*)

Como descrito anteriormente, assume-se que o controlador de orientação está adequadamente sintonizado de forma a assegurar o rastreamento perfeito de ϕ e θ , entretanto em termos práticos sempre existe um erro de rastreamento $\phi_e(t) = \phi_r(t) - \phi(t) \neq 0$ e $\theta_e(t) = \theta_r(t) - \theta(t) \neq 0$, uma vez que os parâmetros não são perfeitamente conhecidos na prática. Fica claro então a necessidade de uma análise de robustez em relação a incertezas paramétricas do controlador baseado em Linearização por Realimentação. Porém, como o foco deste trabalho se concentra no pouso do quadricóptero, e o controle de orientação pode ser conduzido por outras estratégias que não necessitam de conhecimento perfeito dos parâmetros, esta análise de robustez será deixada para trabalhos futuros.

⁶A análise completa fica para trabalhos futuros, pois o foco desta Dissertação é o controle desenvolvido no Capítulo 4.

3.3 Realimentação de Estado: Modelo Linearizado

O controlador abordado nesta seção baseia-se no controlador apresentado em SELFRIDGE e TAO [36], que considera a linearização do modelo (3.1), apresentada na Seção 2.4 e repetida a seguir por conveniência:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_p &= A_p \tilde{x}_p + B_p \tilde{u}, \\ \mathcal{Y} &= C_p \tilde{x}_p,\end{aligned}\tag{3.37}$$

sendo $\tilde{x}_p = x_p - \bar{x}_p$, com x_p sendo o estado de 3.1, $\tilde{u} = \mathcal{U} - \bar{u}$, (\bar{x}_p, \bar{u}) o ponto de operação e A_p, B_p, C_p definidos na Seção 2.4. A seguinte hipótese básica é considerada:

(H-3.a) O sistema linear é controlável e observável, ou seja, (A_p, B_p, C_p) é uma realização de ordem mínima para $G_p(s)$, com

$$G_p(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p$$

estritamente própria e de posto (normal) completo.

Além disso, supõe-se que:

(H-3.b) Os zeros de transmissão de $G_p(s)$ têm parte real estritamente negativa.

(H-3.c) $G_p(s)$ possui grau relativo vetorial n^* .

A Hipótese **(H-3.a)** e a Hipótese de **fase mínima (H-3.b)** são usuais no controle por modelo de referência (MRC) e são necessárias uma vez que a formulação do MRC [105] será adotada para abordar o problema de rastreamento de trajetória.

3.3.1 Controle via Realimentação Linear de Estado

O objetivo deste esquema de controle é assegurar que todos os sinais em malha fechada sejam limitados e a saída \mathcal{Y} rastreie a referência \mathcal{Y}_r . A lei de controle considerada é dada pela seguinte realimentação linear de estado com termo direto:

$$\tilde{u}_p = K_x \tilde{x}_p + K_r r,\tag{3.38}$$

sendo $K_x \in \mathbb{R}^{4 \times 12}$ e $K_r \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ constantes de projeto e r a entrada de referência (limitada) aplicada ao modelo de referência (3.15), ou seja, $\mathcal{Y}_r = M(s)r$. A planta linearizada em malha fechada é dada por

$$G_c(s) = C(sI - A_p - B_p K_x)^{-1} B_p K_r,\tag{3.39}$$

que satisfaz

$$\mathcal{Y} = G_c(s)r. \quad \text{Sendo } G_c(s) \approx M(s), \quad \text{tem-se } \mathcal{Y} \approx \mathcal{Y}_r \quad (3.40)$$

O projeto em [36] propõe que os ganhos sejam dados por

$$K_x = K_p^{-1}K_0, \quad K_r = K_p^{-1}, \quad (3.41)$$

sendo K_p o ganho de alta frequência da planta em malha aberta, ou seja,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow \infty} \xi_G(s)G_p(s), \quad (3.42)$$

com matriz *interactor* $\xi_G(s)$ [102], ver notação na Seção 1.3. O ganho K_0 é obtido como segue:

$$K_{0i} = -c_i A_p^{l_i} - d_{i1} c_i A_p^{l_i-1} - \dots - d_{il_i-1} c_i A_p - d_{il_i} c_i, \quad (3.43)$$

sendo c_i a i -ésima linha da matriz C_p e d_{ij} são os coeficientes dos polinômios da matriz de transferência do modelo de referência. Estes polinômios podem ser arbitrariamente escolhidos para atender a uma resposta desejada para o sistema em malha fechada. A única restrição está nos graus de cada polinômio que devem ser iguais aos graus dos polinômios que compõem a matriz *interactor* $\xi_G(s)$ [36].

3.4 Controle PD

Nesta seção, consideram-se controladores PD com ação antecipativa sintonizados sem o conhecimento exato da planta. A sintonia proposta pode ser inspirada nos esquemas discutidos nas Seções 3.2 e 3.3, ou por aproximações sucessivas.

Espera-se um comportamento similar ao controlador que utiliza linearização por realimentação quando os cancelamentos das não linearidades for desprezível. Isso ocorre, por exemplo, quando o vôo do quadricóptero for determinado por manobras lentas e com valores pequenos de ângulos de *roll* e *pitch*, como é o caso explorado no próximo capítulo.

Para o controle de orientação é proposto o controlador PD com ação antecipativa dado por

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = K_P^q q_e + K_D^q \dot{q}_e + v_q, \quad v_q = \ddot{q}_r, \quad (3.44)$$

sendo v_q a parcela antecipativa e $K_P^q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $K_D^q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ as matrizes de ganho proporcional e derivativo do controlador de orientação⁷. Similarmente ao controlador

⁷Note que, para diferenciar dos ganhos do controlador PD que utiliza linearização por reali-

de orientação, considera-se um controle PD com ação antecipativa para a malha de posição, descrito por

$$q_r = K_P^p p_e + K_D^p \dot{p}_e + v_p, \quad v_p = \ddot{p}_r, \quad (3.45)$$

sendo v_p a parcela antecipativa e $K_P^p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $K_D^p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ as matrizes de ganho proporcional e derivativo do controlador de posição, respectivamente. Por fim, para as malhas de controle de altitude (z) e rumo (ψ) tem-se

$$M_z = K_P^\psi \psi_e + K_D^\psi \dot{\psi}_e + v_\psi, \quad v_\psi = \ddot{\psi}_r, \quad (3.46)$$

sendo v_ψ a parcela antecipativa, K_P^ψ e K_D^ψ os ganhos proporcional e derivativo do controlador de rumo, e

$$F_z = K_P^z z_e + K_D^z \dot{z}_e + v_z, \quad v_z = \ddot{z}_r, \quad (3.47)$$

sendo v_z a parcela antecipativa, K_P^z e K_D^z os ganhos proporcional e derivativo do controlador de altitude.

3.4.1 PD sem Realimentação de Velocidade

Para utilizar apenas realimentação dos ângulos de *Euler* e da posição do quadricóptero, evitando a realimentação de velocidade, as parcelas derivativas dos controladores PD serão aproximadas por⁸

$$\hat{\nu} = \frac{s}{\tau s + 1} \nu, \quad (3.48)$$

sendo $\hat{\nu}$ a estimativa da derivada ν de um sinal escalar genérico ν e $\tau_\nu > 0$ a constante de tempo do filtro do estimador. No caso multivariável o filtro é aplicado elemento a elemento. Neste caso, os controladores são reescritos como:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = K_P^q q_e + K_D^q \hat{q}_e + \ddot{q}_r, \quad (3.49)$$

$$q_r = K_P^p p_e + K_D^p \hat{p}_e + \ddot{p}_r, \quad (3.50)$$

$$M_z = K_P^\psi \psi_e + K_D^\psi \hat{\psi}_e + \ddot{\psi}_r, \quad (3.51)$$

$$F_z = K_P^z z_e + K_D^z \hat{z}_e + \ddot{z}_r, \quad (3.52)$$

mentação, um subscrito com letra maiúscula foi adotado. Compare, por exemplo, o ganho K_P^q em (3.44) com o ganho K_p^q em (3.24).

⁸Expressão da tradicional Derivada “Suja” (*Dirty Derivative*).

sendo \hat{q}_e , \hat{p}_e , $\hat{\psi}_e$ e \hat{z}_e as estimativas de q_e , p_e , ψ_e e z_e , com constante de tempo dos filtros dos estimadores τ_q , τ_p , τ_ψ e τ_z , respectivamente.

3.5 Simulações Numéricas

Neste trabalho, as simulações realizadas consideram o quadrrorotor X4 [1], com modelo aproximado descrito em (3.1). Além disso, para efeito de comparação, será simulado o modelo completo apresentado em (2.10) e (2.9), acrescentando as dinâmicas dos atuadores (motores DC) para torná-lo mais realista. Os parâmetros de (2.10), (2.9) e (3.1) estão apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Parâmetros do Quadrrorotor X4

$m = 4 \text{ kg}$	$g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$	$d = 0,315 \text{ m}$
$I_x = 0,082 \text{ kg m}^2$	$I_y = 0,082 \text{ kg m}^2$	$I_z = 0,149 \text{ kg m}^2$
$C_Q = 2,35 \times 10^{-4}$	$C_T = 4,8 \times 10^{-3}$	

3.5.1 Avaliação da Relevância da Velocidade Líquida Ω_R

Nesta seção é investigada a aproximação do modelo (2.13) pelo modelo (2.14) que considera os termos com Ω_R e $\dot{\Omega}_R$ desprezíveis. A velocidade resultante $\Omega_R = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$ representa a soma das velocidades angulares dos rotores. Dado que no quadrrorotor dois rotores giram em sentido horário enquanto os outros dois giram no sentido oposto, é razoável considerar que quando em voo parado a soma das velocidades é aproximadamente zero. Para isso serão realizadas simulações comparativas com o intuito de estimar a relevância destes termos na dinâmica do quadrrorotor.

Considere os modelos (2.14) e (2.13) com parâmetros físicos dados na Tabela (3.1) e em malha fechada com o controlador PD sem ação antecipativa dado pelas equações (3.44), (3.45), (3.46) e (3.47) com os seguintes ganhos:

$$K_P^q = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}, K_D^q = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, K_P^p = \begin{bmatrix} 0,16 & 0 \\ 0 & -0,16 \end{bmatrix}, K_D^p = \begin{bmatrix} 0,30 & 0 \\ 0 & -0,30 \end{bmatrix},$$

$$K_P^\psi = 2, K_D^\psi = 2,5, K_P^z = 50 \quad \text{e} \quad K_D^z = 25.$$

A trajetória a ser seguida é dada por

$$\mathcal{Y}_r = M(s)r(t), \quad (3.53)$$

com $M(s) = I^{4 \times 4}$ por simplicidade. Pode-se observar nas Figuras 3.2 e 3.3, com

referência

$$r(t) = \begin{bmatrix} \text{sen}(1,2\pi t) & \text{cos}(1,2\pi t) & 1 + 0,2\text{sen}(0,2\pi t) & 30\text{sen}(0,4\pi t) \end{bmatrix}^T$$

e nas Figuras 3.4 e 3.5, com $r(t)$ dado por pulsos, que os sinais de posição e de ângulo dos modelos comparadas praticamente não diferem entre si (linhas verdes e azuis coincidem). Note que na Figura 3.2 o rastreamento não é obtido, obviamente pelo controle não ter ação antecipativa, o que não compromete a comparação apresentada.

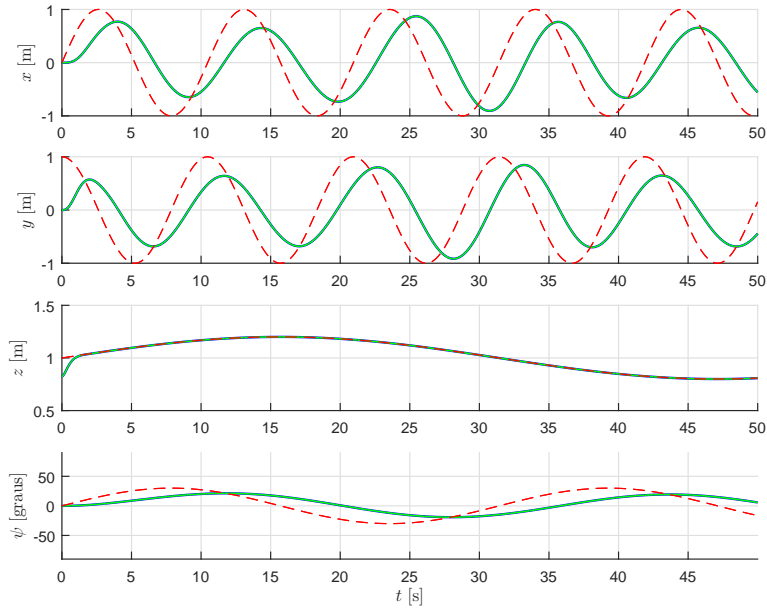


Figura 3.2: Simulação da avaliação da relevância da velocidade líquida Ω_R . Exemplo com referência de posição senoidal. Sinais de saída x , y , z e ψ da planta modelo completo (linha azul) e da planta aproximada (linha verde) e suas respectivas referências x_r , y_r , z_r e ψ_r (linhas tracejadas em vermelho).

3.5.2 Desempenho dos Controladores

Como verificado na Seção 3.5.1 e observado largamente na literatura [7, 34], doravante serão desprezados no modelo do quadrirrotor os termos relacionados a velocidade líquida Ω_R .

Considere o sistema descrita pelo modelo (3.1) com parâmetros dados na Tabela 3.1. Nas simulações a seguir serão considerados os três controladores apresentados neste Capítulo. O controlador I consiste em um PD com realimentação apenas de posição (derivada suja) com linearização por realimentação da dinâmica rotacional (3.20), (3.24), (3.22) e (3.28) e um controlador PD com realimentação apenas de posição com ação antecipativa e linearização por realimentação da dinâmica trans-

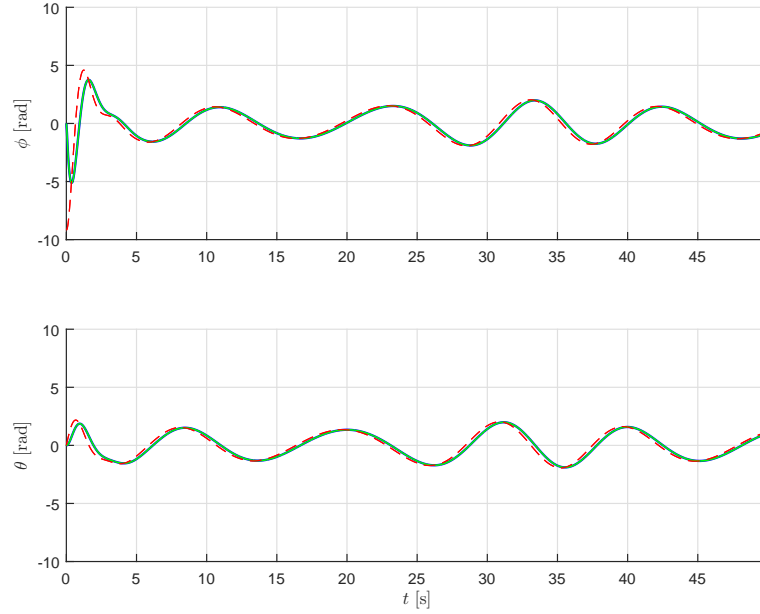


Figura 3.3: Simulação da avaliação da relevância da velocidade líquida Ω_R . Exemplo com referência de posição senoidal. Sinais de saída ϕ e θ da planta modelo completo (linha azul) e da planta aproximada (linha verde) e suas respectivas referências ϕ_r e θ_r (linhas tracejadas em vermelho).

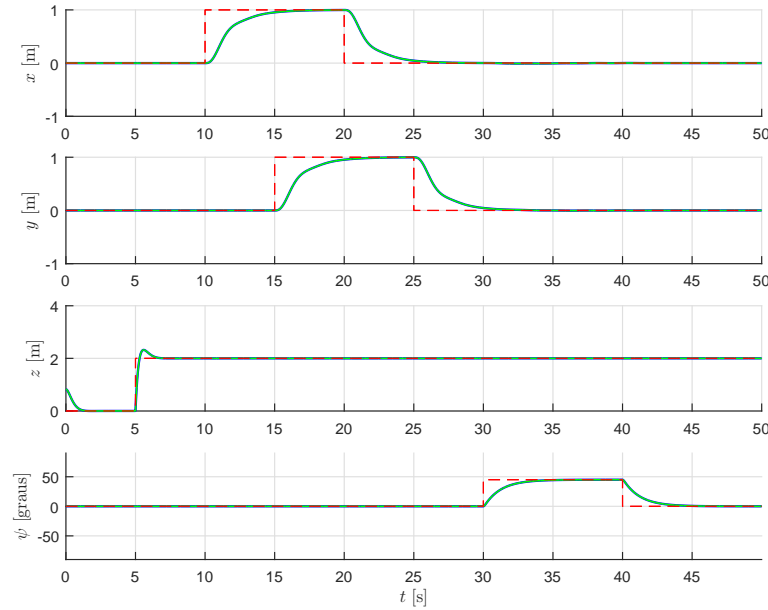


Figura 3.4: Simulação da avaliação da relevância da velocidade líquida Ω_R . Exemplo com referência de posição em degrau. Sinais de saída x , y , z e ψ da planta modelo completo (linha azul) e da planta aproximada (linha verde) e suas respectivas referências x_r , y_r , z_r e ψ_r .

lacional (3.29), (3.35), (3.33) e (3.36). É implementado com os seguintes ganhos:

$$K_p^q = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}, \quad K_d^q = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad K_p^p = \begin{bmatrix} 0,16 & 0 \\ 0 & -0,16 \end{bmatrix}, \quad K_d^p = \begin{bmatrix} 0,30 & 0 \\ 0 & -0,30 \end{bmatrix},$$

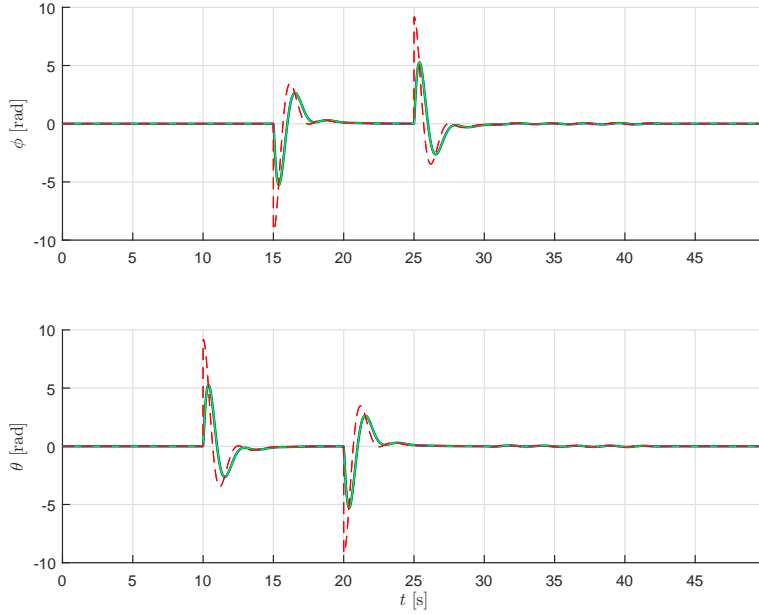


Figura 3.5: Simulação da avaliação da relevância da velocidade líquida Ω_R . Exemplo com referência de posição em degrau. Sinais de saída ϕ e θ da planta modelo completo (linha azul) e da planta aproximada (linha verde) e suas respectivas referências ϕ_r e θ_r (linhas tracejadas em vermelho)

$$K_p^\psi = 2, K_d^\psi = 2,5, K_p^z = 50 \quad \text{e} \quad K_d^z = 25.$$

Os correspondentes termos de ação antecipativa são dados por: $v_q = 0$ (seria \ddot{q}_r porém não é disponível), $v_\psi = \ddot{\psi}_r$, $v_p = \ddot{p}_r$ e $v_z = \ddot{z}_r$.

Por outro lado, o controlador II consiste em um PD sintonizado sem usar informação dos parâmetros da planta e utilizando apenas realimentação de posição e ação antecipativa para o controle da dinâmica translacional e o controlador PD com realimentação de posição para o controle da dinâmica rotacional dado por (3.49), (3.50), (3.51) e (3.52) é implementado com os ganhos

$$K_P^q = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}, K_D^q = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, K_P^p = \begin{bmatrix} 0,16 & 0 \\ 0 & -0,16 \end{bmatrix}, K_D^p = \begin{bmatrix} 0,30 & 0 \\ 0 & -0,30 \end{bmatrix},$$

$$K_P^\psi = 2, K_D^\psi = 2,5, K_P^z = 50, K_D^z = 25 \quad \text{e} \quad \tau = 0,01\text{s}.$$

Finalmente, o controlador III é implementado via realimentação de estado (3.38) com ganhos

$$K_r = \text{diag} \left[8,0 \quad -29,5 \quad 413,2 \quad 19,6 \right]$$

e

$$K_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 29,5200 & 0 & -9,7580 & 0 & 0 \\ -413,2800 & 0 & 0 & 0 & -35,3420 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19,6680 \end{bmatrix} \dots$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -12,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28,0440 & 0 & -1,4760 & 0 & 0 \\ \cdots & -197,9480 & 0 & 0 & -2,7880 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3,4270 \end{bmatrix}.$$

A trajetória a ser seguida é dada por $\mathcal{Y}_r(t) = M(s)r(t)$ com

$$r(t) = \left[\begin{array}{cccc} \text{sen}(2\pi t) & \text{cos}(2\pi t) & 0,2\text{sen}(0,2\pi t) & 30\text{sen}(0,4\pi t) \end{array} \right]^T \quad (3.54)$$

e $M(s) = I^{4 \times 4}$, por simplicidade.

Pode-se observar nas Figura 3.9 que com o controlador II a planta não é capaz de rastrear a trajetória, dado que os parâmetros do quadricóptero são considerados desconhecidos no projeto deste controlador. Em particular, a parcela antecipativa ainda que incluída no controlador não foi projetada considerando as não linearidades e o ganho de alta frequência da planta.

No controlador I com resultados na Figura 3.6, a parcela antecipativa pôde ser melhor explorada uma vez que considera que os parâmetros e sinais do modelo são conhecidos para o projeto da linearização por realimentação. Desta forma o rastreamento é notavelmente melhorado com relação ao controlador II. Entretanto, pelo fato do controlador II demandar o perfeito conhecimento das parcelas necessárias para a linearização por realimentação, pode-se dizer que do ponto de vista prático este controlador pode ser inviável. O controle II apresenta resultados mais satisfatórios, porém é sensível a erros de modelagem e ruído de sensores. O controlador III é projetado com base na planta linearizada, por isso foi primeiramente avaliado no modelo linear. Foi detectado que utilizar o projeto do ganho K_r apresentado [36] não assegura rastreamento perfeito, sendo necessário incluir um pré-compensador dado pelo inverso do ganho DC do modelo de referência ($M^{-1}(0)$)

$$K_r = M^{-1}(0)K_p^{-1}. \quad (3.55)$$

Os resultados podem ser observados na Figura 3.12. Em seguida, quando aplicado no modelo não linear (3.1) também observou-se erro de regime no rastreamento. Neste caso utilizou-se o compensador $(C(-A_p - B_p K_x)^{-1}B_p)^{-1}K_p$ que é basicamente o inverso do ganho DC, resultando em

$$K_r = (C(-A_p - B_p K_x)^{-1}B_p)^{-1}. \quad (3.56)$$

Dada as modificações é possível observar o desempenho deste controlador na Figura 3.15. A trajetória neste caso, teve a frequência de oscilação reduzida para

melhor visualização dos resultados, sendo reescrita por

$$r(t) = \begin{bmatrix} \text{sen}(1,2\pi t) & \text{cos}(1,22\pi t) & 0,2\text{sen}(0,2\pi t) & 30\text{sen}(0,4\pi t) \end{bmatrix}^T. \quad (3.57)$$

Os respectivos sinais de erro podem ser observados nas Figuras 3.7, 3.10, 3.13 e 3.16.

Os sinais de controle são apresentados nas Figuras 3.8, 3.11, 3.14 e 3.17.

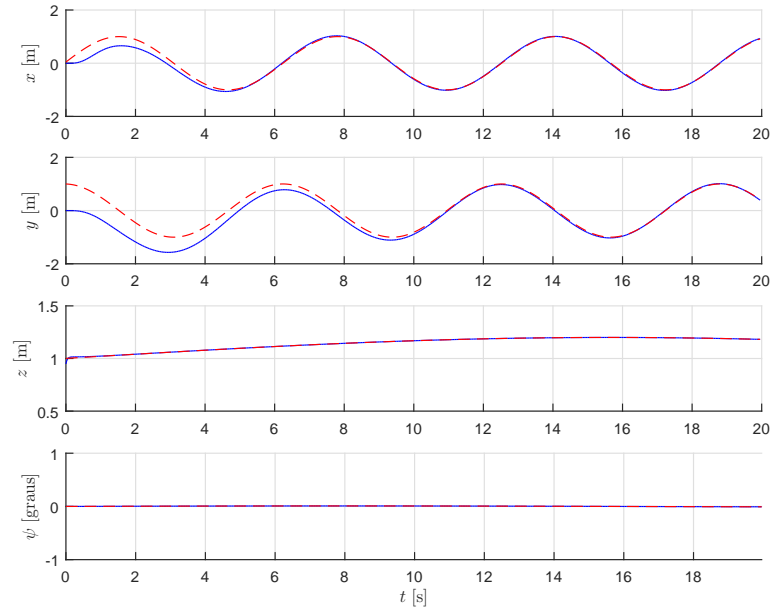


Figura 3.6: Controle I: sinais de saída x , y , z e ψ (linha azul) e suas respectivas referências (linha vermelha tracejada).

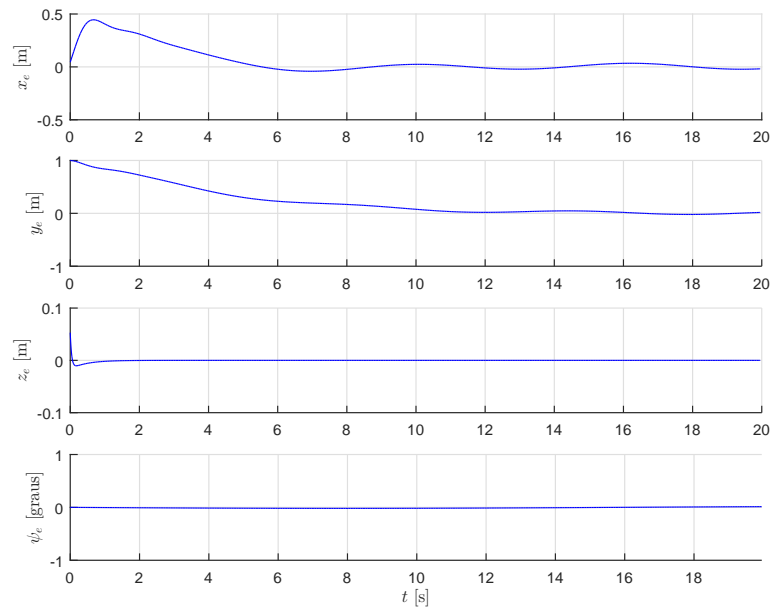


Figura 3.7: Controle I: sinais de erro de rastreamento x_e , y_e , z_e e ψ_e .

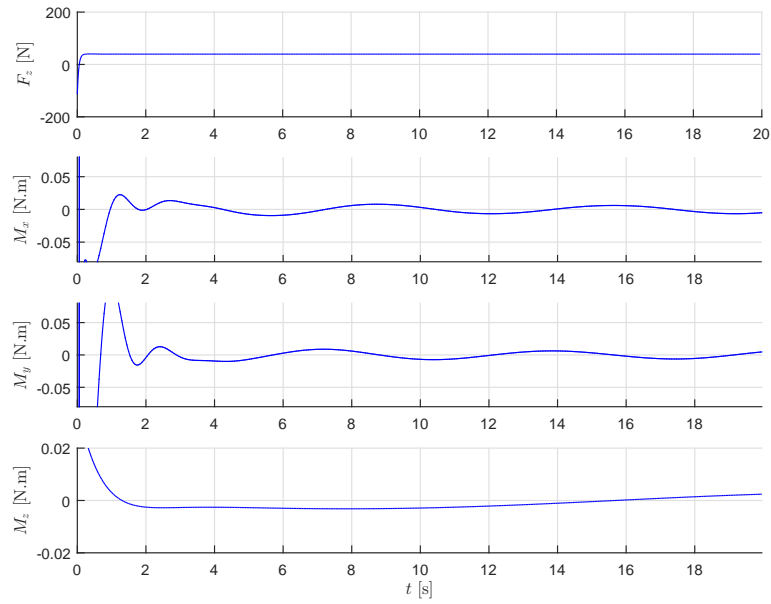


Figura 3.8: Controle I: sinais de controle F_z , M_x , M_y e M_z .

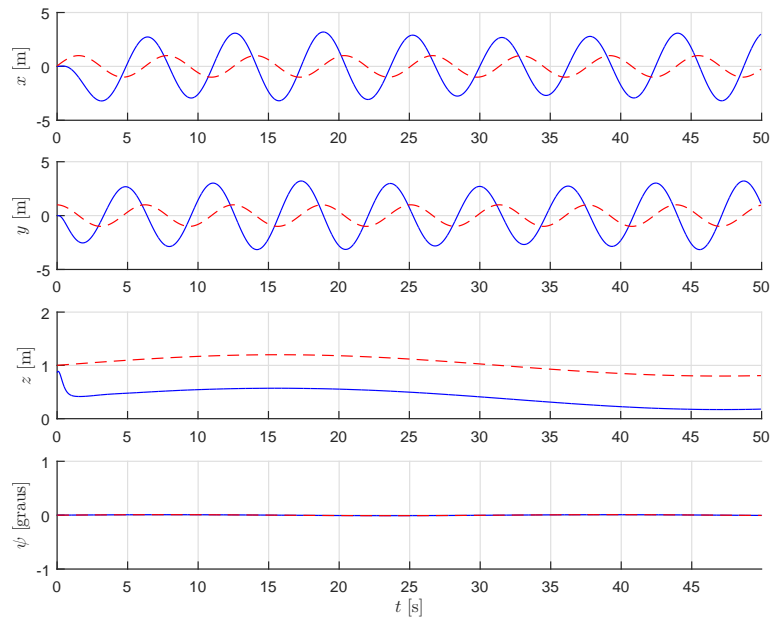


Figura 3.9: Controle II: sinais de saída x , y , z e ψ (linha azul) e suas respectivas referências (linha vermelha tracejada).

3.6 Conclusão

Este capítulo abordou o controle de posição e orientação do quadricóptero por meio de uma topologia de controle aninhado, onde foi observado o desempenho de três controladores. Em um primeiro instante um controlador do tipo PD com ação antecipativa e linearização por realimentação, assumindo o perfeito conhecimento dos parâmetros do quadricóptero foi simulado, apresentando um desempenho superior no seguimento de trajetória quando comparado ao segundo controlador também do tipo PD com ação antecipativa porém com sintonia sem o conhecimento exato da

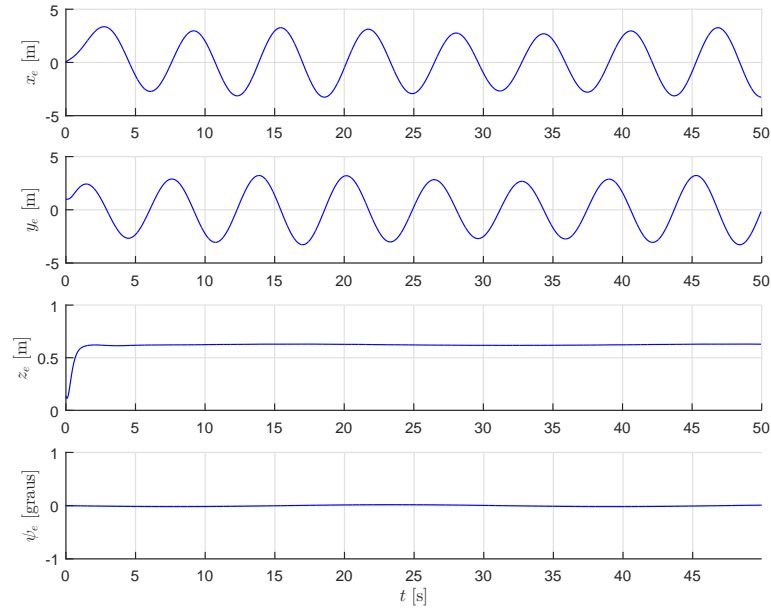


Figura 3.10: Controle II: sinais de erro de rastreamento x_e , y_e , z_e e ψ_e .

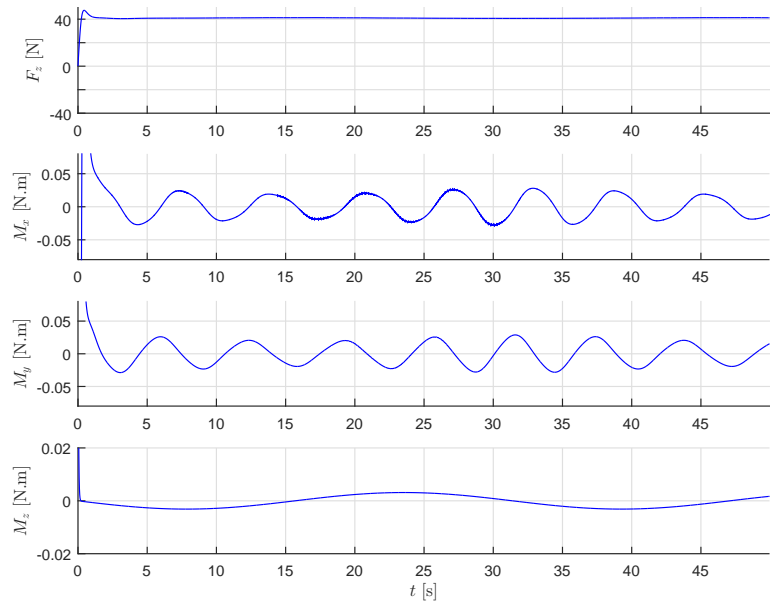


Figura 3.11: Controle II: sinais de controle F_z , M_x , M_y e M_z .

planta.

Por fim o controlador por realimentação de estado apresentou principalmente erro de regime, tendo que ser modificado com um pré-compensador, entretanto quando finalmente avaliado na planta não linear apresentou instabilidade. Deste modo um outro pré-compensador foi proposto, apresentando resultados inferiores, todavia estáveis, aos dois primeiros controladores do tipo PD.

Foi avaliado o impacto da parcela de velocidade líquida, Ω_R , em um modelo não linear aproximado. Pôde-se observar que o modelo quando em malha fechada com o controlador proposto e dada as trajetórias de teste, não apresentou diferenças

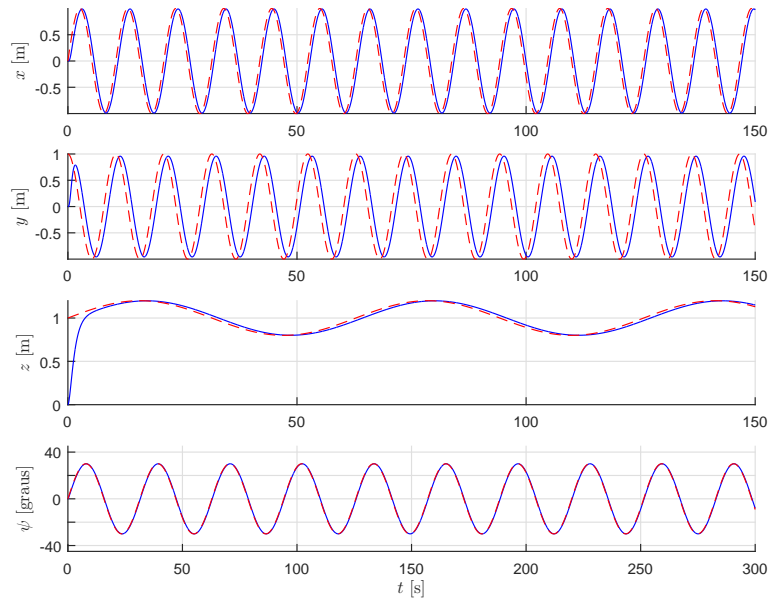


Figura 3.12: Controle III: com a planta linearizada. Sinais de saída x , y , z e ψ (linha azul) e suas respectivas referências (linha vermelha tracejada).

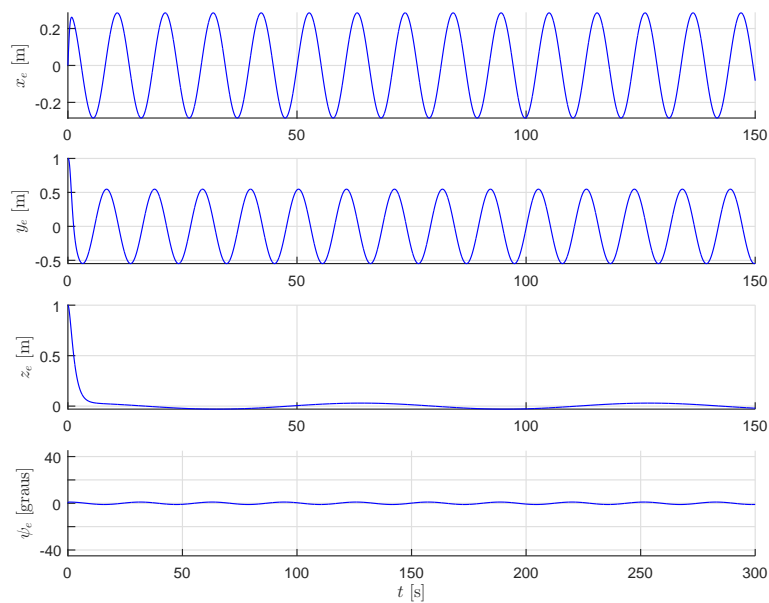


Figura 3.13: Controle III: com a planta linearizada. Sinais de erro de rastreamento x_e , y_e , z_e e ψ_e .

significativas quando comparado com o modelo considerando $\Omega_R = 0$.

Pode-se dizer que neste capítulo observou-se o desempenho de controladores tradicionais e o comportamento acoplado e não linear do modelo do quadricóptero. No próximo capítulo serão abordadas as questões principais desta Dissertação que consistem na tarefa de pouso em uma plataforma móvel.

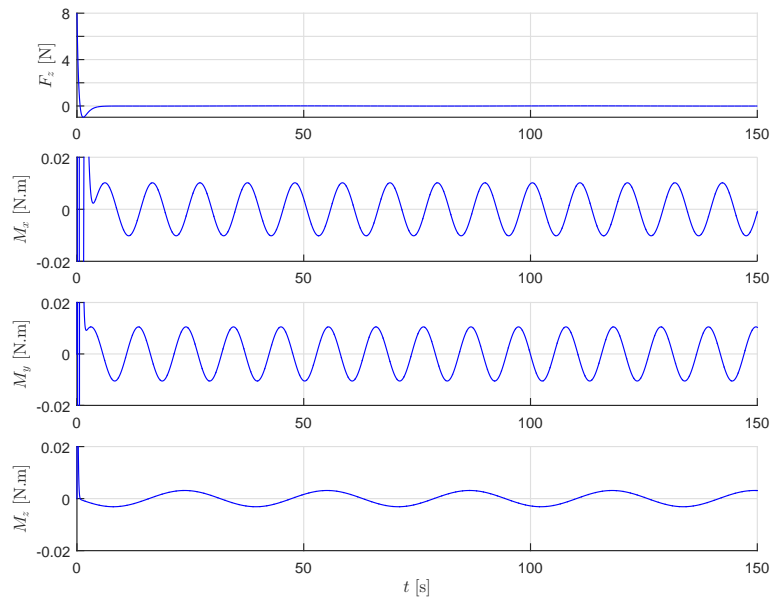


Figura 3.14: Controle III: com a planta linearizada. Sinais de controle F_z , M_x , M_y e M_z .

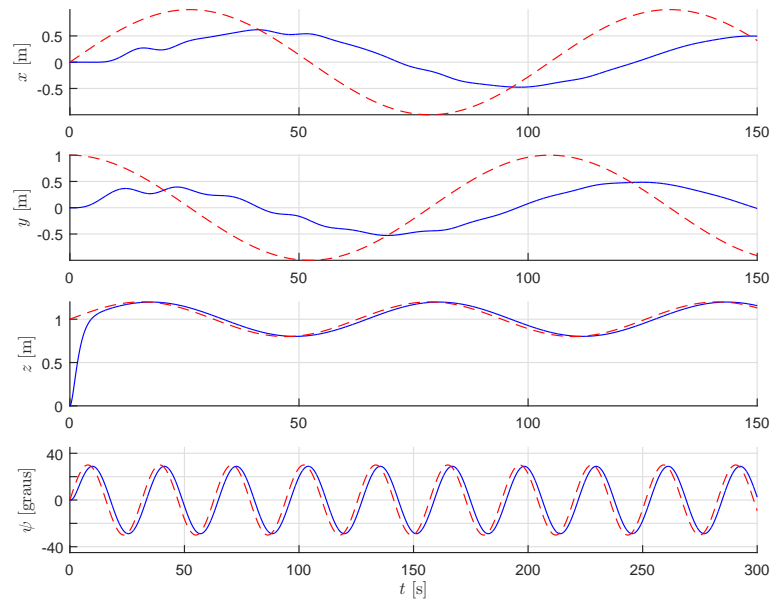


Figura 3.15: Controle III: com o modelo (3.1). Sinais de saída x , y , z e ψ (linha azul) e suas respectivas referências (linha vermelha tracejada).

