



CONTROLE POR MODELO DE REFERÊNCIA DE SISTEMAS INCERTOS
BASEADO NO ALGORITMO SUPER-TWISTING

João Pedro Navarini

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadores: Eduardo Vieira Leão Nunes
Liu Hsu

Rio de Janeiro
Março de 2018

CONTROLE POR MODELO DE REFERÊNCIA DE SISTEMAS INCERTOS
BASEADO NO ALGORITMO SUPER-TWISTING

João Pedro Navarini

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Eduardo Vieira Leão Nunes, D.Sc.

Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat

Prof. Aldayr Dantas de Araújo, D.Sc.

Prof. Tiago Roux de Oliveira, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
MARÇO DE 2018

Navarini, João Pedro

Controle por Modelo de Referência de Sistemas Incertos Baseado no Algoritmo Super-Twisting/João Pedro Navarini. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XII, 117 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Eduardo Vieira Leão Nunes

Liu Hsu

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 108 – 113.

1. Controle por Modos Deslizantes. 2. Super-Twisting.
3. Controle Adaptativo por Modelo de Referência. I. Nunes, Eduardo Vieira Leão *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*Aos meus pais, Ademildes e
Osmar, e à minha esposa Joana,
por tudo.*

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Ademildes e Osmar, por todo carinho, dedicação, cobrança e motivação. Sem eles, não teria chegado até aqui.

À minha esposa, Joana, por todo o apoio, amor e compreensão. Sem ela teria desistido pelo caminho.

Ao meu irmão, Marcos Paulo, pela amizade e exemplo.

À PETROBRAS, por me oferecer a oportunidade de realizar o mestrado.

Ao meu antigo gerente Dennis Botinelly, pela orientação de carreira, pelo empenho na aprovação deste mestrado e pela compreensão e suporte por minhas ausências em função das aulas.

A todos os meus companheiros de trabalho, seja no Gás e Energia ou Libra, pela motivação, apoio e confiança.

Aos meus companheiros próximos de faculdade: Callebe, Caroline, Igor, Pietro e Rafael, por tornar a dura caminhada pela graduação um caminho mais alegre e leve. Me sinto representando a todos eles ao completar mais essa etapa.

Ao meu orientador Liu Hsu, pela criteriosa e valiosa avaliação e comentário.

Ao meu orientador Eduardo Vieira Leão Nunes, por toda a compreensão, suporte, repreensões e ensinamentos.

Aos professores Aldayr Dantas de Araújo e Tiago Roux de Oliveira, por terem aceitado participar da banca examinadora desta dissertação e terem contribuído decisivamente com suas observações e comentários.

Meus agradecimentos à COPPE/UFRJ pela oportunidade de realizar o mestrado com professores de excelência e estrutura impecável.

Por fim, como me ensinou o saudoso professor Sérgio Villas-Boas, dedico esse trabalho ao povo brasileiro, que contribuiu e permitiu a minha formação nesta Universidade. Este trabalho é uma pequena forma de retribuição ao investimento em mim depositado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CONTROLE POR MODELO DE REFERÊNCIA DE SISTEMAS INCERTOS BASEADO NO ALGORITMO SUPER-TWISTING

João Pedro Navarini

Março/2018

Orientadores: Eduardo Vieira Leão Nunes

Liu Hsu

Programa: Engenharia Elétrica

Nesta dissertação, propõe-se um controlador por modos deslizantes de ordem superior para sistemas incertos e monovariáveis com grau relativo unitário. O esquema é baseado no algoritmo *Super-Twisting* e no paradigma do controle adaptativo por modelo de referência usando apenas realimentação da saída. O algoritmo de controle é implementado utilizando ganhos variáveis para lidar com uma ampla classe de incertezas/perturbações. Filtros de aproximação de primeira ordem são empregados para viabilizar uma solução que não necessite que os estados estejam disponíveis para implementação do controlador. A estratégia proposta é capaz de garantir rastreamento exato de um modelo de referência com propriedades de convergência global em tempo finito. Além disso, a abordagem baseada no controle adaptativo por modelo de referência fornece uma forma natural para a utilização dos valores nominais dos parâmetros incertos da planta, possibilitando uma redução do esforço de controle. Resultados de simulação ilustram a efetividade da estratégia de controle proposta. Adicionalmente, é feita uma comparação com outra estratégia recentemente proposta na literatura que também é baseada no algoritmo *Super-Twisting* com ganhos variáveis, mas cuja solução é por realimentação de saída. Neste caso, o controle é obtido transformando o sistema em uma forma normal e estimando a norma dos estados não medidos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

MODEL REFERENCE CONTROL FOR UNCERTAIN SYSTEMS BASED ON
SUPER-TWISTING ALGORITHM

João Pedro Navarini

March/2018

Advisors: Eduardo Vieira Leão Nunes

Liu Hsu

Department: Electrical Engineering

In this dissertation, a higher order sliding mode controller is proposed for uncertain and monovariable systems with relative degree one. The solution is based on the super-twisting algorithm and on the model reference adaptive control paradigm, considering only output-feedback. The control algorithm is implemented using variable gains to deal with a wide class of uncertainties/disturbances. First order approximation filters are used to enable a solution that do not depend on the availability of the system states for the control implementation. The proposed strategy guarantees exact tracking to a reference model with global convergence propoerties in finite time. Furthermore, this approach based on the model reference adaptive control provide a natural structure for the application of nominal values to uncertain parameters of the plant, providing a control effort reduction. Simulation results exemplify the effectivity of the proposed control strategy. In addition, a comparison to the recently proposed in the literature output-feedback variable gains super-twisting algorithm solution is made. In the latter, the control is obtained using the normal form of the system and estimating the norm of unmeasured states.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
1.1 Objetivo	3
1.2 Organização	3
1.3 Notações, Termos e Conceitos	4
1.3.1 Aproximações por Filtros de Primeira Ordem	5
2 Controle por Modos Deslizantes - SMC	7
2.1 Principais Conceitos do Controle por Modos Deslizantes	9
2.1.1 Exemplo Básico	9
2.1.2 Definições e Conceitos	12
2.1.3 Existência do Modo Deslizante	15
2.2 Descrição Matemática de Modos Deslizantes	17
2.2.1 Método de <i>Filippov</i>	18
2.2.2 Conceito de Controle Equivalente	21
2.3 Projeto da Lei de Controle por Modos Deslizantes	23
2.4 Modos Deslizantes de Ordem Superior (HOSM)	25
2.4.1 Projeto da Lei de Controle por Modos Deslizantes de Ordem Superior	26
2.4.2 Controlador Twisting	32
2.4.3 Controlador Super-Twisting	34
2.4.4 Controlador Super-Twisting com Ganhos Variáveis	38
3 Controle Adaptativo por Modelo de Referência - MRAC	47
3.1 Controle por Modelo de Referência - MRC	49
3.1.1 Definição do Problema	49
3.1.2 Equação Geral de Cálculo dos Parâmetros Ideais	51
3.1.3 Equação do Erro de Saída do MRC	54
3.2 Controle Adaptativo por Modelo de Referência – MRAC	57
3.2.1 Definição do Problema	57

3.2.2	Lei de Adaptação	60
3.2.3	Análise da Perturbação de Entrada no Controle	61
4	Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída Baseado no Controle Adaptativo por Modelo de Referência	64
4.1	Controlador Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída Baseado no Controle Adaptativo por Modelo de Referência . .	65
4.1.1	Definição do Problema	65
4.1.2	O Controlador	67
4.1.3	Implementação em uma Planta Incerta	77
4.1.4	O Controlador Otimizado pelo Conhecimento Nominal da Planta	84
4.1.5	O Controle com Perturbação Dependente de Estados do Sistema	89
4.2	Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída	97
4.2.1	Definição do Problema	99
4.2.2	O Controlador	100
5	Conclusão e Trabalhos Futuros	106
	Referências Bibliográficas	108
A	Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída	114
A.1	Demonstração do Teorema 4.2	114

Lista de Figuras

2.1	Esquema do movimento unidimensional da massa unitária [1]	9
2.2	Desempenho da lei de controle via realimentação linear de estado (2.2) com convergência para região Ω [1]	10
2.3	Desempenho da lei de controle (2.11) com convergência assintótica das variáveis de estado [1]	12
2.4	Plano de fase do sistema (2.12), para $\rho = \kappa = 2$. (●) trajetórias na região de validade do plano de fase, (●) trajetórias fora da região de validade do plano de fase, (- -) reta de chaveamento $\sigma = x_2 + \kappa x_1 = 0$	13
2.5	Plano de fase do sistema (2.13), para $\rho = \kappa = 2$. (●) trajetórias na região de validade do plano de fase, (●) trajetórias fora da região de validade do plano de fase, (- -) reta de chaveamento $\sigma = x_2 + \kappa x_1 = 0$	14
2.6	Trajetoórias de estado e sinais de controle do sistema definido por (2.1) e (2.11) com os seguintes atrasos no chaveamento: (a,b) 0.1 s; (c,d) 0.05 s; (e,f) 0.01 s.1'	15
2.7	Plano de fase do sistema de controle a estrutura variável definido por (2.1) e (2.11), com $f(x_1, x_2, t) \equiv 0$ e $\kappa = \rho = 2$	16
2.8	Interpretação geométrica da solução de Filippov [1].	19
2.9	Modo Deslizante de Segunda Ordem [1].	27
2.10	Plano de Fase do controle <i>twisting</i> [1].	33
2.11	Plano de Fase do controle <i>super-twisting</i> [1].	35
2.12	Comparação entre saídas do diferenciador RED por modos deslizantes e filtro linear [1].	45
2.13	Desempenho da lei de controle (2.56), baseada no VGSTA (2.59), aplicada ao sistema do Exemplo 2.3 com perturbação (2.64): (a) (●) variável de deslizamento σ , (●) derivada $\dot{\sigma}$; (b) (●) estado \bar{x}_1 , (●) estado \bar{x}_2 ; (c) (●) ação de controle u	46
3.1	Estrutura geral de um controle MRAC.	48
3.2	Diagrama de blocos do Controle por Modelo de Referência (MRC).	52
3.3	Diagrama de blocos do Controle por Modelo de Referência (MRC) com lei de controle com filtros.	55

3.4	Representação equivalente do controle MRAC com perturbação d de entrada.	61
3.5	Representação equivalente do controle MRAC com parâmetros ideais e perturbação casada.	63
4.1	Controle MRAC da Figura 3.1, destacando ponto a ser alterado no controle Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída Baseado no Controle Adaptativo por Modelo de Referência.	67
4.2	Diagrama de blocos do controle Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída Baseado no Controle Adaptativo por Modelo de Referência.	72
4.3	Desempenho da lei de controle <i>variable gain super-twisting</i> por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.1 com condições iniciais nulas: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u	75
4.4	Desempenho da lei de controle <i>variable gain super-twisting</i> por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.1 com condições iniciais $x_0 = [11]^T$: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u	76
4.5	Resposta ao impulso de diversas curvas de $ h(t) $, com o FOAF $\frac{15}{s+1}$ em destaque.	82
4.6	Desempenho da lei de controle <i>variable gain super-twisting</i> por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.2 com condições iniciais nulas: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u ; (d) controle MRC com parâmetros ideais para a planta.	83
4.7	Desempenho da lei de controle <i>variable gain super-twisting</i> por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.1 com condições iniciais $x_0 = [0 \ 10]^T$: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u ; (d) controle MRC com parâmetros ideais para a planta; (e) erro de rastreamento do controle MRC ideal.	85
4.8	Diagrama de blocos do controle Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída Baseado no Controle Adaptativo por Modelo de Referência com controle MRAC nominal.	86