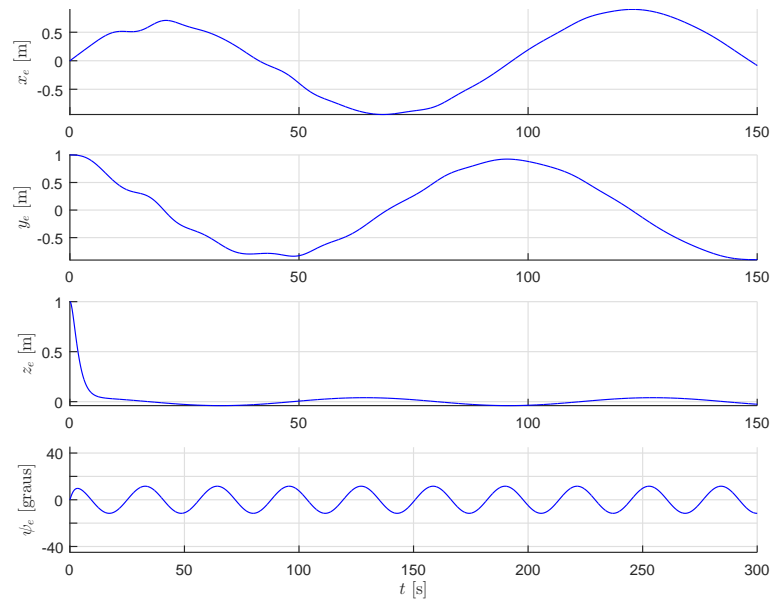


Figura 3.16: Controle III: com o modelo (3.1). Sinais de erro de rastreamento x_e , y_e , z_e e ψ_e .

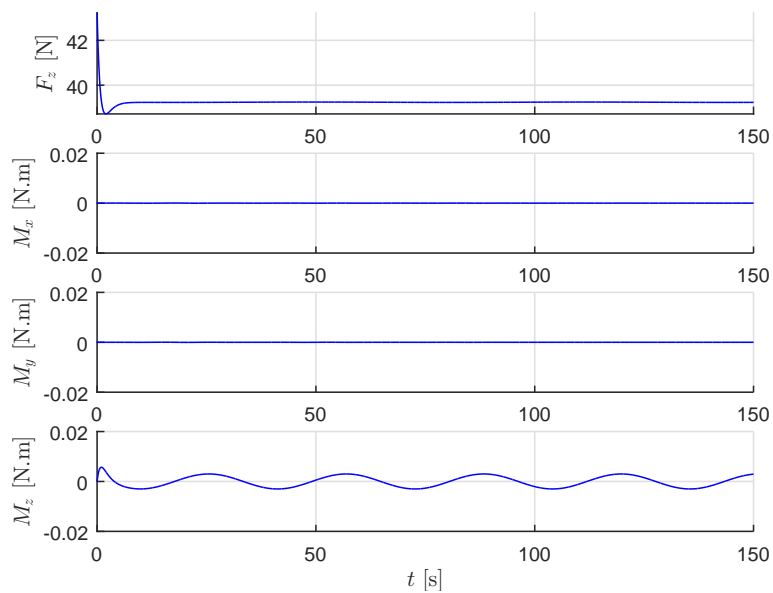


Figura 3.17: Controle III: com o modelo (3.1). Sinais de controle F_z , M_x , M_y e M_z .

Capítulo 4

Pouso em uma Plataforma que Oscila Verticalmente

O pouso de quadricópteros é um aspecto decisivo, no que se refere a integridade do veículo, uma vez que as condições de voo próximas ao solo são diferentes das de voo distante do solo. Além do risco inerente de colisão com o chão há também mudanças nas características aerodinâmicas envolvidas. O pouso em um alvo móvel, como por exemplo uma embarcação em alto mar, não é uma tarefa trivial principalmente devido a dinâmica não linear do quadricóptero incertezas e perturbações no sistema e devido a natureza variante no tempo do movimento em alto mar gerada por ventos, correntezas e ondas. O pouso em uma plataforma que oscila verticalmente pode ter um impacto significativo em aplicações marítimas para veículos autônomos e do tipo VTOL. Diversas aplicações justificam a presença de um veículo do tipo VTOL em uma embarcação, como no suporte ao monitoramento: da costa, da vida selvagem e de *icebergs*, por exemplo.

Este capítulo trata do problema de pouso em uma plataforma móvel que se desloca verticalmente, foco desta dissertação, incluindo a tarefa de captação/liberação (*Pick-and-Place*) e a presença de *Efeito Solo* [110] – amplificação dos empuxos gerados pelos atuadores quando o quadricóptero se aproxima de uma superfície. A plataforma é suposta **plana** e com dimensões suficientemente maiores do que as dimensões do quadricóptero. O *Efeito Solo* será considerado o mesmo para cada atuador e dependente apenas da altura do centro de gravidade (C.G.). Este efeito será modelado multiplicando-se o sinal de controle de (3.1) por um mesmo ganho. De fato é razoável considerar que pequenos ângulos de *roll* e *pitch* não alterem significativamente a relação entre os ganhos de cada atuador, podendo considerar ganhos iguais para todos eles (*Efeito Solo Simétrico*).

Sendo assim, o modelo (3.1) pode ser reescrito considerando o *Efeito Solo*

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} &= \dot{\theta}\dot{\psi}\left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) + \frac{k_g M_x}{I_x}, \\
\ddot{\theta} &= \dot{\phi}\dot{\psi}\left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) + \frac{k_g M_y}{I_y}, \\
\ddot{\psi} &= \dot{\phi}\dot{\theta}\left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) + \frac{k_g M_z}{I_z}, \\
m\ddot{x} &= (c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi)k_g F_z, \\
m\ddot{y} &= (s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi)k_g F_z, \\
m\ddot{z} &= -mg + (c\phi c\theta)k_g F_z,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

com parâmetros e sinais definidos anteriormente em (3.1) e *Efeito Solo Simétrico* modelado pelo ganho $k_g(z, t)$. Assume-se que o ganho k_g é uma função suave e contínua em t e é tal que $|k_g(z, t)| \rightarrow +\infty$ quando $z \rightarrow z_d$, sendo z_d a posição da plataforma. Considere agora a dinâmica de z em (4.1) reescrita na forma

$$\ddot{z} = \frac{k_h(t)k_g(z, t)}{m}\mathcal{U}(t) + d(t), \tag{4.2}$$

com $k_h(t) := \cos(\phi(t))\cos(\theta(t))$, $\mathcal{U}(t) := F_z(t)$ e $d(t) = -g$ considerado como uma perturbação de entrada. Note que $\phi(t)$ e $\theta(t)$ são encarados como sinais exógenos. É claro que no caso em que $\phi(t)$ e $\theta(t)$ são medidos o efeito de $k_h(t)$ na dinâmica de z em (4.2) pode ser compensado. Equivalentemente, na forma normal [97] tem-se:

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}_1 &= \zeta_2, \\
\dot{\zeta}_2 &= \frac{k_h(t)k_g(\zeta_1, t)}{m}\mathcal{U} + d, \\
\mathcal{Y} &= \zeta_1,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

sendo $\zeta = [\zeta_1 \ \zeta_2]^T$ o vetor de estados constituído por $\zeta_1 = z$ e $\zeta_2 = \dot{z}$, $\mathcal{U} \in \mathbb{R}$ o sinal de entrada do sistema e $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}$ a saída medida.

4.1 Formulação do Problema com Efeito Solo

O pouso em uma plataforma móvel será tratado como um problema de rastreamento de uma trajetória z_r de referência, considerando que a plataforma se move segundo uma trajetória z_d . Por simplicidade e sem perder a essência do objetivo de controle, o movimento da plataforma na direção z será descrito por um senóide pura

$$z_d(t) = A\text{sen}(\omega t), \tag{4.4}$$

sendo z_d a componente da altura relativa à origem do sistema de coordenadas inerciais (\bar{E}_a), A a amplitude de oscilação [m] e ω a frequência de oscilação [rad/s]. Serão considerados dois cenários. Em um primeiro cenário (formulação principal), o modelo para o ganho associado ao efeito solo (k_g) é considerado desconhecido, sendo que apenas os valores máximo e mínimo de k_g são supostos conhecidos. Em um segundo cenário (formulação particular), um modelo para k_g utilizado na literatura [89] será considerado. Além disso, a tarefa da captação/liberação de uma carga pelo quadrirrotor durante a aproximação da plataforma será abordada, incluindo a presença de *Efeito Solo*. Portanto, em ambos os cenários, a massa do quadrirrotor será considerada variante no tempo, porém constante por partes.

Com respeito a tarefa de captação/liberação de uma carga, a seguinte hipótese será considerada:

(H-4.a) A variação da massa da carga é desconhecida, porém limitada em norma por Δm_{max} , e considerada pontual de forma a não afetar o momento de inércia do quadrirrotor.

É evidente que um prévio conhecimento das cargas a serem captadas/liberadas, um adequado trem de pouso e movimentos não muito acentuados asseguram que a Hipótese **(H-4.a)** seja satisfeita.

Para abordar a presença do *Efeito Solo Simétrico*, considere as seguintes hipóteses adicionais:

(H-4.b) Os ganhos do *Efeito Solo* associados aos empuxos gerados por cada atuador são iguais.

(H-4.c) O modelo do ganho k_g para o *Efeito Solo* (4.30) é considerado desconhecido, porém k_g satisfaz $k_{gmin} \leq k_g(t) \leq k_{gmax}, \forall t > 0$, sendo $k_{gmin} > 0$ e $k_{gmax} > 0$ constantes conhecidas.

Os ganhos do *Efeito Solo* associados aos empuxos gerados por cada atuador são funções das alturas dos atuadores (em relação a plataforma) e das dimensões do quadrirrotor. Para quadrirrotores de pequeno porte (quando comparado com a plataforma) e para plataformas **planas**, as alturas dos atuadores em relação a plataforma podem ser consideradas iguais para pequenos ângulos de *roll* e *pitch* (ϕ, θ). Portanto, assumindo que durante o pouso o controle de orientação do quadrirrotor (ϕ, θ) assegura pequenos ângulos de *roll* e *pitch*, a Hipótese **(H-4.b)** não apresenta restrições significativas quando este cenário é considerado. Além disso, a Hipótese **(H-4.c)** é razoável uma vez que $k_{gmin} \approx 1$ quando o quadrirrotor está distante o suficiente da plataforma ($|z - z_d| \gg 2R$, sendo R metade do comprimento da hélice), e k_{gmax} é assegurado pelo tamanho do trem de pouso do quadrirrotor e pode ser obtido aproximadamente por meio de testes experimentais estáticos.

Observação 3 (Massa Variante no Tempo) A massa do quadricóptero se modifica ao executar a tarefa de Captação/Liberação de uma carga. Assume-se que a transferência de carga (Captação/Liberação) resulta numa variação suave da massa do quadricóptero. Assume-se também que a velocidade do quadricóptero com respeito ao referencial inercial $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ é baixa durante a tarefa de Captação/Liberação. Portanto, a parcela da dinâmica translacional correspondente a variação de massa $(\dot{m}\dot{x}, \dot{m}\dot{y}, \dot{m}\dot{z})$ pode ser desprezada, ver (4.1). Esta hipótese é razoável uma vez que, durante o pouso, a trajetória de aproximação do solo pode ser escolhida lenta e o controle de posição (x, y) pode ser sintonizado de forma a regular o quadricóptero no ponto desejado para o pouso (a origem $x = 0, y = 0$, sem perda de generalidade). Mesmo na presença de perturbações esta hipótese é razoável, pois esquemas de controle robustos podem ser utilizados para o controle de posição (x, y) e para a altitude (como é o caso do SSC neste trabalho).

Sendo assim, a dinâmica de translação pode ser descrita pelas três últimas equações de (4.1) considerando que a massa varia suavemente no tempo. Nas simulações a seguinte expressão (suave) para variação de massa será considerada

$$m(t) = \begin{cases} 4,0\text{kg}, & \text{para } 0\text{s} < t < 30\text{s}, \\ 3,5\text{kg}, & \text{para } t \geq 30\text{s}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Transferências de carga descontínuas (e.g. degrau) também podem ser consideradas utilizando a Teoria de Lebesgue. De fato, como a solução da equação diferencial associada ao sistema em malha fechada é absolutamente contínua por definição e apenas em um conjunto de medida nula ocorre uma descontinuidade, a solução não se altera no sentido de Lebesgue e é válida em quase todo instante de tempo $t \geq 0$. A descontinuidade ocorre apenas no instante t_c de captura ou liberação da carga. Tomando t_c como instante inicial, tudo se passa como uma mudança na condição inicial em $t = t_c$.

4.1.1 Objetivo de Controle

O objetivo é projetar uma lei de controle \mathcal{U} que assegure a convergência assintótica do erro de saída (ou erro de rastreamento) para zero, ou para uma pequena vizinhança do zero, definido por

$$e(t) := \mathcal{Y}(t) - z_r(t), \quad (4.6)$$

mantendo todos os sinais do sistema em malha fechada uniformemente limitados, independentemente das incertezas. A trajetória de referência para o veículo é proposta

da seguinte forma

$$z_r(t) := z_d(t) + z_{r_{bias}} + z_{r_{init}} e^{-t/\tau_{z_r}}, \quad (4.7)$$

sendo $z_{r_{init}} > 4R$ a altura inicial da aproximação do quadricóptero do solo na qual o *Efeito Solo* ainda é desprezível, $\tau_{z_r} > 0$ é uma constante que garanta uma aproximação suave do solo. O termo $z_{r_{bias}}$ tem como função não aproximar o veículo excessivamente do solo e do ponto de vista prático corresponde ao tamanho do trem de pouso.

4.2 Controle Adaptativo Robusto

Nesta seção será abordado um esquema de controle adaptativo robusto inspirado em [89]. A lei de controle proposta em HU *et al.* [89] é constituída por uma parcela adaptativa (u_a) e outra robusta (u_s), tal que o sinal de controle \mathcal{U} de (4.2) pode ser escrito como

$$\mathcal{U} = u_a + u_s. \quad (4.8)$$

Neste trabalho propõe-se primeiramente utilizar apenas a parcela robusta, sendo esta dada por uma lei de controle suave baseada em modos deslizantes desenvolvida em [91–94]. Em seguida, a parcela adaptativa será considerada com o intuito de reduzir a magnitude da ação de controle robusta. De (4.2), a dinâmica do erro de rastreamento (4.6) pode ser reescrita como

$$\ddot{e} = \frac{1}{\theta^*} \mathcal{U} + d - \ddot{z}_r, \quad \theta^* := \frac{m}{k_h k_g} > 0. \quad (4.9)$$

Note que θ^* varia no tempo, diferentemente da parametrização usual encontrada na literatura de controle por modelo de referência (MRC). Considerando o sinal auxiliar

$$\sigma := \dot{e} + K_1 e, \quad (4.10)$$

sendo $K_1 > 0$ um parâmetro de projeto, tem-se que:

$$\dot{\sigma} = \ddot{e} + K_1 \dot{e} = \frac{1}{\theta^*} \mathcal{U} + d - \ddot{z}_r + K_1 \dot{e}, \quad (4.11)$$

ou, equivalentemente,

$$\theta^* \dot{\sigma} = \mathcal{U} - \mathcal{U}^*, \quad (4.12)$$

sendo $\mathcal{U}^* := \theta^* \varphi$ e $\varphi := -(d - \ddot{z}_r + K_1 \dot{e})$. A idéia principal é assegurar que $|\sigma(t)|$ tenda a zero (ou para uma vizinhança de zero) quando $t \rightarrow +\infty$. Com isso,

fica evidente de (4.10) que o erro de rastreamento tende para zero (ou para uma vizinhança de zero), pois $K_1 > 0$ (ver Figura 4.1).

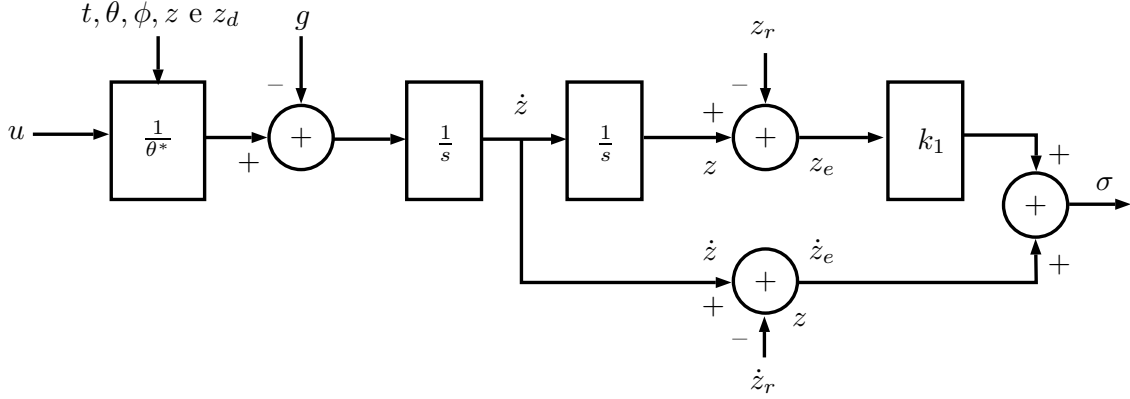


Figura 4.1: Esquemático da planta destacando a variável auxiliar σ .

Realimentação de Velocidade

Para o caso em que \dot{z} é medido (medição de velocidade), os sinais \dot{e} e σ estão disponíveis, assim como o sinal φ , uma vez que $d = -g$ é conhecido. Vale mencionar que uma vez que σ é suposto conhecido, fica claro que o sistema descrito por (4.12) apresenta grau relativo unitário da entrada \mathcal{U} para a variável σ . Portanto, seria possível projetar um controle baseado em modos deslizantes tendo $\sigma = 0$ como superfície de deslizamento [98]. Porém, visando reduzir a magnitude da ação de controle¹, propõe-se a lei de controle (4.8) com parcela adaptativa

$$u_a = \theta\varphi, \quad \dot{\theta} = -\gamma\varphi\sigma, \quad (4.13)$$

sendo $\gamma > 0$ o ganho de adaptação e com parcela robusta baseada em modos deslizantes

$$u_s = -\varrho(t)\text{sgn}(\sigma), \quad (4.14)$$

sendo $\text{sgn}(\cdot)$ a função sinal e $\varrho(t) > 0$ a função de modulação. Esta lei de controle assegura convergência do erro de rastreamento para zero, sendo que a função principal do termo adaptativo é reduzir a magnitude da função de modulação ϱ . De fato, o seguinte teorema pode ser enunciado.

Teorema 1 *Assuma que as Hipóteses (H-4.a), (H-4.b) e (H-4.c) sejam válidas e que a velocidade \dot{z} é medida. Considere a dinâmica da altitude (4.2) com lei de controle dada por (4.8), (4.13) e (4.14) e trajetória a ser seguida descrita em (4.7). Então todos os sinais do sistema em malha fechada permanecem uniformemente limitados e o erro de rastreamento (4.6) converge exponencialmente para zero.*

¹Na realidade, visa-se reduzir a magnitude do controle equivalente [98] associando ao modo deslizante ideal necessário para assegurar rastreamento.

Prova: Considere a seguinte função $V(\sigma) := \sigma^2/2$ que apresenta derivada ao longo das soluções de (4.12) dada por

$$\dot{V} = \sigma \dot{\sigma} = \frac{1}{\theta^*} \sigma (\mathcal{U} - \mathcal{U}^*).$$

De (4.8), (4.13) e (4.14), pode-se escrever a lei de controle como

$$\mathcal{U} = \theta \varphi - \varrho \operatorname{sgn}(\sigma),$$

sendo θ dado pela lei de adaptação (4.13), ou seja, a lei gradiente $\dot{\theta} = -\gamma \varphi \sigma$. Portanto, pode-se escrever que

$$\dot{V} = \frac{1}{\theta^*} \sigma (\theta \varphi - \varrho \operatorname{sgn}(\sigma) - \theta^* \varphi) = \frac{1}{\theta^*} \sigma (\tilde{\theta} \varphi - \varrho \operatorname{sgn}(\sigma)) = \frac{1}{\theta^*} (\tilde{\theta} \varphi \sigma - \varrho |\sigma|),$$

uma vez que $\mathcal{U}^* = \theta^* \varphi$, sendo $\tilde{\theta} := \theta - \theta^*$. Portanto, escolhendo a função de modulação satisfazendo

$$\varrho > |\tilde{\theta} \varphi| + \delta,$$

com uma constante $\delta > 0$ arbitrária, tem-se que

$$\dot{V} \leq -\delta |\sigma| / \theta^* \leq -\delta |\sigma| / \theta_{max}^* = -(\delta \sqrt{2} / \theta_{max}^*) \sqrt{V},$$

sendo que θ_{max}^* pode ser obtido das Hipóteses **(H-4.a)** e **(H-4.c)**. Portanto, V e σ converge para zero em tempo finito. Como qualquer escape em tempo finito é observado na saída – *Unbounded Observability Property* – pode-se concluir que não ocorre escape em tempo finito nos sinais dos sistema em malha fechada. Subsequentemente, o erro de rastreamento e e sua derivada temporal \dot{e} convergem para zero em tempo finito, ver (4.10). Além disso, como $\dot{\theta} = -\gamma \varphi \sigma$, pode-se concluir que a adaptação cessa em tempo finito. Portanto, como θ^* é limitado por hipótese, então $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$ é um sinal limitado. Logo, todos os sinais do sistema em malha fechada permaneçam uniformemente limitados. Como o sistema é de primeira ordem, pode-se concluir utilizando o Teorema de Barbalat [97], que o erro de adaptação $\tilde{\theta}$ também converge para zero quando θ^* é constante. Para o caso de θ^* variável deve-se considerar uma hipótese adicional em que $|\dot{\theta}^*| < \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$. Neste caso, o erro de adaptação $\tilde{\theta}$ converge para um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(\epsilon/\gamma)$. ■

Realimentação de Posição

Para o caso em que \dot{z} **não é medido** (medição apenas de posição), os sinais \dot{e} e σ não estão disponíveis para realimentação, assim como o sinal φ . Desta forma, as seguintes estimativas serão consideradas. Primeiro, a estimativa \hat{z} da velocidade \dot{z}

será obtida através da “Derivada Suja”:

$$\hat{\dot{z}} = \frac{s}{\tau_z s + 1} z, \quad (4.15)$$

que também pode ser escrita na forma

$$\tau_z \dot{\hat{z}} = -z_f + z, \quad (4.16)$$

$$\hat{\dot{z}} = -\frac{z_f}{\tau_z} + \frac{z}{\tau_z}, \quad (4.17)$$

sendo $\tau_z > 0$ uma constante de projeto. Utilizando a estimativa \hat{z} define-se a estimativa (\hat{e}) de e por $\hat{e} := \hat{z} - z_r$ e a estimativa da variável σ por²:

$$\hat{\sigma} := \hat{e} + K_1 e. \quad (4.18)$$

A lei de controle (4.8) é então redefinida com parcela adaptativa

$$u_a = \theta \hat{\varphi}, \quad \dot{\theta} = \gamma \hat{\varphi} \hat{\sigma}, \quad \hat{\varphi} := -(d - \ddot{z}_r + K_1 \hat{e}), \quad (4.19)$$

e com parcela robusta baseada em modos deslizantes

$$u_s = -\varrho(t) \operatorname{sgn}(\hat{\sigma}). \quad (4.20)$$

O seguinte teorema apresenta as propriedades de estabilidade para o caso em que apenas a altitude é medida.

Teorema 2 *Assuma que as Hipóteses (H-4.a), (H-4.b) e (H-4.c) sejam válidas. Considere a dinâmica da altitude (4.2) com lei de controle dada por (4.8), (4.19) e (4.20) e trajetória a ser seguida descrita em (4.7). Então, para uma constante de tempo τ_z em (4.15) suficientemente pequena, todos os sinais do sistema em malha fechada permanecem uniformemente limitados e o erro de rastreamento (4.6) converge exponencialmente para um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(\tau_z)$.*

Prova: A demonstração pode ser conduzida pelo Teorema de Pequenos Ganhos [97]. ■

²Vale mencionar que uma alternativa seria utilizar diretamente um filtro lead aplicado ao erro de rastreamento gerando a estimativa $\hat{\sigma} = \frac{L(s)}{\tau_z s + 1} e$, com $L(s) := s + K_1$. No entanto, apesar de ser mais simples e direto, o filtro lead agrega uma filtragem desnecessária na parcela do erro ($\frac{K_1}{\tau_z s + 1} e$) que pode acarretar em mais atraso na malha de controle.

4.3 Controle Suave por Modos Deslizantes

Nesta seção considera-se o controlador suave a estrutura variável, denominado (*SSC* - *Smooth Sliding Control*) [111] que é uma estratégia que pode usar apenas dados de entrada e saída da planta, baseada em estrutura variável que possui sinal de controle suave. O *SSC* é uma versão do controlador *VS-MRAC* (*VS-MRAC* - *Variable Structure Model Reference Control*) [112] desenvolvido com base na formulação do controle *MRC* (*Model Reference Control*) e no *MRAC* convencional (*Model Reference Adaptive Control*). O *SSC* de [111] foi generalizado para plantas lineares com grau relativo arbitrário em [91–94].

Sabe-se que um desafio a ser superado ao se implementar controladores a estrutura variável é a possível ocorrência do indesejável fenômeno de *chattering* induzido por não-idealidades como pequenos atrasos ou dinâmicas não-modeladas na planta. Isto leva ao conhecido modo deslizante real (*real sliding mode* [98]) em contraponto ao modo deslizante ideal (*Ideal Sliding Mode*).

A abordagem utilizada para suavizar o sinal de controle não é baseada no conceito tradicional de “camada de fronteira” (*boundary layer*), mas sim, na utilização de uma malha de predição em conjunto com uma filtragem do sinal de controle. A topologia do controlador pode ser observada na Figura 4.2. Este trabalho aponta a primeira

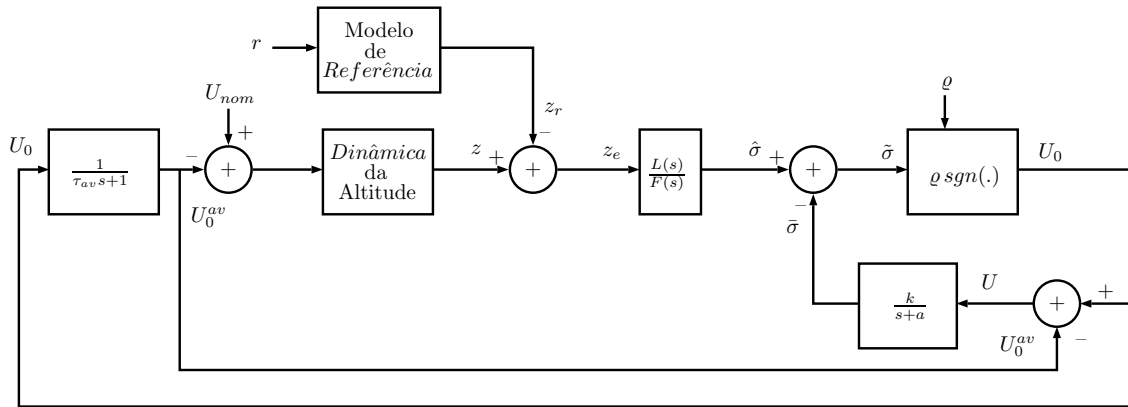


Figura 4.2: Topologia do Controle Suave por Modos Deslizantes (*SSC* - *Smooth Sliding Control*).

generalização do *SSC* para a classe de plantas monovariáveis não lineares considerada neste capítulo, ver (4.2). Considere inicialmente o caso em que a velocidade da altitude está disponível para realimentação.

Realimentação de Velocidade

Para o caso em que \dot{z} é **medido** (medição de velocidade), os sinais \dot{e} e σ estão disponíveis, assim como o sinal φ , uma vez que $d = -g$ é conhecido. Considere a lei de controle (4.8) sem parcela adaptativa, sendo que a parcela robusta é dada pelo

esquema *SSC*, apresentado na Figura 4.2. Portanto, a lei de controle é descrita por:

$$\mathcal{U} = u_{nom} - U_0^{av}, \quad U_0^{av} := \frac{1}{(\tau_{av}s + 1)}U_0, \quad U_0 := \varrho(t)\text{sgn}(\tilde{\sigma}), \quad (4.21)$$

sendo u_{nom} um controle projetado com o conhecimento dos parâmetros nominais da planta, ϱ a função de modulação, $\tilde{\sigma}$ a variável de deslizamento, U_0^{av} é a filtragem do sinal chaveado U_0 que pode ser representado por:

$$\tau_{av}\dot{U}_0^{av} = -U_0^{av} + U_0. \quad (4.22)$$

Vale mencionar que, para uma constante de tempo τ_{av} suficientemente pequena, U_0^{av} é uma aproximação do controle equivalente estendido $(U_0)_{eq}$, quando deslizamento ideal ocorre [98]. A variável de deslizamento $\tilde{\sigma}$ é descrita por:

$$\tilde{\sigma} := \sigma - \bar{\sigma}, \quad (4.23)$$

sendo $\bar{\sigma}$ a saída da malha de predição (ver Figura 4.2) e $\sigma = \dot{e} + K_1e = L(s)e$, com $L(s) = s + K_1$, o sinal auxiliar dado em (4.10). A principal idéia em controle baseado em modos deslizantes é fechar a malha da variável de deslizamento (em geral o erro de rastreamento) com um relé, tendo função de modulação apropriada. Se o grau relativo³ da malha da variável de deslizamento for unitário, uma malha ideal de deslizamento (*Ideal Sliding Loop - ISL*) é formada ao redor da função de chaveamento e variável de deslizamento tende a zero. Esta é a função da malha de predição. A dinâmica da variável $\bar{\sigma}$, saída da malha de predição ou *erro de predição*, é dada por:

$$\dot{\bar{\sigma}} = -a\bar{\sigma} + k(U_0 - U_0^{av}), \quad (4.24)$$

sendo $a, k > 0$ constantes de projeto.

Realização de Modos Deslizantes Ideais

A realização de modos deslizantes ideais é importante para assegurar que *chattering* seja evitado. No *SSC*, a superfície de deslizamento ideal é dada por $\tilde{\sigma}(t) \equiv 0$. O seguinte Teorema pode ser demonstrado.

Teorema 3 *Assuma que as Hipóteses (H-4.a), (H-4.b) e (H-4.c) sejam válidas e que a velocidade \dot{z} é medida. Considere a dinâmica da altitude (4.2) com lei de controle dada por (4.21), (4.24) e com variável de deslizamento $\tilde{\sigma}$ definida em (4.23). A trajetória a ser seguida é descrita em (4.7). Se a função de modulação satisfaz $\varrho(t) \geq |\tilde{d}| + \delta$, $\forall t$ e para uma constante não-negativa pequena e arbitrária δ , com $\tilde{d} := (a\sigma - \frac{1}{\theta^*}U_0^{av} - \frac{1}{\theta^*}\mathcal{U}^* + \frac{1}{\theta^*}u^{nom} + kU_0^{av})/k$, então a variável de deslizamento*

³Trata-se do grau relativo ao redor do relé, ou seja, entre a saída do relé e a variável de deslizamento.

$\tilde{\sigma}$ torna-se identicamente nula após algum tempo finito $t_r \geq 0$. Além disso, para a constante de tempo τ_{av} do filtro de suavização (4.22) suficientemente pequena, o erro de rastreamento converge para um pequeno conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(\tau_{av})$, e este conjunto residual não depende das condições iniciais.

Prova: De (4.12), a dinâmica do sinal auxiliar $\sigma = \dot{e} + K_1 e = L(s)e$, sendo $L(s) = s + K_1$, pode ser reescrita como

$$\theta^* \dot{\sigma} = -U_0^{av} + u_{nom} - \mathcal{U}^*. \quad (4.25)$$

Com isso, considerando (4.23), tem-se que a dinâmica da variável de deslizamento $\tilde{\sigma}$ é dada por

$$\dot{\tilde{\sigma}} = \dot{\sigma} - \dot{\tilde{\sigma}} = -\frac{1}{\theta^*} U_0^{av} - \frac{1}{\theta^*} \mathcal{U}^* + \frac{1}{\theta^*} u^{nom} + a\bar{\sigma} + kU_0^{av} - kU_0,$$

e, lembrando que $\bar{\sigma} = \sigma - \tilde{\sigma}$, tem-se que

$$\dot{\tilde{\sigma}} = -a\tilde{\sigma} - kU_0 + D,$$

sendo $D := a\sigma - \frac{1}{\theta^*} U_0^{av} - \frac{1}{\theta^*} \mathcal{U}^* + \frac{1}{\theta^*} u^{nom} + kU_0^{av}$. Agora seja $\eta := k\tau_{av} U_0^{av} + \tilde{\sigma}$. Então, lembrando de (4.22) que a dinâmica de U_0^{av} é dada por $\tau_{av} \dot{U}_0^{av} = -U_0^{av} + U_0$, pode-se escrever que

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{\theta^*} U_0^{av} - a\tilde{\sigma} + a\sigma - \frac{1}{\theta^*} \mathcal{U}^* + \frac{1}{\theta^*} u^{nom}.$$

Além disso, como $U_0^{av} = (\eta - \tilde{\sigma})/(k\tau_{av})$, a seguinte igualdade se verifica

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{k\tau_{av}\theta^*} \eta + \left(-a + \frac{1}{k\tau_{av}\theta^*}\right) \tilde{\sigma} + \left(-\frac{1}{\theta^*} \mathcal{U}^* + \frac{1}{\theta^*} u^{nom} + a\sigma\right).$$

Agora, pode-se obter um majorante $\bar{\eta}$ para a norma do sinal η a partir dos sinais disponíveis $\tilde{\sigma}$, u^{nom} , σ e $\frac{1}{\theta^*} \mathcal{U}^* = \varphi$ e do mínimo valor θ^* , dado por $\theta_{min}^* = (m_{nom} - \Delta_{max})/k_{g_{max}}$, sendo m_{nom} a massa nominal. Portanto, um majorante para $U_{av} = (\eta - \tilde{\sigma})/(k\tau_{av})$ pode ser obtido a partir de um majorante $\bar{\eta}$ para a norma do sinal η . Com isso, pode-se projetar a função de modulação para suplantear a perturbação D e assegurar a ocorrência de modo deslizante ideal em $\tilde{\sigma} = 0$. O restante da demonstração pode ser conduzida utilizando o conceito de controle equivalente estendido e o Teorema de Pequenos Ganhos. ■

Apenas Realimentação de Posição

Como visto anteriormente, para o caso em que \dot{z} **não é medido** (medição apenas de posição), os sinais \dot{e} e σ não estão disponíveis para realimentação, assim como

o sinal φ . Desta forma, as seguintes estimativas serão consideradas. Primeiro, a estimativa \hat{z} da velocidade \dot{z} será obtida através da “Derivada Suja” (4.15). Para a estimativa da variável σ utiliza-se diretamente um filtro Lead aplicado ao erro de rastreamento, gerando a estimativa

$$\hat{\sigma} = \frac{s + K_1}{\tau_z s + 1} e = \frac{L(s)}{F(s)} e, \quad L(s) := s + K_1, \quad F(s) = \tau_z s + 1. \quad (4.26)$$

A variável de deslizamento $\tilde{\sigma}$ é então redefinida por:

$$\tilde{\sigma} := \hat{\sigma} - \bar{\sigma}. \quad (4.27)$$

Teorema 4 *Assuma que as Hipóteses (H-4.a), (H-4.b) e (H-4.c) sejam válidas e que a velocidade \dot{z} é medida. Considere a dinâmica da altitude (4.2) com lei de controle dada por (4.21), (4.24) e com variável de deslizamento $\tilde{\sigma}$ definida em (4.27). A trajetória a ser seguida é descrita em (4.7). Se a função de modulação satisfaz $\varrho(t) \geq |\tilde{d}| + \delta, \forall t$ e para uma constante não-negativa pequena e arbitrária δ , então a variável de deslizamento $\tilde{\sigma}$ torna-se identicamente nula após algum tempo finito $t_r \geq 0$. Além disso, para ambas as constantes de tempo τ_{av} do filtro de suavização (4.22) e do filtro lead (τ_z) suficientemente pequenas, o erro de rastreamento converge para um pequeno conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(\tau_{av} + \tau_z)$, e este conjunto residual não depende das condições iniciais.*

Prova: A demonstração segue utilizando o Teorema de Pequenos Ganhos [97] e a idéia central apresentada em [91–94]. ■

4.3.1 O SSC como um Controle Adaptativo Robusto

O Controle Suave por Modos Deslizantes com Adaptação pode ser encarado como um versão do Controle Adaptativo Robusto de [89]. De fato, uma possível escolha para o controle nominal u^{nom} é dada pela parcela adaptativa do Controle Adaptativo Robusto, descrito na Seção 4.2. No caso em que a velocidade \dot{z} é medida tem-se

$$u^{nom} = \theta \varphi,$$

sendo parâmetro θ dado pela lei gradiente

$$\dot{\theta} = -\gamma \sigma \varphi,$$

com ganho de adaptação $\gamma > 0$. Para o caso em que apenas a altura z é medida, tem-se

$$u^{nom} = \theta \hat{\varphi},$$

com θ tal que

$$\dot{\theta} = -\gamma \hat{\sigma} \hat{\varphi}.$$

Assim como na topologia do Controle Adaptativo Robusto, ou seja, a topologia formada por uma parcela adaptativa e outra robusta, a parcela adaptativa aqui também é utilizada visando reduzir a magnitude da ação de controle robusta (função de modulação), aqui implementada utilizando o esquema *SSC*. De fato, a perturbação \tilde{d} que a função de modulação precisa superar em ambos os Teoremas 3 e 4, apresenta o termo

$$\left(-\frac{1}{\theta^*} \mathcal{U}^* + \frac{1}{\theta^*} u^{nom} \right) = \frac{(\theta - \theta^*)}{\theta^*} \varphi,$$

que pode apresentar amplitude reduzida quando $\theta \rightarrow \theta^*$, resultando em uma magnitude menor para a função de modulação ϱ .

4.4 Simulações Numéricas

Nas simulações a seguir, apesar do modelo do ganho associado ao *Efeito Solo* não ser utilizado para o projeto dos controladores aqui considerados, o seguinte modelo para k_g será adotado [89]:

$$k_g(z, t) = \frac{1}{1 - \rho \left(\frac{R}{4(z - z_d)} \right)^2}$$

sendo $R = 0,16\text{m}$ a metade do comprimento da hélice, z a altura do C.G. do veículo e z_d a altura da plataforma (ambos em relação a origem do sistema inercial) e $\rho = 1,184$ uma constante caracterizada pelas dimensões do rotor. Para simular a tarefa de *Liberção* de carga, considera-se que a massa do quadricóptero varia, sendo constante por partes, de acordo com

$$m(t) = \begin{cases} 4,0\text{kg}, & \text{para } 0\text{s} < t < 30\text{s}, \\ 3,5\text{kg}, & \text{para } t \geq 30\text{s}. \end{cases} \quad (4.28)$$

A planta utilizada é a descrita em (4.1), com parâmetros apresentados na Tabela 4.1. A posição (x, y) e a orientação (ϕ, θ) do quadricóptero são reguladas em zero utilizando

Tabela 4.1: Parâmetros do modelo do quadricóptero apresentado em (4.1).

$g = 9,81\text{ms}^{-2}$	$I_x = 0,082\text{kg m}^2$	$I_y = 0,082\text{kg m}^2$	$I_z = 0,149\text{kg m}^2$
--------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

os controladores PD (3.49), (3.50) e (3.51) da Seção 3.4.1 com os seguintes ganhos:

$$K_P^q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, K_D^q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, K_P^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, K_D^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, K_P^\psi = 5 \text{ e } K_D^\psi = 2.$$

Em particular a dinâmica da altitude é dada por (4.2). Para fins de comparação foram simulados os dois esquemas de controle abordados neste Capítulo: o controlador adaptativo robusto e o controlador *SSC* com e sem adaptação. A trajetória a ser seguida descrita em (4.7) com z_d em (4.4) satisfaz

$$\ddot{z}_r(t) = \ddot{z}_d(t) + \frac{z_{rinit}}{\tau_{zr}^2} e^{\frac{-t}{\tau_{zr}}} = -A\omega^2 \text{sen}(\omega t) + \frac{z_{rinit}}{\tau_{zr}^2} e^{\frac{-t}{\tau_{zr}}}. \quad (4.29)$$

O controlador adaptativo robusto composto por (4.8), (4.19) e (4.20) é implementado com os seguintes parâmetros: $K_1 = 1$, $\tau_z = 0,01\text{s}$, $\gamma = 10$ e a função de modulação é implementada constante para simplificar ($\varrho = 10$).

O controlador *SSC sem adaptação* com realimentação de posição é dado pelas equações (4.21), (4.24) e (4.27) e é implementado com os seguintes parâmetros: $\tau_{av} = 0,1\text{s}$, $K_1 = 2$, $a = 5$, $k = 1$, $\tau_z = 0,01\text{s}$ e a função de modulação é implementada constante para simplificar ($\varrho = 10$). O controle nominal foi desconsiderado nesta simulação $u_{nom} = 0$.

A Figura 4.3 apresenta o desempenho em malha fechada com os controladores **adaptativo robusto** (AR) e o **SSC sem adaptação** (evolução temporal da altitude do quadricóptero) assim como a altura da plataforma e a trajetória a ser seguida. Nota-se que o quadricóptero sob ação do controlador *SSC* apresenta trajetória sem erro de regime e uma perturbação consideravelmente pequena assim como o controlador adaptativo robusto, no momento em que a carga é liberada ($t = 30\text{s}$). Os correspondentes sinais de controle podem ser observados na Figura 4.4. A evolução do parâmetro adaptado (4.13) e a superfície de deslizamento do controlador *SSC* são ilustradas na Figura 4.5.

Reduzindo a Ação Robusta com Introdução de Parcela Adaptativa

Para um controlador AR hora com adaptação e hora sem adaptação foram considerados os parâmetros $\gamma = 40$, $\tau_{av} = 0,01\text{s}$, $K_1 = 1$, $a = 1$, $k = 0,05$, $\tau_z = 0,01\text{s}$, $\varrho = 35$ e $u_{nom} = u_a$. Na Figura 4.6 pode-se observar o rastreamento em malha fechada com um controlador AR com parcela adaptativa. Seus respectivos sinais de controle podem ser vistos na Figura 4.7 e o parâmetro de adaptação na Figura 4.8. Para o caso de um AR sem adaptação, com os parâmetros do controlador proposto não é possível rastrear a referência, com resultados na Figura 4.9.

No caso dos sinais vistos na Figura 4.10 pode-se observar o desempenho em malha fechada do controlador *SSC* com parcela adaptativa, a altitude rastreia perfeitamente a referência, com resultados semelhantes ao do controlador adaptativo

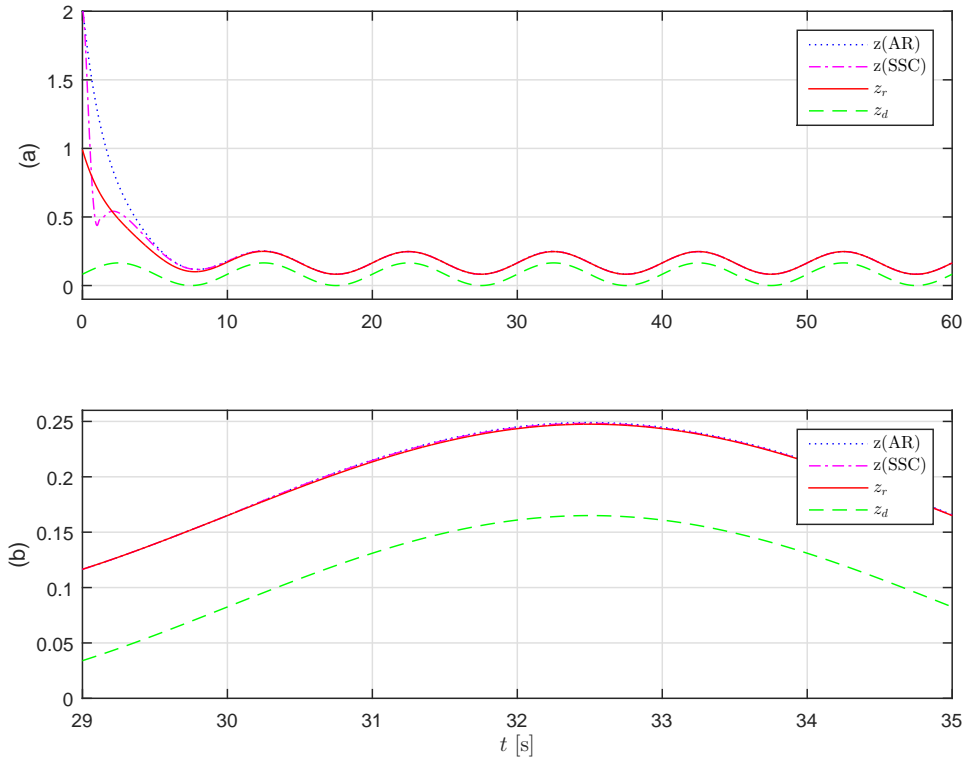


Figura 4.3: Resultados de simulação. Rastreamento: (a) altura z_d [m] da plataforma (verde tracejado), trajetória desejada z_r [m] (vermelho), altura z [m] do quadricóptero considerando o controlador adaptativo robusto (azul pontilhado), altura z [m] considerando o controlador *SSC* (magenta ponto traço); (b) Ampliação para ilustrar os efeitos da variação de massa em $t = 30$ s.

robusto observado na Figura 4.3. Os sinais de controle e do parâmetro de adaptação podem ser vistos respectivamente nas Figuras 4.11 e 4.12.

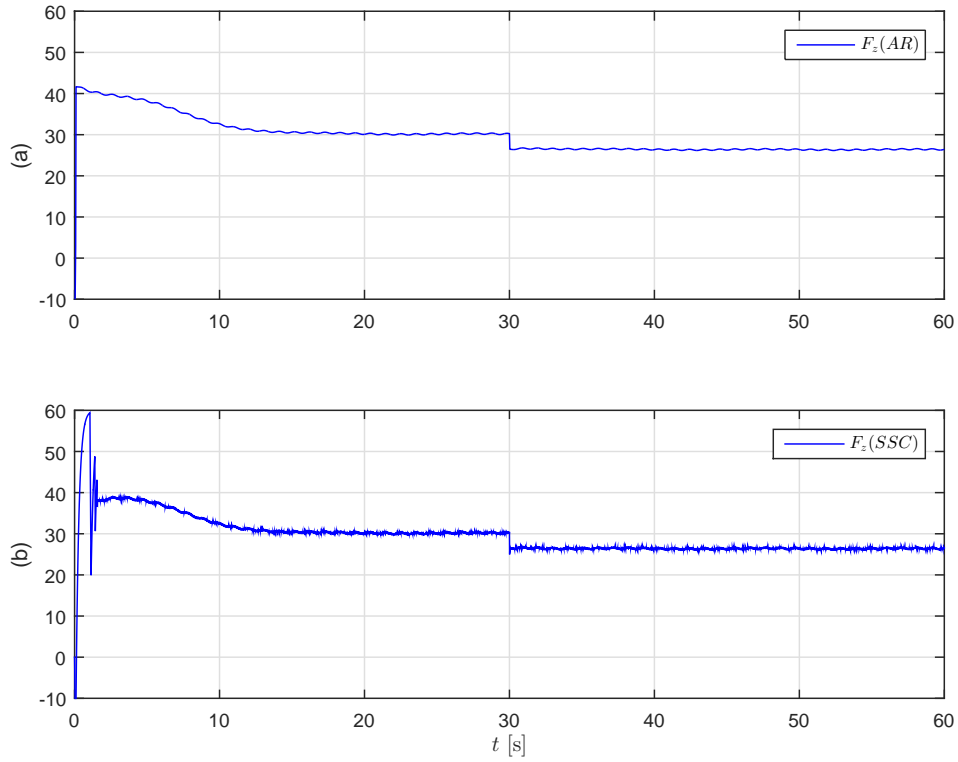


Figura 4.4: Resultados de simulação. (a) Controle F_z [N] considerando o controlador adaptativo robusto e (b) Controle F_z [N] considerando o *SSC* (magenta).

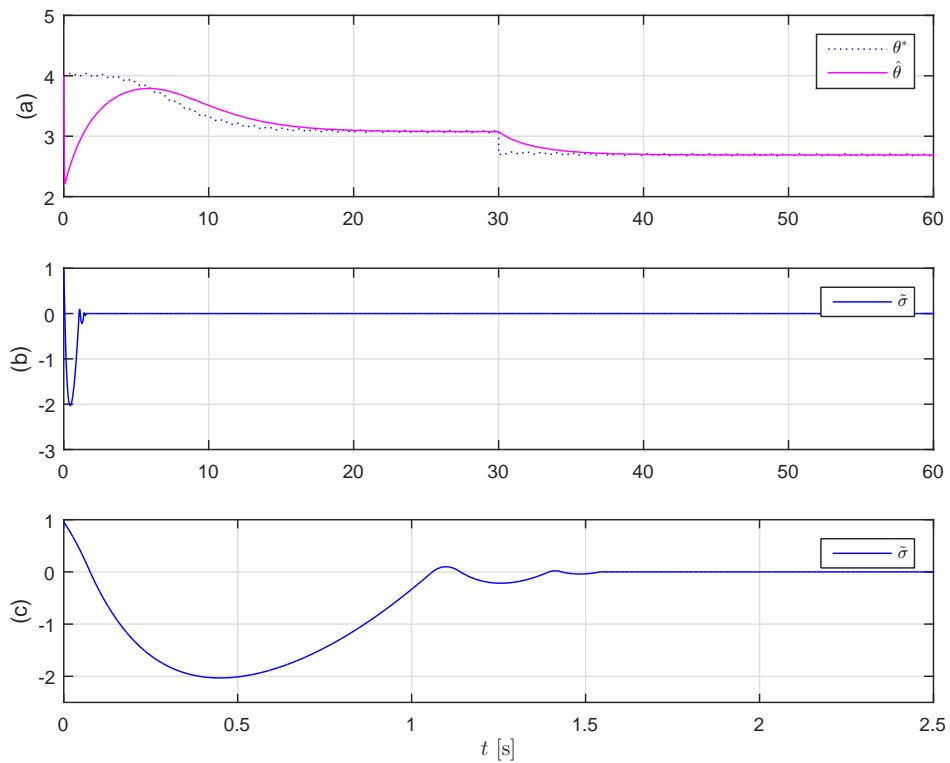


Figura 4.5: Resultados de simulação. Sinais auxiliares dos controladores: (a) Parâmetro θ [kg] adaptado (magenta) e o correspondente valor real θ^* [kg] (azul pontilhado), (b) superfície de deslizamento $\tilde{\sigma}$ do *SSC* e (c) ampliação do gráfico (b).

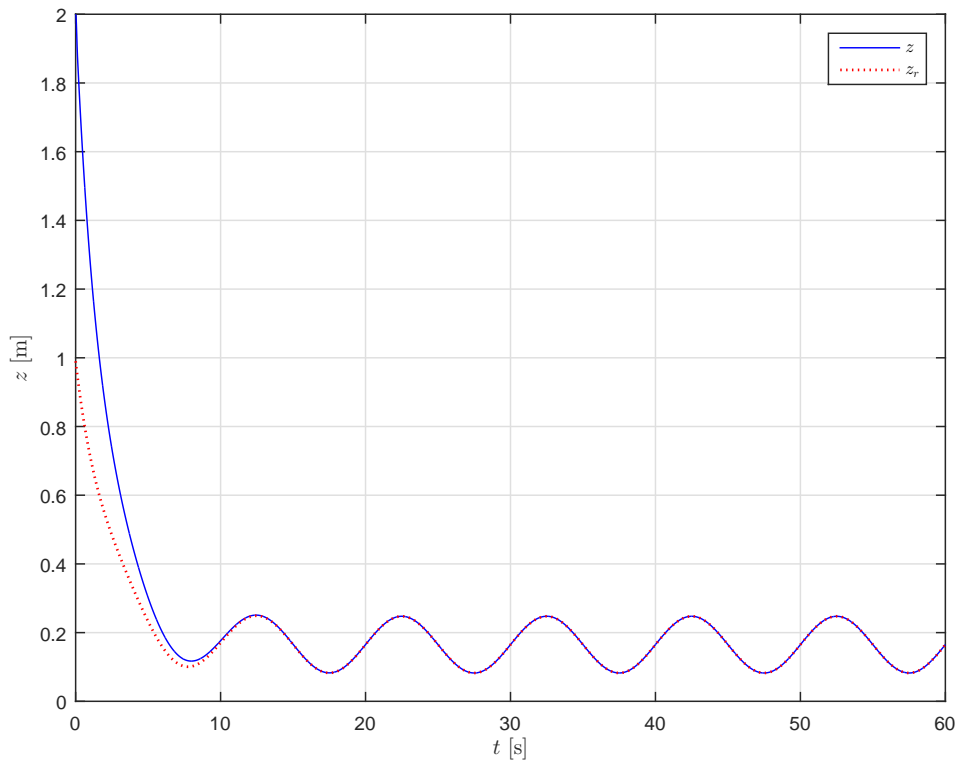


Figura 4.6: Resultados de simulação. Controlador AR com parcela adaptativa. Sem presença de efeito solo. Sinais de altitude z (azul) e referência z_r (vermelho pontilhado).

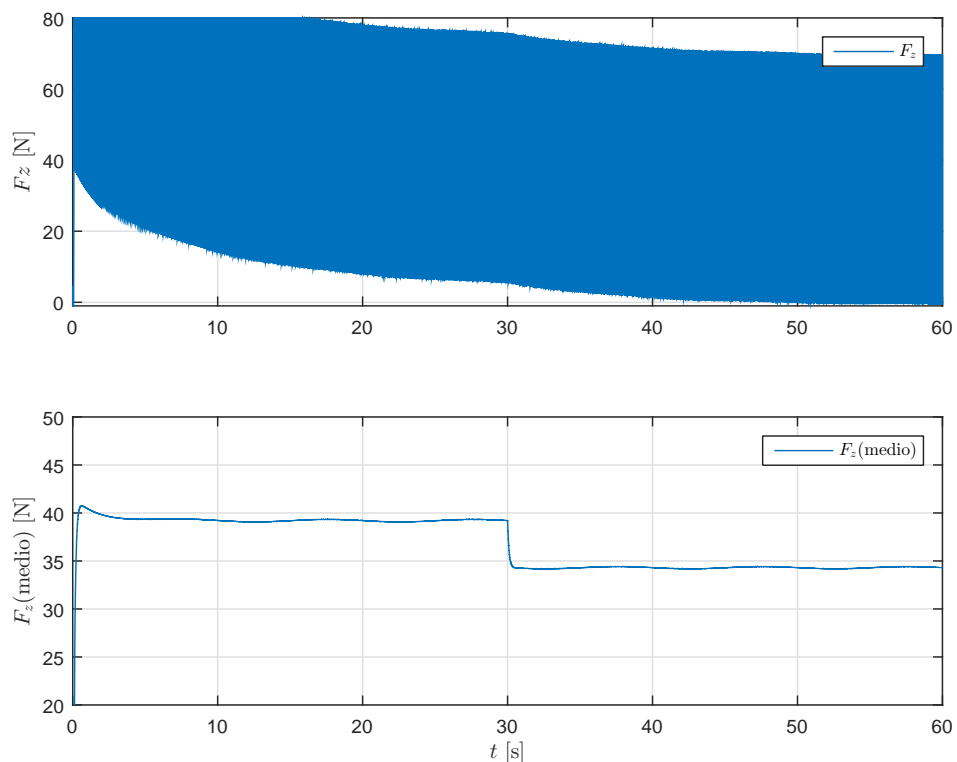


Figura 4.7: Resultados de simulação. Controlador AR com parcela adaptativa. Sem presença de efeito solo. Sinais de controle F_z e respectivo F_z valor médio.

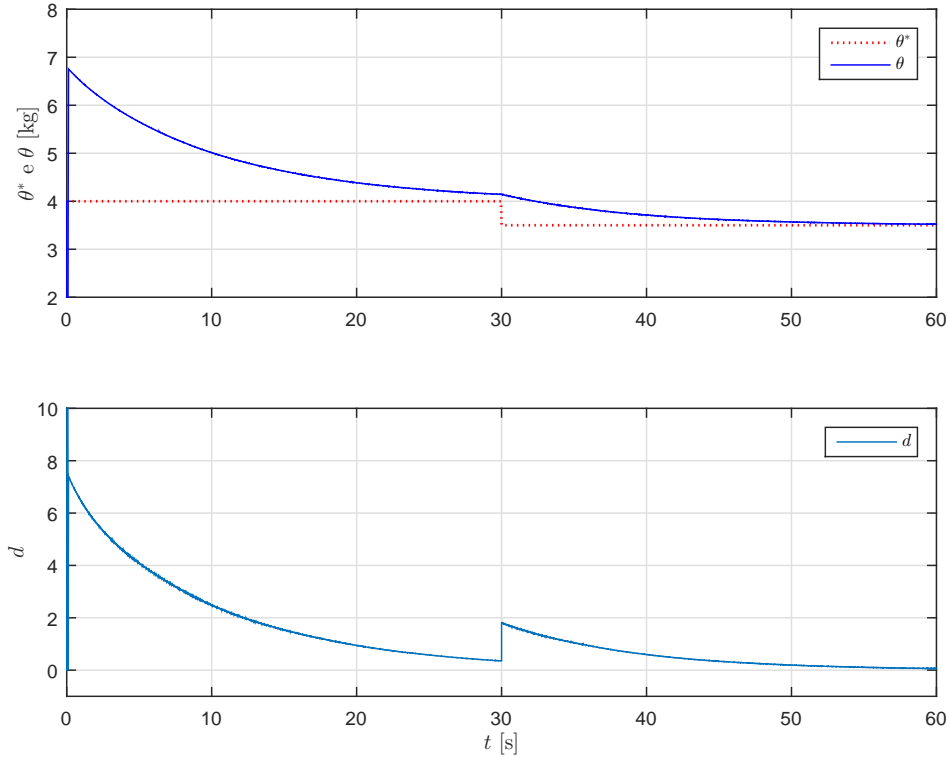


Figura 4.8: Resultados de simulação. Controlador AR com parcela adaptativa. Sem presença de efeito solo. Parâmetros de adaptação θ^* (vermelho pontilhado) e θ (azul). Sinal de perturbação d proveniente da adaptação de θ .

4.5 Reformulando o Problema: Particularização do Efeito Solo

Nesta seção, considera-se o problema de controle original formulado na Seção 4.1 adicionando-se duas particularizações não restritivas encontradas na literatura de controle de quadricópteros: (i) a utilização de um modelo específico para o ganho k_g que descreve o Efeito Solo e (ii) a utilização da informação da aceleração da altitude (\ddot{z}) para implementar a lei de controle, que comumente está disponível no acelerômetro da unidade inercial embarcada no quadricóptero. Sendo assim, considera-se ainda o *Efeito Solo Simétrico* e modelado pelo ganho [89]

$$k_g(z, t) = \frac{1}{1 - \rho \left(\frac{R}{4(z - z_d)} \right)^2}, \quad (4.30)$$

sendo R a metade do comprimento da hélice, z a altura do C.G. do veículo e z_d a altura da plataforma, ambos em relação a origem do sistema inercial, e ρ uma constante caracterizada pelas dimensões do rotor. Vale observar que $k_g \approx 1$ quando $|z(t) - z_d(t)| \gg 2R$ [107] [113] e que a Hipótese **(H-4.c)** é satisfeita para este modelo do ganho do Efeito Solo. Do ponto de vista teórico, deve-se escolher o termo $z_{r_{bias}}$ da

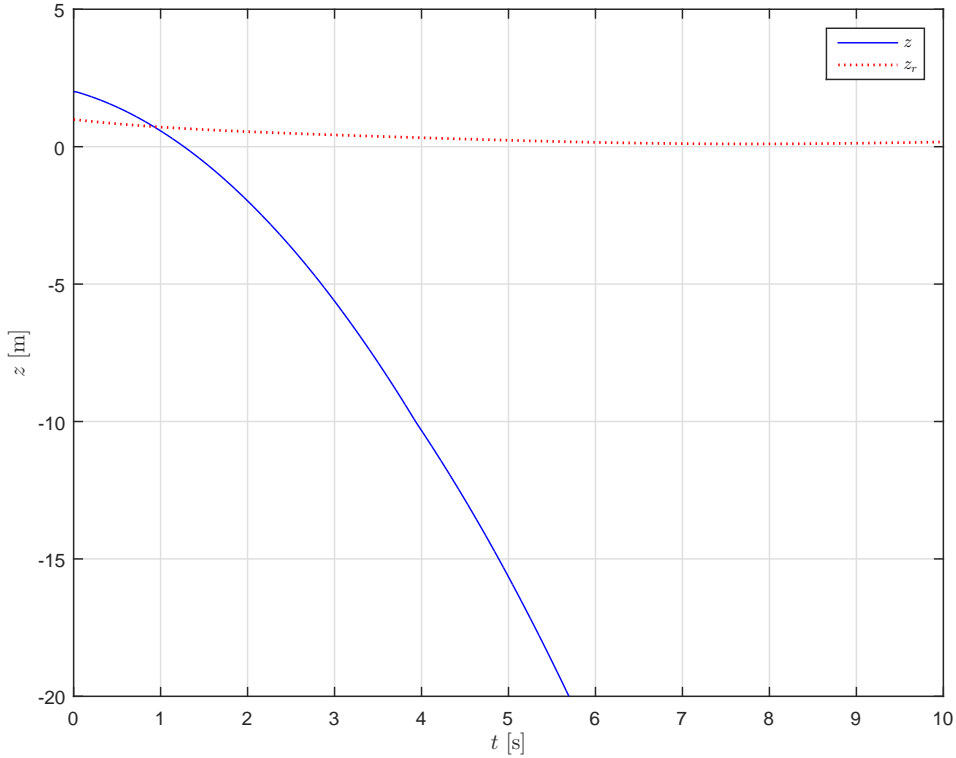


Figura 4.9: Resultados de simulação. Sem presença de efeito solo. Controlador AR sem parcela adaptativa. Sinais de altitude z (azul) e referência z_r (vermelho pontilhado).

trajetória z_r a ser seguida de tal forma a permitir que k_g mantenha-se bem definido fora da sua região de descontinuidade definida pela solução de $1 - \rho \left(\frac{R}{4(z-z_d)} \right)^2 = 0$.

Nesta abordagem, considere a seguinte hipótese adicional:

(H-5.a) O *Efeito Solo Simétrico* é modelado pelo ganho (4.30), sendo ρ um parâmetro incerto.

A identificação do parâmetro ρ pode ser realizada previamente, porém exigiria diversos ensaios em pontos de operação diferentes para cada modelo de hélice utilizado, portanto por simplicidade operacional optou-se pela estimativa em tempo real.

Com respeito a captura/liberação de cargas, a seguinte hipótese será assumida:

(H-5.b) Existe um instante de tempo t_m , conhecido, tal que $\forall t \geq t_m$ a captura/liberação da carga está assegurada.

Como é razoável supor que exista um mecanismo de captura/liberação na parte inferior do quadricóptero tal que para $z(t) \geq z_{min}$ a captura/liberação está assegurada, a Hipótese **(H-5.b)** não impõe restrições relevantes. Sendo assim, t_m pode ser definido como o primeiro instante de tempo em que o limiar $z(t) = z_{min}$ é atingido. Além disso, um sinal de confirmação da captura/liberação pode ser enviado ao quadricóptero informando o instante de tempo t_m . Por fim, considera-se a seguinte hipótese:

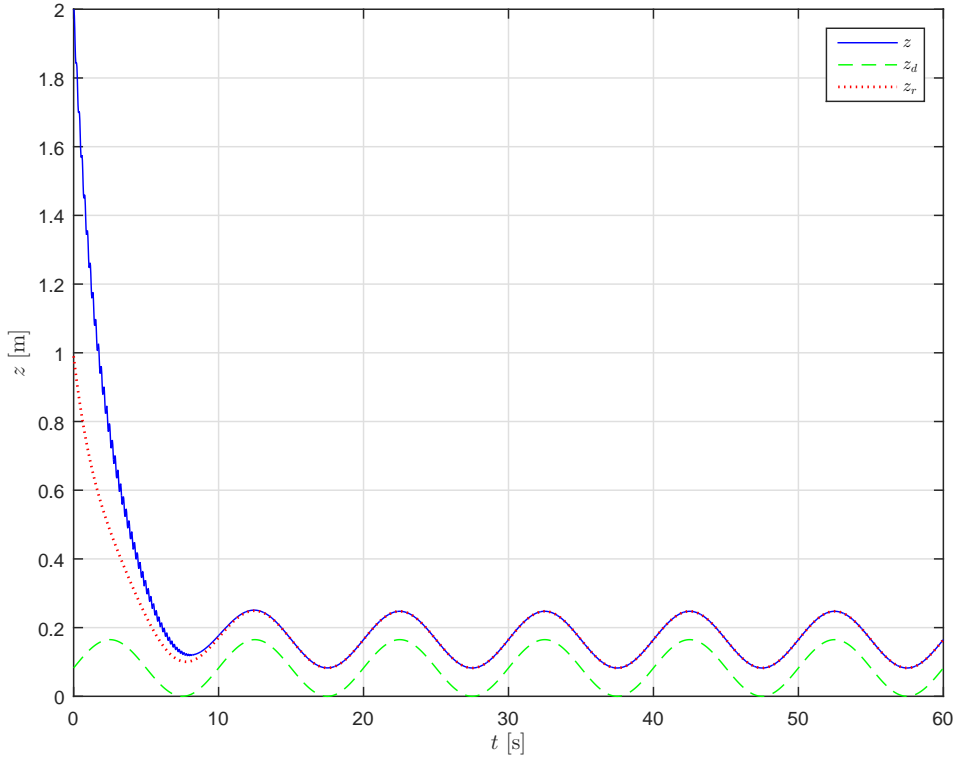


Figura 4.10: Resultados de simulação. Controlador SSC com parcela adaptativa. Na presença de efeito solo e variação de massa. Sinais de altitude z (azul) e referência z_r (vermelho pontilhado).

(H-5.c) A aceleração \ddot{z} , e os ângulo ϕ e θ estão disponíveis para realimentação.

Como mencionado anteriormente, a Hipótese **(H-5.c)** é razoável pois acelerômetro é um sensor comumente disponível na eletrônica embarcada de quadricópteros.

4.5.1 Estimador por Mínimos Quadrados Normalizado

Para um modelo linear paramétrico na forma

$$Y(t) = \Theta^{*T} \Phi(t), t \geq t_0, \quad (4.31)$$

sendo $\Theta^* \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$ um vetor de parâmetros desconhecidos, $Y \in \mathbb{R}$ um sinal medido e $\Phi \in \mathbb{R}^{n_\Theta}$ um vetor de sinais conhecidos, o estimador por Mínimos Quadrados Normalizado (NLS) utilizado nesta seção é descrito pelas seguintes equações dinâmicas [95]:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}(t) &= \frac{-P(t)\Phi(t)\epsilon(t)}{\mu^2(t)}, \quad \Theta(t_0) = \Theta_0, t \geq t_0, \\ \dot{P}(t) &= \frac{-P(t)\Phi(t)\Phi^T(t)P(t)}{\mu^2(t)}, \quad P(t_0) = P_0 = P_0^T > 0, t \geq t_0, \\ \mu(t) &= \sqrt{1 + \kappa\Phi^T(t)P(t)\Phi(t)}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

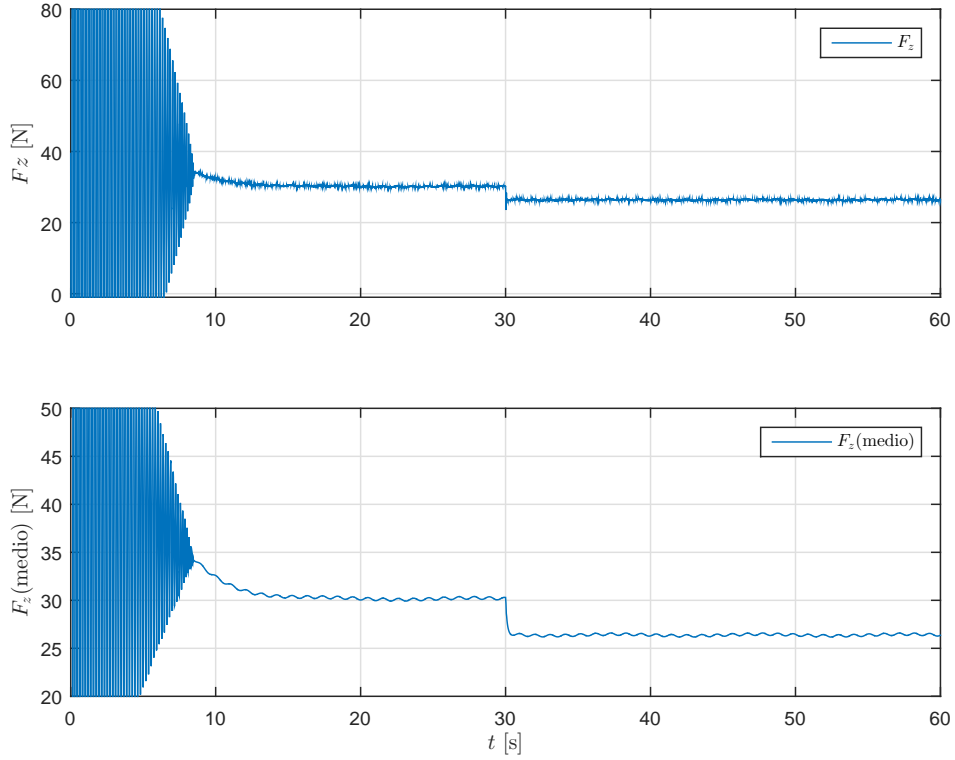


Figura 4.11: Resultados de simulação. Controlador SSC com parcela adaptativa. Na presença de efeito solo e variação de massa. Sinais de altitude z (azul) e referência z_r (vermelho pontilhado).

sendo $P = P^T > 0$ a matriz de covariância, $\epsilon(t) := \Theta^T(t)\Phi(t) - Y(t)$ e $\kappa > 0$ um parâmetro de projeto. De acordo com [95, pp. 250], o estimador NLS assegura a convergência do vetor Θ para o vetor de parâmetros desconhecidos Θ^* , a partir de condições iniciais P_0, Θ_0 .

4.5.2 Estimando Massa e Efeito Solo

Para obtenção em tempo real da massa m e do parâmetro ρ do ganho que modela o Efeito Solo será utilizado o algoritmo *NLS*. Considerando a dinâmica da altitude do quadricóptero descrita em (4.2) e o modelo do ganho do *Efeito Solo* (4.30), pode-se escrever que

$$\begin{aligned}
 \frac{m}{k_h}(\ddot{z} - d) &= u(t)k_g(z, t), \\
 &= \frac{u(t)}{1 - \rho \left(\frac{R}{4(z - z_d)} \right)^2}.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

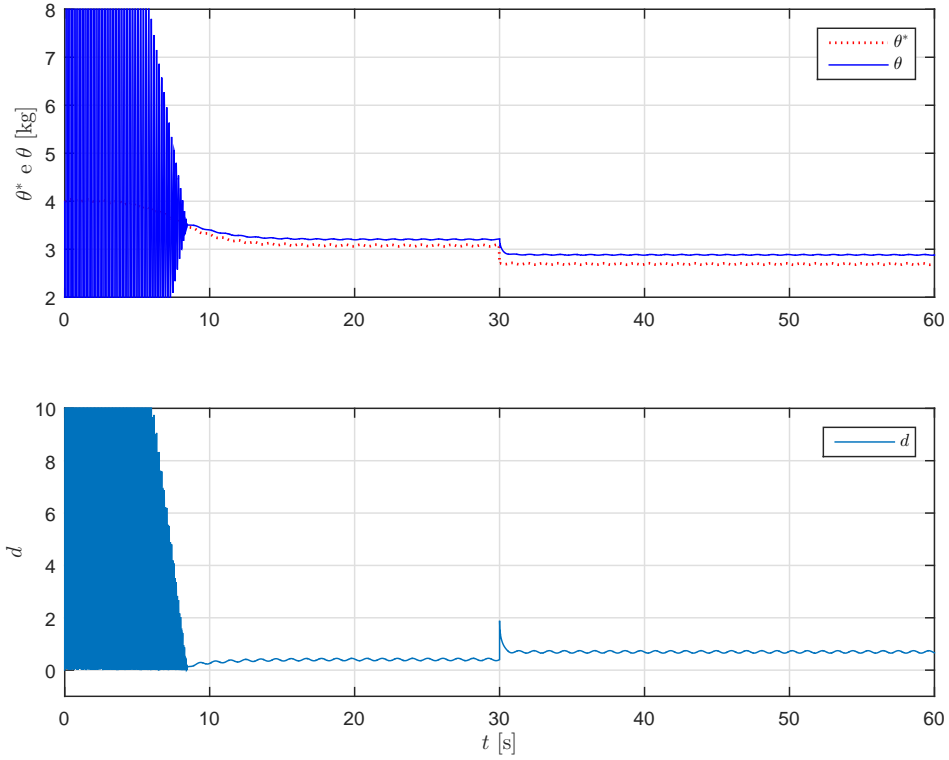


Figura 4.12: Resultados de simulação. Controlador SSC com parcela adaptativa. Na presença de efeito solo e variação de massa. Sinais de altitude z (azul) e referência z_r (vermelho pontilhado).

Agora considerando os sinais disponíveis (vale lembrar que $d = -g$)

$$\begin{aligned}\Phi_1 &:= (\ddot{z} - d)/k_h, \\ \Phi_2 &:= \Phi_1 \left(\frac{R}{4(z - z_d)} \right)^2,\end{aligned}\quad (4.34)$$

pode-se reescrever (4.33) na forma

$$m\Phi_1 = \frac{u}{1 - \rho\Phi_2/\Phi_1}$$

ou, equivalentemente,

$$u = \begin{bmatrix} m & -m\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}.\quad (4.35)$$

Note que a expressão (4.35) se encontra na forma linear paramétrica (4.31), com $n_\Theta = 2$, com $\Theta_1^* = m$ e $\Theta_2^* = -m\rho$. Portanto, a estimativa $\hat{\rho}$ do parâmetro ρ do ganho que modela o Efeito Solo é dada por:

$$\hat{\rho} = -\frac{\Theta_2}{\Theta_1},$$

sendo Θ_1, Θ_2 as estimativas provenientes do estimador NLS (4.32) e

$$\Theta^T = \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi^T = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{bmatrix} \text{ e } Y = u. \quad (4.36)$$

Além disso, uma estimativa \hat{m} da massa m pode ser obtida pela expressão

$$\hat{m} = \Theta_1,$$

quando k_h é conhecido (ângulos de *roll* e *pitch* medidos). Note que para k_h desconhecido porém satisfazendo $k_h \approx 1$ devido a pequenos valores dos ângulos de *roll* e *pitch*, ainda é possível obter a estimativa $\hat{m} = \Phi_1 = \ddot{z} - d$.

Observação 4 (Estimando um Parâmetro Único) *De forma alternativa, pode-se reescrever (4.33) na forma*

$$\frac{m}{k_h k_g} (\ddot{z} - d) = u(t), \quad (4.37)$$

que se encontra na forma linear paramétrica (4.31), com $n_\Theta = 1$, $\Theta^* = \frac{m}{k_h k_g}$, $Y = u$ e $\Phi = \ddot{z} - d$. Lembrando que em (4.9) o parâmetro $\theta^* = \frac{m}{k_h k_g} = \Theta^*$, tem-se que uma estimativa θ para θ^* é dada pelo estimador NLS:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= - \left(\frac{p\Phi^2}{\mu^2} \right) \theta + \frac{p\Phi}{\mu^2} u, \\ \dot{p} &= - \frac{\Phi^2}{\mu^2} p^2, \\ \mu &= \sqrt{1 + \kappa p \Phi^2}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

com condições iniciais $\theta(t_0) = \theta_0$ e $p(t_0) = p_0 > 0$, $t_0 \geq 0$, sendo $\kappa > 0$ um parâmetro de projeto. Deve-se destacar que o parâmetro Θ^* neste caso não é constante, o que vai de encontro com a formulação tradicional do estimador NLS [95]. Entretanto, observa-se via simulação que a estimativa obtida é consistente quando Θ^* varia lentamente no tempo. Isso ocorre, por exemplo, quando o quadricóptero permanece com orientação regulada em zero ($k_h \approx 1$) e quando o deslocamento vertical é lento (lenta aproximação no pouso).

4.5.3 Controlador PD Variante no Tempo

Assumir que a massa inicial $m_0 = m(t_0)$ é conhecida antes de executar a tarefa de Captação/Liberação não é uma restrição forte. De fato, m_0 pode ser determinada quando:

- O quadricóptero está sem carga adicional e, portanto, m_0 é igual a massa nominal do veículo sem carga ($m_0 = m_{nom}$). A massa nominal pode ser obtida

utilizando uma balança ou por meio do estimador NLS durante o vôo (antes do pouso e/ou antes de captar carga adicional). Vale lembrar que para isso basta executar um vôo longe do solo ($k_g \approx 1$) e com orientação conhecida, ou seja, com ϕ, θ conhecidos (consequentemente k_h).

- O quadricóptero possui uma carga adicional desconhecida. Neste caso, durante um vôo (antes do pouso e/ou antes de liberar a carga) longe do solo ($k_g \approx 1$) e com orientação conhecida, ou seja, com ϕ, θ conhecidos (consequentemente k_h) pode-se estimar m_0 por meio do estimador NLS.

Considere então um controlador PD com ação antecipatória (*Feedforward*) e ganhos sintonizados quando o quadricóptero está distante do solo ($k_g = 1$) e com massa conhecida m_0 . A lei de controle é descrita por

$$\mathcal{U}_0 = K_P^{z0} e + K_D^{z0} \dot{e} + \ddot{z}_r, \quad (4.39)$$

sendo que $e = z - z_r$ é o erro de rastreamento. Para compensar o efeito do aumento/diminuição da massa após a tarefa de Captação/Liberação de carga, assim como o Efeito Solo, o sinal de controle aplicado a planta será dado por:

$$\mathcal{U} = \frac{\hat{m}(t)}{\hat{k}_g(t)} \mathcal{U}_0 = K_p^z(t) e + K_d^z(t) \dot{e} + K_{ff}^z(t) \ddot{z}_r, \quad (4.40)$$

que pode ser interpretado como um controlador PD com ação antecipatória (*Feedforward*) e ganhos variantes no tempo dados por

$$\begin{aligned} K_p^z(t) &= \frac{\hat{m}(t)}{\hat{k}_g(t)} K_P^{z0}, \\ K_d^z(t) &= \frac{\hat{m}(t)}{\hat{k}_g(t)} K_D^{z0}, \\ K_{ff}^z(t) &= \frac{\hat{m}(t)}{\hat{k}_g(t)}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

que são dependentes das estimativas de ρ e m obtidas por meio do estimador do mínimos quadrados normalizado (*Normalized Least Squares - NLS* [95]). O ganho $\hat{k}_g(t)$ é a estimativa do ganho do *Efeito Solo* k_g com base na expressão (4.30) dada por

$$\hat{k}_g(z, t) = \frac{1}{1 - \hat{\rho} \left(\frac{R}{4(z - z_d)} \right)^2}. \quad (4.42)$$

4.5.4 Proposta de Reinicialização do Estimador

Durante a evolução do sistema dinâmico do NLS (4.32), quando o parâmetro estimado Θ tende para Θ^* , tem-se que o erro paramétrico ϵ tende para 0. Por consequência a equação dinâmica de $P(t)$ torna-se assintoticamente estável e portanto $P(t) \rightarrow 0_{2 \times 2}$. Com a minimização dos sinais, alterações posteriores no parâmetro alvo Θ^* , levam a uma convergência lenta de Θ . Considera-se que o momento t_m da variação da massa é conhecido e dado por uma função da altura do quadricóptero com relação a plataforma. O tempo t_m é o primeiro instante de t tal que $z(t) \leq z_d(t) + \Delta_z$, sendo Δ_z um limiar de distância o qual é considerado apropriado para captura/liberação da carga. Em uma tentativa de remediar o transitório lento, considerando que o momento da variação da massa é conhecido, optou-se por reinicializar o valor de P em t_m . Sendo assim com a adição da condição $P(t_m) = P(t_0)$ no algoritmo NLS o transitório de Θ após o momento da captura/liberação em $t > t_m$ torna-se similar ao inicial em $0 < t < t_m$.

4.5.5 Simulações Numéricas

Nas simulações a seguir é utilizado para o projeto dos controladores aqui considerados, o seguinte modelo para k_g [89]:

$$k_g(z, t) = \frac{1}{1 - \rho \left(\frac{R}{4(z - z_d)} \right)^2},$$

sendo $R = 0,16[\text{m}]$ a metade do comprimento da hélice, z a altura do C.G. do veículo e z_d a altura da plataforma (ambos em relação a origem do sistema inercial) e $\rho = 1,18$ uma constante caracterizada pelas dimensões do rotor. Assim como na Seção 4.4, para simular a tarefa de *Liberação* de carga, considera-se que a massa do quadricóptero varia, sendo constante por partes, de acordo com

$$m(t) = \begin{cases} 4,0\text{kg}, & \text{para } 0 < t < 30, \\ 3,5, \text{kg} & \text{para } t \geq 30. \end{cases} \quad (4.43)$$

A planta utilizada é a descrita em (4.1), com parâmetros apresentados na Tabela 4.2. A posição (x, y) e a orientação (ϕ, θ) do quadricóptero são reguladas em zero utilizando

Tabela 4.2: Parâmetros do modelo do quadricóptero apresentado em (4.1).

$g = 9,81\text{ms}^{-2}$	$I_x = 0,082\text{kg m}^2$	$I_y = 0,082\text{kg m}^2$	$I_z = 0,149\text{kg m}^2$
--------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

os controladores PD (3.49), (3.50) e (3.51) da Seção 3.4.1 com os seguintes ganhos

$$K_P^q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad K_D^q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad K_P^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad K_D^p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad K_P^\psi = 5 \text{ e } K_D^\psi = 2,$$

e com constantes tempo dos filtros dos derivadores tais que $\tau_p = \tau_z = \tau_\psi = \tau_q = 0,01$. Em particular a dinâmica da altitude é dada por (4.2). A trajetória a ser seguida descrita em (4.7) e é tal que

$$\ddot{z}_r(t) = \ddot{z}_d(t) + \frac{z_{r_{init}}}{\tau_{z_r}^2} e^{\frac{-t}{\tau_{z_r}}} = -A\omega^2 \text{sen}(\omega t) + \frac{z_{r_{init}}}{\tau_{z_r}^2} e^{\frac{-t}{\tau_{z_r}}} . \quad (4.44)$$

O controlador PD variante no tempo com parcela antecipativa e com realimentação de posição é dado pelas equações (3.36), e é implementado com os parâmetros da Tabela 4.3. Será implementado um controlador com ganhos fixos dados por 4.3 sem a estimação dos parâmetros via NLS, apenas para efeitos de comparação.

Tabela 4.3: Parâmetros do Controle PD

$K_P^{z0} = 50$	$K_D^{z0} = 25$	$\tau_z = 0,01\text{s}$
-----------------	-----------------	-------------------------

A Figura 4.13 apresenta o desempenho em malha fechada com o controlador PD variante no tempo, evolução temporal da altitude do quadricóptero assim como a altura da plataforma e a trajetória a ser seguida. Nota-se que o quadricóptero sob ação do controlador PD variante no tempo apresenta um satisfatório desempenho no momento em que a carga é liberada ($t = 30$).

Os correspondentes sinais de controle e erro de rastreamento podem ser observados na Figura 4.15 e 4.14, respectivamente. Na Figura 4.16 observa-se os parâmetros estimados $\hat{\rho}$ e \hat{m} convergindo para os valores reais.