4.9	Desempenho da lei de controle <i>variable gain super-twisting</i> por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.3 com condições iniciais nulas: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u ; (d) controle MRC com parâmetros ideais para a planta.	90
4.10	Desempenho da lei de controle <i>variable gain super-twisting</i> por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.1 com condições iniciais $x_0 = [0 \ 10]^T$: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u ; (d) controle MRC com parâmetros ideais para a planta; (e) erro de rastreamento do controle MRC ideal.	91
4.11	Desempenho da lei de controle <i>variable gain super-twisting</i> por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.4 com condições iniciais $x_0 = [0 \ 10]^T$: (a) (●) saída da planta y , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u ; (d) controle MRC com parâmetros ideais para a planta.	98
4.12	Desempenho da lei de controle <i>variable gain super-twisting</i> por realimentação de saída aplicada ao sistema do Exemplo 4.5 com condições iniciais nulas: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u	104
4.13	Desempenho da lei de controle <i>variable gain super-twisting</i> por realimentação de saída aplicada ao sistema do Exemplo 4.5 com condições iniciais $x_0 = [0 \ 10]^T$: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u	105

Capítulo 1

Introdução

O controle automático tem desempenhado um papel fundamental no avanço da engenharia e da ciência. Além da extrema importância em sistemas de veículos espaciais, sistemas de direcionamento de mísseis, sistemas robóticos e similares, o controle automático tem se tornado de grande importância e parte integrante dos modernos processos industriais e de produção. Por exemplo, o controle automático é essencial no controle numérico de máquinas-ferramentas nas indústrias manufatureiras, no projeto de sistemas de piloto automático na indústria aeroespacial e no projeto de carros e caminhões na indústria automotiva. É essencial também em operações industriais, como o controle de pressão, de temperatura, de umidade, de viscosidades e de vazão em processos industriais [2].

O objeto a ser controlado, denominado **planta**, pode ser modelado matematicamente por equações diferenciais ordinárias, que relacionam, de forma geral, entradas u e saídas y . Embora sejam modeladas matematicamente, nem sempre os valores exatos dos parâmetros serão conhecidos *a priori*. Neste caso, a planta é chamada de **incerta** e valores limites para seus parâmetros são considerados conhecidos.

Adicionalmente, o sistema real pode estar submetido a ruídos não medidos, apresentar dinâmicas não-modeladas, não-linearidades ou até mesmo atrasos de medição ou atuação não previstos. Portanto, a robustez do controle a ser aplicado está bastante ligado à capacidade do controlador de ser eficiente apesar das premissas assumidas no projeto nem sempre corresponderem integralmente ao sistema prático.

Há diversas técnicas de controle que podem ser adequadas a problemas de controle em plantas incertas, com as características supracitadas. No entanto, duas das principais, e complementares, abordagens são o **controle por modos deslizantes** e o **controle adaptativo** [3]. Num passado recente, ambas as estratégias foram combinadas em estratégias de controle como [4–7].

O controle por modos deslizantes apresenta diversas propriedades bastante importantes, como: bom comportamento no transiente, convergência em tempo finito, insensibilidade a incertezas casadas e não-linearidades. Entretanto, um efeito carac-

terístico desta abordagem é o chaveamento de alta frequência do sinal de controle, também conhecido como *chattering*. Visando atenuar esse efeito indesejável, foi introduzido o conceito de modos deslizantes de ordem superior. Essa generalização garante a manutenção das vantagens supracitadas [8] além de ter a possibilidade de uma lei de controle contínua, com menor propensão ao *chattering* [9].

Dentre os controles de ordem superior, o controle *super-twisting* [8] tem tido grande destaque nos últimos anos, em função de algumas características únicas para controles por modos deslizantes: embora de segunda ordem, não necessita da derivada temporal da variável de deslizamento para a implementação da lei de controle; e, é absolutamente contínuo [10]. Por isso, esse algoritmo tem sido objeto intenso de estudos, aplicações e extensões, como o caso da diferenciação robusta e exata em tempo real [11], uma extensão do controle para o caso multivariável [12], uma aplicação com realimentação de saída [13] e sua versão com ganhos variáveis [10]. Esta abordagem tem como principal vantagem ser capaz de compensar de forma exata uma classe mais abrangente de incertezas/perturbações, além de obter uma convergência mais rápida em relação ao algoritmo convencional.

Além disso, os controles a estrutura variável por modos deslizantes são, originalmente, baseados na medição do estado do sistema [14]. No entanto, em sistemas práticos, nem sempre todos os estados estão disponíveis por impeditivos técnicos ou econômicos de medição. Portanto, há um interesse muito grande em estratégias baseadas em realimentação de saída, em que apenas a saída que deverá ser controlada é medida.

Já o controle adaptativo tem o conceito básico de calcular o sinal de controle utilizando estimativas dos parâmetros incertos da planta, ou diretamente das estimativas dos parâmetros do controlador, obtidas em tempo real baseado nos sinais da planta a ser controlada [3].

O Controle Adaptativo por Modelo de Referência (*Model Reference Adaptive Control - MRAC*), que é considerada uma das principais abordagens na literatura de controle adaptativo [15], pode ser basicamente descrito como uma configuração na qual o desempenho desejado para a planta é especificado por um modelo de referência, e então os parâmetros do controlador são ajustados em tempo real, baseados na diferença entre a saída da planta e a saída deste modelo. Este controle tradicionalmente conta com uma falta de robustez a perturbações externas ou dinâmicas não-modeladas, além de um transitório não-uniforme com respeito às condições iniciais, o que pode levar a uma convergência muito lenta [4].

Recentemente, foi proposta uma estratégia de controle por realimentação de saída com base no algoritmo *super-twisting* com ganhos variáveis para sistemas incertos com grau relativo unitário e na presença de uma classe bastante geral de perturbações não-lineares dependentes do estado. Para atingir o controle por rea-

alimentação de saída, são aplicados filtros de aproximação de primeira ordem para estimar um limitante superior para a norma da variável de estado não-medida [16].

1.1 Objetivo

O principal objetivo deste trabalho é desenvolver uma aplicação do controle *super-twisting* com realimentação de saída para sistemas incertos de primeira ordem, utilizando a estrutura do controle adaptativo por modelo de referência. Desta forma, busca-se avaliar uma estrutura mais simples de aplicação do algoritmo *super-twisting* com ganhos variáveis, sem a necessidade de estabelecer uma forma normal e que possa se valer de conhecimentos nominais da planta, visando ter um controle com menor amplitude, porém mantendo todas as vantagens já descritas do controle por modos deslizantes.

1.2 Organização

Esta dissertação é organizada da seguinte forma:

- Ainda no Capítulo 1, serão apresentados termos, notações e conceitos, em especial o do Filtro de Aproximação de Primeira Ordem, que serão aplicados e utilizados ao longo do trabalho.
- No Capítulo 2, são apresentados os principais tópicos e fundamentos referentes ao controle por modos deslizantes, incluindo o conceito de modos deslizantes de ordem superior e o algoritmo *super-twisting* e sua extensão com ganhos variáveis.
- No Capítulo 3, é apresentada a estrutura básica do controle adaptativo por modelo de referência.
- No Capítulo 4, são propostas estratégias de controle por realimentação de saída com base no algoritmo *Variable Gain Super-Twisting* baseado na estrutura do controle adaptativo por modelo de referência para sistemas incertos monovariáveis com grau relativo uniforme e unitário. Adicionalmente, é apresentada a estratégia de realimentação de saída do algoritmo *super-twisting* com ganhos variáveis proposta em [13] e seus resultados são comparados.
- No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões gerais sobre os trabalhos desenvolvidos e as perspectivas futuras.

1.3 Notações, Termos e Conceitos

São usadas no texto os seguintes conceitos e notações:

- $\|x\|$ denota a norma Euclidiana de um vetor x e $\|A\|$ denota a norma da matriz A induzida pela norma Euclidiana, que é dada pelo seu maior valor singular ($\sigma_{max}(A)$).
- O símbolo s representa tanto a variável de Laplace quanto o operador diferencial ($\frac{d}{dt}$) de acordo com o contexto em que é usado.
- Adota-se a representação mista do domínio do tempo (espaço de estados) com o domínio da frequência (transformada de Laplace). No entanto, para se definir precisamente essas representações, serão adotadas as seguintes notações. O sinal de saída y de um sistema linear e invariante no tempo com matriz de transferência $G(s)$ e entrada u é dado por $G(s)u$. A convolução pura $g(t)*u(t)$, sendo $g(t)$ a resposta ao impulso de $G(s)$, será escrita eventualmente como $G(s) * u$, por simplicidade. Seja a realização de $G(s)$ dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}$$

então,

$$y(t) = G(s)u(t) = g(t) * u(t) + Ce^{At}x(0)$$

onde o termo exponencial $Ce^{At}x(0)$ é a resposta homogênea do sistema ($u(t) \equiv 0$).

- Margem de estabilidade é um conceito fundamental a ser aplicado nos Filtros de Aproximação de Primeira Ordem, apresentados na seção 1.3.1. O termo margem de estabilidade foi utilizado em [17] para os pólos de uma função de transferência e sua definição é:

Definição 1.1. *A margem de estabilidade de $G(s)$ é dada por*

$$\gamma_0 := \min_j -\Re(p_j),$$

onde $\{p_j\}$ são os pólos de $G(s)$.

Um sistema com função de transferência $G(s)$ é BIBO estável (*bounded-input-bounded-output*), ou seja, estável no sentido entrada-saída, se, e somente se, $\gamma_0 > 0$. Em outras palavras, no caso de um sistema estável, a margem de estabilidade de uma função de transferência $G(s)$ é o módulo da parte real do

pólo mais próximo do eixo imaginário. Caso se trate de um sistema que não é BIBO estável, será o simétrico do pólo de maior valor na sua parte real.

Adicionalmente, define-se a margem de estabilidade de uma matriz real, conforme [18]:

Definição 1.2. *A margem de estabilidade de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dada por*

$$\lambda_0 := \min_j -\Re(\lambda_j),$$

onde $\{\lambda_j\}$ são os autovalores de A . Se $\lambda_0 > 0$, então A é denominada matriz Hurwitz.

- A definição de Filippov para a solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo será adotada [19]. Esta definição será melhor detalhada na seção 2.2.1.
- A função $\pi(t)$ representa qualquer função com decaimento exponencial, do tipo $K e^{-\lambda t}$, para escalares positivos K e $\lambda \forall t$.

1.3.1 Aproximações por Filtros de Primeira Ordem

Problemas de controle por modos deslizantes, em geral, exigem o conhecimento prévio dos limites superiores de certos sinais para o projeto do controlador. Quando não disponíveis, esses limites dos sinais devem ser estimados. No entanto, para sistemas incertos, obter uma aproximação de um sinal pode se tornar um problema de difícil solução, em especial se o sinal for função de um estado não medido ou função de uma planta desconhecida [20].