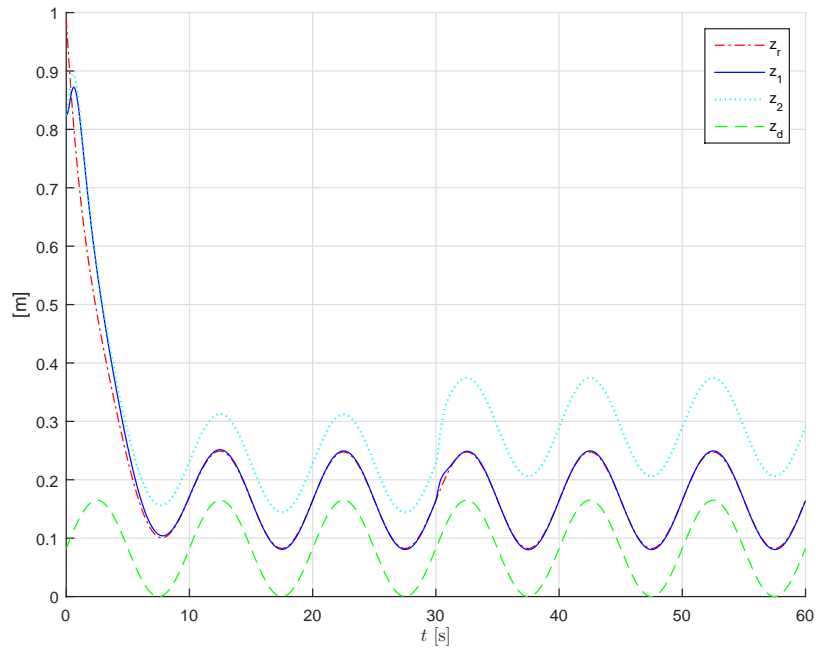


Figura 4.13: Resultados de simulação. Trajetória desejada z_r (vermelho traço ponto), altura z_d da plataforma (verde tracejado), altura do quadricóptero considerando o controlador PD+NLS (z_1 azul escuro) e altura do quadricóptero considerando um controlador PD com ganhos fixos (z_2 azul claro pontilhado).

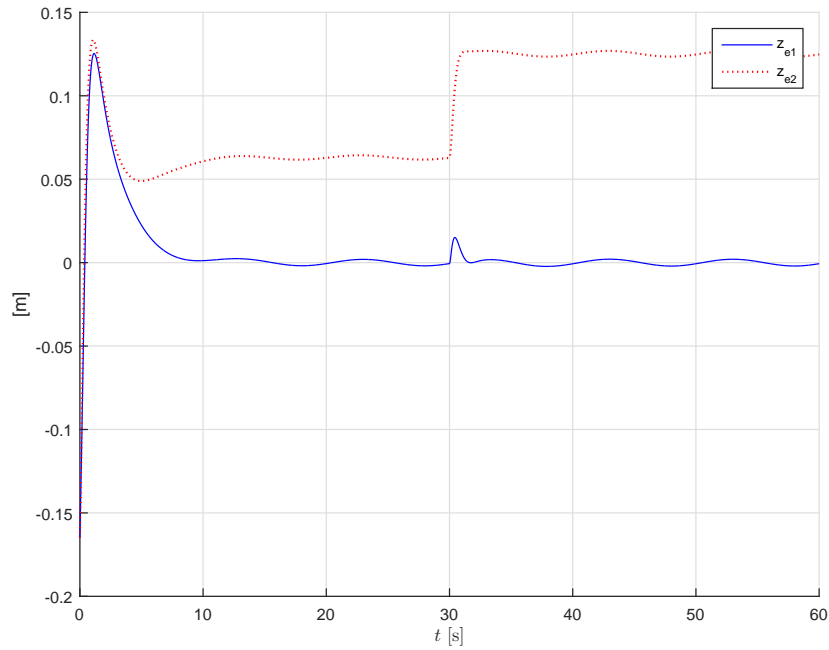


Figura 4.14: Resultados de simulação. Sinais de erro de rastreamento. Com relação a z_1 (PD+NLS, azul) e com relação a z_2 (PD, vermelho pontilhado)

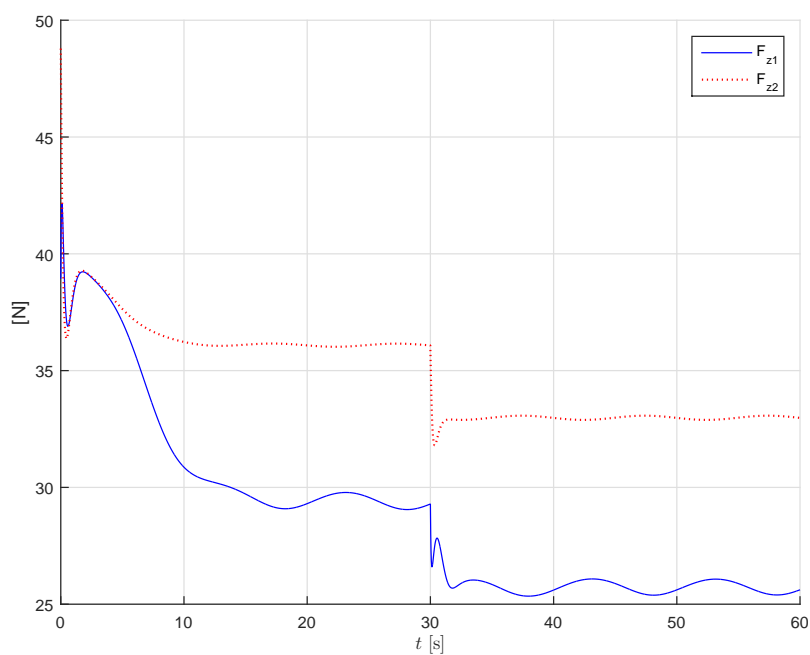


Figura 4.15: Resultados de simulação. Sinais de controle F_{z1} (PD+NLS, azul) e F_{z2} (PD, vermelho pontilhado).

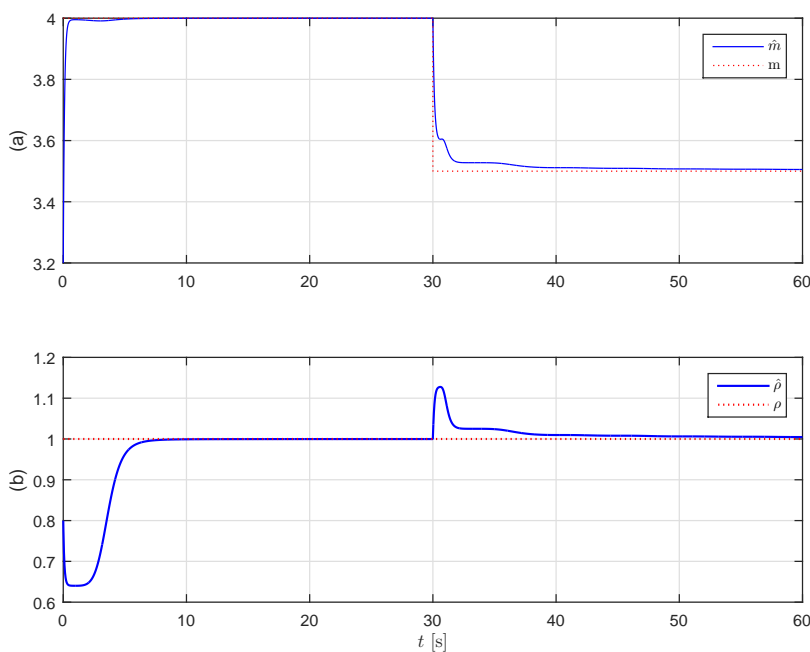


Figura 4.16: Resultados de simulação. Sinais do Estimador NLS: (a) Massa estimada \hat{m} (azul) e massa teórica m (vermelho pontilhado), (b) Parâmetro estimado $\hat{\rho}$ (azul) e parâmetro teórico ρ (vermelho pontilhado).

Capítulo 5

Hardware, Software e Experimentos

No presente capítulo serão detalhados os sistemas que constituem o quadricóptero construído nesta Dissertação, como sua composição estrutural, sensores internos e externos, eletrônica embarcada, atuadores e interface de operação. Além disso são apresentados os resultados experimentais preliminares e os resultados experimentais de um voo.

5.1 Descrição do *Hardware*

Os componentes do quadricóptero (ver Figura 5.1) podem ser divididos em dois grupos principais, o sistema embarcado e o sistema da base, ver Figura 5.2. O sistema embarcado é constituído principalmente de um microcontrolador (arquitetura *ARM*), uma unidade inercial, módulos de comunicação, bateria, motores, hélices, acionadores (*drivers*) de potência, além da estrutura de suporte e proteção. O sistema da base, para teleoperação via interface gráfica, é um computador *PC* com conexão *WiFi IEEE802.11*, uma *Webcam* e um controle de transmissão sem fio para desligamento emergencial.

5.1.1 Estrutura Mecânica Sem Proteção e Limitada por Cabos

A estrutura mecânica é tal que a eletrônica embarcada é armazenada na estrutura central em plástico ABS¹. As hastes em alumínio fixam os motores e os acionadores de potência ao corpo central. O alumínio foi escolhido devido a sua boa resistência a flexão e baixa densidade, além do baixo custo.

¹Sigla do composto químico *Acrylonitrile Butadiene Styrene*.

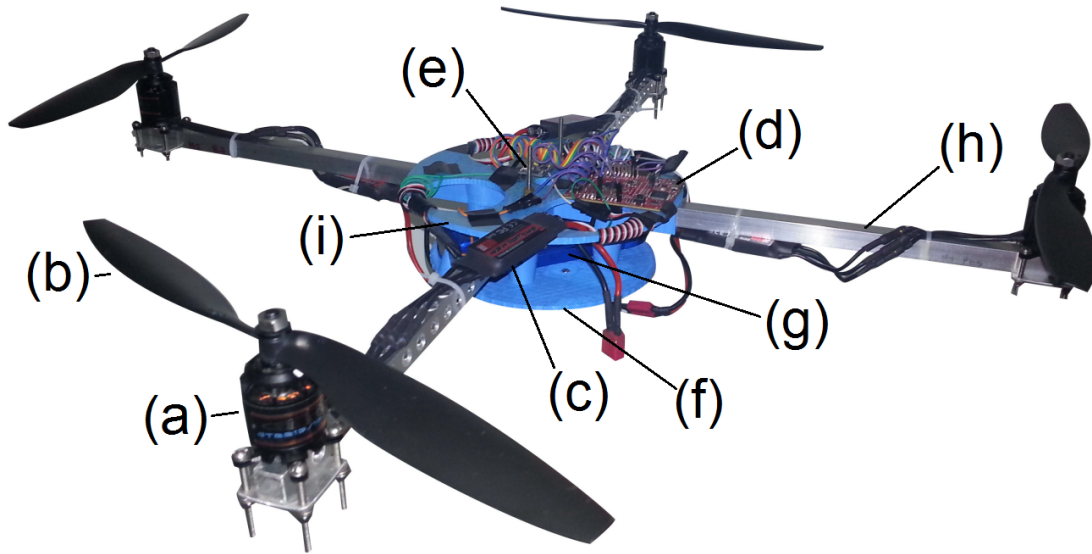


Figura 5.1: Quadrirrotor com componentes em evidência. Em (a) Motor, (b) Hélices, (c) ESC, (d) ARM, (e) IMU, (f) Sonar Ultrassônico, (g) Bateria de LiPo, (h) Hastes em alumínio e (i) Estrutura central em plástico.

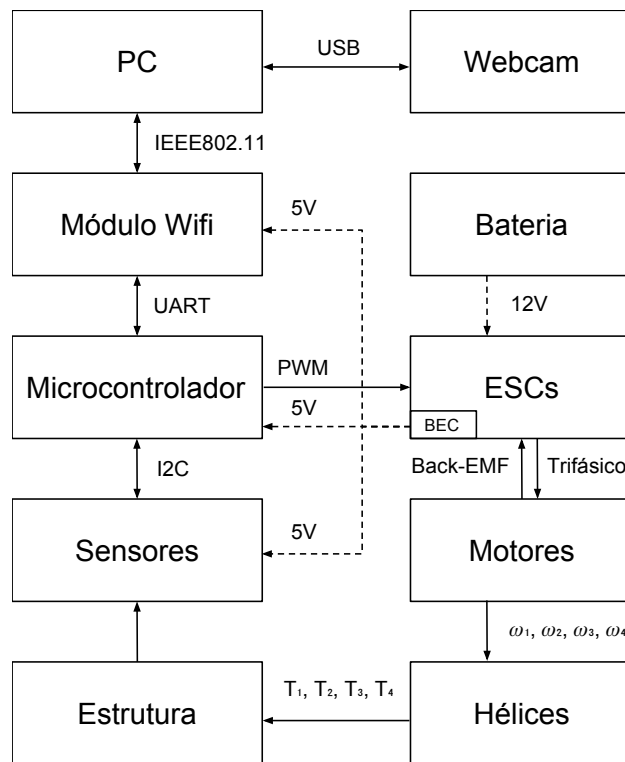
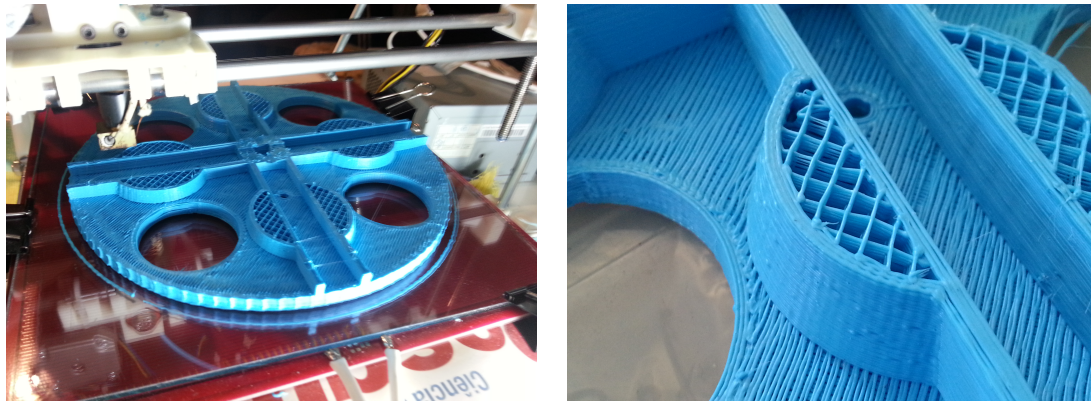


Figura 5.2: Esquemático geral de conexão dos componentes de *hardware*.

A estrutura central foi fabricada em uma impressora 3D RepRap Prusa Mendel [114] pelo método de manufatura aditiva de termoplástico ABS, ver Figura 5.3(a) 5.3(b). Tendo em vista as possibilidades e peculiaridades deste equipamento, a estrutura central foi modelada tendo como prioridade a redução do peso e a sua forma foi concebida para atender as necessidades do projeto com poucas conexões em apenas

duas partes facilitando a montagem e a manutenção do quadrrrotor.



(a) Peça central do quadrrrotor sendo im-

(b) Detalhe do padrão de preenchimento da peça central do quadrrrotor.

Figura 5.3: Peça central do quadrrrotor responsável pela sustentação da eletrônica embarcada e por manter unidas as hastes que sustentam os atuadores.

5.1.2 Estrutura Mecânica Com Proteção para os Rotores

Para experimentos mais avançados de voo, por questões de segurança foi construído um quadrrrotor com proteção para os rotores, de forma a diminuir as chances de colisão das hélices com o ambiente durante os ensaios. Na Figura 5.4 é possível observar a nova estrutura com a proteção.

5.1.3 Atuadores

O atuador utilizado é um motor GT2215/12 (EMAX [115]) sem escova ou sensor de velocidade de rotação do tipo trifásico com 905RPM/V e *outrunner*. Nos motores do tipo *outrunner*, o rotor é a carcaça externa e contém os ímãs permanentes enquanto o estator aloja os enrolamentos (carcaça interna), conferindo menor velocidade máxima de rotação, quando comparado aos motores do tipo *inrunner*, porém maior capacidade de torque. As hélices utilizadas possuem pás duplas com 12” de diâmetro e 4,5” de passo. Em conjunto com os motores cada hélice é capaz de gerar no máximo 7N de empuxo.

A bateria de LiPo (Polímero de Lítio) da marca *DragonRed* é constituída de três pacotes em série, sendo cada pacote com três células de 3,7V em paralelo, totalizando 11,1V de tensão nominal. A capacidade nominal da bateria é de 5000mAh e sua corrente de descarga máxima é de 150A. O controlador de velocidade (*Electronic Speed Controller-ESC*) da *Hobbywing* é alimentado pela bateria e fornece o sinal trifásico de seu respectivo motor. Os motores não possuem sensores internos

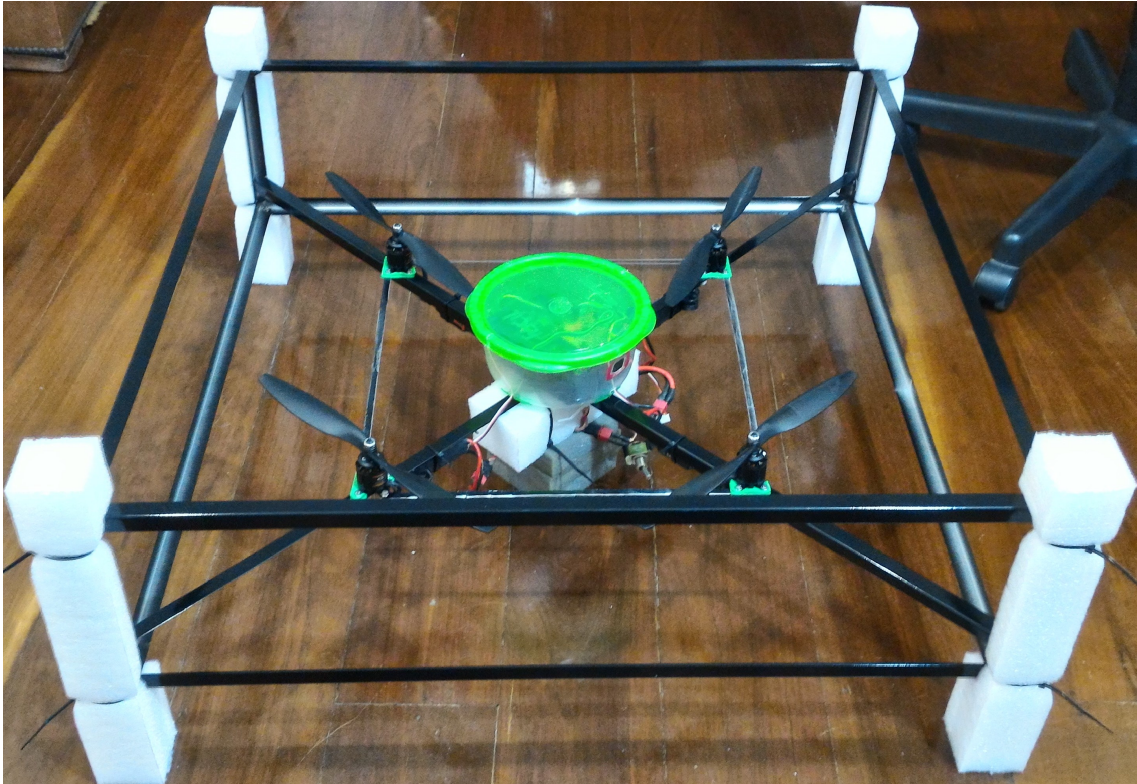


Figura 5.4: Quadrirotor com proteção para os rotores.

de rotação, o controle de velocidade é baseado na força contra-eletromotriz (*back electromotive force*). Uma fonte regulada em 5V está incluída na eletrônica do ESC, este circuito é denominado BEC (*Battery Eliminator Circuit*) e alimenta todos os outros componentes da eletrônica embarcada. O ESC modelo *Skywalker* é capaz de fornecer até 40A e foi configurado para receber como entrada um sinal modulado por largura de pulso (PWM) de 432Hz.

5.1.4 Sensores

A unidade inercial MPU9150 [116] mede os dados de aceleração linear, velocidade angular e campo magnético. Cada sinal é representado em três eixos ortogonais. Os dados do acelerômetro e do giroscópio são amostrados a uma taxa de 1kHz, sendo filtrados por um passa-baixa em 184Hz e 188Hz, respectivamente. Em seguida são transmitidos via comunicação serial padrão *I2C* a cada 5ms para o microcontrolador.

O sonar ultrassônico HC-SR04 está posicionado e orientado na estrutura de forma que com o tempo de propagação e retorno dos pulsos de $25\mu s$ é possível estimar a altura do quadrirotor com relação ao solo. O alcance máximo é de 4m e o mínimo é de 0.02m com uma taxa de atualização de 40Hz. O ângulo de abertura nominal do feixe ultrassônico é de 15° .

5.1.5 Eletrônica Embarcada

O microcontrolador utilizado é um ARM modelo Cortex-M4F TM4C123G [117], que executa as principais etapas de processamento, como aquisição de dados dos sensores, troca de mensagens com a estação, estimação da orientação e o cálculo do controle de estabilização (*roll* e *pitch*). O microcontrolador de 32bits é capaz de operar a 80MHz e possui memória *Flash* de 256kB e *SRAM* de 32kB, além de uma *EEPROM* de 2kB. Adicionalmente, a placa de desenvolvimento conta com entradas *USB 2.0*, conversores AD, módulos *PWM* e de comunicação *UART*, *I²C*, *SPI* e *CAN*. Um atributo em evidência na família de microcontroladores *Cortex-M4F* é a presença da FPU (*Floating Point Unit*) capaz de fazer operações diretamente em ponto flutuante.

5.1.6 Comunicação

O sistema de comunicação possui um módulo de rede sem fio IEEE802.11 modelo HLK-RM04 embarcado no quadrirrotor. Os dados da malha de controle de posição enviados pelo PC na estação em solo e os dados de telemetria enviados pelo veículo são transmitidos por meio da rede gerada pelo HLK-RM04. Além disso uma chave de acionamento por RF operando em 433MHz é utilizado em situações emergenciais em que há necessidade de desligamento imediato dos motores. Caso o botão de emergência na base seja acionado o microcontrolador é reiniciado, interrompendo imediatamente a rotação dos motores.

5.2 Software Embarcado

Nesta seção serão descritos os principais softwares desenvolvidos para o experimento com o quadrirrotor: o filtro complementar para estimação da orientação, o cálculo da altitude baseado no sonar ultrassônico e fluxograma das rotinas de controle e telemetria.

5.2.1 Filtro Complementar (ϕ e θ) e Sonar Ultrassônico (z)

Para obtenção dos ângulos de orientação *roll* e *pitch* (ϕ e θ) do quadrirrotor são utilizados os dados do acelerômetro e do giroscópio processados por um filtro complementar. O filtro complementar é na verdade um filtro de Kalman em estado estacionário para uma certa classe de problemas de filtragem, desconsiderando a estatística dos sinais e fazendo uma análise no domínio da frequência apenas [118].

Considerando que os sinais Φ_A e Φ_G são medidas do sinal Φ_F , porém com perfis complementares de espectro de ruído, pode-se propor um filtro complementar que

estime $\hat{\Phi}_F$ equacionado por

$$\hat{\Phi}_F = \Phi_G[1 - G(s)] + \Phi_A[G(s)] \quad (5.1)$$

sendo $(1 - G(s))$ e $G(s)$ filtros com características complementares de frequência.

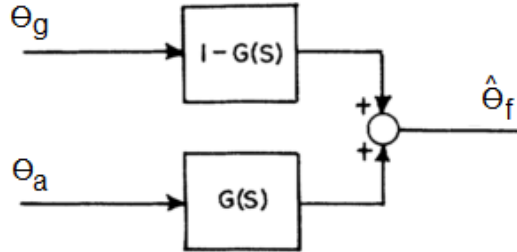


Figura 5.5: Esquemático do Filtro Complementar.

Nesta seção considera-se $\Phi = [\phi \ \theta]'$ o vetor composto pelos ângulo de *roll* e *pitch*. O valor de Φ estimado pelo acelerômetro por meio da decomposição da gravidade é dado por

$$\Phi_A = \begin{cases} \phi_A = \arctan(\ddot{y}/\sqrt{\ddot{z}^2 + \ddot{x}^2}), \\ \theta_A = \arctan(-\ddot{x}/\sqrt{\ddot{z}^2 + \ddot{y}^2}), \end{cases} \quad (5.2)$$

sendo \ddot{x} , \ddot{y} e \ddot{z} os sinais de aceleração linear do quadricóptero no sistema de coordenadas $\{B\}$. O vetor Φ também pode ser estimado pelo giroscópio, neste caso por meio da integração da velocidade angular (aproximado pelo método *Backward Euler*)

$$\Phi_G = \begin{cases} \phi_G[n] = \phi_G[n-1] + T\omega_x[n], \\ \theta_G[n] = \theta_G[n-1] + T\omega_y[n]. \end{cases} \quad (5.3)$$

sendo T o período de amostragem e ω_x , ω_y e ω_z as velocidades angulares na direção dos eixo x , y e z . Como θ_A possui ruído predominantemente em alta frequência e θ_G ruído em baixa frequência, então é proposto $G(s)$ como o filtro passa-baixa

$$G(s) = \frac{1}{s + a}, \quad (5.4)$$

ou, na forma discreta

$$\frac{y[n]}{u[n]} = \frac{1}{\frac{1-z^{-1}}{T} + a} \quad (5.5)$$

$$y[n] = \frac{1}{(1 + Ta)}y[n-1] + \frac{T}{(1 + Ta)}u[n] \quad (5.6)$$

sendo a a posição do pólo. O valor de a determina a frequência de corte dos filtros e é determinado experimentalmente.

Para a estimação da altitude foi utilizado um sonar ultrassônico posicionado na parte inferior do quadricóptero e com os transdutores voltados em direção ao solo é possível calcular a altura do quadricóptero (z). Tendo em vista que o pulso sonoro deve percorrer a distância z duas vezes, pode-se calculá-la sabendo a velocidade do som no ar (v_{som}) e o intervalo de tempo Δt entre o envio e o recebimento do pulso, por meio da seguinte equação (5.7)

$$z = \frac{\Delta t v_{som}}{2} \quad (5.7)$$

5.2.2 Rotinas de Controle e Telemetria

As rotinas do controle de orientação, da aquisição dos dados do sensor inercial, do sonar e do envio dos dados de telemetria são executadas no sistema embarcado, porém com taxas de atualização diferentes devido as limitações de cada componente. Por outro lado, o controle de posicionamento e rumo é executado em um computador externo com frequência de amostragem limitada principalmente pelo valor da taxa de atualização de quadros da câmera.

5.3 Estimador de Posição (x , y e ψ)

Neste trabalho não foi dada ênfase nos algoritmos de visão computacional para aquisição de posição. Foi utilizada uma solução intuitiva baseada na aquisição dos centróides dos marcadores coloridos fixados na estrutura do quadricóptero. O sistema de posicionamento do quadricóptero consiste na detecção visual de marcadores colocados no veículo e na representação destes no sistema de coordenadas inercial. O quadricóptero apresenta dois marcadores coloridos posicionados cada um em uma haste como pode ser visto na Figura 5.7. Por simplicidade, considera-se que o sistema de coordenadas da câmera $\{C\}$ encontra-se perfeitamente alinhado com o sistema de coordenadas inercial $\{A\}$. Além disso a câmera se encontra previamente calibrada. Os marcadores são detectados por uma câmera fixada a uma altura de aproximadamente $2,5m$ com relação ao solo. Por meio de algoritmos de rastreamento de cor (*color tracking*) os marcadores são localizados no plano da imagem de forma que o posicionamento x , y e ângulo de rumo ψ são estimados nas coordenadas do sistema inercial $\{A\}$. Sendo assim, o ângulo formado pela reta que intercepta a posição dos dois marcadores e pelo eixo x do sistema $\{C\}$ é tido com o ângulo de rumo ψ . As coordenadas do ponto médio entre os marcadores são tidas como as posições x e y do quadricóptero no sistema de coordenadas $\{C\}$.

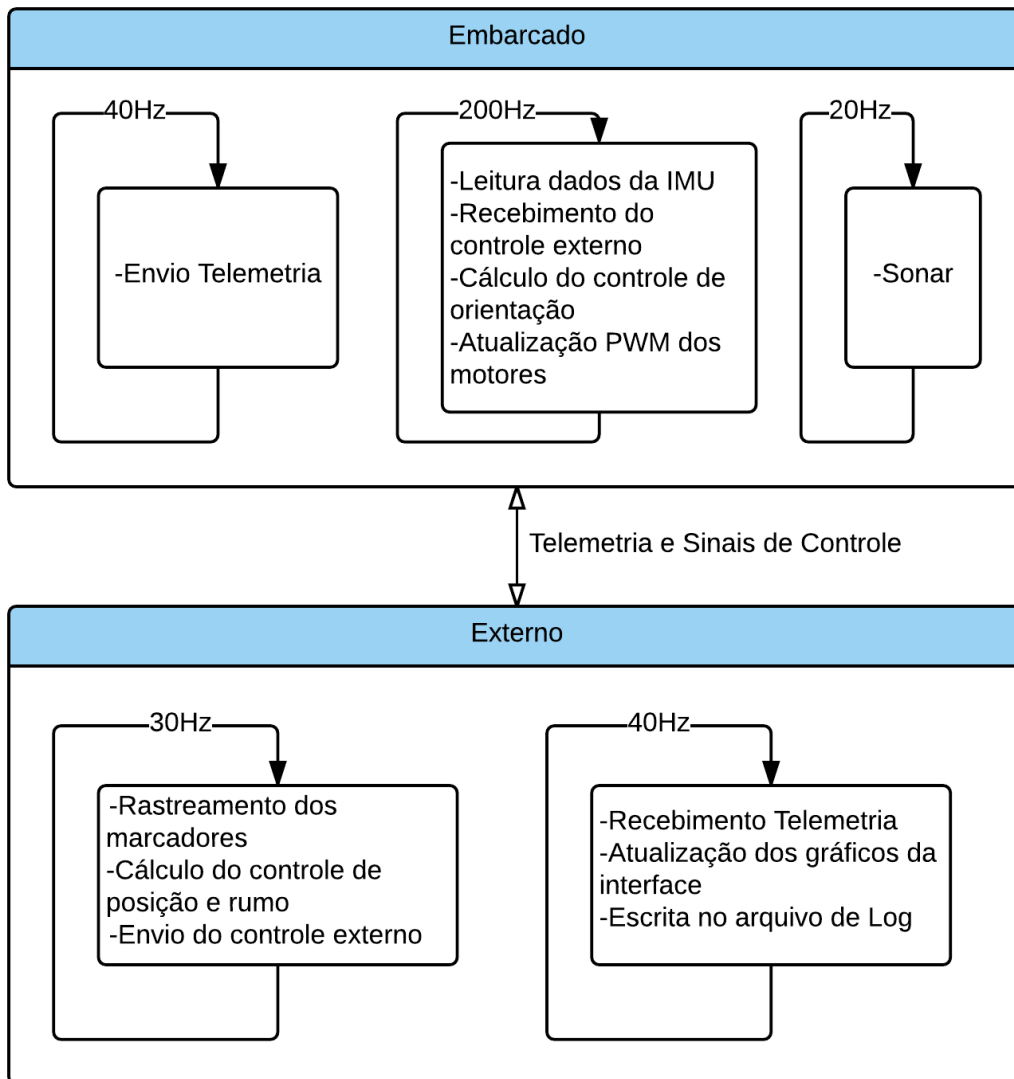


Figura 5.6: Fluxograma geral das rotinas de controle e telemetria.

5.4 Interface Gráfica

O sistema de processamento e sensoriamento externo executa os algoritmos de estimação e o controle de posição dos estados x , y e ψ . Constituído de um PC com processador AMD Athlon 64 X2 5600, 2.8GHz e 4GB RAM, com uma webcam (C270 Logitech) e um modem Wifi IEEE802.11 (TL-WN722N TP-Link).

Como pode ser observado na Figura 5.8 por meio da interface é possível coletar os dados de telemetria e visualizá-los durante o voo. É possível também coletar os dados como estados e sinais de controle, e armazená-los em arquivos para análise posterior. Os ganhos do controlador de orientação e de posição e do filtro estimador de orientação podem ser ajustados por meio da interface e enviados pela rede sem fio para a eletrônica embarcada. O sistema de detecção dos marcadores, a interface de

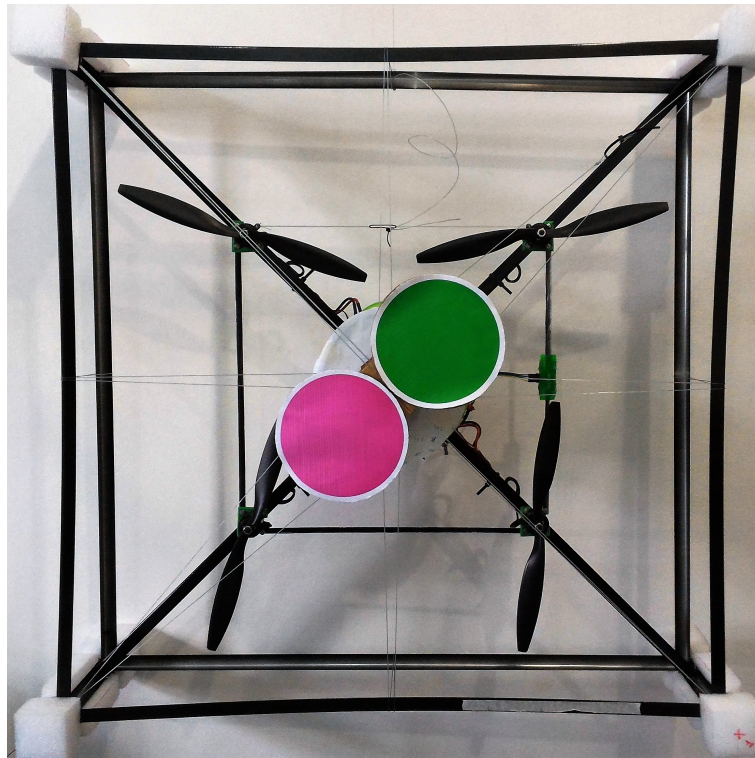


Figura 5.7: Visão superior dos marcadores coloridos no quadrirrotor.

operação e a malha de controle externa foram programados em *Labview* (*National Instruments*).

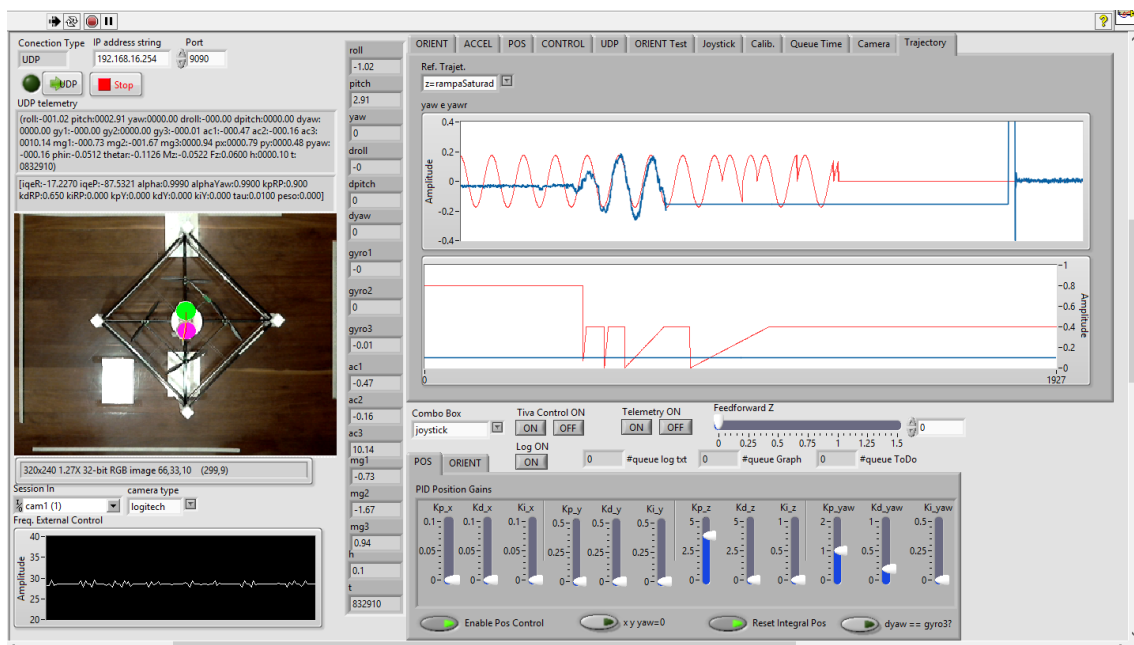


Figura 5.8: Interface de Usuário em Labview

5.5 Experimentos Preliminares

Os experimentos preliminares foram executados no intuito de avaliar o funcionamento básico do quadricóptero e dos controladores, antes do experimento de voo. Foram realizados 3 experimentos: (i) ensaios da orientação com o quadricóptero fixado com cabos; (ii) ensaios com rumo considerando regulação e rastreamento e (iii) ensaios de altitude. Para a aquisição dos sinais da planta foi utilizado o próprio conjunto de sensores e de telemetria do sistema descrito anteriormente.

5.5.1 Ensaios de Orientação: *Roll* e *Pitch*

Para a caracterização da dinâmica de *roll* e *pitch*, o quadricóptero foi fixado com cabos por duas de suas hastes não adjacentes (correspondentes aos motores 1 e 3) em uma bancada de forma a manter livre um dos graus de liberdade (*pitch*). Além disso apenas os motores que atuam diretamente neste grau de liberdade foram colocados em funcionamento (motores 2 e 4). Devido a simetria do veículo, testes com o outro

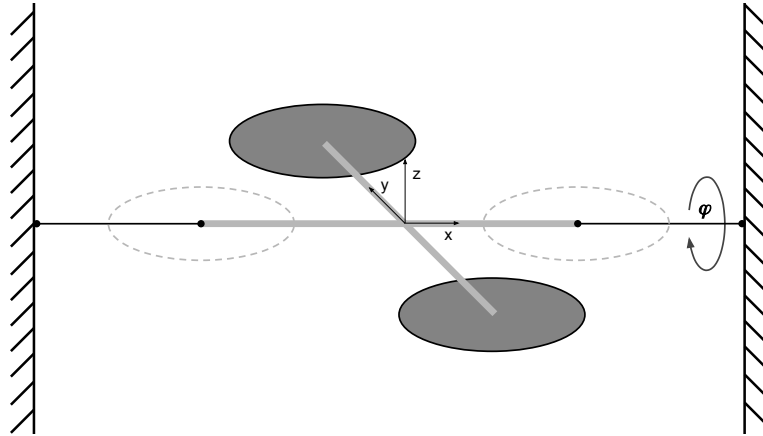


Figura 5.9: Esquemático do experimento de caracterização da dinâmica de orientação (*roll* e *pitch*).

grau de liberdade apresentaram resultados similares. O ensaio é executado com a planta em malha fechada com o controle de orientação descrito na Seção 3.4.1, porém com parcela antecipativa. Foi acrescentada ação integral, consistindo em um PID sem realimentação de velocidade com parâmetros

$$K_P^q = \begin{bmatrix} 0,60 & 0 \\ 0 & 0,60 \end{bmatrix}, \quad K_D^q = \begin{bmatrix} 0,15 & 0 \\ 0 & 0,15 \end{bmatrix}, \quad K_I^q = \begin{bmatrix} 0,30 & 0 \\ 0 & 0,30 \end{bmatrix}$$

e $\tau_q = 0,01s$, dado por:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = K_P^q q_e + K_I^q \int_0^t q_e(\tau) d\tau + K_D^q \dot{q}_e. \quad (5.8)$$

Para o teste de rastreamento de trajetória foram aplicadas referências de ângulo em degrau com amplitude de 5° e 10° com resultados observados respectivamente na Figura 5.10 e Figura 5.11. A ação integral foi necessária para compensar a falta de

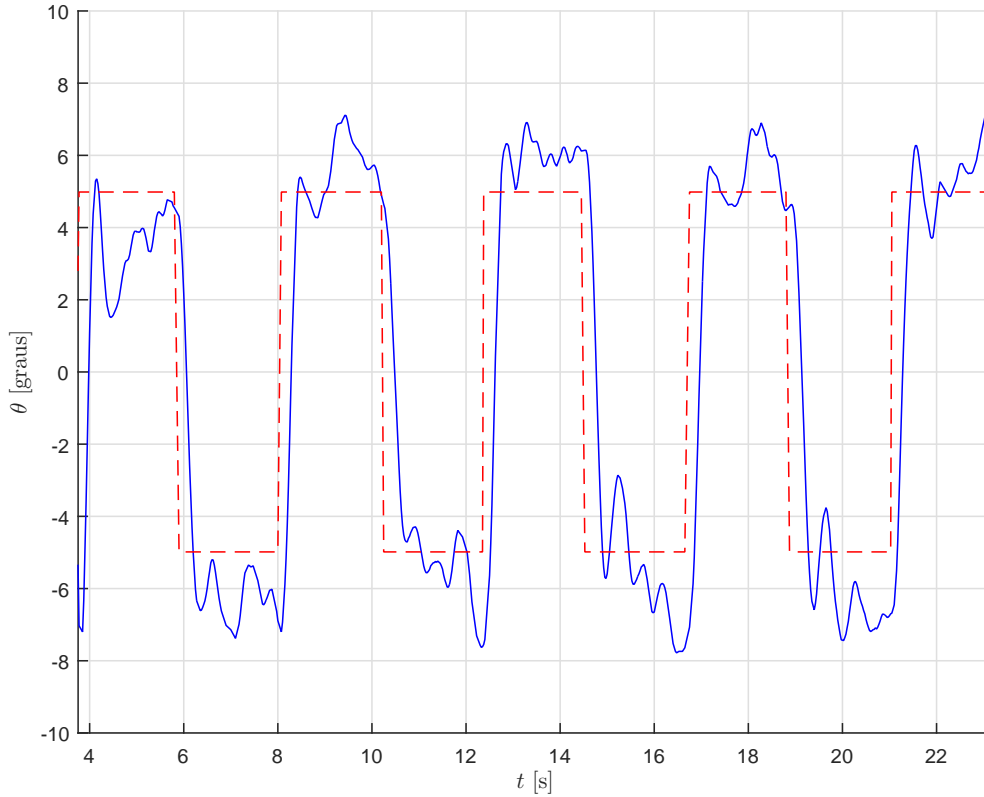


Figura 5.10: Experimento de caracterização da dinâmica de orientação. Ângulo *pitch* θ (azul) e correspondente referência θ_r (vermelho tracejado), onda quadrada com amplitude de 5° .

simetria e forças de contato devido a estrutura de fixação do quadricóptero.

5.5.2 Ensaios de Rumo: *Yaw*

Para o experimento de rastreamento de trajetória na caracterização do ângulo de rumo ψ , o quadricóptero foi fixado com um cabo preso a estrutura de suporte logo acima do centro de gravidade do veículo sendo a outra extremidade do cabo presa ao teto do local de testes. A restrição do cabo tem como objetivo manter livre o grau de liberdade associado ao rumo. O controle de rumo aplicado é o descrito na Seção 3.4.1 com parcela antecipativa nula, consistindo em um PD sem realimentação de velocidade com constante $\tau_\psi = 0,05s$, dado por:

$$M_z = K_P^\psi \psi_e + K_D^\psi \dot{\psi}_e. \quad (5.9)$$

Para o teste de rastreamento de trajetória foram aplicadas referências de ângulo em degrau com amplitude de 30° com resultado observados na Figura 5.13. Os ganhos

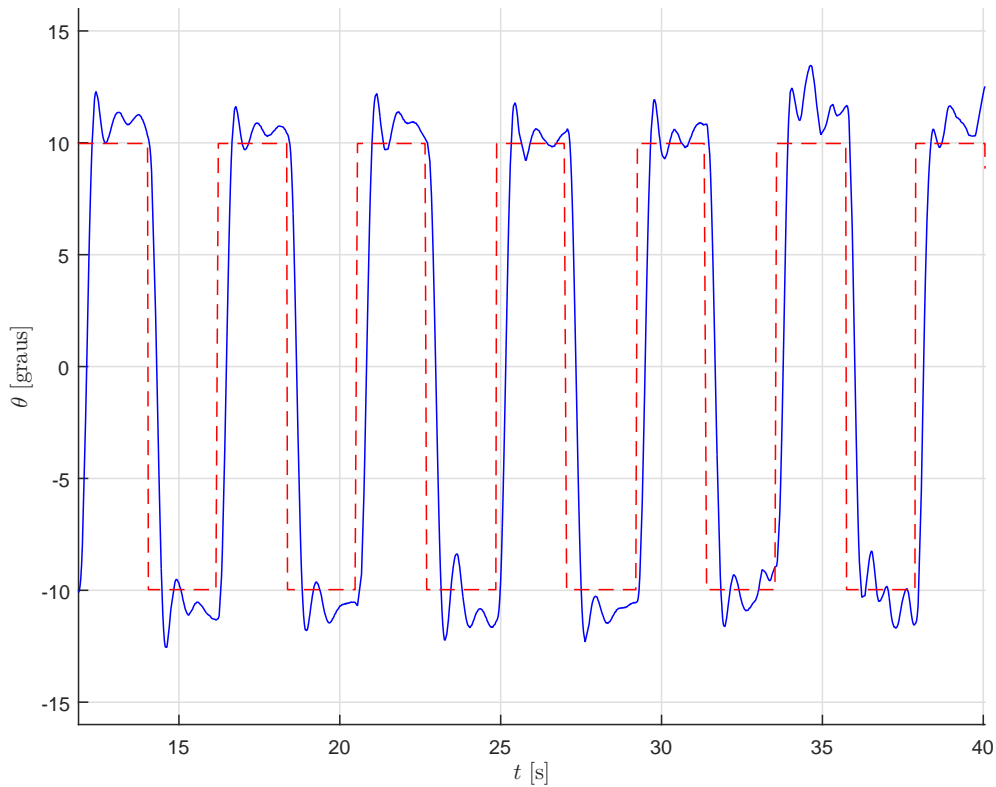


Figura 5.11: Experimento de caracterização da dinâmica de orientação. Ângulo de *pitch* (θ - azul) e correspondente referência (θ_r - vermelho) onda quadrada com amplitude de 10° .

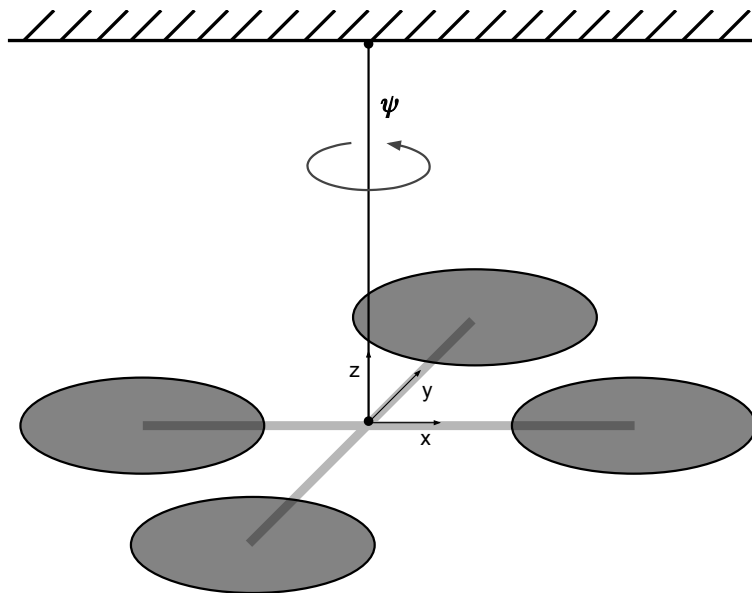


Figura 5.12: Esquemático do experimento de caracterização da dinâmica rotacional do rumo (*yaw*).

do PD foram modificados durante o experimento para avaliar o desempenho em malha fechada. No trecho 1 ($0 < t < 30$) tem-se $K_P^\psi = 0,17$, $K_D^\psi = 0,1$, no trecho 2 ($30 \leq t < 60$) tem-se $K_P^\psi = 0,17$, $K_D^\psi = 0,16$ e por fim no trecho 3 ($60 \leq t$) tem-se

$$K_P^\psi = 0,25, K_D^\psi = 0,16.$$

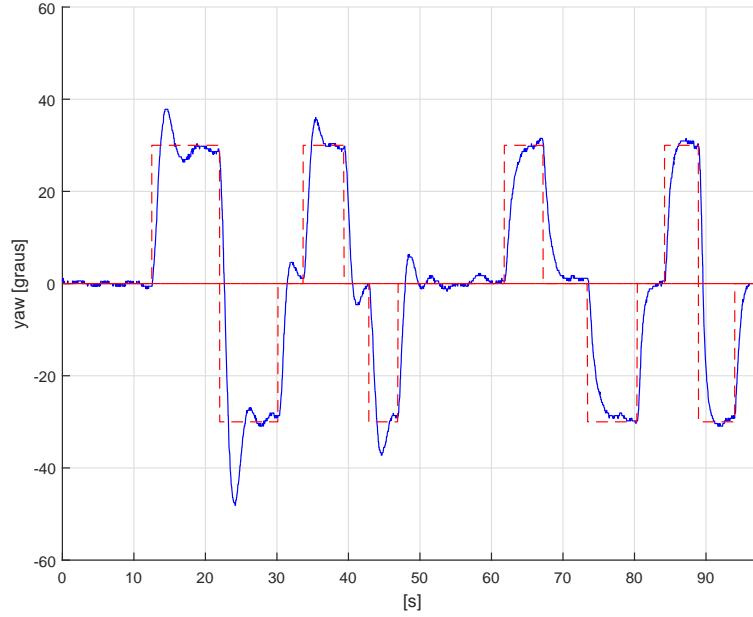


Figura 5.13: Experimento de caracterização da dinâmica de orientação. Ângulo de *pitch* θ (azul) e correspondente referência θ_r (vermelho tracejado), onda quadrada com amplitude de 10° .

5.5.3 Ensaios de Altitude: z

Para o ensaio desta seção foram utilizados os controladores de orientação e rumo propostos nas seções anteriores, porém no controle de orientação a ação integral não apresentou desempenho satisfatório, impossibilitando o experimento de controle de altitude em um ambiente de testes com espaços físicos limitados. Portanto a parcela integral do PID de orientação foi removida ($K_I^q = 0_{2 \times 2}$), no entanto os demais ganhos foram mantidos. Para manter o posicionamento do quadricóptero no centro do local de testes (regulação das posições x e y) foi utilizado o controle de posição descrito na Seção 3.4.1, porém com parcela antecipativa nula, consistindo em um PD sem realimentação de velocidade com constante $\tau_p = 0,9s$ e ganhos

$$K_P^q = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}, K_D^q = \begin{bmatrix} 0,15 & 0 \\ 0 & 0,15 \end{bmatrix},$$

dado pela equação

$$q_r = K_P^p p_e + K_D^p \hat{p}_e. \quad (5.10)$$

O controle de altitude consiste em um controlador PD, entretanto é somada uma parcela variante no tempo fornecida por um operador humano para garantir uma

maior segurança no ensaio preliminar. O controlador é descrito por

$$F_z = K_P^z z_e + K_D^z \dot{z}_e + u_h(t), \quad (5.11)$$

sendo $K_P^z = 0_{2 \times 2}$, $K_D^z = 0_{2 \times 2}$, $\tau_z = 0$ e $u_h(t)$ a parcela fornecida pelo operador.

Na Figura 5.14 e Figura 5.15 pode-se observar uma oscilação do veículo acima da origem do sistema de coordenadas, além de alguns picos espúrios correspondentes a falhas momentâneas do estimador de posição na detecção dos marcadores coloridos do quadricóptero. O sinal de controle fornecido pela malha de posição observado

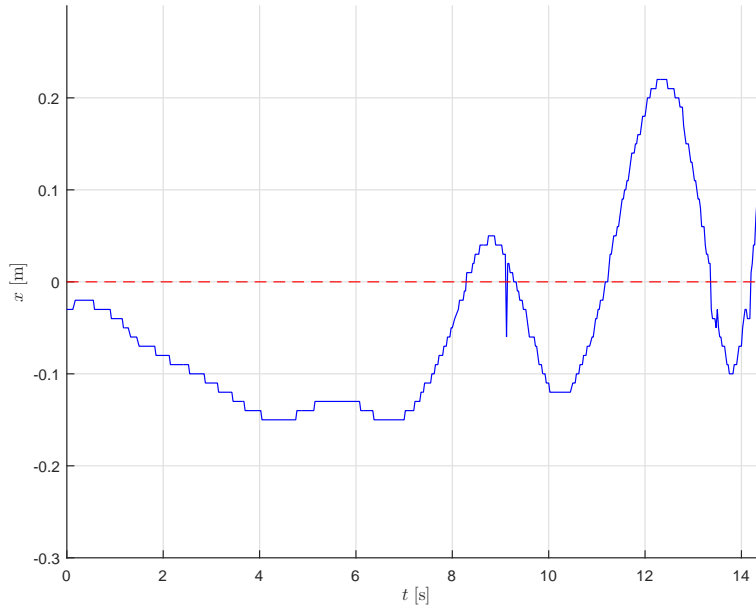


Figura 5.14: Experimento de altitude, posição x (azul) e correspondente referência x_r (vermelho tracejado). Detalhe em $t \approx 9$ correspondente a falha na detecção do marcador colorido.

em vermelho na Figura 5.16 e Figura 5.17 apresenta picos em determinados instantes, provenientes das perturbações presentes nos sinais de posição x e y , devido a uma perda momentânea da identificação do marcador colorido fixado no veículo.

Durante o voo o quadricóptero sofre uma perda brusca de altitude que pode ser observada na Figura 5.18 devido a uma má sintonia dos ganhos do controlador de altitude. O aspecto geral do voo pode ser observado na Figura 5.19 e para facilitar a visualização os sinais da posição tiveram os picos espúrios suavizados por um filtro mediana de 3ª ordem.

5.6 Experimentos de Voo

Para o experimento de voo sem a limitação de cabos foi utilizado o quadricóptero com proteção de rotor descrito na Seção 5.1.2. Foram executados experimentos de

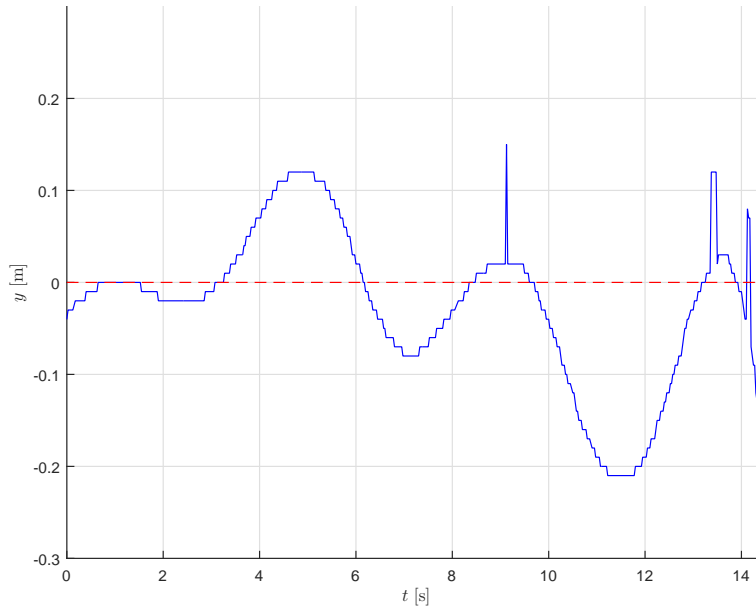


Figura 5.15: Experimento de altitude, posição y (azul) e correspondente referência y_r (vermelho tracejado). Detalhe em $t \approx 9$ e $t \approx 14$ correspondente a falha na detecção do marcador colorido.

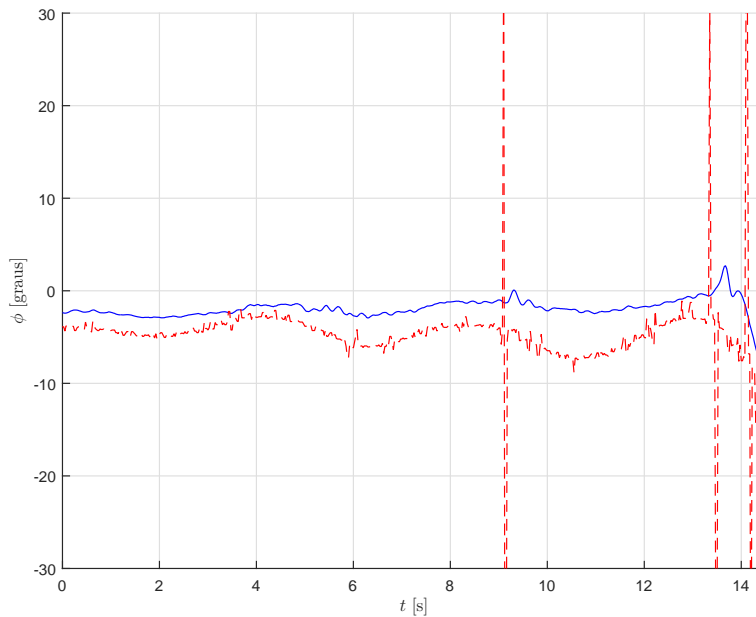


Figura 5.16: Experimento de altitude, ângulo de *roll* ϕ (azul) e correspondente referência ϕ_r (vermelho tracejado). Detalhe em $t \approx 9$ e $t \approx 14$ correspondente a falha na detecção do marcador colorido.

regulação e rastreamento de rumo. Para auxiliar nos testes foi utilizado um *joystick* com capacidade de atuar nos sinais de F_z , ϕ_r e θ_r , dependendo do experimento proposto.

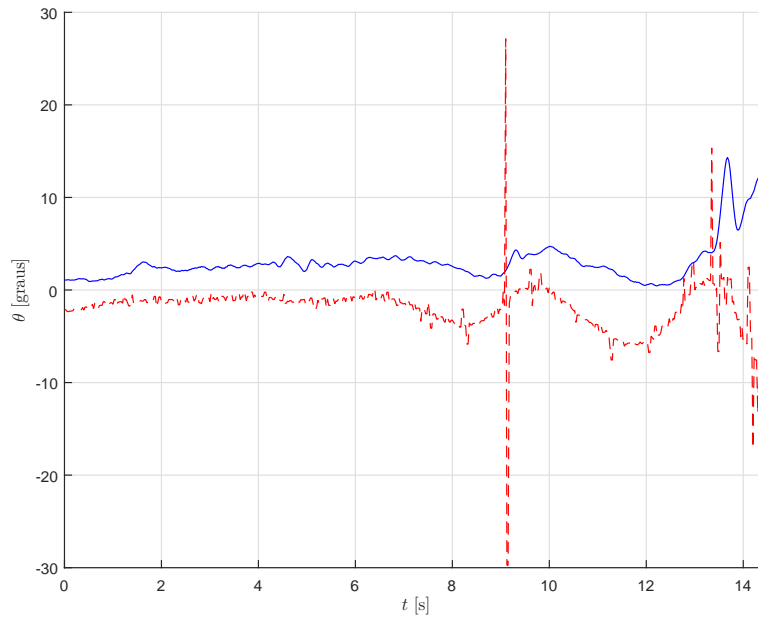


Figura 5.17: Experimento de altitude, ângulo de *pitch* θ (azul) e correspondente referência θ_r (vermelho tracejado).

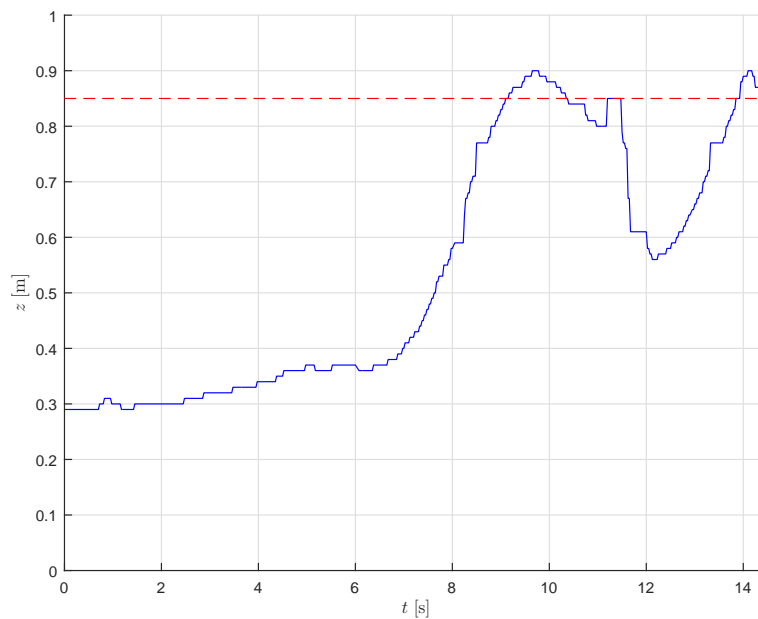


Figura 5.18: Experimento de altitude, posição z (azul) e correspondente referência z_r (vermelho tracejado).

5.6.1 Regulação de Rumo

No experimento de regulação de rumo o operador controla manualmente por meio do *joystick* a posição x , y e z por meio dos sinais de controle F_z , ϕ_r e θ_r . A orientação do quadricóptero é controlada por um PD com ganhos $K_p^q = 2$ e $K_d^q = 0,5$. O rumo é controlado por um PD com ganhos $K_p^\psi = 1$ e $K_d^\psi = 0,3$ e referência constante (rumo regulado). Na Figura 5.20 pode-se observar o sinal de posição x , o ângulo θ (em azul), o respectivo valor médio (em verde) e o ângulo de referência θ_r (em vermelho)

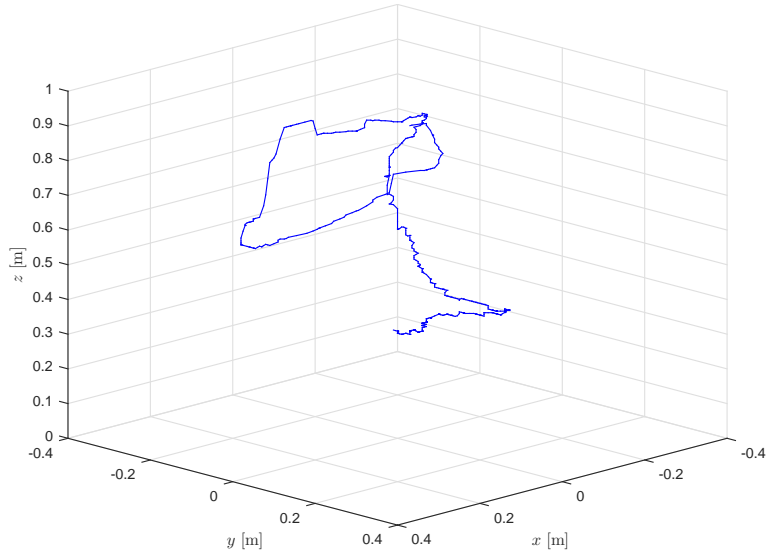


Figura 5.19: Experimento de altitude, trajetória experimental x , y e z .

do quadricóptero. Na Figura 5.21 pode-se observar o sinal de posição y , o ângulo

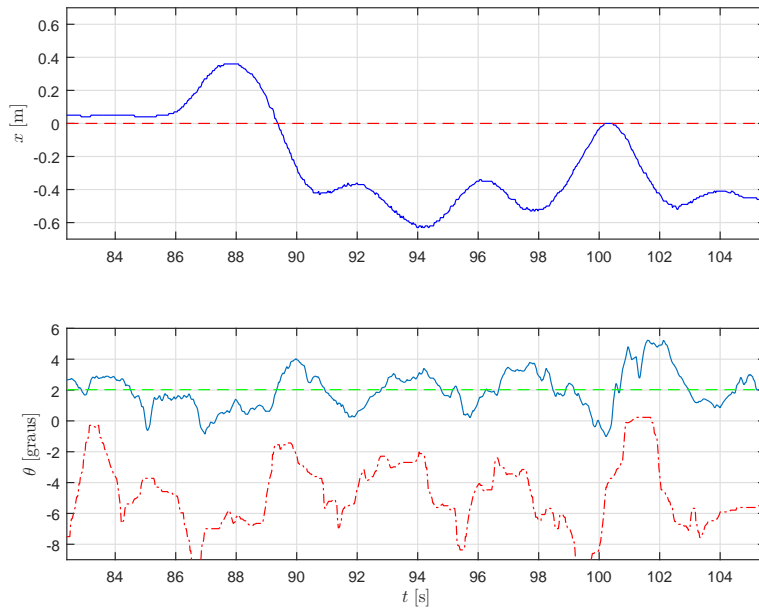


Figura 5.20: Experimento de regulação de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente e com controle de orientação PD. Sinais de posição x (azul) e de referência x_r (vermelho tracejado). Ângulo θ (azul) e respectivo valor médio (em verde tracejado) e controle θ_r (vermelho traço ponto).

ϕ (em azul), o respectivo valor médio (em verde) e o ângulo de referência ϕ_r (em vermelho). Na Figura 5.22 pode-se observar o sinal de rumo ψ e o sinal de controle correspondente M_z . Nota-se que ocorre a devida regulação, que é o objetivo deste ensaio. Na Figura 5.23 pode-se observar a altura z (em azul) e o *offset* do sensor ultrassônico de altura (em verde), além do sinal de controle correspondente F_z . O produto $F_z k_h$, sendo k_h definido em 4.2, corresponde a uma melhor aproximação da força vertical efetivamente atuante na altura do quadricóptero, uma vez que considera

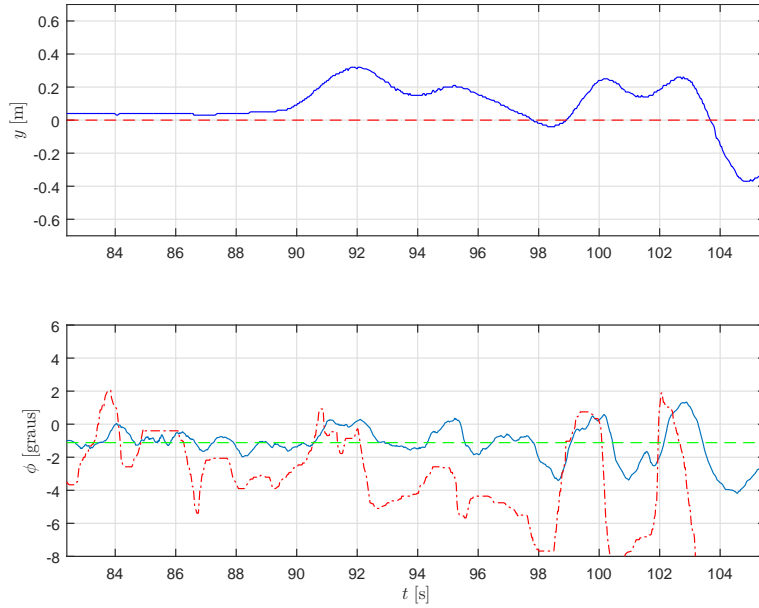


Figura 5.21: Experimento de regulação de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente e com controle de orientação PD. Sinais de posição y (azul) e de referência y_r (vermelho tracejado). Ângulo ϕ (azul), respectivo valor médio (em verde tracejado) e controle ϕ_r (vermelho traço ponto).

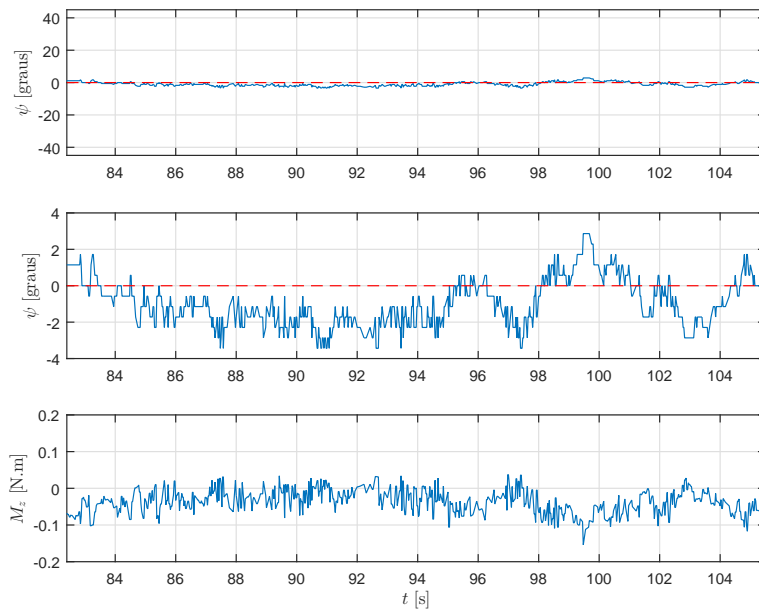


Figura 5.22: Experimento de regulação de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente e com controle de orientação PD. Sinais de rumo ψ (azul), referência ψ_r (vermelho tracejado). Controle M_z (azul).

os ângulos de orientação.

Observação do Efeito Solo

Os pontos marcados na Figura 5.23 em z e F_z são pares correspondentes a instantes de velocidade vertical praticamente nula, portanto a força vertical nestes instantes correspondem ao peso do quadricóptero. Neste ensaio não há variação de

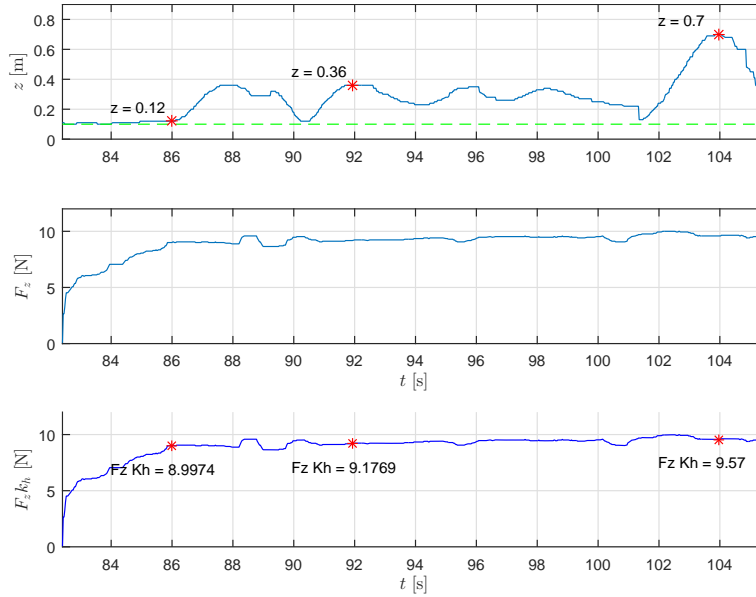


Figura 5.23: Experimento de regulação de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente e com controle de orientação PD. Sinais de altura z (azul) e do *offset* do sensor ultrassônico de altitude (verde tracejado). Controle F_z (azul) e produto $F_z k_h$ (azul).

massa durante o voo. O aumento da força necessária para manter o quadricóptero pairado diante do aumento da altura, corresponde a uma evidência do *Efeito Solo*.

5.6.2 Rastreamento de Rumo

Novamente o operador controla manualmente por meio de um *joystick* a posição (x , y e z), porém com o rumo controlado por um PD com referência senoidal.

No experimento de regulação de rumo o operador controla manualmente por meio do *joystick* a posição x , y e z por meio dos sinais de controle F_z , ϕ_r e θ_r . A orientação do quadricóptero é controlada por um PD com ganhos $K_p^q = 2$ e $K_d^q = 0,5$. O rumo é controlado por um PD com ganhos $K_p^\psi = 1$ e $K_d^\psi = 0,3$. Entretanto a referência é senoidal dada por $\psi_r = 10\text{sen}(2\pi 0,15t)$. Na Figura 5.24 pode-se observar o sinal de posição x e o ângulo θ do quadricóptero, enquanto na Figura 5.25 pode-se observar o sinal de posição y e o ângulo ϕ do quadricóptero. Na Figura 5.26 pode-se observar a altura z (em azul) e o *offset* do sensor ultrassônico de altura (em verde), o sinal de controle correspondente F_z e $F_z k_h$.

Na Figura 5.27, observa-se o devido rastreamento do ângulo de rumo ψ com referência senoidal, ainda que na presença de perturbações provenientes das variações nos ângulos de orientação e da altura.

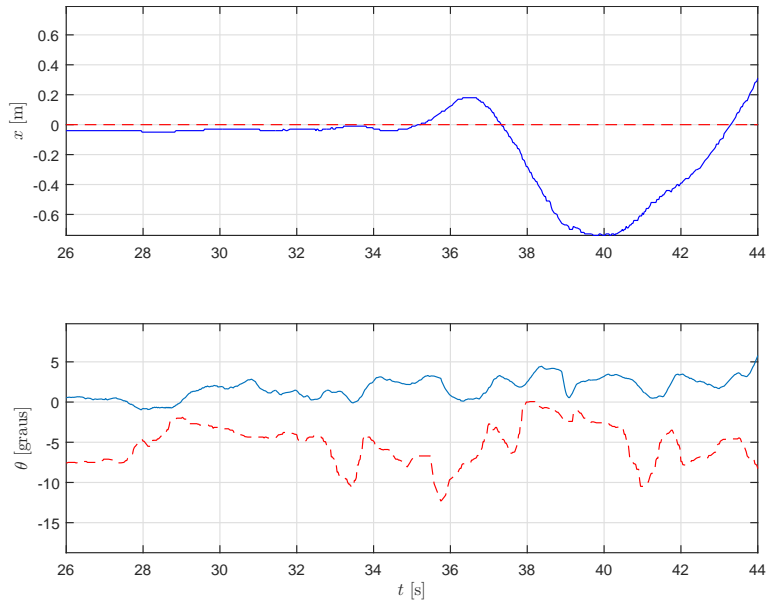


Figura 5.24: Experimento de rastreamento de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente pelo operador e com controle de orientação pelo PD interno. Sinais de posição x (azul) e referência x_r (vermelho tracejado). Ângulo θ (azul) e referência θ_r (vermelho tracejado).

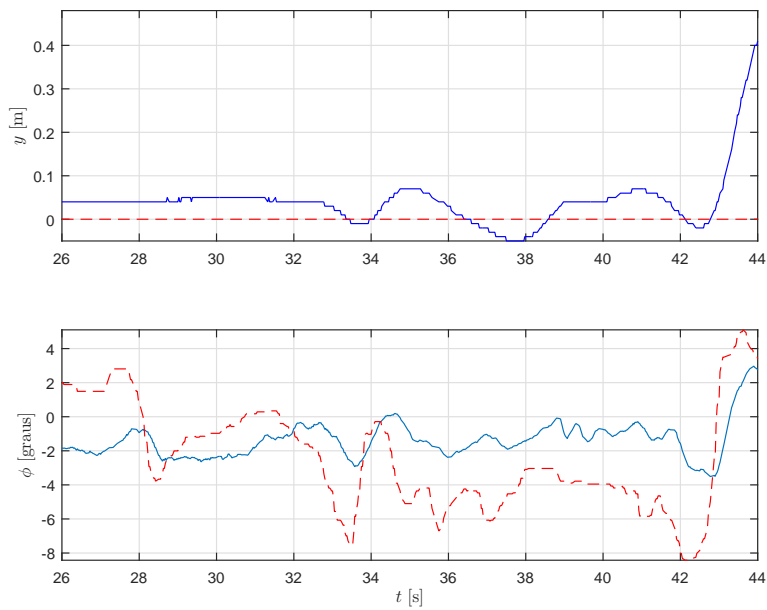


Figura 5.25: Experimento de rastreamento de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente pelo operador e com controle de orientação pelo PD interno. Sinais de posição y (azul) e referência y_r (vermelho tracejado). Ângulo ϕ (azul) e referência ϕ_r (vermelho tracejado).

5.7 Conclusão

Neste capítulo, foram detalhados os componentes do aparato experimental utilizado neste trabalho. O *hardware* embarcado e da estação em solo foram especificados com relação as características técnicas. Os algoritmos de estimação de orientação e

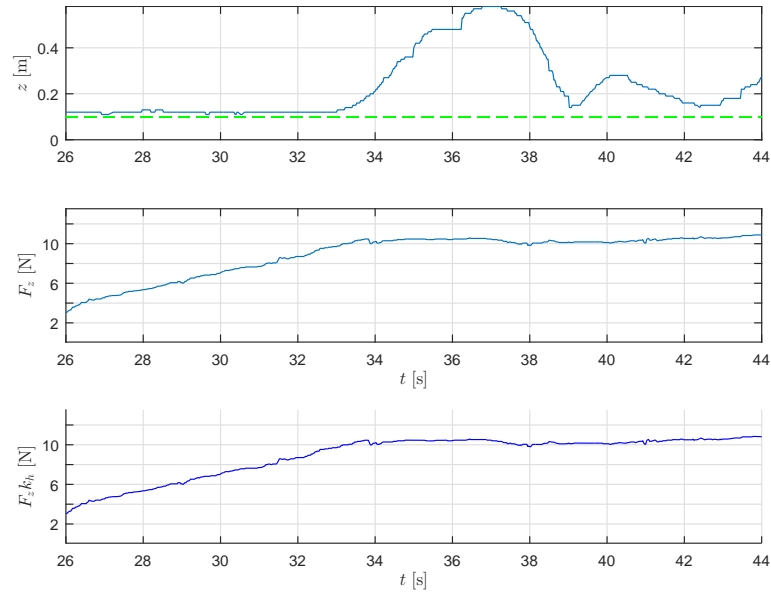


Figura 5.26: Experimento de rastreamento de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente pelo operador e com controle de orientação pelo PD interno. Sinais de posição z (azul) e *offset* do sensor ultrassônico (verde tracejado). Controle F_z (azul) e produto $F_z k_h$ (azul).

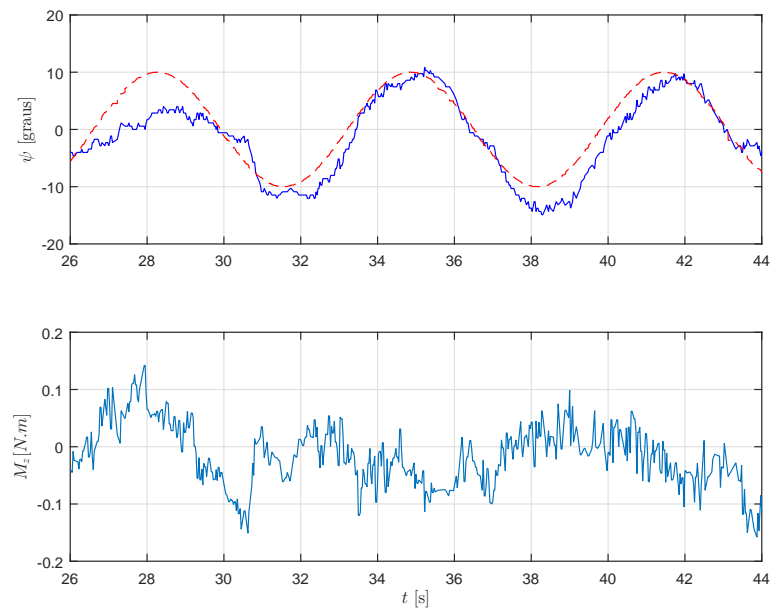


Figura 5.27: Experimento de rastreamento de rumo (ψ) com posição (x , y e z) controlada manualmente pelo operador e com controle de orientação pelo PD interno. Sinais de rumo ψ (azul) e referência ψ_r (vermelho tracejado). Controle M_z (azul).

de posição por fusão de sensores e visão computacional foram apresentados, além da interface gráfica elaborada para a execução dos experimentos com o quadrirrotor.

Foram executados ensaios experimentais de rastreamento de *roll* e *pitch*, além de regulação e rastreamento de rumo. Os dados dos ensaios foram analisados, assim como os parâmetros de projeto dos respectivos controladores. Pôde-se observar a presença do *Efeito Solo* na análise dos sinais de altura e empuxo vertical. Por fim um

experimento de voo pairado foi executado, atestando a validade dos controladores de orientação e posição em uma estrutura aninhada, além da funcionalidade do sistema experimental proposto neste trabalho.

Capítulo 6

Considerações Finais e Discussões

Neste trabalho, o modelo de um quadricóptero baseado no formalismo de Newton-Euler foi rigorosamente apresentado, destacando todas as hipóteses e aproximações usualmente encontradas na literatura de quadricópteros. Além disso, a modelagem baseada no formalismo de Euler-Lagrange também foi conduzida resultando em um algoritmo desenvolvido na plataforma *Matlab*, que gera o modelo do quadricóptero por meio das equações de Euler-Lagrange considerando as aproximações necessárias. Partindo do modelo não-linear mais geral, foram obtidos modelos aproximados tradicionalmente utilizados no projeto de controladores. Tais aproximações foram avaliadas por simulações numéricas apresentando uma discrepância não significativa quando em malha fechada.

Como o desenvolvimento da modelagem de quadricópteros encontra-se na literatura de forma resumida e pouco clara, esta Dissertação contribuiu para a comunidade reunindo as principais etapas, hipóteses e aproximações ao longo da modelagem. Pode-se dizer também que a modelagem apresentada serve como ponto de partida para o desenvolvimento de modelos para casos em que, por exemplo, não há um alto grau de simetria ou há mais rotores ou efeitos aerodinâmicos relevantes. Ou seja, uma vez estando claro as aproximações e as hipóteses consideradas no desenvolvimento do modelo, torna-se possível determinar os limites de operação válidos para o modelo em questão e torna-se mais fácil uma eventual generalização da modelagem para casos mais complexos.

Foi projetado e construído um quadricóptero de pequeno porte no intuito de verificar e validar os algoritmos de controle propostos neste presente trabalho. A eletrônica embarcada foi desenvolvida baseada em um *kit* de desenvolvimento da *Texas Instruments*, que inclui microcontrolador e sensores inerciais. Além disso, uma interface de operação em tempo real foi implementada utilizando o pacote *Labview* para que fosse possível o ajuste dos ganhos do controlador, a visualização de sinais e o armazenamento de dados em tempo real. Um sistema de posicionamento baseado em visão computacional foi implementado com uma câmera comercial co-

num fixada acima do veículo que obtém a posição do quadricóptero por meio de marcadores coloridos fixados no veículo. Foi possível também obter uma medida do rumo do veículo utilizando esses marcadores, além do magnetômetro interno que não foi utilizado. Os dados de posição e orientação foram obtidos com a fusão dos sinais provenientes do sistema de visão e dos sensores embarcados (giroscópios e acelerômetros).

O problema de posicionamento e orientação do quadricóptero foi abordado usando uma estrutura aninhada de malha interna de orientação e de malha externa de posição, com controladores tradicionais. A topologia aninhada é bastante intuitiva e apresenta grande praticidade no que se refere a sintonia de ganhos do controlador. Primeiramente assumindo conhecimento perfeito da planta um controlador PD convencional com ação antecipativa e linearização por realimentação foi proposto como controle da malha externa, obtendo um desempenho satisfatório como o esperado, entretanto na prática a precisão dos sinais necessária para o perfeito cancelamento se mostra quase sempre inviável. Um segundo esquema de controle por realimentação de estados é projetado utilizando a planta linearizada em torno de um ponto de operação, apresentando desempenho satisfatório apenas para manobras próximas ao voo pairado.

O problema de pouso em uma plataforma que oscila verticalmente foi abordado levando em conta o efeito aerodinâmico de aumento do ganho nos atuadores quando próximo a uma superfície, denominado de *Efeito Solo*. Também foi considerado a perturbação proveniente da variação de massa que ocorre durante a captura/liberação de uma carga. Para realizar o pouso foi definida uma trajetória de aproximação da plataforma que foi utilizada como sinal de referência para o controle de rastreamento. Inicialmente, foi utilizado um controlador proporcional-derivativo (PD) com ganhos variantes no tempo. Os ganhos são obtidos por meio de um Estimador por Mínimos Quadrados Normalizado (NLS) que estima a massa do quadricóptero e um parâmetro associado ao *Efeito Solo*. Em seguida, inspirado nos resultados de [89], foi projetado um esquema de controle composto por uma parcela adaptativa e uma parcela robusta baseada em estrutura variável (sinal chaveado). Buscando suavizar a lei de controle, a parcela robusta foi substituída por uma lei de controle suave por modos deslizantes (*SSC*). Verificou-se na prática que a parcela adaptativa promove uma redução na magnitude da ação de controle robusta. Versões dos controladores que utilizam apenas realimentação de saída (apenas a altitude) foram obtidas utilizando um derivador aproximado (“derivada suja”) para estimar a taxa de variação temporal da altitude (velocidade). De forma geral uma boa robustez com respeito a variação de massa e *Efeito Solo* no desempenho em malha fechada para rastreamento da trajetória de aproximação da plataforma foi obtida. O controlador PD baseado no estimador NLS (PD-NLS) apresentou resul-

tados satisfatórios, porém com transitório de saída mais lento quando comparado ao SSC.