Os filtros de aproximação de primeira ordem (*First-order approximation filter - FOAF*) cumprem de forma simples essa tarefa de buscar um limite superior para sinais desconhecidos em sistemas incertos. Além disso, sua parametrização já foi extensamente abordada e foram desenvolvidas diferentes técnicas de otimização (ver [20–22]).

Teorema 1.1 ([20]). *Considere o sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}$$

onde $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Seja γ_0 a margem de estabilidade de $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ (conforme Definição 1.1), λ_0 a margem de estabilidade de A (conforme Definição 1.2), e $\gamma := \gamma_0 - \delta$, onde $\delta > 0$ é uma constante arbitrária menor que

γ_0 . A resposta ao impulso do sistema é dada por $g(t) = Ce^{At}B$, $t > 0$, e $g(0) = 0$ (condições iniciais nulas). Seja $\bar{u}(t)$ um limite superior instantâneo de $u(t)$, tal que $\|u(t)\| \leq \bar{u}(t), \forall t \geq 0$. Então, $\exists c_1, c_2 > 0$ tal que a resposta ao impulso de $g(t)$ satisfaça $\|g(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma t}$ e as seguintes inequações sejam válidas $\forall t \geq 0$:

$$\|g(t) * u(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma t} * \bar{u}(t) \quad (1.1)$$

$$\|y(t)\| \leq c_1 e^{-\gamma t} * \bar{u}(t) + \underbrace{c_2 e^{-(\lambda_0 - \delta)t} \|x(0)\|}_{\text{Condições iniciais}} \quad (1.2)$$

$$\leq c_1 e^{-\gamma t} * \bar{u}(t) + \pi(t)$$

Demonstração. Ver [20, Teorema 1].

□

Capítulo 2

Controle por Modos Deslizantes - SMC

O controle na presença de incertezas é certamente um dos principais tópicos da teoria de controle moderno. Na formulação de um problema real, sempre há discrepâncias entre o modelo teórico utilizado e a dinâmica real da planta. Projetar um controle que mantenha sua performance na presença dessas discrepâncias é uma tarefa desafiadora. Esse problema despertou grande interesse no desenvolvimento de técnicas de controle adaptativo (capítulo 3) e também de controle robusto, como o controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control* - **SMC**) [1].

Historicamente, o controle por modos deslizantes foi descoberto como um caso especial dos controles a estrutura variável (*Variable Structure Systems* - **VSS**). Estes sistemas compreendem uma variedade de estruturas diferentes com regras para o chaveamento entre elas em tempo real, o que gera um novo tipo de movimento que pode não pertencer a qualquer uma das estruturas que estão sendo chaveadas. Do ponto de vista matemático, são representados por equações diferenciais com lado direito descontínuo. O problema básico destas equações diferenciais é que as teorias convencionais de existência e unicidade de soluções não podem ser aplicadas, nos pontos nos quais o lado direito da equação não for analítico. Neste trabalho será adotada a definição de Filippov para a solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo [19].

O SMC foi proposto e elaborado inicialmente no início da década de 1950, na União Soviética por Emelyanov e diversos outros pesquisadores (ver [23]). Embora tenha sido publicado um livro em língua inglesa sobre o tema na década de 50 [24], estas idéias ficaram restritas à União Soviética até meados da década de 1970, quando foram difundidas para o mundo através da publicação de um livro por Itkis [25] e de um artigo de levantamento bibliográfico por Utkin [14] ambos escritos em inglês (ver [26]).

As principais vantagens desta técnica não-linear são seu bom comportamento no

transiente, convergência em tempo finito, e destacável robustez e insensibilidade à incertezas e perturbações [14, 23, 25, 26]. A ideia geral é desenvolver uma estratégia de chaveamento de modo que as trajetórias do sistema alcancem e se mantenham em uma superfície do espaço de estado com comportamento dinâmico desejado, chamada superfície de deslizamento. Durante o deslizamento, o desempenho do sistema torna-se insensível a incertezas paramétricas e a algumas classes de perturbações externas. Esta importante característica é conhecida como propriedade da invariância, e garante que o comportamento do sistema em modo deslizante seja descrito pela dinâmica da superfície de deslizamento. No entanto, uma característica intrínseca ao sinal de controle de um sistema por modos deslizantes é o chaveamento de alta frequência, também conhecido como *chattering*. Essa indesejável característica pode ser impeditiva para a aplicação da técnica em diversas aplicações práticas.

Na busca de solucionar este problema, recentemente, o conceito de superfície de deslizamento foi generalizado em [8] com a introdução dos modos deslizantes de ordem superior (*Higher Order Sliding Modes - HOSM*). Neste caso, ao invés de atuar apenas na primeira derivada do desvio sobre a superfície de deslizamento, o HOSM atua nas derivadas temporais de mais alta ordem e a superfície de deslizamento, ao invés de $s(x) = 0$, passa a ser definida por $s(x) = \dot{s}(x) = \dots = s^{(r-1)}(x) = 0$, onde r é a ordem do deslizamento.

Nos últimos anos, um algoritmo de controle baseado em modos deslizantes de segunda ordem conhecido como *Super-Twisting Algorithm (STA)* [8] tem atraído considerável atenção. Este algoritmo, além de atenuar o problema do *chattering* já mencionado para sistemas com grau relativo unitário, apresenta como principal vantagem o fato de não necessitar de nenhuma informação sobre a derivada temporal do desvio sobre a superfície de deslizamento para a implementação da lei de controle. Nos desenvolvimentos teóricos iniciais, as análises de estabilidade e convergência deste algoritmo eram baseadas em métodos geométricos [8] e na teoria de sistemas homogêneos [27], o que dificultava o seu desenvolvimento. Mais recentemente, com a introdução de análises baseadas em funções de Lyapunov [28, 29], foram propostas generalizações para o super-twisting baseadas na utilização de ganhos variáveis [10, 30], ampliando sua aplicabilidade.

O objetivo deste capítulo é apresentar os principais tópicos e fundamentos referentes à teoria de controle por modos deslizantes, a serem utilizados como ferramenta na sequência deste trabalho.

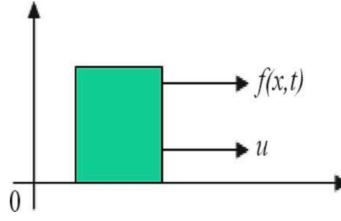


Figura 2.1: Esquema do movimento unidimensional da massa unitária [1]

2.1 Principais Conceitos do Controle por Modos Deslizantes

Nesta seção serão apresentadas as principais características do controle por modos deslizantes. Para tornar o processo mais intuitivo e visando facilitar o entendimento, os conceitos serão passados através de um exemplo ilustrativo.

2.1.1 Exemplo Básico

Seja uma massa unitária em um movimento unidimensional [1] conforme ilustrado na Figura 2.1. Adotando as variáveis x_1 e $x_2 = \dot{x}_1$ para a posição e a velocidade da massa, respectivamente, temos a seguinte descrição no espaço de estados (2.1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_2 &= u + f(x_1, x_2, t), & x_2(0) &= x_{20}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde u é a força exercida pelo controle e $f(x_1, x_2, t)$ é uma perturbação que reúne atrito e demais forças de resistência ao movimento. A função f é assumida desconhecida e limitada, tal que $|f(x_1, x_2, t)| \leq L$.

O problema consiste em projetar uma lei de controle $u = u(x_1, x_2)$ que leve a massa para a origem assintoticamente, ou seja, que x_1 e x_2 sejam levados para zero ($\lim_{t \rightarrow \infty} x_1, x_2 = 0$), apesar da presença da perturbação desconhecida e limitada $f(x_1, x_2, t)$.

É possível mostrar que, em geral, uma lei de controle baseada em realimentação linear de estado definida por

$$u = k_1 x_1 + k_2 x_2, \quad (2.2)$$

com ganhos k_1 e k_2 , não é capaz de garantir estabilidade assintótica para $f(x_1, x_2, t) \not\equiv 0$ e as variáveis apenas convergem para um domínio limitado $\Omega(k_1, k_2, L)$, em razão da presença da perturbação (caso $f(x_1, x_2, t) \equiv 0$, o sistema convergiria exponencialmente para zero). Esse fato é ilustrado na Figura 2.2, que mostra o desempenho de tal lei de controle linear considerando $k_1 = -3$, $k_2 = -4$, $x_{10} = 1$, $x_{20} = -2$ e $f(x_1, x_2, t) = \text{sen}(2t)$.

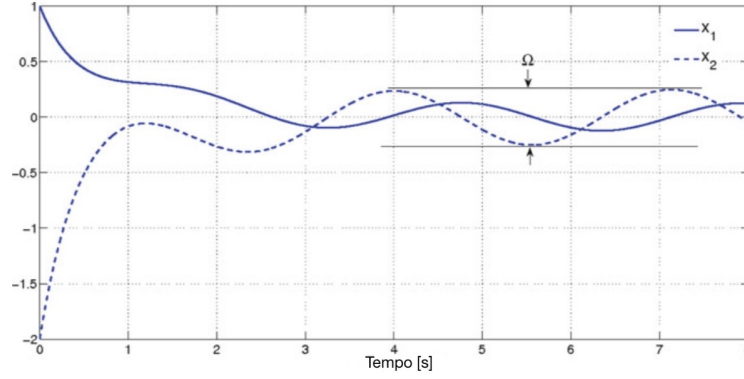


Figura 2.2: Desempenho da lei de controle via realimentação linear de estado (2.2) com convergência para região Ω [1]

O que se busca, portanto, é uma estratégia de controle que seja capaz de levar o sistema para o equilíbrio assintótico na origem sabendo apenas os limites da perturbação desconhecida $f(x_1, x_2, t)$. Uma boa candidata para essa dinâmica é a equação diferencial homogênea linear invariante no tempo:

$$\dot{x}_1 + \kappa x_1 = 0, \quad \kappa > 0 \quad (2.3)$$

Como sabe-se, a partir de (2.1), que $\dot{x}_1 = x_2$, portanto, uma solução geral da equação diferencial (2.3) é

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{10} e^{-\kappa t} \\ x_2(t) &= \dot{x}_1 = -\kappa x_1 = -\kappa x_{10} e^{-\kappa t} \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde é fácil perceber que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ convergem para zero exponencialmente. E o mais importante, sem qualquer efeito da perturbação $f(x_1, x_2, t)$. Destaca-se, adicionalmente, o fato de que o sistema de segunda ordem (2.1) se comporta como um sistema de primeira ordem em (2.4), tendo uma redução de ordem no seu modelo dinâmico. Mas para que essa dinâmica seja atingida, introduz-se uma nova variável no espaço de estados (2.1):

$$\sigma = \sigma(x_1, x_2) = x_2 + \kappa x_1, \quad \kappa > 0 \quad (2.5)$$

O objetivo passa a ser levar a nova variável de estado σ para zero (conforme apresentado em (2.3)) em tempo finito através do controle u . Caso isso seja atingido, garante-se que as variáveis de estado x_1 e x_2 irão para zero exponencialmente, com a taxa de convergência apresentada em (2.4). Para levar a variável σ para 0 e mantê-la

nesse valor, utilizam-se técnicas de função de Lyapunov [31]. Seja a derivada de σ

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \dot{x}_2 + \kappa \dot{x}_1 \\ &= \underbrace{u + f(x_1, x_2, t)}_{\dot{x}_2} + \kappa \underbrace{x_2}_{\dot{x}_1}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

e a função candidata de Lyapunov V

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2, \quad (2.7)$$

teremos:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sigma \dot{\sigma} \\ &= \sigma (u + f(x_1, x_2, t) + \kappa x_2).\end{aligned}\quad (2.8)$$

Seja o sinal de controle $u = -\kappa x_2 + \nu$, e substituindo na equação (2.8)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sigma \left(\overbrace{-\kappa x_2 + \nu}^u + f(x_1, x_2, t) + \kappa x_2 \right) \\ &= \sigma (f(x_1, x_2, t) + \nu) \\ &= \sigma f(x_1, x_2, t) + \sigma \nu \\ &\leq |\sigma|L + \sigma \nu,\end{aligned}\quad (2.9)$$

lembrando que $|f(x_1, x_2, t)| \leq L$.