Experimentos preliminares para avaliação da bancada desenvolvida foram realizados. Inicialmente, fixando os graus de liberdade do quadricóptero para deixar livre apenas os graus de liberdade associados aos ângulos de *pitch* e *roll*, os ganhos do controlador PD para a orientação (*pitch* e *roll*) foram sintonizados, separadamente. Utilizando esses controladores PD para a orientação (*pitch* e *roll*), experimentos de regulação e rastreamento do rumo foram conduzidos com um operador controlando remotamente a posição do veículo (x, y e z) por meio de um *joystick*. Em seguida, adicionando-se os controladores PD para a posição (x, y) e para a altitude (z), um voo foi realizado. Verificou-se que devido ao espaço reduzido da bancada uma boa sintonia dos ganhos dos controladores não pode ser realizada e foi deixada para investigações futuras. Utilizando controladores PD para o rumo e para a orientação (*pitch* e *roll*) e controlando remotamente a posição do quadricóptero, pôde-se verificar por meio dos dados experimentais a evidência da presença do *Efeito Solo*.

6.1 Propostas para Trabalhos Futuros

Com o intuito de aprimorar a pesquisa desenvolvida, a seguir serão apresentados tópicos para possíveis contribuições futuras.

- **Modelagem e Identificação:** no Capítulo 2 foram abordados os modelos geralmente utilizados na literatura de quadricópteros, porém pouco foi explorada a identificação de parâmetros. Um ponto levantado que não pôde ser explorado nesta tese, foi o estimador de parâmetros em tempo de voo, inspirado nos resultados obtidos com o estimador por Mínimos Quadrados Normalizado utilizado no Capítulo 4. Portanto, pode-se apresentar procedimentos de ensaios para identificação de parâmetros do quadricóptero, considerando uma possível identificação durante o voo. Além disso, é interessante avaliar a possibilidade de utilizar *quaternions* no lugar da representação por ângulos de Euler no sentido de contornar singularidades no caso de manobras acrobáticas.
- **Controle:** estudar técnicas de controle robusto para a malha interna de orientação e avaliar a robustez em relação a incertezas paramétricas do controlador baseado em Linearização por Realimentação. Além disso, considerar a possibilidade de topologias de controle não baseadas em malhas aninhadas. No Capítulo 3 técnicas de controle PD para a orientação e posição foram abordadas, porém outros algoritmos mais sofisticadas podem ser empregados como controladores robustos baseados em *backstepping*.

- **Estimador por Mínimos Quadrados Normalizado (NLS):** conforme discutido na Observação 4, o estimador para um parâmetro precisa ser mais explorado e comparado com a adaptação obtida no esquema de Controle Adaptativo Robusto de [89].
- **Estimadores de Estado:** No Capítulo 4 foram empregadas estruturas de controle baseadas na hipótese de estarem disponíveis os sinais de posição e velocidade, tanto da plataforma de pouso quanto do quadricóptero, porém na prática há a necessidade de implementação de um observador. Portanto, outro tema de pesquisa interessante seria o uso de filtragem de Kalman para estimar os estados do modelo dinâmico do veículo e da plataforma. Comparações com observadores (determinísticos) tradicionais e com derivadores aproximados para obtenção das velocidades são propostas, além da fusão de dados de múltiplos sensores.
- **Movimento Vertical da Plataforma:** propor um movimento mais rico para a plataforma, com por exemplo, uma composição de diversos sinais senoidais.
- **Obtenção de Resultados Experimentais mais Conclusivos:** testes experimentais em um ambiente laboratorial mais amplo para avaliar as estratégias de controle obtidas neste trabalho podem ser executados. No Capítulo 5 foi implementado um sistema de localização dos marcadores coloridos fixados no quadricóptero. Pode-se aprimorar o sistema desenvolvido principalmente aumentando a taxa de atualização dos quadros da imagem e a resolução, além de incluir uma câmera embarcada para posicionamento.
- **Aplicações Diversas:** pode-se utilizar a bancada desenvolvida neste trabalho para aplicações de captura/liberação de objetos visando a construção de estruturas, o controle híbrido de posicionamento e força para inspeção de superfícies e a inclusão de mais agentes para realizar controle de formação.

Referências Bibliográficas

- [1] POUNDS, P., MAHONY, R., CORKE, P. “Modelling and control of a large quadrotor robot”, *Control Engineering Practice*, v. 18, n. 7, pp. 691–699, 2010. ISSN: (09670661). doi: 10.1016/j.conengprac.2010.02.008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.conengprac.2010.02.008>>.
- [2] POUNDS, P., MAHONY, R., HYNES, P., et al. “Design of a four-rotor aerial robot”. In: *Proceedings of the 2002 Australasian Conference on Robotics and Automation (ACRA 2002)*, pp. 145–150. Australian Robotics & Automation Association, 2002.
- [3] CUTLER, M. J. *Design and Control of an Autonomous Variable-Pitch Quadrotor Helicopter*. Master of science in aeronautics and astronautics, Massachusetts Institute of Technology, 2012.
- [4] CUTLER, M., URE, N.-K., MICHINI, B., et al. “Comparison of Fixed and Variable Pitch Actuators for Agile Quadrotors”. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences, American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2011. doi: doi:10.2514/6.2011-6406. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.2514/6.2011-6406>>.
- [5] “Empresa Parrot”. <<http://ardrone2.parrot.com/>>. Acessado: 2016-03-17.
- [6] MAHONY, R., KUMAR, V., CORKE, P. “Multirotor Aerial Vehicles: Modeling, Estimation, and Control of Quadrotor”, *IEEE Robotics & Automation Magazine*, v. 19, n. 3, pp. 20–32, 2012. ISSN: 1070-9932. doi: 10.1109/MRA.2012.2206474.
- [7] BOUABDALLAH, S., MURRIERI, P., SIEGWART, R. “Design and control of an indoor micro quadrotor”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004*, v. 5, n. April, pp. 4393–4398, 2004. ISSN: 1050-4729. doi: 10.1109/ROBOT.2004.1302409.

- [8] HOFIANN, G., RAJNARQAN, D. G., WASLANDER, S. L., et al. “The Stanford Testbed of Autonomous Rotorcraft for Multi Agent Control (STAR-MAC)”, *IEEE Digital Avionics Systems Conference (DASC 04)*, pp. 1–10, 2004.
- [9] POUNDS, P., MAHONY, R., CORKE, P. “Modelling and control of a large quadrotor robot”, *Control Engineering Practice*, v. 18, n. 7, pp. 691–699, 2010. ISSN: 09670661. doi: 10.1016/j.conengprac.2010.02.008. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.conengprac.2010.02.008>>.
- [10] “Flying Machine Arena, ETH Zurich”. <<http://flyingmachinearena.org>>. Acessado: 2015-12-27.
- [11] BAIOCCHI, V., DOMINICI, D., MILONE, M. V., et al. “Computational Science and Its Applications – ICCSA 2013: 13th International Conference, Ho Chi Minh City, Vietnam, June 24-27, 2013, Proceedings, Part IV”. cap. Development of a Software to Plan UAVs Stereoscopic Flight: An Application on Post Earthquake Scenario in L’Aquila City, pp. 150–165, Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 978-3-642-39649-6. doi: 10.1007/978-3-642-39649-6_11. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-39649-6_11>.
- [12] BAIOCCHI, V. “Development of a software to optimize and plan the acquisitions from UAV and a first application in a post-seismic environment”, *European Journal of Remote Sensing*, pp. 477–496, 2014. ISSN: 22797254. doi: 10.5721/EuJRS20144727. Disponível em: <<http://www.aitjournal.com/articleView.aspx?ID=907>>.
- [13] DARIVIANAKIS, G., ALEXIS, K., BURRI, M., et al. “Hybrid Predictive Control for Aerial Robotic Physical Interaction towards Inspection Operations”, pp. 53–58, 2014. doi: 10.1109/ICRA.2014.6906589.
- [14] NIKOLIC, J., BURRI, M., REHDER, J., et al. “A UAV system for inspection of industrial facilities”, *IEEE Aerospace Conference Proceedings*, 2013. ISSN: 1095323X. doi: 10.1109/AERO.2013.6496959.
- [15] SHIN, J.-U., KIM, D., KIM, J.-H., et al. “Micro-aerial vehicle type wall-climbing robot mechanism for structural health monitoring”, *Spie*, v. 8692, pp. 86921B, 2013. doi: 10.1117/12.2010338. Disponível em: <<http://proceedings.spiedigitallibrary.org/proceeding.aspx?doi=10.1117/12.2010338>>.

- [16] YOUNG, L. “Design Opportunities and Challenges in the Development of Vertical Lift Planetary Aerial Vehicles”, pp. 1–23, 2000. Disponível em: <<http://oai.dtic.mil/oai/oai?verb=getRecord{&}metadataPrefix=html{&}identifier=ADA480537>>.
- [17] YOUNG, L. A., AIKEN, E. W., GULICK, V., et al. “Rotorcraft as Mars Scouts”, *IEEE Aerospace Conference Proceedings*, v. 1, pp. 367–378, 2002. ISSN: 1095323X. doi: 10.1109/AERO.2002.1036856.
- [18] “Ambulance drone could save lives”. 2016. Disponível em: <<http://go.galegroup.com/ps/i.do?id=GALE%7CA419410224&v=2.1&u=capes&it=r&p=AONE&sw=w&asid=c243f1ec1f8b9642fca2fd206cd224f8>>.
- [19] AMENYO, J.-T., PHELPS, D., OLADIPO, O., et al. “MedizDroids Project: Ultra-Low Cost, Low-Altitude, Affordable and Sustainable UAV Multi-copter Drones For Mosquito Vector Control in Malaria Disease Management”, *IEEE 2014 Global Humanitarian Technology Conference*, pp. 590 – 597, 2014. doi: 10.1109/GHTC.2014.6970343.
- [20] VARDHAN, P. D. P. R. H., DHEEPAK, S., ADITYA, P. T., et al. “Development of Automated Aerial Pesticide Sprayer”, *International Journal of Research in Engineering and Technology*, v. 03, n. 04, pp. 856–861, 2014.
- [21] SOLOVIOV, O. *Geospatial assessment of pest-induced forest damage through the use of UVA-based NIR imaging and gi-technology*. Master of science in geospatial technologies, NOVA Information Management School, 2006.
- [22] VALENTE, J., SANZ, D., DEL CERRO, J., et al. “Near-optimal coverage trajectories for image mosaicing using a mini quad-rotor over irregular-shaped fields”, *Precision Agriculture*, v. 14, n. 1, pp. 115–132, 2013. ISSN: 13852256. doi: 10.1007/s11119-012-9287-0.
- [23] VALENTE, J., CERRO, J. D., BARRIENTOS, A., et al. “Aerial coverage optimization in precision agriculture management: A musical harmony inspired approach”, *Computers and Electronics in Agriculture*, v. 99, pp. 153–159, 2013. ISSN: 01681699. doi: 10.1016/j.compag.2013.09.008.
- [24] “BioCarbon Engineering”. <<http://www.biocarbonengineering.com>>. Acesso: 2016-15-03.
- [25] ULBRICH, P., KAPITZA, R., HARKORT, C., et al. “I4Copter”, *Proceedings of the 2011 ACM Symposium on Applied Computing - SAC '11*, p. 380, 2011. doi: 10.1145/1982185.1982267. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1982185.1982267>>.

- [26] GAGEIK, N., REDAH, A., MONTENEGRO, S. “Avionic Control Systems for Education and Development”, *Proceedings of INTED2012 Conference. 5th-7th March 2012, Valencia, Spain.*, pp. 935–942, 2012.
- [27] HEHN, M., D’ANDREA, R. “A flying inverted pendulum”. In: *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 763–770, 2011. ISBN: 9781612843865. doi: 10.1109/ICRA.2011.5980244.
- [28] SREENATH, K., LEE, T., KUMAR, V. “Geometric control and differential flatness of a quadrotor UAV with a cable-suspended load”, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, v. 1243000, pp. 2269–2274, 2013. ISSN: 01912216. doi: 10.1109/CDC.2013.6760219.
- [29] PALUNKO, I., FIERRO, R., CRUZ, P. “Trajectory generation for swing-free maneuvers of a quadrotor with suspended payload: A dynamic programming approach”, *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2691–2697, 2012. ISSN: 10504729. doi: 10.1109/ICRA.2012.6225213.
- [30] JIMENEZ-CANO, A. E., MARTIN, J., HEREDIA, G., et al. “Control of an aerial robot with multi-link arm for assembly tasks”, *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 4916–4921, 2013. ISSN: 10504729. doi: 10.1109/ICRA.2013.6631279.
- [31] CATUNDA, P., VASCONCELLOS, C. *Projeto, Construção e Controle de um Protótipo de um Quadricóptero*. Projeto de graduação em engenharia eletrônica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Eletrônica, 2013.
- [32] GOMES, L. L., LEAL, L. P. *Controle de um Quadricóptero por Servovisão*. Projeto de graduação em engenharia elétrica - ênfase sistemas eletrônicos, Universidade Estadual do Rio de Janeiro, 2014.
- [33] MONTEIRO, J. *Modelagem e Controle de um Veículo Quadricóptero*. Projeto de graduação em engenharia de controle e automação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, 2015.
- [34] BOUABDALLAH, S., SIEGWART, R. “Full control of a quadrotor”, *2007 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, v. 1, n. 1, pp. 153–158, 2007. doi: 10.1109/IROS.2007.4399042.
- [35] HUANG, H., HOFFMANN, G. M., WASLANDER, S. L., et al. “Aerodynamics and control of autonomous quadrotor helicopters in aggressive

- maneuvering”, *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 3277–3282, 2009. ISSN: 10504729. doi: 10.1109/ROBOT.2009.5152561.
- [36] SELFRIDGE, J. M., TAO, G. “A multivariable adaptive controller for a quadrotor with guaranteed matching conditions”, *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 26–31, 2014. ISSN: 07431619. doi: 10.1109/ACC.2014.6859355.
- [37] MARTIN, P., SALAÜN, E. “The true role of accelerometer feedback in quadrotor control”, *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1623–1629, 2010. ISSN: 10504729. doi: 10.1109/ROBOT.2010.5509980.
- [38] DE VRIES, E., SUBBARAO, K. “Backstepping based nested multi-loop control laws for a quadrotor”, *11th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV 2010*, , n. 3, pp. 1911–1916, 2010. doi: 10.1109/ICARCV.2010.5707890.
- [39] OMARI, S., HUA, M. D., DUCARD, G., et al. “Hardware and software architecture for nonlinear control of multirotor helicopters”, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, v. 18, n. 6, pp. 1724–1736, 2013. ISSN: 10834435. doi: 10.1109/TMECH.2013.2274558.
- [40] HAMEL, T., OSTROWSKI, J., MAHONY, R., et al. “Dynamic Modelling and Configuration Stabilization for an X4-Flyer”, *15th Triennial World Congress, Barcelona, Spain*, v. 1, n. 1, pp. 1294–1294, 2002. doi: 10.3182/20020721-6-ES-1901.00848. Disponível em: <http://www.nt.ntnu.no/users/skoge/prost/proceedings/ifac2002/data/content/02019/2019.pdf>.
- [41] LEE, T., LEOK, M., MCCLAMROCH, N. H. “Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3)”, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5420–5425, 2010. ISSN: 01912216. doi: 10.1109/CDC.2010.5717652.
- [42] MELLINGER, D., KUMAR, V. “Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors”, *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2520–2525, 2011. ISSN: 10504729. doi: 10.1109/ICRA.2011.5980409.
- [43] CUI, Y., INANC, T. “Controller design for small air vehicles - An overview and comparison”, *2013 International Conference on Unmanned Aircraft*

Systems, ICUAS 2013 - Conference Proceedings, , n. 1, pp. 621–627, 2013.
doi: 10.1109/ICUAS.2013.6564741.

- [44] SA, I., CORKE, P. “System identification, estimation and control for a cost effective open-source quadcopter”, *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2202–2209, 2012.
- [45] LI, J., LI, Y. “Dynamic analysis and PID control for a quadrotor”, *2011 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, pp. 573–578, 2011. ISSN: 2152-7431. doi: 10.1109/ICMA.2011.5985724.
- [46] BOUABDALLAH, S., NOTH, A., SIEGWART, R. “PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor”, *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) (IEEE Cat. No.04CH37566)*, v. 3, pp. 2451–2456, 2004. doi: 10.1109/IROS.2004.1389776.
- [47] HONG, Y., LIN, X., ZHUANG, Y. “Real-Time Pose Estimation and Motion Control for a Quadrotor UAV”, *Proceedings of the 11th World Congress on Intelligent Control and Automation Shenyang, China*, pp. 2370–2375, 2014.
- [48] ZUL AZFAR, A., HAZRY, D. “A simple approach on implementing IMU sensor fusion in PID controller for stabilizing quadrotor flight control”, *Proceedings - 2011 IEEE 7th International Colloquium on Signal Processing and Its Applications, CSPA 2011*, pp. 28–32, 2011. doi: 10.1109/CSPA.2011.5759837.
- [49] GUO, J., LIU, Y., TAO, G. “Multivariable MRAC with state feedback for output tracking”, *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 592–597, 2009. ISSN: 07431619. doi: 10.1109/ACC.2009.5160489.
- [50] NAGATY, A., SAEEDI, S., THIBAUT, C., et al. “Control and navigation framework for quadrotor helicopters”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, v. 70, n. 1-4, pp. 1–12, 2013. ISSN: 09210296. doi: 10.1007/s10846-012-9789-z.
- [51] DYDEK, Z. T., ANNASWAMY, A. M., LAVRETSKY, E. “Adaptive control of quadrotor UAVs: A design trade study with flight evaluations”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 21, n. 4, pp. 1400–1406, 2013. ISSN: 10636536. doi: 10.1109/TCST.2012.2200104.

- [52] DIERKS, T., JAGANNATHAN, S. “Output feedback control of a quadrotor UAV using neural networks”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 21, n. 1, pp. 50–66, 2010. ISSN: 10459227. doi: 10.1109/TNN.2009.2034145.
- [53] AWAN, A. U. “Output Feedback Dynamic Surface Controller for Quadrotor UAV with Actuator Dynamics”, *International Bhurban Conference on Applied Sciences & Technology*, pp. 97–102, 2014.
- [54] DIAO, C., XIAN, B., ZHAO, B. “An output feedback attitude tracking controller design for quadrotor unmanned aerial vehicles using quaternion”, *International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, pp. 3051–3056, 2013. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs/_all.jsp?arnumber=6696788>.
- [55] AKKINAPALLI, V. S., FALCON, G. P., HOLZAPFEL, F. “Attitude Control of a Multicopter using L 1 augmented Quaternion based Backstepping”, pp. 170–178, 2014.
- [56] MAHONY, R., BRASCH, A., CORKE, P., et al. “Adaptive depth estimation in image based visual servo control of dynamic systems.” *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5372–5378, 2005. doi: 10.1109/CDC.2005.1583016.
- [57] LEE, B.-Y., LEE, H.-I., TAHK, M.-J. “Analysis of adaptive control using on-line neural networks for a quadrotor UAV”, *2013 13th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2013)*, , n. Iccas, pp. 1840–1844, 2013. ISSN: 2093-7121. doi: 10.1109/ICCAS.2013.6704240. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=6704240>>.
- [58] AMEHO, Y., NIEL, F., DEFAY, F., et al. “Adaptive control for quadrotors”, *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 5396–5401, 2013. ISSN: 10504729. doi: 10.1109/ICRA.2013.6631351.
- [59] MADANI, T., BENALLEGUE, A. “Control of a Quadrotor Mini-Helicopter via Full State Backstepping Technique”, *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1515–1520, 2006. ISSN: 01912216. doi: 10.1109/CDC.2006.377548.
- [60] FANG, Z., GAO, W. “Adaptive integral backstepping control of a Micro-Quadrotor”, *Proceedings of the 2nd International Conference on Intel-*

ligent Control and Information Processing, ICICIP 2011, , n. PART 2, pp. 910–915, 2011. doi: 10.1109/ICICIP.2011.6008382.

- [61] AMIDI, O., KANADE, T., MILLER, R. “Vision-based autonomous helicopter research at Carnegie Mellon robotics institute (1991-1998)”, *Robust Vision for Vision-Based Control of Motion*, pp. 221–232, 1991.
- [62] HUTCHINSON, S. S., HAGER, G. G. D., CORKE, P. I. “A tutorial on visual servo control”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, v. 12, n. 5, pp. 651–670, 1996. ISSN: 1042296X. doi: 10.1109/70.538972.
- [63] ALTUG, E., OSTROWSKI, J., MAHONY, R. “Control of a quadrotor helicopter using visual feedback”, *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, v. 1, n. May, pp. 72–77, 2002. doi: 10.1109/ROBOT.2002.1013341.
- [64] HAMEL, T., MAHONY, R. “Visual servoing of an under-actuated dynamic rigid-body system: An image-based approach”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 18, n. 2, pp. 187–198, 2002. ISSN: 1042296X. doi: 10.1109/TRA.2002.999647.
- [65] CORKE, P. “An inertial and visual sensing system for a small autonomous helicopter”, *Journal of Robotic Systems*, v. 21, n. 2, pp. 43–51, 2004. ISSN: 0741-2223. doi: 10.1002/rob.10127.
- [66] LEE, D., RYAN, T., KIM, H. J. “Autonomous landing of a VTOL UAV on a moving platform using image-based visual servoing”, *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 971–976, 2012. ISSN: 10504729. doi: 10.1109/ICRA.2012.6224828.
- [67] MORI, T., SCHERER, S. “First results in detecting and avoiding frontal obstacles from a monocular camera for micro unmanned aerial vehicles”, *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1750–1757, 2013. ISSN: 10504729. doi: 10.1109/ICRA.2013.6630807.
- [68] FALLON, M. F., JOHANNSSON, H., LEONARD, J. J. “Efficient scene simulation for robust monte carlo localization using an RGB-D camera”, *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1663–1670, 2012. ISSN: 10504729. doi: 10.1109/ICRA.2012.6224951.
- [69] GRABE, V., BULTHOFF, H. H., GIORDANO, P. R. “On-board velocity estimation and closed-loop control of a quadrotor UAV based on optical flow”,

2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 491–497, 2012. ISSN: 1050-4729. doi: 10.1109/ICRA.2012.6225328. Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=6225328>>.

- [70] OSSA-GÓMEZ, C., MOARREF, M., RODRIGUES, L. “Design, construction and fly-by-wireless control of an autonomous Quadrotor Helicopter”, *4th Annual Caneus Fly-By-Wireless Workshop, FBW 11*, pp. 79–82, 2011. doi: 10.1109/FBW.2011.5965559.
- [71] LOU, L., XU, X., CAO, J., et al. “Sensor fusion-based attitude estimation using low-cost MEMS-IMU for mobile robot navigation”, *2011 6th IEEE Joint International Information Technology and Artificial Intelligence Conference*, v. 2, pp. 465–468, 2011. doi: 10.1109/ITAIC.2011.6030374.
- [72] MAHONY, R., HAMEL, T., PFLIMLIN, J. M. “Complementary filter design on the special orthogonal group $SO(3)$ ”, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, CDC-ECC '05*, v. 2005, n. 1, pp. 1477–1484, 2005. doi: 10.1109/CDC.2005.1582367.
- [73] ROBERTS, J., CORKE, P., BUSKEY, G. “Low-cost flight control system for a small autonomous helicopter”, *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.03CH37422)*, v. 1, pp. 546–551 vol.1, 2003. ISSN: 1050-4729. doi: 10.1109/ROBOT.2003.1241651.
- [74] BONNABEL, S., MARTIN, P., ROUCHON, P. “Non-linear symmetry-preserving observers on lie groups”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 54, n. 7, pp. 1709–1713, 2009. ISSN: 00189286. doi: 10.1109/TAC.2009.2020646.
- [75] HOFFMANN, G. M., HUANG, H., WASLANDER, S. L., et al. “Precision flight control for a multi-vehicle quadrotor helicopter testbed”, *Control Engineering Practice*, v. 19, n. 9, pp. 1023–1036, 2011. ISSN: 09670661. doi: 10.1016/j.conengprac.2011.04.005. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.conengprac.2011.04.005>>.
- [76] HERRISSE, B., HAMEL, T., MAHONY, R., et al. “Landing a VTOL Unmanned Aerial Vehicle on a Moving Platform Using Optical Flow”, *IEEE Transactions on Robotics*, v. 28, n. 1, pp. 77–89, 2012. ISSN: 1552-3098. doi: 10.1109/TRO.2011.2163435.

- [77] OH, S. R., PATHAK, K., AGRAWAL, S. K., et al. “Approaches for a tether-guided landing of an autonomous helicopter”, *IEEE Transactions on Robotics*, v. 22, n. 3, pp. 536–544, 2006. ISSN: 15523098. doi: 10.1109/TRO.2006.870657.
- [78] LEE, D., RYAN, T., KIM, H. J. “Autonomous landing of a VTOL UAV on a moving platform using image-based visual servoing”. In: *Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on*, pp. 971–976, May 2012. doi: 10.1109/ICRA.2012.6224828.
- [79] LING, K., CHOW, D., DAS, A., et al. “Autonomous maritime landings for low-cost VTOL aerial vehicles”. In: *Proceedings - Conference on Computer and Robot Vision, CRV 2014*, pp. 32–39, 2014. ISBN: 9781479943388. doi: 10.1109/CRV.2014.13.
- [80] TRUSKIN, B. L., LANGELAAN, J. W. “Vision-based Deck State Estimation for Autonomous Ship-board Landing”, *AHS 69th Annual Forum, Phoenix, Arizona*,, 2013.
- [81] MARCONI, L., ISIDORI, A., SERRANI, A. “Autonomous vertical landing on an oscillating platform: An internal-model based approach”, *Automatica*, v. 38, n. 1, pp. 21–32, 2002. ISSN: 00051098. doi: 10.1016/S0005-1098(01)00184-4.
- [82] YANG, X., POTA, H., GARRATT, M., et al. “Prediction of vertical motions for landing operations of UAVs”. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 5048–5053, 2008. ISBN: 9781424431243. doi: 10.1109/CDC.2008.4738898.
- [83] TRIANTAFYLLOU, M., BODSON, M., ATHANS, M. “Real time estimation of ship motions using Kalman filtering techniques”, *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, v. 8, n. 1, 1983. ISSN: 0364-9059. doi: 10.1109/JOE.1983.1145542.
- [84] SANCHEZ-LOPEZ, J. L. J., SARIPALLI, S., CAMPOY, P., et al. “Toward visual autonomous ship board landing of a vtol uav”, *International Conference on Unmanned Aircraft Systems*, pp. 779–788, 2013. doi: 10.1109/ICUAS.2013.6564760. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs/_all.jsp?arnumber=6564760>.
- [85] BITTANTI, S., SAVARESI, S. M. “On the parameterization and design of an extended Kalman filter frequency tracker”, *IEEE Transactions on Auto-*

matic Control, v. 45, n. 9, pp. 1718–1724, 2000. ISSN: 00189286. doi: 10.1109/9.880631.

- [86] DOUGHERTY, J., LEE, D., LEE, T. “Laser-Guided Autonomous Landing of a Quadrotor UAV on an Inclined Surface”, *American Control Conference*, pp. 1210–1215, 2014.
- [87] VLANTIS, P., MARANTOS, P., BECHLIOULIS, C. P., et al. “Quadrotor Landing on an Inclined Platform of a Moving Ground Vehicle”, *Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation - Washington State Convention Center*, pp. 2202–2207, 2015. doi: 10.1109/ICRA.2015.7139490.
- [88] SHARF, I., NAHON, M., HARMAT, A., et al. “Ground effect experiments and model validation with Draganflyer X8 rotorcraft”, *2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems, ICUAS 2014 - Conference Proceedings*, pp. 1158–1166, 2014. doi: 10.1109/ICUAS.2014.6842370.
- [89] HU, B., LU, L., MISHRA, S. “Fast, safe and precise landing of a quadrotor on an oscillating platform”, *American Control Conference - Chicago, IL, USA*, pp. 3836–3841, 2015.
- [90] DANJUN, L., YAN, Z., ZONGYING, S., et al. “Autonomous Landing of Quadrotor based on Ground Effect Modelling”, *Proceedings of the 34th Chinese Control Conference - Hangzhou, China*, pp. 5647–5652, 2015.
- [91] PEIXOTO, A., LIZARRALDE, F., HSU, L. “Further Results on Smooth Sliding Control of Uncertain Systems”. pp. 2380–2385, Anchorage, 2002.
- [92] PEIXOTO, A., LIZARRALDE, F., HSU, L. “Smooth Sliding Control based on Prediction Error”. In: *Proceedings of the 7th Int. Workshop on Variable Structure Systems (IEEE)*, pp. 123–132, Sarajevo, 2002.
- [93] PEIXOTO, A., LIZARRALDE, F., HSU, L. “Chattering Avoidance by Sliding Control based on Prediction Error”. In: *Anais do 14 Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 1047–1052, Natal, Brazil, 2002.
- [94] PEIXOTO, A., LIZARRALDE, F., HSU, L. “Experimental Results on Smooth Sliding Control of Uncertain Systems”. In: *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Decision and Control*, pp. 928 – 933, Orlando, Florida USA, 2001.
- [95] TAO, G. *Adaptive control design and analysis*. John Wiley & Sons, 2003.

- [96] ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. Springer, 1995.
- [97] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [98] UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [99] HSU, L., COSTA, R. R. “Adaptive control with sliding modes: theory and applications”. In: *Minicurso Proc. XI Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 39–60, São Paulo, 1996.
- [100] HSU, L., CUNHA, J. P. V. S., COSTA, R. R., et al. “Multivariable output-feedback sliding mode control”. In: Yu, X., Xu, J.-X. (Eds.), *Variable Structure Systems: Towards the 21st Century*, Springer-Verlag, pp. 283–313, 2002.
- [101] KAILATH, T. *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.
- [102] WOLOVICH, W. A., FALB, P. L. “Invariants and canonical forms under dynamic compensation”, *SIAM J. Contr. Optim.*, v. 14, n. 6, pp. 996–1008, 1976.
- [103] WELLER, S. R., GOODWIN, G. C. “Hysteresis switching adaptive control of linear multivariable systems”, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 39, n. 7, pp. 1360–1375, 1994.
- [104] MURRAY, R. M., LI, Z., SASTRY, S. S. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press. ISBN: 9780849379819. doi: 10.1.1.169.3957. Disponível em: <<http://scholar.google.com/scholar?hl=en&btnG=Search&q=intitle:A+Mathematical+Introduction+to+Robotic+Manipulation#0>>.
- [105] IOANNOU, P., SUN, J. *Robust Adaptive Control*. Prentice-Hall, 1996.
- [106] UFRJ, J. P. V. S. D. C. *Controle de Sistemas Multivariáveis Incertos por Realimentação de Saída e Modo Deslizante*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ/PEE.
- [107] LEISHMAN, J. *Principles of Helicopter Aerodynamics*. Cambridge Aerospace Series. Cambridge University Press, 2006. ISBN: 9780521858601. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=nMV-TkaX-9cC>>.

- [108] ALEXIS, K., PAPACHRISTOS, C., NIKOLAKOPOULOS, G., et al. “Model predictive quadrotor indoor position control”, *2011 19th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2011*, pp. 1247–1252, 2011. doi: 10.1109/MED.2011.5983144.
- [109] GONG, Q., QIAN, C. “Global practical tracking of a class of nonlinear systems by output feedback”, *Automatica*, v. 43, pp. 184–189, 2007.
- [110] CHEESEMAN, I., BENNETT, W. “The effect of ground on a helicopter rotor in forward flight”, *Aeronautical Research Council, no. 3021*, 1955.
- [111] HSU, L. “SMOOTH SLIDING CONTROL OF UNCERTAIN SYSTEMS BASED ON A PREDICTION ERROR”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 7, n. 4, pp. 353–372, 1997. ISSN: 1099-1239. doi: 10.1002/(SICI)1099-1239(199704)7:4<353::AID-RNC281>3.0.CO;2-8. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1239\(199704\)7:4<353::AID-RNC281>3.0.CO;2-8](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1099-1239(199704)7:4<353::AID-RNC281>3.0.CO;2-8)>.
- [112] HSU, L. “Variable structure model-reference adaptive control (VS-MRAC) using only input and output measurements. II”. In: *Decision and Control, 1988., Proceedings of the 27th IEEE Conference on*, pp. 2396–2401 vol.3, Dec 1988. doi: 10.1109/CDC.1988.194770.
- [113] SEDDON, J., NEWMAN, S. *Basic Helicopter Aerodynamics*. Aerospace Series. Wiley, 2011. ISBN: 9781119972723. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=xUN75AXYhFgC>>.
- [114] “RepRap Prusa Mendel”. <<http://www.reprap.org/wiki/Prusa>>, 2016.
- [115] “Datasheet GT2215/12”. <<http://www.emaxmodel.com/gt2215.html>>, 2016.
- [116] “Datasheet MPU9150”. <<http://43zrtwysvxb2gf29r5o0athu.wpengine.netdna-cdn.com/wp-content/uploads/2015/02/MPU-9150-Datasheet.pdf>>, 2016.
- [117] “Texas Instruments, Inc”. <<http://www.ti.com>>. Acessado: 2015-12-18.
- [118] HIGGINS, W. “A Comparison of Complementary and Kalman Filtering”, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. AES-11, n. 3, pp. 321–325, 1975. ISSN: 0018-9251. doi: 10.1109/TAES.1975.308081.

- [119] BEER, F., JOHNSTON, E., MAZUREK, D., et al. *Vector Mechanics for Engineers By Beer and Johnston Statics 8th Edition*. N. v. 1. McGraw-Hill, 1962. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=9J8HBgAAQBAJ>>.

Apêndice A

Contribuição

As contribuições obtidas durante o desenvolvimento desta Dissertação são as seguintes:

1. A modelagem de um quadrrrotor baseada no formalismo de *Newton-Euler* foi apresentada, investigando e registrando as hipóteses e aproximações usualmente realizadas na literatura de quadrrrotos. Um algoritmo foi desenvolvido na plataforma *Matlab*, para gerar o modelo do quadrrrotor por meio das equações de *Euler-Lagrange*.
2. Foi projetado e construído um quadrrrotor e uma bancada experimental para avaliar e projetar algoritmos de controle, incluindo uma interface gráfica elaborada em *Labview*. Resultados experimentais foram obtidos, compatíveis com a evidência de *Efeito Solo*.
3. Buscando contemplar uma classe de plantas não-lineares é proposta uma generalização para o controlador SSC, que inclui uma parcela adaptativa.
4. Um metodologia de reinicialização do controlador PD baseado no estimador por Mínimos Quadrados Normalizado foi elaborada para atender a execução da tarefa de Captação/Liberação de carga.

Apêndice B

Orientação de Corpo Rígido

Neste apêndice são apresentados conceitos básicos sobre orientação de corpo rígido (matrizes de rotação, representação da orientação e jacobianos) apenas para tornar a Dissertação mais autocontida.

B.1 Rotações Elementares

São rotações ao redor dos eixos dos sistemas de coordenadas (positivo em sentido anti-horário). Suponha que o sistema de coordenadas $\bar{E} = [\bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z}]$ é rotacionado α radianos ao redor do eixo \bar{z} , obtendo-se como resultado $\bar{E}' = [\bar{x}' \ \bar{y}' \ \bar{z}']$. Tem-se que as coordenadas de \bar{x}' , \bar{y}' , \bar{z}' no sistema de coordenadas $[\bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z}]$ são dadas por

$$x' = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \quad y' = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \quad z' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo definindo-se $R_z(\alpha) := \bar{E}^* \bar{E}'$, tem-se

$$R_z(\alpha) = [x' \ y' \ z'] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma é possível obter rotações elementares ao redor de \bar{y} e de \bar{x} , respectivamente:

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}; \quad R_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}.$$

B.1.1 Interpretações da Matriz de Rotação

Podemos interpretar uma matriz de rotação R_{12} de 3 formas geométricas equivalentes: (i) representa a **orientação** do sistema de coordenadas \bar{E}_2 com respeito a \bar{E}_1 . As colunas são os cossenos diretores dos eixos do sistema de coordenadas \bar{E}_2 com respeito a \bar{E}_1 ; (ii) representa a **transformação das coordenadas** de um vetor representado em \bar{E}_2 para as coordenadas deste vetor representado em \bar{E}_1 (supondo sistema com origens comuns); e (iii) representa a **operação de rotação** de um vetor p_2 para um vetor p_1 no sistema de coordenadas \bar{E}_1 , i.e. $p_1 = R_{12}p_2$.

Então a matriz de rotação tem 3 significados geométricos equivalentes: (i) é a orientação de um sistema de coordenadas com respeito a outro. As colunas são os cossenos diretores dos eixos do sistema de coordenadas rotacionado com respeito ao sistema de coordenadas original; (ii) representa a transformação de coordenadas de um vetor representado em 2 sistema de coordenadas diferentes (com origens comuns); e operador de rotação de um vetor num mesmo sistema de coordenadas.

Além disso ($R_{12} = \bar{E}_1^* \bar{E}_2$): R_{12} é a representação da orientação de \bar{E}_2 com respeito a \bar{E}_1 , ou muda a representação do vetor \vec{v} de \bar{E}_2 para \bar{E}_1 , ou é o operador que rotaciona \bar{E}_1 para \bar{E}_2 .

B.1.2 Composição de Matrizes de Rotação

Considere os sistemas de coordenadas $\bar{E}_0, \bar{E}_1, \bar{E}_2$ e o vetor \vec{p} com coordenadas p_0, p_1, p_2 nos diferentes sistemas.

Considerando R_{ji} a matriz de rotação do sistema de coordenadas i com respeito ao sistema de coordenadas j temos $R_{ji} = (R_{ij})^{-1} = (R_{ij})^T$ e

$$p_1 = R_{12}p_2 \quad p_0 = R_{01}p_1 \quad p_0 = R_{02}p_2.$$

Então compondo temos

$$p_0 = R_{01}p_1 = R_{01}R_{12}p_2 \implies \boxed{R_{02} = R_{01}R_{12}}$$

A rotação R_{02} pode ser considerada como sendo obtida através dos seguintes passos:

1. Considere um sistema de coordenadas alinhado com \bar{E}_0
2. Rotacionar este sistema de coordenadas segundo R_{01} de forma a se alinhar com \bar{E}_1
3. Rotacionar o sistema de coordenadas (agora alinhado com \bar{E}_1) segundo R_{12} para se alinhar com \bar{E}_2

Note que todas as rotações são segundo o último sistema de coordenadas chamado de **Sistema de Coordenadas CORRENTE** (ou sistema de coordenadas do corpo).

Numa forma mais geral

$$\boxed{R_{0n} = R_{01}R_{12} \cdots R_{n-1,n}}$$

Considere a composição de rotações com respeito a sistemas fixos. Neste caso a composição correta é através da pré-multiplicação de matrizes, i.e.,

$$\bar{R}_{02} = \bar{R}_{12}R_{01}$$

onde \bar{R} indica uma rotação ao redor de um eixo fixo.

Podemos mostrar a relação para eixos fixos de outra forma. Note que uma rotação de um ângulo ϕ ao redor y_0 e θ ao redor de z_0 (eixos fixos) equivale a rotações em eixos correntes: uma rotação de um ângulo ϕ ao redor y_0 e uma rotação de θ ao redor de $(z_0)_1$, ou seja, o eixo z_0 nas coordenadas do sistema \bar{E}_1 . Portanto tem-se que:

$$R = R_{y_0}(\phi)R_{(z_0)_1}(\theta).$$

Note que $(z_0)_1 = R_{y_0}^T(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Para facilitar a notação seja $\mu = (z_0)_1$ e $\nu = (z_0)_0 =$

$$z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Portanto,}$$

$$\mu = R_{y_0}^T(\phi)\nu,$$

e $R_{(z_0)_1}(\theta)$ pode ser expressa por:

$$R_{(z_0)_1}(\theta) = e^{\hat{\mu}\theta}.$$

Vamos calcular $\hat{\mu}$. Para isso vamos demonstrar a conhecida relação $\hat{\mu} = R_{y_0}^T \hat{\nu} R_{y_0}$. Seja N um vetor auxiliar nas coordenadas do sistema \bar{E}_1 . Podemos escrever que

$$\hat{\mu}N = \mu \times N = R_{y_0}^T \nu \times R_{y_0}^T R_{y_0} N = R_{y_0}^T (\nu \times R_{y_0} N) = R_{y_0}^T \hat{\nu} R_{y_0} N,$$

e concluir que $\hat{\mu} = R_{y_0}^T \hat{\nu} R_{y_0}$. Com isso, tem-se que

$$R_{(z_0)_1}(\theta) = e^{\hat{\mu}\theta} = e^{R_{y_0}^T \hat{\nu} R_{y_0} \theta},$$

e, lembrando que $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^AT$, a seguinte expressão é válida

$$R_{(z_0)_1}(\theta) = e^{\hat{\nu}\theta} = R_{y_0}^T e^{\hat{\nu}\theta} R_{y_0}.$$

Como $e^{\hat{\nu}\theta} = e^{\hat{z}_0\theta} = R_{z_0}(\theta)$, pois $\nu = (z_0)_0 = z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, então

$$R = R_{y_0}(\phi)R_{(z_0)_1}(\theta) = R_{y_0}R_{y_0}^TR_{z_0}R_{y_0} = R_{z_0}(\theta)R_{y_0}(\phi).$$

Em resumo, dadas duas rotações R_{01} e R_{12} :

1. Considerando rotações ao redor do sistema de coordenadas corrente

$$R_{02} = R_{01}R_{12} \quad \text{pós-multiplicação}$$

2. Considerando rotações ao redor do sistema de coordenadas fixo

$$R_{02} = R_{12}R_{01} \quad \text{pré-multiplicação}$$

Uma observação importante é que as matrizes não comutam em geral.

B.2 Rotação ZYZ

Decompõe a matriz de rotação em 3 rotações elementares ao redor do sistema de coordenadas do corpo (coordenadas corrente):

1. ϕ ao redor \vec{z}_b
2. θ ao redor \vec{y}_b
3. ψ ao redor \vec{z}_b

Desta forma,

$$R = R_z(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & c\phi s\theta \\ \cdot & \cdot & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}.$$

Além disso, sabemos que

$$R = R_z(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & c\phi s\theta \\ \cdot & \cdot & s\phi s\theta \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

portanto a representação é dada por $\Phi = \{\phi, \theta, \psi\}$. Se $r_{13} \neq 0$ e $r_{23} \neq 0$ temos

$$\phi = \text{atan2}(r_{23}, r_{13})$$

também teremos

$$\theta = \text{atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33})$$

sendo que o sinal $+\sqrt{\cdot}$ corresponde a $\theta \in [0, \pi)$ (o sinal $-\sqrt{\cdot}$ corresponde a $\theta \in [-\pi, 0)$). Também teremos

$$\psi = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31})$$

No caso de $r_{13} = r_{23} = 0$ implica que $s\theta = 0$ e portanto somente é possível determinar $\phi + \psi$ para $\theta = 0, \pm\pi, \dots$. Outra solução (considerando $-\sqrt{\cdot}$):

$$\begin{aligned}\phi &= \text{atan2}(-r_{23}, -r_{13}), \\ \theta &= \text{atan2}(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}), \\ \psi &= \text{atan2}(-r_{32}, r_{31}).\end{aligned}$$

B.3 Roll-Pitch-Yaw (Jogo-Arfagem-Rumo)

Neste caso, sabemos que:

$$R = R_z(\phi)R_y(\theta)R_x(\psi) = \begin{bmatrix} c\phi c\theta & \cdot & \cdot \\ s\phi c\theta & \cdot & \cdot \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

portanto a representação é dada por $\Phi = \{\phi, \theta, \psi\}$. Se $r_{11} \neq 0$ e $r_{21} \neq 0$ temos

$$\phi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11})$$

também teremos

$$\theta = \text{atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2})$$

sendo que o sinal $+\sqrt{\cdot}$ corresponde a $\theta \in [-\pi/2, \pi/2)$

(o sinal $-\sqrt{\cdot}$ corresponde a $\theta \in [\pi/2, 3/2\pi)$). Também teremos

$$\psi = \text{atan2}(r_{32}, r_{33})$$

No caso de $r_{11} = r_{21} = 0$ implica que $c\theta = 0$ e portanto é possível determinar $\phi + \psi$ para $\theta = \pm\pi/2, \dots$. Outra solução (considerando $-\sqrt{\cdot}$):

$$\begin{aligned}\phi &= \operatorname{atan2}(-r_{21}, -r_{11}), \\ \theta &= \operatorname{atan2}(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}), \\ \psi &= \operatorname{atan2}(-r_{32}, -r_{33}).\end{aligned}$$

B.4 Jacobianos

Relação com os Jacobianos Geométricos, Analítico e da Representação da Orientação: supondo que o corpo rígido em questão corresponda ao efetuador (último elo), com sistema de coordenadas fixado no centro de massa. Neste caso, q é formado pela posição p do centro de massa e pela representação da orientação ϕ (ex: ângulos de Euler), ou seja:

$$x = \begin{bmatrix} p \\ \phi \end{bmatrix} = q,$$

portanto o Jacobiano Analítico é igual a identidade. O Jacobiano Geométrico é dado por J , pois:

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J\dot{q}.$$

O Jacobiano da representação $J_R(\phi)$ satisfaz ($R \in SO(3)$)

$$\dot{\phi} = J_R(\phi)\omega,$$

logo, tem-se que:

$$\dot{x} = \dot{q} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J_R \end{bmatrix} J\dot{q},$$

pois $\dot{p} = v$. Sendo assim o Jacobiano Geométrico e o Jacobiano da Representação se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & J_R \end{bmatrix} J = I.$$

Apêndice C

Modelo de um Quadrrrotor: Newton-Euler

Neste apêndice será apresentado o desenvolvimento do modelo do quadrrrotor por meio do formalismo de Newton-Euler. Considere a seguinte notação:

- p_B^a é um vetor posição de um ponto P com origem em $\{B\}$, porém representado em $\{A\}$.
- v^a é o vetor velocidade representado em $\{A\}$, obtido por meio da derivada temporal de um vetor posição de um ponto P representado em $\{A\}$ (p^a).

Sejam $\{A\}$ um referencial inercial, $\{B\}$ um referencial solidário a um corpo rígido e R a correspondente matriz de rotação que mapeia um vetor p_A^b nas coordenadas de $\{B\}$ para o vetor $p_A^a = Rp_A^b$ nas coordenadas de $\{A\}$. Seja p_A^a (p_A^b) o vetor posição de um ponto P do corpo rígido, **com origem na origem de $\{A\}$** e representado em $\{A\}$ ($\{B\}$). Note que ambos, p_A^a e p_A^b , variam quando o corpo se move e que p_A^b **não é o vetor posição de P com origem em $\{B\}$** , portanto, $\dot{p}_A^a, \dot{p}_A^b \neq 0$, se o ponto P se move com respeito a origem de $\{A\}$ e vale o mapeamento $p_A^a = Rp_A^b$.

A quantidade $v^a := \dot{p}_A^a$ denomina-se de velocidade do ponto P com derivadas temporais calculadas nas coordenadas de $\{A\}$ e representada em $\{A\}$, enquanto que a quantidade $v^b := \dot{p}_A^b$ denomina-se de velocidade do ponto P com derivadas temporais calculadas nas coordenadas de $\{B\}$ e representada em $\{B\}$. Além disso, a quantidade $R^T \dot{p}_A^a = R^T v^a \neq v^b$ e representa a velocidade do ponto P com origem em $\{A\}$, derivadas temporais calculadas nas coordenadas de $\{A\}$ e representada em $\{B\}$. Analogamente, a quantidade $R\dot{p}_A^b = Rv^b \neq v^a$ e representa a velocidade do ponto P com origem em $\{B\}$, derivadas temporais calculadas nas coordenadas de $\{B\}$ e representada em $\{A\}$.

Como $p_A^a = Rp_A^b$, tem-se $\dot{p}_A^a = \dot{R}p_A^b + R\dot{p}_A^b$ e vale a seguinte relação

$$R^T v^a = R^T \dot{R}p_A^b + v^b = \omega^b \times p_A^b + v^b, \quad \hat{\omega}^b = R^T \dot{R},$$

ou, equivalentemente,

$$R^T \left(\frac{dp_A^a}{dt} \right) = \omega^b \times p_A^b + \left(\frac{dp_A^b}{dt} \right).$$

Finalmente simplificando a notação e omitindo a origem do ponto P , tem-se

$$R^T \left(\frac{dp^a}{dt} \right) = \omega^b \times p^b + \left(\frac{dp^b}{dt} \right).$$

As equações de Newton-Euler [104, 119] relacionam a variação de momento angular e a variação do momento linear de um corpo rígido respectivamente com torques e forças externos da seguinte forma livre de coordenadas

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \Sigma \vec{\tau}_{ext}, \quad (C.1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma \vec{F}_{ext}, \quad (C.2)$$

sendo \vec{H} e \vec{L} respectivamente o momento angular e momento linear total de um corpo rígido qualquer e $\vec{\tau}_{ext}$ e \vec{F}_{ext} os torques e forças externos aplicados ao corpo.

Sejam H^a e L^a os momentos angular e linear representados no sistema inercial $\{A\}$ com representações no referencial $\{B\}$ dadas por $R^T H^a$ e $R^T L^a$. Seguindo [119] [104] pode-se escrever (C.1) e (C.2) nas coordenadas $\{B\}$ como

$$R^T \left(\frac{dH^a}{dt} \right) = I^b \left(\frac{d\omega^b}{dt} \right) + \omega^b \times I^b \omega^b, \quad (C.3)$$

$$R^T \left(\frac{dL^a}{dt} \right) = m \left(\frac{dv^b}{dt} \right) + \omega^b \times m v^b, \quad (C.4)$$

sendo v^b a taxa de variação do vetor posição do centro de massa do corpo rígido em relação a $\{A\}$ representado em $\{B\}$, ω^b a velocidade angular do corpo rígido ($\dot{\omega}^b = R^T \dot{R}$), m a massa do corpo rígido e I^b o tensor de inércia do corpo rígido, todos representados em $\{B\}$. Vale ressaltar que $I^b = R^T I^a R$ sendo I^a o tensor de inércia representado em $\{A\}$ [104].

No que segue, considere o quadrirrotor dividido em cinco corpos rígidos: uma estrutura de sustentação em formato de 'X' e quatro atuadores (com índice i), cada um composto por uma hélice e um rotor. Pode-se escrever as equações de Newton-Euler (C.3) e (C.4) nos respectivos referenciais solidários aos corpos rígidos, para cada um dos cinco corpos rígidos.

C.1 Atuador: Momento Angular

Representando (C.1) em $\{A\}$ para cada atuador i (hélice e rotor), tem-se $\frac{dH_i^a}{dt} = \Sigma(\tau_{ext})^a$, ou equivalentemente, a variação temporal do momento angular é dada por

$$R^T \left(\frac{dH_i^a}{dt} \right) = \tau_i^b + \tau_{qi}^b, \quad (C.5)$$

sendo R a matriz de rotação que leva o sistema $\{B\}$ para o sistema $\{A\}$, H_i^a o momento angular do atuador i representado em $\{A\}$, τ_i^b o torque de contato do atuador i com a estrutura e τ_{qi}^b o torque de arrasto aerodinâmico (*drag*) no atuador i , ambos representados no referencial $\{B\}$. Resolvendo para o torque de contato τ_i^b tem-se

$$\tau_i^b = R^T \left(\frac{dH_i^a}{dt} \right) - \tau_{qi}^b. \quad (C.6)$$

A derivada do momento angular do atuador $\left(\frac{dH_i^a}{dt} \right)$ pode ser encontrada aplicando (C.3) a cada atuador i , substituindo o referencial do corpo genérico $\{B\}$ em (C.3) pelo referencial $\{H_i\}$ do atuador i . De fato, pode-se escrever que

$$R_i^T \left(\frac{dH_i^a}{dt} \right) = I_i^h \left(\frac{d\omega_i^h}{dt} \right) + \omega_i^h \times I_i^h \omega_i^h, \quad (C.7)$$

sendo R_i a matriz de rotação do sistema de coordenadas $\{H_i\}$ com respeito ao sistema inercial $\{A\}$, ω_i^h a velocidade angular do atuador i vista de $\{A\}$ e representada em $\{H_i\}$ ($\hat{\omega}_i^h = R_i^T \dot{R}_i$) e I_i^h é o tensor de inércia do atuador i (**constituído de rotor e hélice**) representado em $\{H_i\}$. Considerando o atuador um cilindro, o tensor de inércia representado em $\{H_i\}$ é dado por

$$I_i^h = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{xx}^h & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{xx}^h & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_{zz}^h \end{bmatrix}, \forall i. \quad (C.8)$$

O sistema de coordenadas $\{H_i\}$ é solidário ao atuador i , possui origem no centro de massa do atuador i e está orientado com eixo z coincidindo com o eixo z do sistema de coordenadas da estrutura ($\{B\}$). Portanto, tem-se a seguinte forma para a velocidade angular da hélice do atuador i nas coordenadas de $\{H_i\}$

$$\omega_i^b = \omega_i^h = [0 \ 0 \ 1]^T \Omega_i, \quad (C.9)$$

sendo ω_i^b e ω_i^h a velocidade angular do atuador em $\{B\}$ e $\{H_i\}$ respectivamente, o escalar $|\Omega_i|$ o módulo da velocidade angular de rotação da hélice do atuador i tal que $\Omega_i = \dot{\alpha}_i$, sendo α_i a posição angular da hélice do atuador i . Além disso, pode-se

concluir também que $R_i = RR_z(\alpha_i)$, sendo $R_z(\cdot)$ a matriz de rotação canônica em torno de um eixo genérico z ,

$$R_z(\alpha_i) = \begin{bmatrix} c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, tem-se [104] $\hat{\omega}_i^h := R_i^T \dot{R}_i = R_z^T R^T (\dot{R}R_z + R\dot{R}_z) = R_z^T R^T \dot{R}R_z + R_z^T \dot{R}_z = R_z^T \hat{\omega}^b R_z + R_z^T \dot{R}_z$. Além disso, valem as relações

$$R_z \dot{R}_z^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Omega_i, \quad R_z^T \dot{R}_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Omega_i.$$

Portanto, lembrando que $R_z^T \hat{\omega}^b R_z = \widehat{R_z^T \omega^b}$ e que $R_z^T \dot{R}_z = [0 \ 0 \ 1]^T \Omega_i$, tem-se que $\omega_i^h = R_z^T \omega^b + [0 \ 0 \ 1]^T \Omega_i = R_z^T \bar{\omega}$ com $\bar{\omega} := \omega^b + [0 \ 0 \ 1]^T \Omega_i$, uma vez que $R_z^T [0 \ 0 \ 1]^T \Omega_i = [0 \ 0 \ 1]^T \Omega_i$. Agora, multiplicando ambos os lados de (C.7) por R_z , tem-se:

$$R^T \left(\frac{dH_i^a}{dt} \right) = R_z I_i^h \left(\frac{d\omega_i^h}{dt} \right) + R_z \omega_i^h \times R_z I_i^h \omega_i^h, \quad (\text{C.10})$$

e substituindo $\omega_i^h = R_z^T \bar{\omega}$ tem-se

$$\begin{aligned} R^T \left(\frac{dH_i^a}{dt} \right) &= R_z I_i^h \dot{R}_z^T \bar{\omega} + R_z I_i^h R_z^T \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \right) + \bar{\omega} \times R_z I_i^h R_z^T \bar{\omega}, \\ &= R_z I_i^h R_z^T R_z \dot{R}_z^T \bar{\omega} + R_z I_i^h R_z^T \left(\frac{d\bar{\omega}}{dt} \right) + \bar{\omega} \times R_z I_i^h R_z^T \bar{\omega}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Além disso, definindo $I_i^b := R_z I_i^h R_z^T$ e lembrando que o atuador é considerado como um cilindro pode-se reescrever o tensor de inércia (C.8) em $\{B\}$ como

$$I_i^b = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{xx}^h & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{xx}^h & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_{zz}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{xx}^b & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_{xx}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_{zz}^b \end{bmatrix}, \forall i. \quad (\text{C.12})$$

Notando que $R_z \dot{R}_z^T \bar{\omega} = [\omega_y^b \ -\omega_x^b \ 0]^T \Omega_i$, pode-se reescrever nas coordenadas de $\{B\}$

$$R^T \left(\frac{dH_i^a}{dt} \right) = I_i^b [\omega_y^b \ -\omega_x^b \ 0]^T \Omega_i + I_i^b \left(\frac{d\omega^b}{dt} \right) + I_i^b [0 \ 0 \ 1]^T \dot{\Omega}_i + \bar{\omega} \times I_i^b \bar{\omega}. \quad (\text{C.13})$$

Por outro lado, a quarta parcela do lado direito da equação (C.13) é

$$\bar{\omega} \times I_i^b \bar{\omega} = \omega^b \times I_i^b \bar{\omega} + [0 \ 0 \ \Omega_i]^T \times I_i^b \bar{\omega} = \omega^b \times I_i^b \omega^b + \omega^b \times I_i^b [0 \ 0 \ \Omega_i]^T + [0 \ 0 \ \Omega_i]^T \times I_i^b \omega^b,$$

e adicionalmente, pode-se escrever as duas últimas parcelas como

$$\omega^b \times I_i^b [0 \ 0 \ \Omega_i]^T + [0 \ 0 \ \Omega_i]^T \times I_i^b \omega^b = \Omega_i \begin{bmatrix} \omega_y^b (-\mathcal{I}_{xx}^b + \mathcal{I}_{zz}^b) \\ \omega_x^b (\mathcal{I}_{xx}^b - \mathcal{I}_{zz}^b) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Além disso a primeira e terceira parcela de (C.13) é

$$I_i^b [\omega_y^b \ -\omega_x^b \ 0]^T \Omega_i + I_i^b [0 \ 0 \ 1]^T \dot{\Omega}_i = \begin{bmatrix} \Omega_i (\mathcal{I}_{xx}^b \omega_y^b) \\ \Omega_i (-\mathcal{I}_{xx}^b \omega_x^b) \\ \mathcal{I}_{zz}^b \dot{\Omega}_i \end{bmatrix}.$$

Portanto, tem-se que (C.13) pode ser reescrita por

$$R^T \left(\frac{dH_i^a}{dt} \right) = I_i^b \left(\frac{d\omega^b}{dt} \right) + \omega^b \times I_i^b \omega^b + \bar{\tau}_i, \quad (\text{C.14})$$

sendo

$$\bar{\tau}_i = \begin{bmatrix} \omega_y^b \Omega_i \mathcal{I}_{zz}^b \\ -\omega_x^b \Omega_i \mathcal{I}_{zz}^b \\ \mathcal{I}_{zz}^b \dot{\Omega}_i \end{bmatrix}, \quad (\text{C.15})$$

Logo de (C.14), com $\sum_{i=1}^4 (I_i^b) := I_{4r}^b$, tem-se

$$\sum_{i=1}^4 \left(R^T \frac{dH_i^a}{dt} \right) = I_{4r}^b \left(\frac{d\omega^b}{dt} \right) + \omega^b \times I_{4r}^b \omega^b + \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \omega_y^b \Omega_i \mathcal{I}_{zz}^b \\ -\omega_x^b \Omega_i \mathcal{I}_{zz}^b \\ \mathcal{I}_{zz}^b \dot{\Omega}_i \end{bmatrix}, \quad (\text{C.16})$$

C.2 Atuador: Momento Linear

Representando (C.2) em $\{A\}$ tem-se $\frac{dL_i^a}{dt} = \Sigma(F_{ext})^a$, ou equivalentemente, a variação do momento linear é dada por

$$R^T \left(\frac{dL_i^a}{dt} \right) = F_i^b + P_i^b + T_i^b, \quad (\text{C.17})$$

sendo L_i^a o momento linear do atuador i representado em $\{A\}$, F_i^b a força de contato do atuador i com a estrutura, $P_i^b = R^T P_i^a = R^T [0 \ 0 \ m_i g]^T$ a força peso do atuador i , com m_i sendo a massa do atuador i e T_i^b a força de empuxo aerodinâmico, estes representados em $\{B\}$. Resolvendo para F_i^b tem-se

$$F_i^b = R^T \left(\frac{dL_i^a}{dt} \right) - P_i^b - T_i^b. \quad (\text{C.18})$$

A variação do momento linear do atuador $\frac{dL_i^a}{dt}$ pode ser encontrada como segue. Seja \vec{p}_i (\vec{p}_g) o vetor posição do centro de massa do atuador i (estrutura) com origem coincidente com a origem do sistema $\{A\}$. Vale ressaltar que a extremidade de \vec{p}_g coincide com a origem do sistema $\{B\}$. Com isso, pode-se escrever que $\vec{p}_i = \vec{p}_g + \vec{d}_i$. Desta forma, nas coordenadas do sistema $\{B\}$, tem-se $p_i^b = p_g^b + d_i^b$ e, como d_i^b é um vetor constante ($\frac{dd_i^b}{dt} = 0$, com origem e extremidades no corpo rígido) pode-se concluir que

$$v_i^b := \frac{dp_i^b}{dt} = \frac{dp_g^b}{dt} + \frac{dd_i^b}{dt} = \frac{dp_g^b}{dt} = v_g^b, \quad \forall i, \quad (\text{C.19})$$

ou seja, a taxa de variação dos vetores posição dos centros de massa dos atuadores, v_i^b , (representados em $\{B\}$) é igual a taxa de variação do vetor posição do centro de massa da estrutura, v_g^b , (representados em $\{B\}$). Logo, por meio de (C.4) tem-se que

$$R^T \left(\frac{dL_i^a}{dt} \right) = m_i \left(\frac{dv_i^b}{dt} \right) + \omega^b \times m_i v_i^b = m_i \left(\frac{dv_g^b}{dt} \right) + \omega^b \times m_i v_g^b, \forall i. \quad (\text{C.20})$$

Desta forma pode-se reescrever (C.18) como

$$F_i^b = m_i \left(\frac{dv_g^b}{dt} \right) + \omega^b \times m_i v_g^b - P_i^b - T_i^b. \quad (\text{C.21})$$

C.3 Estrutura: Momento Angular

Analogamente, para a estrutura a variação do momento angular é dada por

$$R^T \left(\frac{dH_e^a}{dt} \right) = - \sum_{i=1}^4 \tau_i^b - \sum_{i=1}^4 (d_i^b \times F_i^b), \quad (\text{C.22})$$

sendo H_e^a o momento angular da estrutura representado em $\{A\}$, d_i^b o vetor posição do atuador i com origem no centro de massa da estrutura e extremidade no centro de massa do atuador i representado em $\{B\}$. Substituindo (C.6), (C.16) e (C.21) em (C.22) tem-se

$$\begin{aligned} R^T \left(\frac{dH_e^a}{dt} \right) &= -I_{4r}^b \left(\frac{d\omega^b}{dt} \right) - \omega^b \times I_{4r}^b \omega^b - \sum_{i=1}^4 \left[\begin{array}{c} \omega_y^b \Omega_i \mathcal{I}_{zz}^b \\ -\omega_x^b \Omega_i \mathcal{I}_{zz}^b \\ \mathcal{I}_{zz}^b \dot{\Omega}_i \end{array} \right] + \sum_{i=1}^4 \tau_{qi}^b + \\ &- \sum_{i=1}^4 d_i^b \times \left(m_i \left(\frac{dv_g^b}{dt} \right) + \omega^b \times m_i v_g^b \right) + \sum_{i=1}^4 d_i^b \times P_i^b + \sum_{i=1}^4 d_i^b \times T_i^b. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Observação 5 (*Simetria da disposição dos atuadores no quadrirrotor*)
 Note que devido a distribuição simétrica dos atuadores tem-se que $\vec{d}_1 = -\vec{d}_3$ e $\vec{d}_2 = -\vec{d}_4$.

Sendo (C.20) igual para todo atuador i , e d_i^b na forma

$$d_1^b = \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_2^b = \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_3^b = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_4^b = \begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.24})$$

tem-se a parcela de (C.23), considerando $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_a$

$$\sum_{i=1}^4 \left(d_i^b \times \left(m_i \left(\frac{dv_g^b}{dt} \right) + \omega^b \times m_i v_g^b \right) \right) = \sum_{i=1}^4 d_i^b \times \left(m_a \left(\frac{dv_g^b}{dt} \right) + \omega^b \times m_a v_g^b \right) = 0. \quad (\text{C.25})$$

devido a simetria dos atuadores, ver Observação 5. Também devido a simetria e por $P_1^b = P_2^b = P_3^b = P_4^b$ tem-se

$$\sum_{i=1}^4 d_i^b \times P_i^b = 0. \quad (\text{C.26})$$

Logo, com (C.25) e (C.26) pode-se reescrever (C.23) como

$$\begin{aligned} R^T \left(\frac{dH_e^a}{dt} \right) &= -I_{4r}^b \left(\frac{d\omega^b}{dt} \right) - \omega^b \times I_{4r}^b \omega^b - \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \omega_y^b \Omega_i \mathcal{I}_{zz}^b \\ -\omega_x^b \Omega_i \mathcal{I}_{zz}^b \\ \mathcal{I}_{zz}^b \dot{\Omega}_i \end{bmatrix} + \\ &+ \sum_{i=1}^4 \tau_{qi}^b + \sum_{i=1}^4 d_i^b \times T_i^b. \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Além disso, aplicando (C.3) a estrutura tem-se

$$R^T \left(\frac{dH_e^a}{dt} \right) = I_e^b \left(\frac{d\omega^b}{dt} \right) + \omega^b \times I_e^b \omega^b, \quad (\text{C.28})$$

sendo I_e^b o tensor de inércia da estrutura representado nas coordenadas $\{B\}$. Substituindo (C.28) em (C.27) tem-se

$$\begin{aligned}
I_e^b \left(\frac{d\omega^b}{dt} \right) + \omega^b \times I_e^b \omega^b &= -I_{4r}^b \left(\frac{d\omega^b}{dt} \right) - \omega^b \times I_{4r}^b \omega^b - \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \omega_y^b \Omega_i \mathcal{I}_{zz}^b \\ -\omega_x^b \Omega_i \mathcal{I}_{zz}^b \\ \mathcal{I}_{zz}^b \dot{\Omega}_i \end{bmatrix} + \\
&+ \sum_{i=1}^4 \tau_{qi}^b + \sum_{i=1}^4 d_i^b \times T_i^b.
\end{aligned} \tag{C.29}$$

Sendo $I^b := I_e^b + I_{4r}^b$ na forma¹

$$I^b = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}, \tag{C.30}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
I^b \left(\frac{d\omega^b}{dt} \right) &= -\omega^b \times I^b \omega^b - \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \omega_y^b \Omega_i \mathcal{I}_{zz}^b \\ -\omega_x^b \Omega_i \mathcal{I}_{zz}^b \\ \mathcal{I}_{zz}^b \dot{\Omega}_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^4 (\tau_{qi}^b) + \sum_{i=1}^4 (d_i^b \times T_i^b) = \\
&= \begin{bmatrix} (\omega_y^b \omega_z^b)(I_{yy}^b - I_{zz}^b) \\ (\omega_x^b \omega_z^b)(I_{zz}^b - I_{xx}^b) \\ (\omega_x^b \omega_y^b)(I_{xx}^b - I_{yy}^b) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_y^b \Omega_R \mathcal{I}_{zz}^b \\ -\omega_x^b \Omega_R \mathcal{I}_{zz}^b \\ \mathcal{I}_{zz}^b \dot{\Omega}_R \end{bmatrix} + \\
&+ \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^4 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -dT_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dT_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ dT_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -dT_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned} \tag{C.31}$$

sendo $\Omega_R = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4$, T_i e Q_i definidos em (2.1) (2.3). Reescrevendo (C.31) elemento a elemento

$$\begin{aligned}
I_{xx}^b \dot{\omega}_x^b &= (\omega_y^b \omega_z^b)(I_{yy}^b - I_{zz}^b) - \omega_y^b \Omega_R \mathcal{I}_{zz}^b + (dT_2 - dT_4) \\
I_{yy}^b \dot{\omega}_y^b &= (\omega_x^b \omega_z^b)(I_{zz}^b - I_{xx}^b) + \omega_x^b \Omega_R \mathcal{I}_{zz}^b + (-dT_1 + dT_3) \\
I_{zz}^b \dot{\omega}_z^b &= (\omega_x^b \omega_y^b)(I_{xx}^b - I_{yy}^b) - \dot{\Omega}_R \mathcal{I}_{zz}^b + \sum_{i=1}^4 Q_i.
\end{aligned} \tag{C.32}$$

¹Note que o momento de inércia continua diagonal porém as componentes de I_e em torno do eixos x e y podem ser distintas.

C.4 Estrutura: Momento Linear

Para a estrutura, a variaçãõ do momento linear é dada por

$$R^T \left(\frac{dL_e^a}{dt} \right) = P_e^b - \sum_{i=1}^4 (F_i^b), \quad (\text{C.33})$$

substituindo (C.21) em (C.33), e lembrando que $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_a$ tem-se

$$R^T \left(\frac{dL_e^a}{dt} \right) = P_e^b - \sum_{i=1}^4 \left(m_a \left(\frac{dv_g^b}{dt} \right) + \omega^b \times m_a v_g^b - P_i^b - T_i^b \right), \quad (\text{C.34})$$

substituindo em (C.34) com $P^b := P_e^b + \sum_i^4 P_i^b$ tem-se

$$R^T \left(\frac{dL_e^a}{dt} \right) = P^b + (T_1^b + T_2^b + T_3^b + T_4^b) - \sum_{i=1}^4 \left(m_a \left(\frac{dv_g^b}{dt} \right) + \omega^b \times m_a v_g^b \right), \quad (\text{C.35})$$

e aplicando (C.4) em $R^T \left(\frac{dL_e^a}{dt} \right)$ tem-se

$$\begin{aligned} \left(m_e \left(\frac{dv_g^b}{dt} \right) + \omega^b \times m_e v_g^b \right) &= P^b + (T_1^b + T_2^b + T_3^b + T_4^b) + \\ &\quad - \sum_{i=1}^4 \left(m_a \left(\frac{dv_g^b}{dt} \right) + \omega^b \times m_a v_g^b \right), \\ \left(m_e \left(\frac{dv_g^b}{dt} \right) + \omega^b \times m_e v_g^b \right) + 4m_a \left(\frac{dv_g^b}{dt} \right) + \omega^b \times 4m_a v_g^b &= \\ &= P^b + (T_1^b + T_2^b + T_3^b + T_4^b), \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

reescrevendo (C.36) com $m = m_e + 4m_a$ tem-se

$$\left(m \left(\frac{dv_g^b}{dt} \right) + \omega^b \times m v_g^b \right) = P^b + (T_1^b + T_2^b + T_3^b + T_4^b), \quad (\text{C.37})$$

reescrevendo em $\{A\}$ tem-se

$$m \left(\frac{dv_g^a}{dt} \right) = R (R^T P^a + (T_1^b + T_2^b + T_3^b + T_4^b)), \quad (\text{C.38})$$

$$m \left(\frac{dv_g^a}{dt} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + R(T_1^b + T_2^b + T_3^b + T_4^b). \quad (\text{C.39})$$

Reescrevendo em partes obtém-se

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= (c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi) \sum_{i=1}^4 T_i, \\
 m\ddot{y} &= (s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi) \sum_{i=1}^4 T_i, \\
 m\ddot{z} &= -mg + (s\phi c\phi c\theta) \sum_{i=1}^4 T_i.
 \end{aligned} \tag{C.40}$$

Apêndice D

Equações de Euler-Lagrange para um Corpo Rígido

Um corpo rígido (uma barra) possui um número infinito de partículas. Como a distância entre as partículas é fixa, somente seis coordenadas são suficientes para especificar completamente a coordenada de **qualquer** partícula do corpo rígido. Em particular, pode-se utilizar três coordenadas cartesianas para especificar a posição do centro de massa e três ângulos de Euler para especificar a orientação do corpo rígido. Estas coordenadas (posição cartesiana do centro de massa e ângulos de Euler) não apresentam restrição e, por isso, são denominadas de **coordenadas generalizadas**.

Considere dois sistemas de coordenadas: um sistema inercial \mathcal{S}_0 e um sistema móvel \mathcal{S}_C , solidário ao corpo rígido com origem no centro de massa C . Sejam \vec{r} o vetor posição de C com respeito a \mathcal{S}_0 e $\vec{\omega}$ a velocidade angular do corpo vista de \mathcal{S}_0 . Seja ω as coordenadas de $\vec{\omega}$ expressa em \mathcal{S}_0 e r as coordenadas do centro de massa expressa em \mathcal{S}_0 . Sabe-se que:

- O vetor posição do centro de massa pode ser expresso como função das coordenadas generalizadas:

$$r = f(q), \quad q \in \mathbb{R}^m.$$

Pode-se utilizar três coordenadas cartesianas para especificar a posição do centro de massa.

- A velocidade do centro de massa $v = \dot{r}$, vista de \mathcal{S}_0 e representada em \mathcal{S}_0 , pode ser reescrita como

$$v = J_v(q)\dot{q}, \quad J_v(q) := \frac{\partial r}{\partial q}.$$

- A velocidade angular, vista de \mathcal{S}_0 e representada em \mathcal{S}_0 , é tal que $\hat{\omega} = \dot{R}R^T$, sendo $R(q)$ a orientação do corpo rígido expressa como função das coordena-

das generalizadas. Pode-se utilizar três ângulos de Euler para especificar a orientação do corpo rígido.

Como $\dot{R} = \frac{\partial R}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial R}{\partial q_m} \dot{q}_m$, sendo $\frac{\partial R}{\partial q_1} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, podemos escrever que

$$\hat{\omega} = \frac{\partial R}{\partial q_1} R^T \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial R}{\partial q_m} R^T \dot{q}_m.$$

Logo, tem-se que:

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j} R^T, \quad j = 1, \dots, m.$$

Note que $\hat{\omega}$ e $\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \dot{q}_j}$ são matrizes anti-simétricas. Portanto, $\frac{\partial R}{\partial q_j} R^T$ é anti-simétrica e podemos escrever que

$$\omega = J_{\omega 1} \dot{q}_1 + \dots + J_{\omega m} \dot{q}_m,$$

sendo $J_{\omega j}$ tal que $\hat{J}_{\omega j} := \frac{\partial R}{\partial q_j} R^T$.

A velocidade angular pode ser reescrita como:

$$\omega = J_{\omega}(q) \dot{q}, \quad J_{\omega} := \begin{bmatrix} J_{\omega 1} & \dots & J_{\omega m} \end{bmatrix}, \quad \hat{J}_{\omega j} := \frac{\partial R}{\partial q_j} R^T.$$

Note que, dependendo da representação da orientação, J_{ω} pode variar.

Teorema 5 (Energia Cinética de Translação) *Dado*

$$K_v := \frac{1}{2} v^T m v = \frac{1}{2} m \|v\|^2,$$

a seguinte relação é válida:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_v}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial K_v}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} [v^T m] J_{vj},$$

sendo mv a quantidade de movimento linear (ou momento linear).

Prova: Ver Seção D.1. ■

Teorema 6 (Energia Cinética de Rotação) *Dado*

$$K_{\omega} := \frac{1}{2} \omega^T \mathcal{I}_0 \omega, \quad \mathcal{I}_0 := R \mathcal{I} R^T = \mathcal{I}_0^T, \quad \mathcal{I} = \mathcal{I}^T,$$

a seguinte relação é válida:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_{\omega}}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial K_{\omega}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} [\omega^T \mathcal{I}_0] J_{\omega j},$$

sendo $\mathcal{I}_0\omega$ a quantidade de movimento angular (ou momento angular).

Prova: Ver Seção D.2. ■

Compondo os movimentos e definindo

$$\mathcal{K} := K_v + K_\omega,$$

tem-se que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} [\omega^T \mathcal{I}_0] J_{\omega j} + \frac{d}{dt} [v^T m] J_{vj}$$

Além disso, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q} = \frac{d}{dt} [\omega^T \mathcal{I}_0] J_\omega + \frac{d}{dt} [v^T m] J_v$$

Definindo-se o par “força e momento” resultante no corpo rígido (momento em torno do centro de massa e expresso nas coordenadas inerciais e força resultante aplicada no centro de massa e expressa nas coordenadas inerciais) por

$$W^T := \left[\begin{array}{cc} \frac{d}{dt} [v^T m] & \frac{d}{dt} [\omega^T \mathcal{I}_0] \end{array} \right], \quad W \in \mathbb{R}^6,$$

podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q} = W^T J = W^T \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix},$$

sendo

$$J = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times m}.$$

OBS: Este par é denominado de *Wrench* (“chave inglesa”) e também de força generalizada.

Seja $\mathcal{U}(r) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ o campo potencial/gradiente função apenas do vetor posição r , responsável pelas forças conservativas, com resultante F_ψ . Portanto, podemos escrever que

$$F_\psi^T = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r},$$

ou seja, F_ψ^T é o gradiente com respeito a r do campo $\mathcal{U}(r)$. Relembrando que r é uma função das coordenadas q , tem-se pela regra da cadeia que:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial q} = -F_\psi^T J_v.$$

Seja ainda τ_ψ o momento em torno do centro de massa da resultante F_ψ das forças conservativas. Podemos então escrever que o par “força/momento” das forças con-

servativas é dado por

$$W_{\psi}^T := \begin{bmatrix} F_{\psi}^T & \tau_{\psi}^T \end{bmatrix}.$$

Com isso, o termo $W^T J$ pode ser representado por:

$$W^T J = W_{ext}^T J + W_{\psi}^T J = W_{ext}^T J + F_{\psi}^T J_v + \tau_{\psi}^T J_{\omega} = W_{ext}^T J - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} + \tau_{\psi}^T J_{\omega},$$

ou, equivalentemente:

$$W^T J + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} = W_{ext}^T J + \tau_{\psi}^T J_{\omega}.$$

Definindo o Lagrangiano

$$\mathcal{L} := \mathcal{K} - \mathcal{U},$$

temos que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} = W^T J + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q} = W_{ext}^T J + \tau_{\psi}^T J_{\omega}.$$

Quando a Energia Potencial $\mathcal{U}(q)$ do corpo rígido é devida apenas ao campo gravitacional, ou as forças conservativas atuam no centro de massa, tem-se que $\tau_{\psi} = 0$ e

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = W_{ext}^T J.$$

D.1 Demonstração do Teorema 5

A energia cinética do centro de massa é dada por:

$$K_v = \frac{1}{2} m v^T v = \frac{1}{2} m \dot{r}^T \dot{r} \quad (\text{D.1})$$

Derivando em relação a q_j e \dot{q}_j , temos:

$$\frac{\partial K_v}{\partial q_j} = \frac{1}{2} m \dot{r}^T \frac{\partial \dot{r}}{\partial q_j} + \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial q_j} \right)^T \dot{r} = m \dot{r}^T \frac{\partial \dot{r}}{\partial q_j}, \quad (\text{D.2})$$

e, analogamente, tem-se

$$\frac{\partial K_v}{\partial \dot{q}_j} = m \dot{r}^T \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{q}_j} \quad (\text{D.3})$$

Note que $\dot{r} = \frac{\partial r}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} \dot{q}_2$. Derivando em relação a \dot{q}_j , temos:

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial r}{\partial q_j} \quad (\text{D.4})$$

Então,

$$\frac{\partial K_v}{\partial \dot{q}_j} = m \dot{r}^T \frac{\partial r}{\partial q_j}. \quad (\text{D.5})$$

Temos as seguintes relações:

$$\frac{\partial K_v}{\partial q_j} = m \dot{r}^T \frac{\partial \dot{r}}{\partial q_j} = m \dot{r}^T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q_j} \right) \quad \frac{\partial K_v}{\partial \dot{q}_j} = m \dot{r}^T \frac{\partial r}{\partial q_j} \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_v}{\partial \dot{q}_j} \right] = m \dot{r}^T \frac{\partial r}{\partial q_j} + m \dot{r}^T \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q_j} \right) \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_v}{\partial \dot{q}_j} \right] = m \dot{r}^T \frac{\partial r}{\partial q_j} + \frac{\partial K_v}{\partial q_j} \quad (\text{D.8})$$

Portanto,

$$m \ddot{r}^T \frac{\partial r}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_v}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial K_v}{\partial q_j}. \quad (\text{D.9})$$

D.2 Demonstração do Teorema 6

Sendo $\hat{J}_{\omega i} := \frac{\partial R}{\partial q_i} R^T$ podemos escrever que

$$\frac{\partial \hat{J}_{\omega i}}{\partial q_j} := \frac{\partial^2 R}{\partial q_i \partial q_j} R^T + \frac{\partial R}{\partial q_i} \frac{\partial R^T}{\partial q_j}.$$

Somando e subtraindo $\frac{\partial R}{\partial q_j} \frac{\partial R^T}{\partial q_i}$, temos:

$$\frac{\partial \hat{J}_{\omega i}}{\partial q_j} := \frac{\partial^2 R}{\partial q_i \partial q_j} R^T + \frac{\partial R}{\partial q_j} \frac{\partial R^T}{\partial q_i} + \left[\frac{\partial R}{\partial q_i} \frac{\partial R^T}{\partial q_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} \frac{\partial R^T}{\partial q_i} \right].$$

Além disso, multiplicando-se por \dot{q}_i , a seguinte relação é válida:

$$\frac{\partial \hat{J}_{\omega i}}{\partial q_j} \dot{q}_i := \frac{\partial^2 R}{\partial q_i \partial q_j} R^T \dot{q}_i + \frac{\partial R}{\partial q_j} \frac{\partial R^T}{\partial q_i} \dot{q}_i + \left[\frac{\partial R}{\partial q_i} \frac{\partial R^T}{\partial q_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} \frac{\partial R^T}{\partial q_i} \right] \dot{q}_i.$$

O último termo da expressão acima poder ser reescrito como:

$$\left[\frac{\partial R}{\partial q_i} \frac{\partial R^T}{\partial q_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} \frac{\partial R^T}{\partial q_i} \right] \dot{q}_i = \left[\frac{\partial R}{\partial q_i} R^T R \frac{\partial R^T}{\partial q_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} R^T R \frac{\partial R^T}{\partial q_i} \right] \dot{q}_i.$$

Lembrando que $\hat{J}_{\omega i} := \frac{\partial R}{\partial q_i} R^T$, tem-se:

$$\left[\frac{\partial R}{\partial q_i} \frac{\partial R^T}{\partial q_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} \frac{\partial R^T}{\partial q_i} \right] \dot{q}_i = \left[\hat{J}_{\omega i} \hat{J}_{\omega j}^T - \hat{J}_{\omega j} \hat{J}_{\omega i}^T \right] \dot{q}_i.$$

Logo, tem-se que

$$\frac{\partial \hat{J}_{\omega i}}{\partial q_j} \dot{q}_i := \frac{\partial^2 R}{\partial q_i \partial q_j} R^T \dot{q}_i + \frac{\partial R}{\partial q_j} \frac{\partial R^T}{\partial q_i} \dot{q}_i + \left[\hat{J}_{\omega i} \hat{J}_{\omega j}^T - \hat{J}_{\omega j} \hat{J}_{\omega i}^T \right] \dot{q}_i.$$

Sendo $\hat{J}_{\omega j} := \frac{\partial R}{\partial q_j} R^T$, tem-se que

$$\dot{\hat{J}}_{\omega j} := \frac{\partial \dot{R}}{\partial q_j} R^T + \frac{\partial R}{\partial q_j} \dot{R}^T,$$

e como $\dot{R} = \frac{\partial R}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial R}{\partial q_m} \dot{q}_m = \sum_{i=1}^m \frac{\partial R}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_i \frac{\partial R}{\partial q_i} \dot{q}_i$ tem-se ainda que

$$\dot{\hat{J}}_{\omega j} := \sum_i \frac{\partial^2 R}{\partial q_i \partial q_j} R^T \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial R}{\partial q_j} \frac{\partial R^T}{\partial q_i} \dot{q}_i.$$

Portanto,

$$\dot{\hat{J}}_{\omega j} := \sum_i \frac{\partial \hat{J}_{\omega i}}{\partial q_j} \dot{q}_i - \sum_i \left[\hat{J}_{\omega i} \hat{J}_{\omega j}^T - \hat{J}_{\omega j} \hat{J}_{\omega i}^T \right] \dot{q}_i,$$

ou, equivalentemente

$$\dot{\hat{J}}_{\omega j} := \sum_i \frac{\partial \hat{J}_{\omega i}}{\partial q_j} \dot{q}_i - \left[\sum_i \hat{J}_{\omega i} \dot{q}_i \right] \hat{J}_{\omega j}^T + \hat{J}_{\omega j} \left[\sum_i \hat{J}_{\omega i}^T \dot{q}_i \right],$$