Seja $\nu = -\rho \operatorname{sgn}(\sigma)$, com $\rho > 0$, e a função $\operatorname{sgn}(x)$ é definida como [1]:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad \text{e } \operatorname{sgn}(0) \in [-1, 1]$$

Substituindo ν na função (2.9)

$$\begin{aligned}\dot{V} &\leq |\sigma|L + \sigma \overbrace{(-\rho \operatorname{sgn}(\sigma))}^{\nu} \\ &\leq |\sigma|L - \underbrace{|\sigma|}_{\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)} \rho \\ &\leq -|\sigma|(\rho - L)\end{aligned}\quad (2.10)$$

nota-se que desde que se escolha o parâmetro de controle ρ maior do que o limite

da perturbação $|f(x_1, x_2, t)| \leq L$, o controle

$$\begin{aligned} u &= u(x_1, x_2) = -\kappa x_2 - \rho \operatorname{sgn}(\sigma), \quad \rho > L \\ \sigma &= \sigma(x_1, x_2) = x_2 + \kappa x_1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

fará com que o sistema seja exponencialmente estável, ou seja, atinja o ponto de equilíbrio $\sigma = 0$ em tempo finito, fazendo com que as variáveis de estado $x_1, x_2 \rightarrow 0$ com $t \rightarrow \infty$. Esse fato é ilustrado na figura 2.3, que mostra o desempenho de lei de controle descrita em (2.11), considerando $\rho = 2$, $\kappa = 1.5$, $x_{10} = 1$, $x_{20} = -2$ e perturbação $f(x_1, x_2, t) = \sin(2t)$.

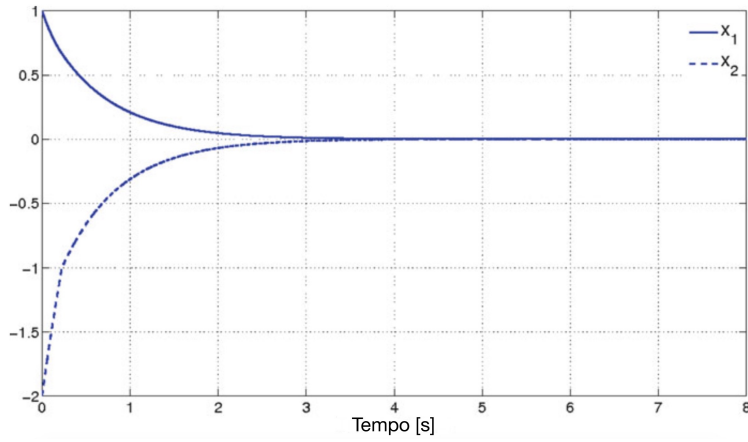


Figura 2.3: Desempenho da lei de controle (2.11) com convergência assintótica das variáveis de estado [1]

2.1.2 Definições e Conceitos

A partir do exemplo apresentado na seção 2.1.1, diversos conceitos e termos que formam a base do controle por modos deslizantes serão definidos, e eles serão utilizados ao longo de todo o texto.

A variável σ definida em (2.5) é chamada de **variável de deslizamento**. A superfície definida em (2.3) por essa variável $\sigma = x_2 + \kappa x_1 = 0$ é conhecida como **superfície de deslizamento**, e no exemplo bi-dimensional em questão, é uma linha reta no espaço de estados (2.1).

O comportamento descrito por (2.4), que trata do movimento dos estados x_1 e x_2 sobre a superfície de deslizamento, e que não faz parte explicitamente da estrutura de controle $u(x_1, x_2)$ recebe o nome de **modo deslizante**. Como foi destacado, na superfície de deslizamento, o comportamento do sistema não depende de parâmetros da planta ou da perturbação. Essa importante propriedade é chamada de **invariância**. Já o controle u , descrito em (2.11), que leva as variáveis de estado

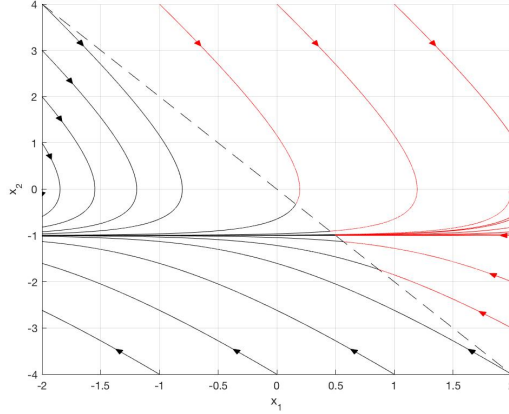


Figura 2.4: Plano de fase do sistema (2.12), para $\rho = \kappa = 2$. (●) trajetórias na região de validade do plano de fase, (●) trajetórias fora da região de validade do plano de fase, (- -) reta de chaveamento $\sigma = x_2 + \kappa x_1 = 0$

à superfície de deslizamento em tempo finito, e as mantém sobre essa superfície a partir de então, é chamado de **controle por modos deslizantes**.

É fácil notar, em função do componente $\text{sgn}(\sigma)$ do controle u , que trata-se de uma função descontínua. Ademais, ela pode ser descrita, não da forma compacta como apresentado em (2.11), mas como duas estruturas diferentes, que são chaveadas dependendo da região do plano de fase em que o sistema se encontra. Por simplicidade, considere o caso em que $f(x_1, x_2, t) \equiv 0$.

- Na região $\sigma(x_1, x_2) > 0$, o sistema possui a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \underbrace{-\kappa x_2 - \rho}_u \end{aligned} \quad (2.12)$$

- Na região $\sigma(x_1, x_2) < 0$, o sistema possui a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \underbrace{-\kappa x_2 + \rho}_u \end{aligned} \quad (2.13)$$

Os planos de fase das duas estruturas isoladas são ilustrados, respectivamente, nas figuras 2.4 e 2.5, para $\rho = \kappa = 2$. Note que ambas as estruturas são instáveis quando consideradas isoladamente. Entretanto, na região de validade de cada estrutura, todas as trajetórias do sistema apontam em direção à reta de chaveamento (superfície de deslizamento) $\sigma = x_2 + \kappa x_1 = 0$, que se encontra tracejada em ambas as figuras.

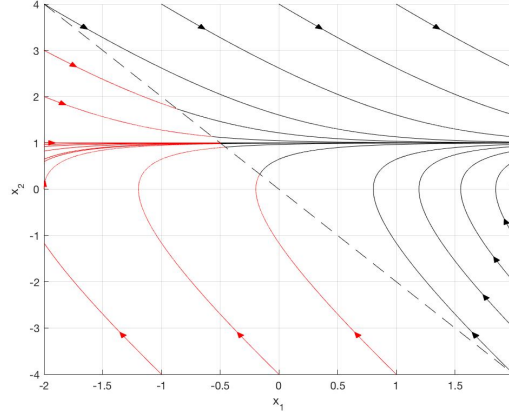


Figura 2.5: Plano de fase do sistema (2.13), para $\rho = \kappa = 2$. (●) trajetórias na região de validade do plano de fase, (●) trajetórias fora da região de validade do plano de fase, (- -) reta de chaveamento $\sigma = x_2 + \kappa x_1 = 0$

Deve ser notado, no entanto, que a função u é definida apenas para $\sigma \neq 0$. No caso ideal, o sistema irá se manter sobre a superfície de deslizamento $\sigma = 0$ e terá o comportamento de modo deslizante descrito por esta superfície [31]. Intuitivamente, o comportamento esperado do sistema é seu deslizamento sobre a superfície, pois conforme visto nas Figuras 2.4 e 2.5, as trajetórias apontam todas na direção da superfície de deslizamento [3]. No entanto, para mostrar que esse comportamento se confirma na prática e construir o plano de fases completo do sistema, serão considerados diferentes atrasos no chaveamento, de modo que a mudança do sinal de controle não seja instantânea, mas ocorra um pouco depois do sistema passar pela superfície de deslizamento [13].

Portanto, quanto menor o atraso, maior é a frequência de chaveamento e maior é a semelhança entre a reta próximo o comportamento do sistema estará do caso ideal sem atraso. A Figura 2.6 mostra as trajetórias de estado para uma planta conforme apresentado anteriormente ($\rho = \kappa = 2$ e perturbação nula) para condições iniciais próximas de $\mathcal{S} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma = 0\}$, considerando atrasos de 0.1 s, 0.05 s, e 0.01 s e confirma esse comportamento. Sendo assim, pode-se concluir que, no caso ideal (chaveamento sem atraso), a trajetória do sistema fica confinada à superfície \mathcal{S} . Logo, após um intervalo de tempo finito, o sistema passa a ser regido pela dinâmica desta superfície, que possui ordem reduzida em relação à dinâmica original do sistema em malha-fechada, e é descrita pela equação diferencial (2.3).

Com o comportamento do sistema na superfície de deslizamento mapeado, é possível construir o plano de fase completo do sistema, integrando os resultados apresentados nas figuras 2.4, 2.5 e 2.6, conforme figura 2.7.

O comportamento real de um sistema prático é mais próximo do apresentado na 2.6 do que com o caso ideal, ilustrado no plano de fases 2.7, uma vez que

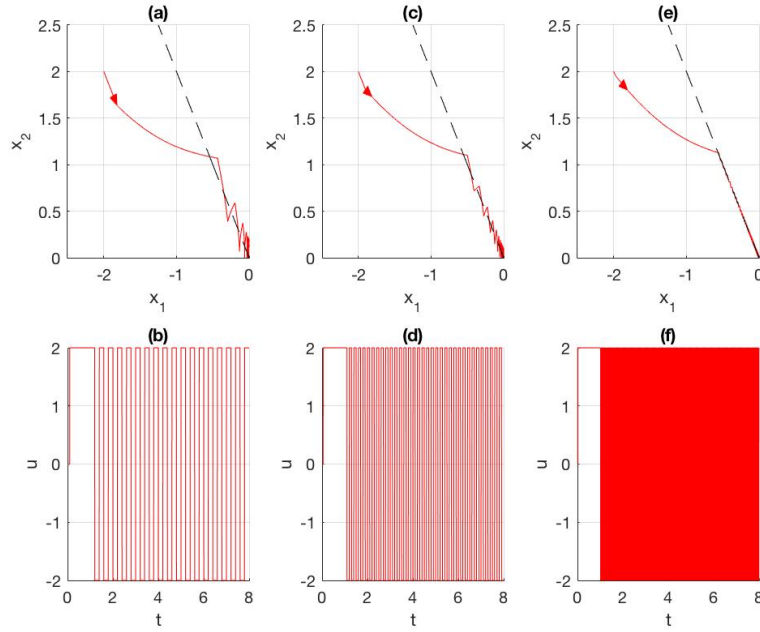


Figura 2.6: Trajetórias de estado e sinais de controle do sistema definido por (2.1) e (2.11) com os seguintes atrasos no chaveamento: (a,b) 0.1 s; (c,d) 0.05 s; (e,f) 0.01 s.⁴

nunca haverá um chaveamento instantâneo com elementos reais. Esse efeito de chaveamento em frequência alta e finita do sinal de controle durante o deslizamento é chamado de *chattering* [32]. Em simulações, onde o sistema é discretizado no tempo para sua computação, o efeito também se faz presente, com frequência inversamente proporcional ao período incremental utilizado no método matemático do simulador [1].

Este chaveamento pode instabilizar o sistema ao excitar modos rápidos, normalmente ignorados durante a modelagem. Os efeitos mais indesejáveis ocorrem quando a frequência do *chattering* não é suficientemente alta a ponto de ser totalmente atenuada pelo sistema. Nesses casos, uma das abordagens mais comuns para reduzir seus efeitos é a utilização de uma atenuação nas fronteiras da superfície de deslizamento, e dentro dessas fronteiras a função de chaveamento é aproximada por um ganho linear, de magnitude suficientemente elevada de forma que as perturbações desconhecidas sejam rejeitadas [32].

2.1.3 Existência do Modo Deslizante

O comportamento intuitivo para que o sistema entre em modo deslizante, descrito na seção 2.1.2, de que a superfície de deslizamento deve ser ao menos localmente atrativa, ou seja, deve existir um domínio envolvendo a superfície no qual as trajetórias do sistema apontem na sua direção, pode ser matematicamente expresso da

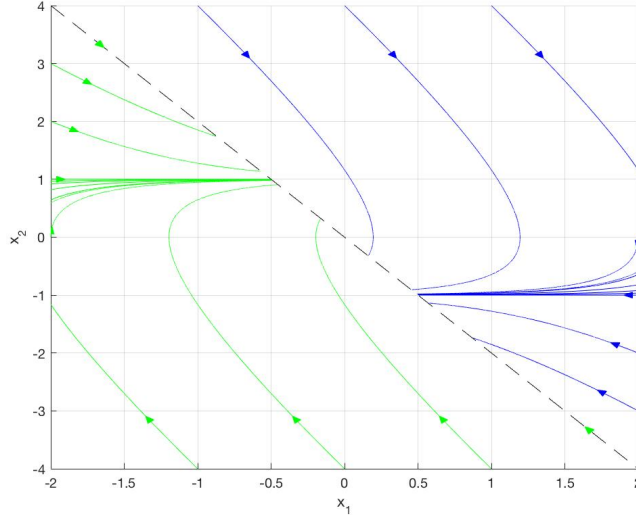


Figura 2.7: Plano de fase do sistema de controle a estrutura variável definido por (2.1) e (2.11), com $f(x_1, x_2, t) \equiv 0$ e $\kappa = \rho = 2$.

seguinte forma [33]:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \dot{\sigma} < 0 \quad e \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0^-} \dot{\sigma} > 0 \quad (2.14)$$

em algum domínio $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, a superfície de deslizamento seria:

$$\mathcal{D} = \mathcal{S} \cap \Omega = \{x \in \Omega : \sigma(x) = 0\}.$$

A expressão dada por (2.14) é frequentemente substituída pelo critério mais sucinto, embora equivalente, dado por:

$$\dot{\sigma} < 0 \quad (2.15)$$

As condições equivalentes (2.14) e (2.15) são chamadas de **condições de alcançabilidade**. Essas condições garantem apenas que a superfície de deslizamento seja alcançada assintoticamente, porém não garante a existência de um modo deslizante ideal.

Para garantir que a superfície de deslizamento seja alcançada em tempo finito, uma condição mais restritiva deve ser satisfeita. Percebe-se que, dada uma função de Lyapunov do tipo (2.7), a equação da alcançabilidade (2.15) é a derivada \dot{V} . Uma condição muito utilizada na literatura é a condição de alcançabilidade em tempo finito dada por [1]:

$$\dot{V} \leq -\alpha\sqrt{V}, \quad (2.16)$$

onde α é uma constante positiva. Essa relação não fere a condição de Lyapunov para a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $\dot{V} < 0 \quad \forall \sigma \neq 0$. Integrando

no intervalo $0 \leq \tau \leq t$, segue-se que

$$\sqrt{V(t)} \leq -\frac{1}{2}\alpha t + \sqrt{V(0)}.$$

Conseqüentemente, $V(t)$ atinge zero em um tempo finito t_r limitado por

$$t_r \leq \frac{2\sqrt{V(0)}}{\alpha}.$$

Levando em conta a relação (2.7), podemos reescrever t_r , o tempo necessário para o sistema a atingir a superfície $V = 0$ (que significa o mesmo que $\sigma = 0$), como

$$t_r \leq \sqrt{2} \frac{|\sigma(0)|}{\alpha}. \quad (2.17)$$

De forma similar, pode-se simplificar a equação (2.16) utilizando (2.7):

$$\dot{V} \leq -\alpha\sqrt{V} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\sigma| \quad (2.18)$$

No exemplo apresentado na seção 2.1.1, a equação \dot{V} era dada por (2.10) e pode ser rescrita como

$$\dot{V} \leq -|\sigma|(\rho - L) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha|\sigma|$$

Portanto, o ganho do controlador ρ pode ser calculado como

$$\rho = L + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha \quad (2.19)$$

Na equação (2.19), fica claro que o termo L é projetado para compensar as perturbações e o termo $\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha$ é responsável por determinar o tempo t_r que o sistema leva para alcançar a superfície de deslizamento. Quanto maior o valor de α , menor o tempo até alcançar a superfície.

2.2 Descrição Matemática de Modos Deslizantes

Nesta seção, serão apresentadas duas ferramentas matemáticas fundamentais na análise de sistemas a estrutura variável: a solução de Filippov para equações diferenciais com lado direito descontínuo, e o conceito de controle equivalente.

Inicialmente, será descrito um sistema com controle por modos deslizantes genérico, considerando o que foi descrito e apresentado na seção 2.1. Seja um sistema de controle do seguinte tipo:

$$\dot{x} = a(x, t) + b(x, t)u \quad (2.20)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$ são funções suaves e $u \in \mathbb{R}$, é uma lei de controle descontínua.

Suponha que a dinâmica desejada para o sistema seja obtida com trajetórias restritas à superfície de deslizamento $\sigma(x) = 0$. Considera-se que $\sigma(x)$ é continuamente diferenciável e que a superfície \mathcal{S} definida por $\mathcal{S} = \{x : \sigma(x) = 0\}$ é contínua em x , satisfazendo a seguinte condição de regularidade:

$$\nabla_x \sigma(x) \neq 0, \forall x \in \mathcal{S} \quad (2.21)$$

O sinal de controle é descontínuo e dado por:

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x) & \text{se } \sigma(x) > 0 \\ u^-(x) & \text{se } \sigma(x) < 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

onde $u^+(x)$ e $u^-(x)$ são funções localmente Lipschitz. Note que $u(x)$ não é definido em $\sigma(x) = 0$. A descrição matemática de modos deslizantes não é simples justamente por esse fato: o sinal de controle descontínuo (2.22) e, conseqüentemente, o sistema (2.20), não serem definidos sobre a superfície de deslizamento. Além disso, a condição de *Lipschitz* para a existência e unicidade de solução de equações diferenciais é violada na vizinhança da superfície de chaveamento. Na seção 2.1.2, foram utilizados argumentos intuitivos para tratar essa descontinuidade. Os métodos apresentados a seguir apresentam soluções para descrever, de maneira formal, o movimento durante o deslizamento.

2.2.1 Método de *Filippov*

Este método trata de forma axiomática a solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo. Considere a seguinte equação diferencial, que representa o sistema (2.20) com a ação do controle descontínuo (2.22) em malha fechada:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u, d, t) \\ &= f^c(x) \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ representa o estado, $u \in \mathbb{R}^m$ representa o controle e $d \in \mathbb{R}^q$ representa o perturbações ou incertezas externas e limitadas. A função $f^c(x)$ ($f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) é descontínua com respeito ao vetor de estados.

A superfície de chaveamento \mathcal{S} particiona o espaço de estados em duas regiões mutuamente excludentes, que são denotadas por $\mathcal{F}^+ := \{x : \sigma(x) > 0\}$ e $\mathcal{F}^- := \{x : \sigma(x) < 0\}$.

Considerando inicialmente o caso em que o sistema conta com uma única entrada e $\sigma : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Supondo x_0 um ponto de descontinuidade na superfície \mathcal{S} e

definindo $f_-^c(x_0)$ e $f_+^c(x_0)$ como limites de $f^c(x)$ quando se aproximam do ponto x_0 , respectivamente, por \mathcal{F}^+ e \mathcal{F}^- . A solução de Filippov é dada por [1]:

$$\dot{x}(t) = (1 - \alpha)f_-^c(x) + \alpha f_+^c(x), \quad (2.24)$$

onde o escalar $0 < \alpha < 1$.

O valor de α é escolhido tal que o vetor

$$f_a^c := (1 - \alpha)f_-^c + \alpha f_+^c$$

seja a intersecção da tangente a \mathcal{S} no ponto $x_0 \in \mathcal{S}$ com o segmento de linha que une f_+^c e f_-^c , conforme apresentado na figura 2.8. Neste ponto, os vetores f_+^c , f_-^c estão direcionados para as regiões \mathcal{F}^- , \mathcal{F}^+ , respectivamente. Portanto, a solução de Filippov pode ser considerado uma média entre os dois vetores "velocidade" no ponto x_0 [1].

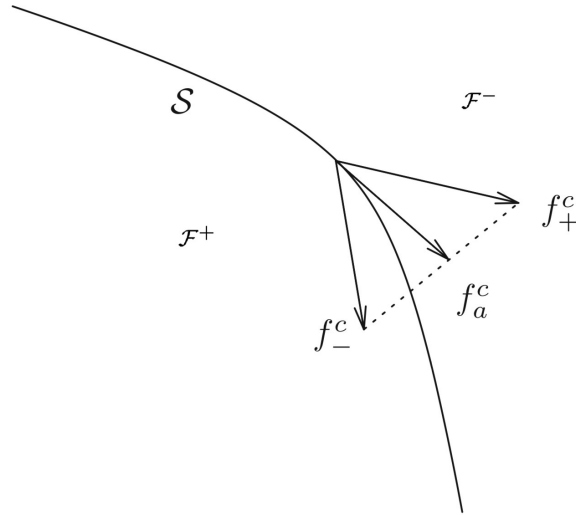


Figura 2.8: Interpretação geométrica da solução de Filippov [1].