Mas, $\omega = J_{\omega} \dot{q} = \sum_i J_{\omega i} \dot{q}_i$. Portanto, $\sum_i \hat{J}_{\omega i} \dot{q}_i = \hat{\omega}$ e podemos escrever

$$\dot{\hat{J}}_{\omega j} := \sum_i \frac{\partial \hat{J}_{\omega i}}{\partial q_j} \dot{q}_i - \hat{\omega} \hat{J}_{\omega j}^T + \hat{J}_{\omega j} \hat{\omega}^T.$$

Seja v um vetor de teste. Como $\hat{J}_{\omega j}^T = -\hat{J}_{\omega j}$ e $\hat{\omega}^T = -\hat{\omega}$, tem-se que

$$\left[-\hat{\omega} \hat{J}_{\omega j}^T + \hat{J}_{\omega j} \hat{\omega}^T \right] v = -\hat{\omega} \hat{J}_{\omega j}^T v + \hat{J}_{\omega j} \hat{\omega}^T v = \hat{\omega} \hat{J}_{\omega j} v - \hat{J}_{\omega j} \hat{\omega} v = \omega \times (J_{\omega j} \times v) - J_{\omega j} \times (\omega \times v).$$

Utilizando a identidade $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ três vezes temos que

$$\omega \times (J_{\omega j} \times v) - J_{\omega j} \times (\omega \times v) = v \times (J_{\omega j} \times \omega) = -(J_{\omega j} \times \omega) \times v = (\omega \times J_{\omega j}) \times v$$

ou ainda

$$\left[-\hat{\omega} \hat{J}_{\omega j}^T + \hat{J}_{\omega j} \hat{\omega}^T \right] v = (\omega \times J_{\omega j}) \times v.$$

Com isso temos que

$$J_{\omega j} := \sum_i \frac{\partial J_{\omega i}}{\partial q_j} \dot{q}_i + (\omega \times J_{\omega j}).$$

Notando que $\sum_i \frac{\partial J_{\omega i}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_i = \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_j}$ e que $J_{\omega j} = \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \dot{q}_j}$, tem-se que

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \omega}{\partial q_j} + (\omega \times J_{\omega j})$$

Considere apenas a energia cinética de rotação:

$$K_{\omega} := \frac{1}{2} \omega^T \mathcal{I}_0 \omega, \quad \mathcal{I}_0 := R \mathcal{I} R^T = \mathcal{I}_0^T, \quad \mathcal{I} = \mathcal{I}^T.$$

Notando que

$$\frac{\partial \mathcal{I}_0}{\partial q_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j} \mathcal{I} R^T + R \mathcal{I} \frac{\partial R^T}{\partial q_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j} R^T R \mathcal{I} R^T + R \mathcal{I} R^T R \frac{\partial R^T}{\partial q_j} = \frac{\partial R}{\partial q_j} R^T \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_0 R \frac{\partial R^T}{\partial q_j},$$

tem-se que $\frac{\partial \mathcal{I}_0}{\partial q_j} = \hat{J}_{\omega j} \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_0 \hat{J}_{\omega j}^T$. Portanto, $\frac{1}{2} \omega^T \frac{\partial \mathcal{I}_0}{\partial q_j} \omega = \omega^T \mathcal{I}_0 \hat{J}_{\omega j}^T \omega$ e podemos escrever que

$$\frac{\partial K_{\omega}}{\partial q_j} = \omega^T \mathcal{I}_0 \frac{\partial \omega}{\partial q_j} + \frac{1}{2} \omega^T \frac{\partial \mathcal{I}_0}{\partial q_j} \omega = \omega^T \mathcal{I}_0 \left[\frac{\partial \omega}{\partial q_j} + \hat{J}_{\omega j}^T \omega \right] = \omega^T \mathcal{I}_0 \left[\frac{\partial \omega}{\partial q_j} + \omega \times J_{\omega j} \right].$$

Além disso:

$$\frac{\partial K_{\omega}}{\partial \dot{q}_j} = \omega^T \mathcal{I}_0 \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_j} + \frac{1}{2} \omega^T \frac{\partial \mathcal{I}_0}{\partial \dot{q}_j} \omega = \omega^T \mathcal{I}_0 \frac{\partial \omega}{\partial \dot{q}_j} = \omega^T \mathcal{I}_0 J_{\omega j},$$

e

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_{\omega}}{\partial \dot{q}_j} \right] = \dot{\omega}^T \mathcal{I}_0 J_{\omega j} + \omega^T \dot{\mathcal{I}}_0 J_{\omega j} + \omega^T \mathcal{I}_0 \dot{J}_{\omega j},$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_{\omega}}{\partial \dot{q}_j} \right] = \frac{d}{dt} [\omega^T \mathcal{I}_0] J_{\omega j} + \omega^T \mathcal{I}_0 \dot{J}_{\omega j}.$$

Por outro lado, $\dot{J}_{\omega j} = \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \omega}{\partial q_j} + (\omega \times J_{\omega j})$. Sendo assim, tem-se que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_{\omega}}{\partial \dot{q}_j} \right] = \frac{d}{dt} [\omega^T \mathcal{I}_0] J_{\omega j} + \omega^T \mathcal{I}_0 \left[\frac{\partial \omega}{\partial q_j} + (\omega \times J_{\omega j}) \right],$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial K_{\omega}}{\partial \dot{q}_j} \right] - \frac{\partial K_{\omega}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} [\omega^T \mathcal{I}_0] J_{\omega j}.$$

Apêndice E

Modelo de um Quadrrrotor: Euler-Lagrange

Para o desenvolvimento do modelo do quadrrrotor por meio do formalismo de Euler-Lagrange é necessário descrever as expressões de energia cinética e potencial do corpo rígido, para isso considere a matriz de rotação R e o Jacobiano da Representação J_r dados por

$$R = \begin{bmatrix} c\psi c\theta - s\phi s\psi s\theta & -c\phi s\psi & c\psi s\theta + c\theta s\phi s\psi \\ c\theta s\psi + c\psi s\phi s\theta & c\phi c\psi & s\psi s\theta - c\psi c\theta s\phi \\ -c\phi s\theta & s\phi & c\phi c\theta \end{bmatrix}, \quad (\text{E.1})$$

$$J_r = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -c\phi s\theta \\ 0 & 1 & s\phi \\ s\theta & 0 & c\phi c\theta \end{bmatrix}. \quad (\text{E.2})$$

Pode-se representar qualquer ponto do corpo rígido no sistema de coordenadas inercial $\{A\}$ por meio de

$$p^a = R p^b, \quad (\text{E.3})$$

sendo $p^a = [x_a \ y_a \ z_a]$ e $p^b = [x_b \ y_b \ z_b]$ os vetores posição de um partícula do corpo rígido, descritos no sistema de coordenadas inercial e do corpo, respectivamente. Dada a simetria mecânica da estrutura do quadrrrotor considera-se sua matriz de momento de inércia na forma diagonal. Sendo assim, substituindo a derivada de E.3 na expressão D.1 de energia cinética, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \frac{I_{xx}}{2} \left(\dot{\psi}^2 c^2 \phi + \dot{\phi}^2 c^2 \theta - \dot{\psi}^2 c^2 \phi c^2 \theta - 2 \dot{\phi} \dot{\psi} c \phi c \theta s \theta \right) \\
&+ \frac{I_{zz}}{2} \left(\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}^2 c^2 \theta + \dot{\psi}^2 c^2 \phi c^2 \theta + 2 \dot{\phi} \dot{\psi} c \phi c \theta s \theta \right) \\
&+ \frac{I_{yy}}{2} \left(\dot{\theta} + \dot{\psi} s \phi \right)^2
\end{aligned} \tag{E.4}$$

O somatório das energias potencias gravitacionais pontuais é equivalente a energia potencial da massa total do corpo calculada na altura de seu centro de massa. Entretanto a altura do centro de massa do corpo rígido não depende da orientação do corpo rígido, com isso $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \phi} = 0$, $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = 0$ e $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \psi} = 0$. Neste caso pode-se escrever $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U} = \mathcal{K}$ e portanto tem-se as equações de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= I_{zz} \ddot{\phi} + I_{xx} c^2(\theta) \ddot{\phi} - I_{zz} c^2(\theta) \ddot{\phi} + (I_{xx} \dot{\psi}^2 s(2\phi))/2 + \\
&- (I_{yy} \dot{\psi}^2 s(2\phi))/2 + I_{xx} \dot{\psi} \dot{\theta} c(\phi) - I_{yy} \dot{\psi} \dot{\theta} c(\phi) - I_{zz} \dot{\psi} \dot{\theta} c(\phi) + \\
&- I_{xx} \dot{\phi} \dot{\theta} s(2\theta) + I_{zz} \dot{\phi} \dot{\theta} s(2\theta) - I_{xx} c(\phi) c(\theta) s(\theta) \ddot{\psi} + \\
&+ I_{zz} c(\phi) c(\theta) s(\theta) \ddot{\psi} - I_{xx} \dot{\psi}^2 c(\phi) c^2(\theta) s(\phi) + I_{zz} \dot{\psi}^2 c(\phi) c^2(\theta) s(\phi) + \\
&+ 2I_{xx} \dot{\psi} \dot{\theta} c(\phi) c^2(\theta) + 2I_{zz} \dot{\psi} \dot{\theta} c(\phi) c^2(\theta), \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= I_{yy} (\ddot{\theta} + s(\phi) \ddot{\psi} + \dot{\phi} \dot{\psi} c(\phi)) + \\
&+ (I_{xx} - I_{zz}) ((\dot{\phi}^2 s(2\theta))/2 - (\dot{\psi}^2 c(\phi)^2 s(2\theta))/2 + \dot{\phi} \dot{\psi} c(\phi) c(2\theta)), \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= I_{yy} \ddot{\psi} + I_{yy} s(\phi) \ddot{\theta} + I_{xx} c(\phi)^2 \ddot{\psi} - I_{yy} c(\phi)^2 \ddot{\psi} + I_{xx} \dot{\phi} \dot{\theta} c(\phi) + \\
&+ I_{yy} \dot{\phi} \dot{\theta} c(\phi) - I_{zz} \dot{\phi} \dot{\theta} c(\phi) - I_{xx} c(\phi)^2 c^2(\theta) \ddot{\psi} + I_{zz} c(\phi)^2 c^2(\theta) \ddot{\psi} + \\
&- I_{xx} \dot{\phi} \dot{\psi} s(2\phi) + I_{yy} \dot{\phi} \dot{\psi} s(2\phi) - I_{xx} c(\phi) c(\theta) s(\theta) \ddot{\phi} + \\
&+ I_{zz} c(\phi) c(\theta) s(\theta) \ddot{\phi} + I_{xx} \dot{\phi}^2 c(\theta) s(\phi) s(\theta) - I_{zz} \dot{\phi}^2 c(\theta) s(\phi) s(\theta) + \\
&- 2I_{xx} \dot{\phi} \dot{\theta} c(\phi) c^2(\theta) + 2I_{zz} \dot{\phi} \dot{\theta} c(\phi) c^2(\theta) + 2I_{xx} \dot{\phi} \dot{\psi} c(\phi) c^2(\theta) s(\phi) + \\
&- 2I_{zz} \dot{\phi} \dot{\psi} c(\phi) c^2(\theta) s(\phi) + 2I_{xx} \dot{\psi} \dot{\theta} c^2(\phi) c(\theta) s(\theta) + \\
&- 2I_{zz} \dot{\psi} \dot{\theta} c^2(\phi) c(\theta) s(\theta).
\end{aligned} \tag{E.5}$$

Uma vez que as primeiras e segundas derivadas dos ângulos de Euler são dadas por

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= J_r^{-1} \Omega, \\
\ddot{\theta} &= (J_r^{-1}) \dot{\Omega} + J_r^{-1} \dot{\Omega},
\end{aligned} \tag{E.6}$$

sendo $\Omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$, pode-se reescrever E.5 substituindo as primeiras e segundas derivadas dos ângulos de Euler e utilizando as aproximações $\text{sen}(\phi) \approx \phi$, $\text{sen}(\theta) \approx \theta$, $\text{sen}(\psi) \approx \psi$, $\text{cos}(\phi) \approx 1$, $\text{cos}(\theta) \approx 1$ e $\text{cos}(\psi) \approx 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= I_{xx}(\dot{\omega}_x - \omega_x \omega_y \theta) + I_{zz}(\dot{\omega}_z \theta + \omega_y \omega_z) - I_{yy} \omega_y (\omega_z - \omega_x \theta), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= I_{yy} \dot{\omega}_y + I_{xx} \omega_x \omega_z - I_{zz} \omega_x \omega_z, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= I_{yy}(\dot{\omega}_y \phi + \omega_y \omega_z \theta + \omega_x \omega_y) - I_{xx}(\dot{\omega}_x \theta - \omega_x \omega_z \phi + \omega_x \omega_y) + \\ &\quad - I_{zz}(\omega_x \omega_z \phi - \dot{\omega}_z + \omega_y \omega_z \theta), \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

utilizando as aproximações $\phi \approx 0$, $\theta \approx 0$ e $\psi \approx 0$, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= I_{xx} \dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})(\omega_y \omega_z), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= I_{yy} \dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})(\omega_x \omega_z), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= I_{zz} \dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})(\omega_x \omega_y). \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Aplicando o formalismo de Euler-Lagrange aos atuadores e incorporando os resultados como um torque externo a estrutura tem-se

$$\begin{aligned} I_{xx} \dot{\omega}_x &= (\omega_y \omega_z)(I_{yy} - I_{zz}) - \omega_y \Omega_R \mathcal{I}_{zz} + (dT_2 - dT_4), \\ I_{yy} \dot{\omega}_y &= (\omega_x \omega_z)(I_{zz} - I_{xx}) + \omega_x \Omega_R \mathcal{I}_{zz} + (-dT_1 + dT_3), \\ I_{zz} \dot{\omega}_z &= (\omega_x \omega_y)(I_{xx} - I_{yy}) - \dot{\Omega}_R \mathcal{I}_{zz} + \sum_{i=1}^4 Q_i, \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

finalmente, dada as aproximações angulares anteriores, tem-se por consequência que $J_r \approx I$, portanto pode-se expressar o modelo também na forma

$$\begin{aligned} I_{xx} \ddot{\phi} &= (\dot{\theta} \dot{\psi})(I_{yy} - I_{zz}) - \dot{\theta} \Omega_R \mathcal{I}_{zz} + (dT_2 - dT_4), \\ I_{yy} \ddot{\theta} &= (\dot{\phi} \dot{\psi})(I_{zz} - I_{xx}) + \dot{\phi} \Omega_R \mathcal{I}_{zz} + (-dT_1 + dT_3), \\ I_{zz} \ddot{\psi} &= (\dot{\phi} \dot{\theta})(I_{xx} - I_{yy}) - \dot{\Omega}_R \mathcal{I}_{zz} + \sum_{i=1}^4 Q_i. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

E.1 Rotina Desenvolvida em *Matlab*

```
% desabilita o warning do simple()
warning('off', 'symbolic:sym:simple:Deprecated');
separador = '#####';
```



```

syms phi the psi x y z dphi dthe dpsi

%1: Matrizes do artigo "Multirotor Aerial Vehicles: Modeling, Estimation, and
%Control of Quadrotor"
%2: Matrizes da tese "Design and Control of Quadrotors With Application To
%Autonomous Flying"
opt = 1;

disp(separador)
disp('Matrizes de rotação e Jacobiano da Representação')

if (opt == 1)
disp('opt 1')

R = [ cos(psi)*cos(the) - sin(phi)*sin(psi)*sin(the), -cos(phi)*sin(psi), cos(psi)*sin(the) + cos(the)*sin(phi)*sin(psi);
cos(the)*sin(psi) + cos(psi)*sin(phi)*sin(the), cos(phi)*cos(psi), sin(psi)*sin(the) - cos(psi)*cos(the)*sin(phi);
-cos(phi)*sin(the) , sin(phi) , cos(phi)*cos(the)]

Rr = [ cos(the), 0, -cos(phi)*sin(the);
0, 1, sin(phi);
sin(the), 0, cos(phi)*cos(the)]

end

if (opt == 2)
disp('opt 2')
R = [ cos(psi)*cos(the), cos(psi)*sin(the)*sin(phi) - sin(psi)*cos(phi), cos(psi)*sin(the)*cos(phi) + sin(psi)*sin(phi);
sin(psi)*cos(the), sin(psi)*sin(the)*sin(phi) + cos(psi)*cos(phi), sin(psi)*sin(the)*cos(phi) - sin(phi)*cos(psi);
-sin(the) , cos(the)*sin(phi) , cos(the)*cos(phi)]

%[p;q;r] = Rr.[dphi;dthe;dpsi]
Rr = [1 0 -sin(the);
0 cos(phi) sin(phi)*cos(the);
0 -sin(phi) cos(phi)*cos(the)]

end

Rr_inv = simple(inv(Rr))

disp(separador)
disp('Vetor posição r em coord. inerciais (xyz são as coord. body):')

r = R * [x;y;z]

v_x = diff(r(1),the)*dthe + diff(r(1),phi)*dphi + diff(r(1),psi)*dpsi;
v_y = diff(r(2),the)*dthe + diff(r(2),phi)*dphi + diff(r(2),psi)*dpsi;
v_z = diff(r(3),the)*dthe + diff(r(3),phi)*dphi + diff(r(3),psi)*dpsi;

v_xx = diff(v_x,x); %vx parcela x
v_xy = diff(v_x,y); %vx parcela y
v_xz = diff(v_x,z); %vx parcela z

v_yx = diff(v_y,x);
v_yy = diff(v_y,y);
v_yz = diff(v_y,z);

v_zx = diff(v_z,x);
v_zy = diff(v_z,y);
v_zz = diff(v_z,z);

a1 = simple( x^2*(v_xx^2 + v_yx^2 + v_zx^2) );
a2 = simple( y^2*(v_xy^2 + v_yy^2 + v_zy^2) );
a3 = simple( z^2*(v_xz^2 + v_yz^2 + v_zz^2) );
a4 = simple( 2*x*y*(v_xx*v_xy + v_yx*v_yy + v_zx*v_zy) );
a5 = simple( 2*x*z*(v_xx*v_xz + v_yx*v_yz + v_zx*v_zz) );
a6 = simple( 2*y*z*(v_xy*v_xz + v_yy*v_yz + v_zy*v_zz) );

disp(separador)
disp('Vetor velocidade v2 em coord. inerciais:')

v2= a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6

%% separa os coeficientes em cxyz de acordo com a ordem de txyz
[cxyz,txyz] = coeffs(v2, [x,y,z]);

%% desprezando os termos cruzados e reorganizando na forma:

```

```

% x^2.b1 + y^2.b2 + z^2.b3 =
% (x^2 + y^2).c1 + (y^2 + z^2).c2 + (z^2 + x^2).c3
b1 = cxyz(1);
b2 = cxyz(4);
b3 = cxyz(6);

c1 = simplify( (b2 - b3 + b1)/2 );
c2 = simplify( (b3 - b1 + b2)/2 );
c3 = simplify( (b1 - b2 + b3)/2 );

%% Agora podemos escrever energia cinetica T
disp(separador)
disp('Energia Cinética T:')
syms Ixx Iyy Izz
T = (1/2) * Ixx * c2 + (1/2) * Iyy * c3 + (1/2) * Izz * c1

%% Energia potencial V = mgh
disp(separador)
disp('Energia Potencial V:')
% r(3) = rz, altura h no sist. coord. inercial
syms g m

% Substitui a integral de m pelos respectivos momentos de inercia.
rz_x = diff(r(3),x);
rz_y = diff(r(3),y);
rz_z = diff(r(3),z);
V = g*(Ixx*rz_x + Iyy*rz_y + Izz*rz_z)

%% Lagrangian L = T - V
disp(separador)
disp('Lagrangiano L:')
L = T - V

%% Derivadas Lagrange
%Deriva L por q_d
d11=simple( diff(L,dphi) );
d12=simple( diff(L,dthe) );
d13=simple( diff(L,dpsi) );
%em seguida deriva por t
syms t phi(t) the(t) psi(t) x(t) y(t) z(t)
d21 = simple( diff(eval(clean_cmd(d11)),t) );
d22 = simple( diff(eval(clean_cmd(d12)),t) );
d23 = simple( diff(eval(clean_cmd(d13)),t) );

%Deriva L por q
syms phi the psi x y z dphi dthe dpsi
d31 = diff(L,phi);
d32 = diff(L,the);
d33 = diff(L,psi);

%Reescreve em t
syms t phi(t) the(t) psi(t) x(t) y(t) z(t)
d31 = simple(eval(clean_cmd(d31)));
d32 = simple(eval(clean_cmd(d32)));
% d33 = simple(eval(clean_cmd(d33)))

%Expressao final Lagrange
disp(separador)
disp('Eq. de Lagrange:')
taux = simple(d21 - d31)
tauy = simple(d22 - d32)
tauz = simple(d23 - d33)

%% Resolve para qd e qdd
% a ideia eh suprimir as derivadas dos angulos deixando
% apenas omegas e eventuais angulos
rpy_d = diff([phi; the; psi]);

w1 = [1 0 0]*Rr*rpy_d
w2 = [0 1 0]*Rr*rpy_d;
w3 = [0 0 1]*Rr*rpy_d;
Omega = [w1; w2; w3];

%clean_cmd elimina as strings geradas pelo char e troca D() por diff()
% disp('Omega derivado no tempo:')
w1_d = diff(eval(clean_cmd(w1)));
w2_d = diff(eval(clean_cmd(w2)));
w3_d = diff(eval(clean_cmd(w3)));

```

```

Omega_d = [w1_d; w2_d; w3_d];

syms real phi the psi dphi dthe dpside ddphe ddthe ddpsi wx wy wz dwx dwy dwz

disp(separador)
disp('Sistema de eqs. de Omega e Derivada Omega:')
s1 = strcat(rewrite_notac_drpy(w1), ' - wx == 0')
s2 = strcat(rewrite_notac_drpy(w2), ' - wy == 0')
s3 = strcat(rewrite_notac_drpy(w3), ' - wz == 0')
s4 = strcat(rewrite_notac_drpy(w1_d), ' - dwx == 0')
s5 = strcat(rewrite_notac_drpy(w2_d), ' - dwy == 0')
s6 = strcat(rewrite_notac_drpy(w3_d), ' - dwz == 0')

disp(separador)
disp('Resolve para [s_dphi s_dthe s_dpsi s_ddphi s_ddthe s_ddpsi]:')
[s_dphi s_dthe s_dpsi s_ddphi s_ddthe s_ddpsi] = solve(s1,s2,s3,s4,s5,s6,dphi,dthe,dpside,ddphei,ddthe,ddpsi);
s_rpy = [s_dphi s_dthe s_dpsi s_ddphi s_ddthe s_ddpsi]

disp(separador)
disp('Eq. de Lagrange (dRPY e ddRPY --> w e dw):')
taux_omega = rewrite_tau_eq(taux, s_rpy)
tauy_omega = rewrite_tau_eq(tauy, s_rpy)
tauz_omega = rewrite_tau_eq(tauz, s_rpy)

disp(separador)
disp('Eq. de Lagrange (dRPY e ddRPY --> w e dw), com aprox. para angulos peq:')
taux_omega = rewrite_angPeq_aprox(char(taux_omega))
tauy_omega = rewrite_angPeq_aprox(char(tauy_omega))
tauz_omega = rewrite_angPeq_aprox(char(tauz_omega))

disp(separador)
disp('Aprox. omega para o angulo especifico correspondente:')
taux_rpy = rewrite_omega2rpy_aprox(taux_omega)
tauy_rpy = rewrite_omega2rpy_aprox(tauy_omega)
tauz_rpy = rewrite_omega2rpy_aprox(tauz_omega)

disp(separador)
disp('Descrição dos torques:')
% syms b l d w1 w2 w3 w4 Jr
% taux = b*1*(w4^2 - w2^2) + Jr*dthe*(w1+w3-w2-w4)
% tauy = b*1*(w3^2 - w1^2) + Jr*dthe*(-w1-w3+w2+w4)
% tauz = d*(w1^2 - w2^2 + w3^2 - w4^2)
syms Omegar Jr Mx My Mz
taux = Mx + Jr*dthe*(-Omegar)
tauy = My + Jr*dphi*Omegar
tauz = Mz

disp(separador)
disp('Reescrevendo em função de ddRPY:')
func_ddphi = rewrite_evid_ddRPY(taux_rpy,ddphi,taux)
func_ddthe = rewrite_evid_ddRPY(tauy_rpy,ddthe,tauy)
func_ddpsi = rewrite_evid_ddRPY(tauz_rpy,ddpsi,tauz)

disp(separador)
disp('Eqs. Dinâmicas finais:')
syms real Fzbar m
func_ddx = [1 0 0]*R*[0; 0; Fzbar/m]
func_ddy = [0 1 0]*R*[0; 0; Fzbar/m]
func_ddz = [0 0 1]*R*[0; 0; Fzbar/m]

disp(separador)
disp('Formula de Taylor:')
At1 = [diff(func_ddx,phi) diff(func_ddx,the) diff(func_ddx,psi);
diff(func_ddy,phi) diff(func_ddy,the) diff(func_ddy,psi);
diff(func_ddz,phi) diff(func_ddz,the) diff(func_ddz,psi)]

Ar1 = [diff(func_ddphi,dphi) diff(func_ddphi,dthe) diff(func_ddphi,dpsi);
diff(func_ddthe,dphi) diff(func_ddthe,dthe) diff(func_ddthe,dpsi);
diff(func_ddpsi,dphi) diff(func_ddpsi,dthe) diff(func_ddpsi,dpsi)]

Bt1 = [diff(func_ddx,Fzbar);
diff(func_ddy,Fzbar);
diff(func_ddz,Fzbar)]

Br1 = [diff(func_ddphi,Mx) diff(func_ddphi,My) diff(func_ddphi,Mz);
diff(func_ddthe,Mx) diff(func_ddthe,My) diff(func_ddthe,Mz);
diff(func_ddpsi,Mx) diff(func_ddpsi,My) diff(func_ddpsi,Mz)]

disp('Reformatando para ficar compativel com o .m do Kx e Kr:')
syms phibar psibar thebar dphibar dthebar dpsibar

```

```
phi = phibar; psi = psibar; the = thebar;  
dphi = dphibar; dthe = dthebar; dpsi = dpsibar;
```

```
At2 = subs(At1)  
Ar2 = subs(Ar1)  
Bt2 = subs(Bt1)  
Br2 = subs(Br1)
```

Apêndice F

Teoremas Auxiliares

F.1 Centro de Massa de um Corpo Rígido

Considerando um corpo rígido constituído de material homogêneo e um sistema de coordenadas \mathcal{S} qualquer. Seja r as coordenadas do vetor posição \vec{r} de um ponto do corpo rígido com massa dm em relação ao sistema \mathcal{S} . Por ser homogêneo, podemos escrever que a densidade $\rho(r)$ é constante e é dada por:

$$\rho(r) = \rho = m/V,$$

Portanto, $dm = \rho dV$ e, equivalentemente,

$$m = \int_{\mathcal{M}} dm = \int_V \rho dV,$$

sendo \mathcal{M} a região do espaço ocupada pelo corpo rígido com volume V e massa m . O centro de massa está localizado na seguinte posição com respeito ao sistema de coordenadas \mathcal{S} :

$$r_c = \frac{1}{m} \int_V \rho(r) r dV = \frac{\rho}{m} \int_V r dV = \frac{1}{V} \int_V r dV.$$

F.2 Energia Cinética de um Corpo Rígido

A energia cinética de uma partícula i é dada por

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i = \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^T \dot{r}_i, \quad (\text{F.1})$$

sendo m_i a massa da partícula, r_i as coordenadas do seu vetor posição visto de um sistema de coordenadas inercial e $v_i = \dot{r}_i$ a velocidade da partícula vista deste sistema de coordenadas inercial e representada no mesmo. A energia cinética de um

sistema de partículas (número finito N de partículas) é dada por:

$$K = \sum_{i=1}^N K_i.$$

A energia cinética \mathcal{K} de um **corpo rígido** homogêneo é definida por:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho(r) \|\vec{v}\|^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} (\vec{v} \cdot \vec{v}) dm,$$

sendo \vec{v} a velocidade de um ponto do corpo rígido de massa dm vista do referencial inercial correspondente ao vetor posição \vec{r} com coordenadas r neste sistema. Note que $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ e que $\dot{r} = v$, sendo v as coordenadas de \vec{v} neste sistema de coordenadas inercial.

Observação 6 (Derivada de Ponto e Vetor) *Considere dois pontos B e P em um corpo rígido e dois sistemas de coordenadas: um sistema inercial \mathcal{S}_0 e um sistema móvel \mathcal{S}_B , solidário ao corpo rígido com origem em B . Sejam \vec{p} o vetor posição de P com respeito a \mathcal{S}_0 e \vec{b} o vetor posição de B com respeito a \mathcal{S}_0 .*

1. $\vec{r} := \vec{p} - \vec{b}$ é um vetor livre.
2. \vec{p}, \vec{b} são pontos em \mathcal{S}_0 .
3. $\dot{\vec{p}}$ e $\dot{\vec{b}}$ são os vetores velocidades dos pontos \vec{p}, \vec{b} , visto de \mathcal{S}_0 .
4. O vetor $\dot{\vec{r}}$ é a variação temporal de \vec{r} , visto de \mathcal{S}_0 .
5. Tem-se que $\dot{\vec{p}} = \dot{\vec{b}} + \dot{\vec{r}}$, ou seja: variação de \vec{p} vista de \mathcal{S}_0 = variação de \vec{b} vista de \mathcal{S}_0 + variação de \vec{r} vista de \mathcal{S}_0

Teorema 7 *Podemos dizer que*

$$\dot{\vec{p}} = \dot{\vec{b}} + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

livre de coordenadas, mas com variações vistas de \mathcal{S}_0 . A velocidade angular $\vec{\omega}$ vista de \mathcal{S}_0 e escrita em \mathcal{S}_0 é representada por ω_0 e é tal que $\hat{\omega}_0 = \dot{R}R^T$. A velocidade angular $\vec{\omega}$ vista de \mathcal{S}_0 e escrita em \mathcal{S}_B é dada por $\omega_B = R^T \omega_0$. Vale lembrar que $\hat{\omega}_B = R^T \hat{R}$.

Prova: Seja p_i as coordenadas de \vec{p} em \mathcal{S}_i ($i = 0, B$). Analogamente para b_i e r_i . Tem-se então que:

$$p_0(t) = b_0(t) + R(t)r_B,$$

sendo R a matriz de rotação apropriada e $r_B \in \mathbb{R}^3$ constante. Então, a variação de \vec{p} vista de \mathcal{S}_0 e representada em \mathcal{S}_0 é dada por:

$$\dot{p}_0(t) = \dot{b}_0(t) + \dot{R}(t)r_B,$$

sendo \dot{b}_0 a variação de \vec{b} vista de \mathcal{S}_0 e representada em \mathcal{S}_0 e $\dot{R}(t)r_B$ a variação de \vec{r} vista de \mathcal{S}_0 e representada em \mathcal{S}_0 .

Definindo ω_0 em \mathcal{S}_0 , tal que $\hat{\omega}_0 = \dot{R}R^T$, tem-se

$$\dot{p}_0(t) = \dot{b}_0(t) + \omega_0(t) \times r_0(t).$$

Lembrando que $R^T(\omega_0 \times r_0) = R^T\omega_0(t) \times R^Tr_0(t)$, tem-se que

$$R^T\dot{p}_0(t) = R^T\dot{b}_0(t) + R^T(\omega_0(t) \times r_0(t)),$$

o que equivale a

$$\dot{p}_B(t) = \dot{b}_B(t) + \omega_B(t) \times r_B(t).$$

Logo, podemos dizer que $\dot{\vec{p}} = \dot{\vec{b}} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ **livre de coordenadas**, mas com variações vistas de \mathcal{S}_0 . ■

Teorema 8 (Energia Cinética Livre de Coordenadas) *Considere um ponto P do corpo rígido e seja C o centro de massa do corpo. Sejam ainda \vec{r}_c o vetor posição de C com respeito a P , \vec{r} o vetor posição de uma partícula de massa dm com respeito a P e \vec{I}^P o Tensor de Inércia do Corpo com respeito a P dado por*

$$\vec{I}^P = \int_{\mathcal{M}} (\|\vec{r}\|^2 \mathcal{I} - \vec{r}\vec{r}\cdot) dm,$$

sendo \mathcal{I} o operador identidade. Então, a energia cinética do corpo é dada por:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}m \|\vec{v}_P\|^2 + \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \times (m\vec{r}_c) + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{I}^P \vec{\omega},$$

sendo $\vec{\omega}$ a velocidade angular do corpo, m sua massa e \vec{v}_P a velocidade do ponto P vista de um referencial inercial.

Prova: Considere um ponto fixo P do corpo rígido e seu vetor de posição \vec{p} . Seja

$$\vec{z} = \vec{p} + \vec{r},$$

então

$$\vec{v} = \frac{d\vec{z}}{dt^0} = \frac{d\vec{p}}{dt^0} + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

A energia cinética é dada por :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} ((\vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r})) dm \\ &= \frac{1}{2} m \|\vec{v}_P\|^2 + \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \times \int_{\mathcal{M}} \vec{r} dm - \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \int_{\mathcal{M}} (\vec{r} \times (\vec{r} \times)) dm \vec{\omega} \end{aligned}$$

Note que $(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{r} \times = -\vec{r} \cdot \vec{\omega} \times$.

Então, considerando que $\vec{r} = \vec{r}_c + \vec{\rho}$ tem-se

$$\int_{\mathcal{M}} \vec{r} dm = \int_{\mathcal{M}} (\vec{r}_c + \vec{\rho}) dm = m \vec{r}_c + \underbrace{\int_{\mathcal{M}} \vec{\rho} dm}_{=0}$$

Agora, levando em conta a igualdade $\vec{r} \times (\vec{r} \times) = \vec{r} \vec{r} \cdot - \|\vec{r}\|^2 \mathcal{I}$, tem-se

$$K = \frac{1}{2} m \|\vec{v}_P\|^2 + \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \times (m \vec{r}_c) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I^P \vec{\omega}$$

onde, I^P , o Tensor de Inércia do Corpo com respeito a P é dado por

$$I^P = \int_{\mathcal{M}} (\|\vec{r}\|^2 \mathcal{I} - \vec{r} \vec{r} \cdot) dm$$

Em forma matricial, K pode ser expressa como:

$$K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{v}_p \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m\mathcal{I} & -m\vec{r}_c \times \\ m\vec{r}_c \times & I^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_p \\ \vec{\omega} \end{bmatrix}$$

Caso P esteja no centro de massa, i.e. $P = C$ tem-se

$$K = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \vec{v}_c \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m\mathcal{I} & 0 \\ 0 & I^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_c \\ \vec{\omega} \end{bmatrix}$$

onde $I^c = \int_{\mathcal{M}} (\|\vec{\rho}\|^2 \mathcal{I} - \vec{\rho} \vec{\rho} \cdot) dm$ é o tensor de inércia com respeito a C . Caso I^P seja representada num sistema de coordenadas fixo ao corpo, ela será constante. ■

Corolário 1 (Energia Cinética Livre de Coordenadas) No Teorema 8, fazendo $P \equiv C$, a energia cinética do corpo é dada por:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I} \vec{\omega},$$

sendo \vec{v} a velocidade do centro de massa vista de um referencial inercial e \vec{I} o tensor de inércia com respeito ao centro de massa.

Prova: Basta fazer $\vec{r}_c \equiv 0$ no Teorema 8. ■

Corolário 2 (Energia Cinética nas Coordenadas do Corpo) *Considere um sistema de coordenadas \mathcal{S}_C fixo no corpo e centrado no centro de massa C e um sistema de coordenadas inerciais \mathcal{S}_0 . Podemos escrever que*

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} v_C^T m v_C + \frac{1}{2} \omega_C^T I_C \omega_C,$$

ou, de forma compacta,

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} (V^C)^T \begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & I_C \end{bmatrix} V^C = \frac{1}{2} (V^C)^T \mathcal{M} V^C,$$

sendo V^C a velocidade do corpo expressa nas coordenadas do sistema \mathcal{S}_C , \mathcal{M} a matriz de inércia generalizada e

$$I_C := \int_V \rho(r_C) \hat{r}_C^T \hat{r}_C dV.$$

Prova: Sejam ainda \vec{r} o vetor posição de um ponto de massa dm com respeito ao centro de massa C e \vec{p} o vetor posição do centro de massa com respeito ao sistema inercial \mathcal{S}_0 . Seja r_C a coordenada de um ponto de massa dm no sistema \mathcal{S}_C e seja p_0 as coordenadas do centro de massa em \mathcal{S}_0 . A velocidade do centro de massa vista de \mathcal{S}_0 , \vec{v} , quando representada em \mathcal{S}_0 é dada por $v_0 = \dot{p}_0$. Por outro lado, esta velocidade representada em \mathcal{S}_C é dada por $v_C = R v_0 = R \dot{p}_0$. Entretanto, $\|\vec{v}\| = \|v_0\| = \|v_C\|$, pois $\|v_C\| = v_C^T v_C = v_0^T R^T R v_0 = v_0^T v_0 = \|v_0\|$.

Sendo assim, a velocidade v_m do ponto de massa dm vista de \mathcal{S}_0 e representada em \mathcal{S}_0 é dada por

$$v_m = \dot{r}_m = \dot{p}_0 + \dot{R} r_C,$$

sendo $r_m = p_0 + R r_C$. Relembrando que a energia cinética é dada por:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho(r_m) \|\vec{v}_m\|^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} (\vec{v}_m \cdot \vec{v}_m) dm,$$

sendo \vec{v}_m a velocidade de um ponto do corpo rígido de massa dm vista do referencial inercial correspondente ao vetor posição \vec{r}_m com coordenadas r_m neste sistema. Então, a energia cinética \mathcal{K} é dada por:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho(r_m) v_m^T v_m dV = \frac{1}{2} \int_V \rho(r_m) (\|\dot{p}_0\|^2 + 2\dot{p}_0^T \dot{R} r_C + \|\dot{R} r_C\|^2) dV.$$

Além disso, $\rho(r_m) = \rho(r_C)$, portanto, tem-se:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho(r_C) (\|\dot{p}_0\|^2 + 2\dot{p}_0^T \dot{R}r_C + \|\dot{R}r_C\|^2) dV.$$

1. $\|\dot{p}_0\|^2 = \|v_0\|^2 = \|v_C\|^2$;
2. $\dot{p}_0^T \dot{R}$ é independente da geometria do corpo rígido, portanto, $\frac{1}{2} \int_V \rho(r_C) (2\dot{p}_0^T \dot{R}r_C) dV = 2\dot{p}_0^T \dot{R} \frac{1}{2} \int_V \rho(r_m)(r_C) dV$. Portanto, $\frac{1}{2} \int_V \rho(r_C) (2\dot{p}_0^T \dot{R}r_C) dV = 2\dot{p}_0^T \dot{R} \frac{1}{2} \int_V \rho(r_C)(r_C) dV = 0$, pois $\int_V \rho(r_C)(r_C) dV$ corresponde as coordenadas do centro de massa no sistema \mathcal{S}_C .
3. $\|\dot{R}r_C\|^2 = (\dot{R}r_C)^T \dot{R}r_C$. Lembrando que $\hat{\omega}_C = R^T \dot{R}$, tem-se que $\|\dot{R}r_C\|^2 = (R\hat{\omega}_C r_C)^T (R\hat{\omega}_C r_C) = r_C^T \hat{\omega}_C^T R^T R \hat{\omega}_C r_C = r_C^T \hat{\omega}_C^T \hat{\omega}_C r_C = (\hat{\omega}_C r_C)^T \hat{\omega}_C r_C$. Notando que $\hat{\omega}_C r_C = \omega_C \times r_C = -r_C \times \omega_C = -\hat{r}_C \omega_C$. Logo, $\|\dot{R}r_C\|^2 = (\hat{r}_C \omega_C)^T \hat{r}_C \omega_C = \omega_C^T \hat{r}_C^T \hat{r}_C \omega_C$.

Dos itens acima, a energia cinética

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho(r_C) \|\dot{p}_0\|^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \rho(r_C) 2\dot{p}_0^T \dot{R}r_C dV + \frac{1}{2} \int_V \rho(r_C) \|\dot{R}r_C\|^2 dV$$

pode ser reescrita como

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho(r_C) \|v_C\|^2 dV + \frac{1}{2} \omega_C^T \left(\int_V \rho(r_C) \hat{r}_C^T \hat{r}_C dV \right) \omega_C.$$

Lembrando que a velocidade do centro de massa é independente da geometria do corpo rígido podemos escrever que

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \left(\int_V \rho(r_C) dV \right) \|v_C\|^2 + \frac{1}{2} \omega_C^T \left(\int_V \rho(r_C) \hat{r}_C^T \hat{r}_C dV \right) \omega_C.$$

Além disso, como $m = \int_V \rho(r_C) dV$ e definindo o **tensor de inércia nas coordenadas do sistema do corpo**

$$I_C := \int_V \rho(r_C) \hat{r}_C^T \hat{r}_C dV,$$

podemos escrever que

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} v_C^T m v_C + \frac{1}{2} \omega_C^T I_C \omega_C,$$

ou, de forma compacta,

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} (V^C)^T \begin{bmatrix} mI & 0 \\ 0 & I_C \end{bmatrix} V^C = \frac{1}{2} (V^C)^T \mathcal{M} V^C,$$

sendo V^C a velocidade do corpo expressa nas coordenadas do sistema \mathcal{S}_C e \mathcal{M} a matriz de inércia generalizada.

Corolário 3 (Energia Cinética nas Coordenadas Inerciais) *Considere um sistema de coordenadas \mathcal{S}_C fixo no corpo e centrado no centro de massa C e um sistema de coordenadas inerciais \mathcal{S}_0 . Podemos escrever que*

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}v^T m v + \frac{1}{2}\omega^T I_0 \omega,$$

sendo $I_0 := R I_C R^T$.

Prova: Segue a mesma linha que o Corolário 2. ■