É interessante salientar que, numa situação diferente da ilustrada, caso ambos os vetores f_+^c e f_-^c estivessem apontando ambos para uma mesma região \mathcal{F}^+ ou \mathcal{F}^- ao atingir a superfície \mathcal{S} no ponto $x_0 \in \mathcal{S}$, ao invés de permanecer sobre \mathcal{S} , ela cruzaria a superfície.

A equação (2.24) pode ser considerada uma equação diferencial cujo lado direito é definido como o conjunto convexo [1]

$$\mathcal{K}(x) = \{(1 - \alpha)f_-^c + \alpha f_+^c, \quad \forall \alpha \in [0, 1]\}$$

e assim $\dot{x}(t) \in \mathcal{K}(x)$.

Os valores de α que garantem $\dot{\sigma}(t) = 0$ podem ser calculados explicitamente da

(2.24). Por simplicidade, pode-se escrever o sistema linear $\sigma = Sx$, onde $S^T \in \mathbb{R}^n$. Então,

$$\dot{\sigma} = S\dot{x} = (1 - \alpha)f_-^c + \alpha f_+^c$$

Para manter o valor de $\sigma = 0$, o escalar α deve satisfazer à seguinte relação

$$(1 - \alpha)f_-^c + \alpha f_+^c = 0$$

ou seja,

$$\alpha = \frac{Sf_-^c}{Sf_-^c - Sf_+^c}$$

de forma que

$$\dot{x}(t) = \frac{Sf_-^c f_+^c - Sf_+^c f_-^c}{Sf_-^c - Sf_+^c}.$$

Para um caso mais genérico, onde $f(t, x)$ seja uma função mensurável (no sentido de Lebesgue) definida para quase todo (t, x) em um domínio E do espaço de fase (t, x) . Além disso, para qualquer subconjunto compacto $D \subset E$, exista uma função $A(t)$ finita (localmente integrável) em quase todo (t, x) em D , tal que $|f(t, x)| < A(t)$. Uma solução formal para equações diferenciais com lado direito descontínuo seria dada pela definição 2.1 a seguir [19, 34]:

Definição 2.1 (Solução de Filippov). *Uma função vetorial $x(\cdot)$ é solução de (2.23) no intervalo $[t_0, t_1]$, se $x(\cdot)$ é absolutamente contínua em $[t_0, t_1]$, e se, para quase todo $t \in [t_0, t_1]$, tem-se a seguinte inclusão diferencial:*

$$\dot{x} \in \mathcal{K}(x),$$

com

$$\mathcal{K}(x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N = 0} \overline{\text{co}} \{f(t, B_\delta(x) \setminus N)\}, \quad (2.25)$$

onde μ é a medida no sentido de Lebesgue, $B_\delta(x)$ representa uma bola de raio δ centrada em x , $\overline{\text{co}}\{\cdot\}$ denota o fecho convexo, $f(t, B_\delta(x) \setminus N)$ é conjunto de todos os valores de $f(t, x)$ para $x \in B_\delta(x) \setminus N$, e a notação $\bigcap_{\mu N = 0}$ denota a interseção de todos os conjuntos N de medida nula (no sentido de Lebesgue).

Note que, para um ponto x_s pertencente à superfície de descontinuidade $\sigma(x) = 0$, $\mathcal{K}(x)$ representa o conjunto convexo mínimo de todos os possíveis valores limite de $f(t, x)$ na vizinhança de x_s , com x variando em quase toda uma vizinhança δ ($\delta \rightarrow 0$), a menos de um conjunto de medida nula. Para x_p fora da superfície de descontinuidade, $\mathcal{K}(x)$ corresponde ao próprio campo vetorial $f(t, x_p)$ [33].

Uma interpretação mais simples da definição 2.1 é, considerando o caso onde os possíveis valores limites sejam finitos (f_1, f_2, \dots, f_n) em certo ponto x . Qualquer

possibilidade de “velocidade” de Filippov tem a forma $\dot{x} = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$, onde $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, e pode ser considerado como um valor médio da velocidade dos valores f_i durante a fração de tempo $\lambda_i \Delta t$ no intervalo infinitesimal de tempo Δt [1].

Até aqui, foram apresentadas as condições necessárias para a existência da solução de Filippov do sistema definido por (2.23). Uma condição suficiente para garantir a unicidade da solução é a de que, se os campos vetoriais $f^c_+(t, x)$ e $f^c_-(t, x)$ forem localmente Lipschitz em x nas regiões \mathcal{F}^+ e \mathcal{F}^- , respectivamente. Adicionalmente, se $f^c(x)$ for contínua por partes, então a solução será única a partir de um instante t_0 se pelo menos uma das desigualdades

$$Sf^c_+(x) < 0, \quad Sf^c_-(x) > 0,$$

for satisfeita $\forall x \in \mathcal{S}$ [33].

2.2.2 Conceito de Controle Equivalente

Uma forma alternativa e simplificada de analisar a dinâmica na superfície de deslizamento em sistemas por modos deslizantes é através do conceito de controle equivalente, proposto por Utkin [14]. O controle equivalente é definido como a ação de controle **contínua** necessária para manter a solução sobre a superfície de deslizamento. A ideia principal é explorar o fato de que em modos deslizantes convencionais, $\sigma = \dot{\sigma} = 0$. Essa condição sobre a derivada da variável de deslizamento pode ser reescrita como [1]

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{\dot{x}} = 0.$$

Com $\dot{x} = f(x, u, d)$, o controle equivalente u_{eq} , que é a função contínua requerida para manter o deslizamento, pode-se reescrever a relação acima como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, u_{\text{eq}}, d) = 0$$

Considerando o seguinte sistema típico:

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u + d(t, x), \quad (2.26)$$

sujeito a uma ação de controle descontínua $u \in \mathbb{R}^m$ capaz de garantir que o modo deslizante seja alcançado na superfície de deslizamento $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma(x) = 0\}$, onde $\sigma(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função continuamente diferenciável, as funções $f(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ são suaves, e $d(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

é uma perturbação limitada e desconhecida. É possível obter a ação de controle equivalente resolvendo a equação linear

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) u_{\text{eq}} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} d(t, x) = 0,$$

logo, assumindo que $\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x)$ é não-singular, pode-se colocar a equação em função do controle desejado

$$u_{\text{eq}} = - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} [f(t, x) + d(t, x)], \quad (2.27)$$

Para obter a dinâmica do sistema em malha-fechada durante o deslizamento, basta substituir o valor de u_{eq} obtido em (2.27) no sistema (2.26):

$$\dot{x} = \left(I - g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) [f(t, x) + d(t, x)]. \quad (2.28)$$

Suponha agora que a perturbação de entrada $d(t, x)$ seja casada, tal que

$$d(t, x) = g(t, x) \varphi(t, x).$$

Neste caso, a dinâmica em malha-fechada durante o deslizamento é reduzida a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(I - g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) [f(t, x) + (g(t, x) \varphi(t, x))] \\ &= \left(I - g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) f(t, x) + (g(t, x) - g(t, x)) \varphi(t, x), \\ &= \left(I - g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) f(t, x), \end{aligned}$$

uma vez que $g(t, x) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} g(t, x) = g(t, x)$. Note que neste caso a dinâmica é independente de $d(t, x)$. Esse resultado demonstra que, ao alcançar o modo deslizante, o sistema torna-se insensível a perturbações e incertezas casadas e confirma a propriedade da invariância, apresentada na seção 2.1.2 [13].

É importante destacar que o controle equivalente u_{eq} calculado em (2.27) é oriundo de operações algébricas sobre a equação (2.26) e é absolutamente independente do sinal que de fato será aplicado no sistema pelo controle por modos deslizantes. Enquanto este será descontínuo por natureza, aquele sempre será suave. Ademais, o cálculo (2.27) depende explicitamente do valor da perturbação $d(t, x)$, a qual será geralmente desconhecida, não sendo possível implementar o controle u_{eq} na prática.

Este conceito deve ser pensado como uma ação de controle abstrata que facilita a obtenção de uma expressão para a dinâmica em modo deslizante, com o objetivo de auxiliar a análise de estabilidade do sistema em malha-fechada [1].

Exemplo 2.1. Considere o sistema da seção 2.1.1, descrito por (2.1) (para evitar ambiguidade dos termos, a perturbação $f(x_1, x_2, t)$ é renomeada para $\phi(x, t)$), para $t \geq t_r$, onde t_r é o instante de tempo em que a superfície de deslizamento $\sigma = x_2 + \kappa x_1 = 0$ (2.3) é alcançada. Pode-se reescrever sua equação de estados na forma (2.26):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(t,x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g(t,x)} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \phi(x, t) \end{bmatrix}}_{d(t,x)}$$

Calcula-se o vetor $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} & \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa & 1 \end{bmatrix}.$$

Com isso, pode-se aplicar o cálculo do controle equivalente dado por (2.27):

$$\begin{aligned} u_{\text{eq}} &= - \left(\begin{bmatrix} \kappa & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \kappa & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \phi(x, t) \end{bmatrix} \right) \\ &= -\kappa x_2 - \phi(x, t) \end{aligned}$$

Portanto, o sistema (2.1) em malha fechada durante o deslizamento, pode ser reescrito considerando o controle equivalente para representar sua dinâmica:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\kappa x_2 \end{aligned}$$

que é insensível à perturbação $\phi(x, t)$ e tem como solução (2.4), como visto na seção 2.1.1.

2.3 Projeto da Lei de Controle por Modos Deslizantes

Considere o seguinte sistema não linear monovariável (SISO)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + g(x, t)u \\ \sigma &= \sigma(x, t) \end{aligned} \tag{2.29}$$

onde $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são funções suaves e desconhecidas, $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $u \in \mathbb{R}$ é o sinal de controle e $\sigma = \sigma(x, t)$ é uma função de saída mensurável, cuja dinâmica dos zeros (ver [35]) associada é estável e satisfaz o objetivo de controle (rastreamento ou estabilização).

O grau relativo do sistema n^* é assumido como conhecido e constante, sendo igual a 1. Isto significa de modo simplificado que o controle u só aparece explicitamente na primeira derivada de σ .

O objetivo é garantir que o sistema entre em deslizamento ideal num tempo finito. Para tal, a seguinte restrição deve ser satisfeita:

$$\sigma(x, t) = 0, \quad \forall t > t_r \quad (t_r \text{ finito}) \quad (2.30)$$

Para satisfazer a restrição (2.30) basta atender a condição de alcançabilidade em tempo finito descrita em (2.15), que depende da derivada $\dot{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \dot{x} \\ &= \underbrace{\frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x, t)}_{a(x, t)} + \underbrace{\frac{\partial \sigma}{\partial x} g(x, t)}_{b(x, t)} u \\ &= a(x, t) + b(x, t)u \end{aligned} \quad (2.31)$$

Substituindo o valor da derivada temporal de σ obtido em (2.31) na equação apresentada em (2.18) para garantir a alcançabilidade:

$$\begin{aligned} \sigma \dot{\sigma} &< -\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha |\sigma| \\ \sigma [a(x, t) + b(x, t)u] &< -\frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \underbrace{\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)}_{|\sigma|} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Para o projeto da lei de controle as seguintes hipóteses devem ser satisfeitas [36]:

Hipótese 2.1. *Assume-se que os limitantes das funções $|a(x, t)|$ e $|b(x, t)|$ são conhecidos. Mais especificamente, são conhecidas funções positivas $A(x, t)$, $B_1(x, t)$ e $B_2(x, t)$ tais que, globalmente*

$$\begin{aligned} |a(x, t)| &\leq A(x, t) \\ 0 < B_1(x, t) &\leq |b(x, t)| \leq B_2(x, t) \end{aligned}$$

Hipótese 2.2. *Assume-se que o sinal de $b(x, t)$ ($\operatorname{sgn}(b(x, t))$) é conhecido.*

Portanto, o controle descrito em (2.32) pode ser escrito considerando os valores

limites da hipótese 2.1 e o conhecimento do sinal da hipótese 2.2:

$$u = -\frac{A(x, t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha}{B_1(x, t)} \operatorname{sgn}(b(x, t)) \operatorname{sgn}(\sigma(x, t)). \quad (2.33)$$

E o valor u calculado garante que a condição (2.15) seja satisfeita. Como resultado, $\sigma(x, t)$ será globalmente conduzida para zero em algum tempo finito, independentemente do crescimento não linear das incertezas.

Um ponto importante a ser observado é a importância do conhecimento da direção de controle em esquemas baseados em modos deslizantes convencionais, conforme hipótese 2.2. Recentemente, há pesquisas avançando sobre a aplicação das técnicas de controle de ordem superior preterindo desta hipótese (ver [37]).

2.4 Modos Deslizantes de Ordem Superior (HOSM)

A ideia básica no controle por modos deslizantes é garantir que o sistema satisfaça uma restrição apropriadamente escolhida. Para isto, o controle deve reagir imediatamente a qualquer desvio que o sistema apresente, conduzindo-o novamente para a restrição através de um controle suficientemente intenso.

O controle por modos deslizantes, por apresentar esta característica, é extremamente eficiente e com grande acurácia em sistemas incertos. É provavelmente a técnica de controle robusto de maior êxito em lidar com perturbações limitadas e dinâmica parasitas [26, 38, 39]. Entretanto, todas essas vantagens têm um custo.

Como visto na seção 2.1, oscilações indesejadas de alta frequência, o chamado *chattering*, é parte intrínseca do controle e pode ter impactos grandes no sistema, impedindo sua implementação em muitos casos. Este é um dos principais problemas do controle por modos deslizantes [1].

Para solucionar este problema, surgiu na década de 1990 [8], o chamado controle por modos deslizantes de segunda ordem como impulso para a já madura técnica de controle SMC, e posteriormente, nos anos 2000 [40], conceitos de controles de ordem superior (*Higher Order Sliding Modes* - **HOSM**) foram introduzidos. Esses novos desenvolvimentos foram motivados em grande parte pelos seguintes problemas inerentes à solução convencional [1]:

- 1 A solução convencional de modos deslizantes é restrita para plantas de grau relativo unitário com relação à variável de deslizamento.
- 2 O problema do chaveamento em alta frequência (*chattering*) é inerente aos sistemas reais e práticos, sendo muito difícil de atenuar ou evitar.

O controle por modos deslizantes de ordem superior, além de preservar as principais vantagens do controle por modos deslizantes convencional e fornecer uma acurácia ainda maior, também mitiga esses problemas intrínsecos à técnica original [9]. Como atua nas derivadas temporais de ordem superior da variável de deslizamento (em contraste à apenas a primeira derivada da técnica original), é efetivo para graus relativos arbitrários e o efeito de chaveamento de alta frequência é “escondido” na derivada mais alta da variável de deslizamento [1].

O principal problema na implementação de um HOSM é o acréscimo de informação requerida. De forma geral, um controlador por modos deslizantes de ordem r , para manter a restrição $s = 0$, necessita que os sinais $s, \dot{s}, \dots, s^{(r-1)}$ estejam disponíveis. Este problema foi resolvido, pelo menos de forma teórica, através dos diferenciadores exatos e robustos (*Robust Exact Differentiators - REDs*), apresentados em [40–42].

Estes diferenciadores são capazes de fornecer em tempo real derivadas exatas até a ordem l , desde que a derivada de ordem $l + 1$ seja limitada. Na prática, devido a existência de atrasos e ruídos, o diferenciador apresenta erros na estimativa das derivadas, embora possua uma performance assintoticamente ótima na presença de pequenos ruídos de medição [43].

2.4.1 Projeto da Lei de Controle por Modos Deslizantes de Ordem Superior

A definição formal de um sistema de modos deslizantes de ordem r é:

Definição 2.2 ([1, 9]). *Considere a equação diferencial descontínua*

$$\dot{x} = f(x),$$

entendida no sentido de Filippov (2.2.1), com função de restrição $\sigma(x)$ suave. Suponha que as seguintes condições sejam satisfeitas:

i As derivadas temporais $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ são funções contínuas do estado x .

ii O conjunto

$$\mathcal{S}_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0\} \quad (2.34)$$

é um conjunto integral não vazio, ou seja, consiste em trajetórias de Filippov.

iii O conjunto de campos vetoriais admissíveis de Filippov (2.25) nos pontos pertencentes a (2.34) contém mais de um vetor.

Então, o movimento no conjunto (2.34) é dito existir em um modo deslizante de ordem r , e o conjunto (2.34) é denominado conjunto deslizante de ordem r . O caso

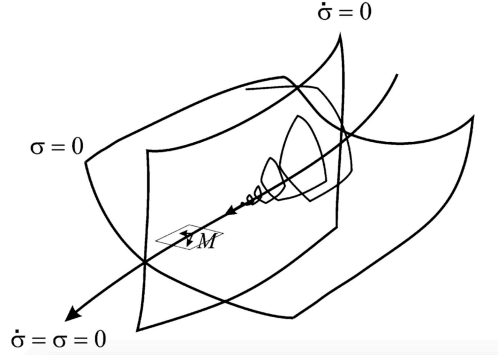


Figura 2.9: Modo Deslizante de Segunda Ordem [1].

não-autônomo é reduzido ao caso considerado acima introduzindo o estado fictício t , com dinâmica dada por $\dot{t} = 1$.

Em outras palavras, se a tarefa for garantir que uma função suave σ seja mantida igual a zero (2.34), então a ordem do deslizamento é o número total de derivadas contínuas de σ (incluindo a derivada zero, i.e., $\sigma^{(0)} = \sigma$), na vizinhança do modo deslizante. Desta forma, o modo deslizante de ordem r é determinado pelas igualdades

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0,$$

que formam uma condição de dimensão r no espaço de estado do sistema dinâmico.

Para um caso $r = 2$, o movimento do modo deslizante no conjunto (2.34) é apresentado na figura 2.9. O terceiro item do 2.2 é ilustrado pelos dois vetores de direção no ponto M da superfície de deslocamento pelo conjunto (2.34).

Deve ser ressaltado que para um deslizamento de ordem r a derivada $\sigma^{(r)}$ não é uma função contínua das variáveis do espaço de estado. Logo, a ordem do deslizamento caracteriza o grau de suavidade dinâmica na vizinhança do modo deslizante. O modo deslizante convencional, no qual a maior parte dos sistemas a estrutura variável é baseada, caracteriza-se por um deslizamento de primeira ordem ($\dot{\sigma}$ é descontínua) [33].

Segundo a definição, para que o modo deslizante convencional se estabeleça a convergência para a superfície de deslizamento deve ocorrer em tempo finito. Já no caso dos modos deslizantes de ordem superior a convergência também pode ser assintótica. Um exemplo simples de convergência assintótica para um conjunto deslizante é um problema cuja variável de deslizamento a ser mantida em zero é s , enquanto o controle aparece explicitamente apenas em \ddot{s} .

A função de restrição escolhida é $\sigma = s + \dot{s}$. Por construção, $\dot{\sigma} = \dot{s} + \ddot{s}$ contem o controle, e portanto σ pode ser mantido em zero por meio de um modo deslizante de primeira ordem (convencional). Neste caso, existe um modo deslizante de segunda ordem assintoticamente estável com respeito a restrição $s = 0$ na origem (e somente

na origem) $s = \dot{s} = 0$ [1].

A acurácia com que um modo deslizante mantém uma determinada restrição está diretamente relacionada ao intervalo de tempo entre duas medições ou ao atraso de chaveamento τ , tal que $|s| = O(\tau)$. Em um modo deslizante de primeira ordem, a primeira derivada temporal $\dot{\sigma}$ do desvio sobre a restrição é descontínua, e a acurácia com que se mantém a restrição $\sigma = 0$ é proporcional a τ ($|\sigma| = O(\tau)$). Similarmente, a derivada $\sigma^{(r)}$ é descontínua em um modo deslizante de ordem r , e a restrição $\sigma^{(r-1)} = 0$ é mantida com acurácia proporcional a τ . Isso implica que as demais restrições $\sigma^{(r-i)} = 0$, com $i = 1, 2, \dots, r$, são mantidas com acurácias proporcionais a τ^i . Logo, a acurácia com que um modo deslizante de ordem r pode manter a restrição $\sigma = 0$ é proporcional a τ^r ($|\sigma| = O(\tau^r)$) [8, 43]. Note que estas acurácias são observadas apenas durante o modo deslizante, e portanto são garantidas apenas para HOSMs com convergência em tempo finito.

Intuitivamente, é possível perceber que o conceito de ordem do sistema de modos deslizantes está intimamente ligado ao grau relativo do sistema. No entanto, para demonstrar esse fato, será necessário lançar mão de uma função chamada derivada de Lie:

Definição 2.3. *Seja uma função escalar suave $h(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e um campo vetorial suave $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então, a derivada de Lie de h com respeito a f é a função escalar definida por [3]:*

$$\mathcal{L}_f h = \nabla_h f = \frac{\partial h}{\partial x} f.$$

Em outras palavras, a derivada de Lie é uma derivada direcional de h ao longo da direção do vetor f .

Portanto, uma importante propriedade da derivada de Lie é que ela pode ser definida recursivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^0 h &= h \\ \mathcal{L}_f^i h &= \mathcal{L}_f (\mathcal{L}_f^{(i-1)} h) = \nabla(\mathcal{L}_f^{(i-1)} h), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Além disso, ao se escrever a função $\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h$, deseja-se:

$$\mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h = \nabla(\mathcal{L}_f h)g.$$

Um exemplo simples da utilização de derivadas de Lie é o seguinte sistema en-

trada saída:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

Então, as derivadas primeira e segunda da saída são:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \mathcal{L}_f h \\ \ddot{y} &= \frac{\partial [\mathcal{L}_f h]}{\partial x} \dot{x} = \mathcal{L}_f^2 h\end{aligned}$$

Seja o seguinte sistema dinâmico suave

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(x) + b(x)u \\ \sigma &= \sigma(x),\end{aligned}\tag{2.35}$$

sujeito a uma ação de controle escalar $u \in \mathbb{R}$, com estado $x \in \mathbb{R}^n$ e saída escalar suave $\sigma \in \mathbb{R}$. A derivada total da saída σ é definida como a derivada no tempo $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ ao longo da trajetória do sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \frac{\partial}{\partial t} \sigma(x) \\ &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} \\ &= \nabla \sigma(x) (a(x) + b(x)u) \\ &= \underbrace{\nabla \sigma(x) a(x)}_{\mathcal{L}_a \sigma(x)} + \underbrace{\nabla \sigma(x) b(x)}_{\mathcal{L}_b \sigma(x)} u \\ &= \mathcal{L}_a \sigma(x) + \mathcal{L}_b \sigma(x)u\end{aligned}\tag{2.36}$$

O grau relativo da saída σ com relação à entrada u no ponto x é definido como a ordem da derivada total de σ na qual o controle aparece com coeficiente não-nulo pela primeira vez, dado que os coeficientes de controle são identicamente nulos nas derivadas de ordem inferior. Em outras palavras, caso o grau relativo de um sistema seja igual a 1 em certo ponto x_0 , então $\mathcal{L}_b \sigma(x_0) \neq 0$. Suponha que $\mathcal{L}_b \sigma(x) \equiv 0$

(grau relativo > 1) na vizinhança de x_0 , então diferenciando novamente (2.36)

$$\begin{aligned}
\ddot{\sigma} &= \frac{\partial \dot{\sigma}(x)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial \dot{\sigma} x}{\partial x} \dot{x} \\
&= \frac{\partial [\mathcal{L}_a \sigma(x)]}{\partial x} (a(x) + b(x)u) \\
&= \underbrace{\frac{\partial [\mathcal{L}_a \sigma(x)]}{\partial x} a(x)}_{\mathcal{L}_a^2 \sigma(x)} + \underbrace{\frac{\partial [\mathcal{L}_a \sigma(x)]}{\partial x} b(x)}_{\nabla(\mathcal{L}_a \sigma(x))b(x)} u \\
&= \mathcal{L}_a^2 \sigma(x) + \mathcal{L}_b \mathcal{L}_a \sigma(x) u
\end{aligned}$$

Caso o coeficiente $\mathcal{L}_b \mathcal{L}_a \sigma(x)$ seja não-nulo, então o grau relativo da saída σ com respeito à entrada u é 2 neste ponto.

Continuando o raciocínio acima para ordens superiores (e graus relativos mais elevados), obtemos a seguinte definição formal [35]:

Definição 2.4. *O número r é chamado grau relativo da saída σ do sistema (2.35) com respeito à entrada u no ponto x_0 , se*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_b \sigma(x) = \mathcal{L}_b \mathcal{L}_a \sigma(x) = \dots = \mathcal{L}_b \mathcal{L}_a^{r-2} \sigma(x) &= 0 \\
\mathcal{L}_b \mathcal{L}_a^{r-1} \sigma(x) &\neq 0
\end{aligned}$$

na vizinhança do ponto x_0 .

Caso o sistema (2.35) seja não autônomo, então deverá ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= a(t, x) + b(t, x)u \\
\sigma &= \sigma(t, x).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Para que seja aplicada a definição 2.4, o sistema (2.37) deverá ser reescrito introduzindo um estado fictício t ao seu vetor de estados x ($X = \begin{bmatrix} x^T & t \end{bmatrix}^T$), sendo a equação deste novo estado simplesmente $\dot{t} = 1$.

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t, x) \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b(t, x) \\ 0 \end{bmatrix} u \\
&= \tilde{a}(X) + \tilde{b}(X)u,
\end{aligned}$$

e a saída será definida por $\sigma = \sigma(X)$. Então, a definição 2.4 se aplicará com a ressalva de que o ponto para o qual se calcula o grau relativo deixa de ser simplesmente x_0 e deve ser definido pelo estado aumentado $X_0 = \begin{bmatrix} x_0^T & t_0 \end{bmatrix}^T$.

Portanto, se o grau relativo do sistema (2.37) for igual a r , as seguintes equações serão satisfeitas

$$\begin{aligned}\sigma^{(i)} &= \mathcal{L}_{\tilde{a}}^i \sigma(X), \quad i = 1, 2, \dots, r-1, \\ \sigma^{(r)} &= \mathcal{L}_{\tilde{a}}^r \sigma(X) + \mathcal{L}_{\tilde{b}} \mathcal{L}_{\tilde{a}}^{r-1} \sigma(X)u,\end{aligned}\tag{2.38}$$

com coeficiente $\mathcal{L}_{\tilde{b}} \mathcal{L}_{\tilde{a}}^{r-1} \sigma(X) \neq 0$. Percebe-se que as derivadas temporais $\sigma^{(i)}$, com $i = 1, 2, \dots, r-1$, são funções contínuas de X , sem a presença do sinal de controle u . Portanto, a restrição $\sigma = 0$ somente poderá ser mantida em um modo deslizante de ordem igual ou superior a r . No caso de um modo deslizante de ordem superior a r , a lei de controle u deverá ser contínua, porém com derivadas temporais descontínuas de modo a garantir a convergência para o modo deslizante de ordem superior.

Considerando novamente o sistema (2.37), onde $x \in \mathbb{R}^n$, $a(t, x)$, b e $\sigma : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções desconhecidas e até a dimensão n pode ser incerta. Apenas as medidas da saída σ estão disponíveis em tempo real. O objetivo é levar $\sigma \equiv 0$ em tempo finito através de uma lei de controle $u \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, trata-se de um problema de rastreamento de uma "caixa preta" (processo desconhecido).

O grau relativo r do sistema é constante e conhecido, tal que a equação (2.38) pode ser reescrita na forma

$$\sigma^{(r)} = h(t, x) + g(t, x)u,\tag{2.39}$$

onde $h(t, x) = \mathcal{L}_{\tilde{a}}^r \sigma(X)$ e $g(t, x) = \mathcal{L}_{\tilde{b}} \mathcal{L}_{\tilde{a}}^{r-1} \sigma(X) \neq 0$. É considerado, sem perda de generalidade, que $g(t, x) > 0$. Caso $g(t, x)$ seja negativo, basta alterar o sinal do controle u a ser projetado. Para as constantes positivas K_m , K_M e C , assume-se que as inequações

$$\begin{aligned}0 < K_m < g(t, x) \leq K_M \\ |h(t, x)| \leq C\end{aligned}\tag{2.40}$$

são válidas, o que é sempre verdade ao menos localmente para qualquer sistema suave e com grau relativo r bem definido. As trajetórias de (2.37) são definidas para $t \in [0, \infty)$ para qualquer entrada limitada $u(t, x)$ mensurável (no sentido de *Lebesgue*).

Portanto, o objetivo pode ser descrito como estabilizar em tempo finito os estados $\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)}$ do sistema incerto (2.39) sob as condições impostas em (2.40). É possível notar que, embora o grau relativo r deva ser conhecido, não há necessidade de determinar exatamente os valores dos parâmetros K_m , K_M e C , uma vez que eles influenciam somente na magnitude do controle projetado.

É possível perceber que nenhum controle estático $u = \varphi(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})$ é capaz

de atingir o objetivo determinado com um sistema incerto como o considerado.

Certamente um controle que force $\sigma \equiv 0$, também deverá satisfazer $\sigma^{(r)} \equiv 0$. Isso significa dizer que, a partir de (2.39), $\varphi(0, 0, \dots, 0) = -\frac{h(t,x)}{g(t,x)}$. Obviamente, $\varphi(0, 0, \dots, 0) \in \left[-\frac{C}{K_m}, \frac{C}{K_m}\right]$. Considerando agora dois sistemas triviais conforme (2.39) que satisfaçam as condições (2.40):

$$\begin{aligned}\sigma^{(r)} &= C + K_m u \\ \sigma^{(r)} &= -C + K_m u.\end{aligned}$$

Fica claro que é impossível determinar uma lei de controle contínua que satisfaça simultaneamente ambas as equações quando $\sigma^{(r)} = 0$. Portanto, o controle u terá de ser obrigatoriamente descontínuo ao menos no conjunto (2.34). Em outras palavras, deverá haver um modo deslizante $\sigma = 0$ de ordem r .

A partir de (2.40), as soluções de (2.39) devem satisfazer a inclusão

$$\sigma^{(r)} \in [-C, C] + [K_m, K_M] u. \quad (2.41)$$

Ao contrário do sistema (2.39), a inclusão (2.41) é conhecida completamente. No entanto, o sistema (2.41) não tem qualquer "memória" do sistema original (2.37), exceto pelas constantes r , K_m , K_M e C . Esse fato confere aos controles (2.41) a robustez com relação a qualquer perturbação preservado (2.40).

Portanto, o problema pode ser definido como encontrar um controle $u = \varphi(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(r-1)})$ tal que as trajetórias de (2.41) convirjam em tempo finito para a origem $\sigma = \dot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0$.

Historicamente, o primeiro controlador por modos deslizantes de segunda ordem de que se tem notícia é o *Twisting* [44]. Este controlador, servirá como base para o desenvolvimento do principal controle por modos deslizantes com lei de controle contínua, o *Super-Twisting* [8]. Posteriormente, será apresentada uma generalização recente deste controlador que amplia sua aplicabilidade, o *Super-Twisting* com ganhos variáveis [10, 30]. Nas subseções a seguir serão apresentados os controles supracitados.

2.4.2 Controlador Twisting

O controlador *twisting* tem importante relevância histórica por ser o primeiro controle por modos deslizantes de segunda ordem já publicado [44]. Seu nome é função de sua trajetória em espiral em torno da origem no plano de fase $(\sigma, \dot{\sigma})$, conforme ilustrado na figura 2.10. A amplitude ao longo dos eixos, bem como o tempo da rotação, decaem em progressão geométrica. O valor da derivada de controle comuta a cada cruzamento de eixo, o que exige a disponibilidade do sinal da derivada

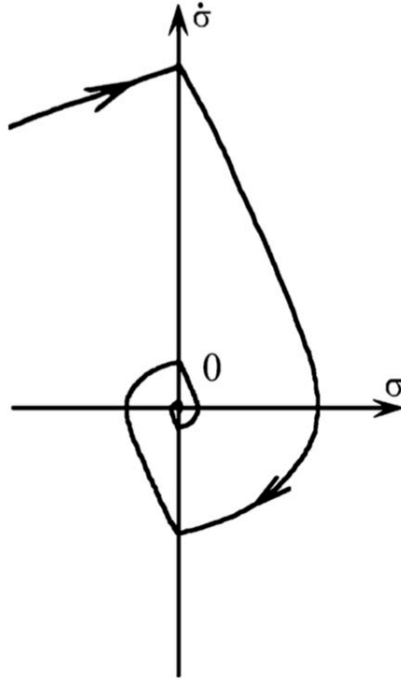


Figura 2.10: Plano de Fase do controle *twisting* [1].

temporal da variável de deslizamento $\dot{\sigma}$ [9].

Seja um sistema de grau relativo unitário. Este controle é definido pela fórmula

$$u = -(r_1 \operatorname{sgn}(\sigma) + r_2 \operatorname{sgn}(\dot{\sigma})), \quad r_1 > r_2 > 0, \quad (2.42)$$

cujos ganhos r_1 e r_2 são definidos por:

Lema 2.1 ([45]). *Seja r_1 e r_2 que satisfaçam as condições*

$$\begin{aligned} K_m(r_1 + r_2) - C &> K_M(r_1 - r_2) + C, \\ K_m(r_1 - r_2) &> C. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Então o controle em (2.42) garante a existência de um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ que atrai as trajetórias em tempo finito.

Demonstração. ver [45, p. 6]. □

Na prática, os parâmetros r_1 e r_2 do controle nunca são estimados utilizando (2.43). Em geral, o sistema real não é conhecido exatamente, o modelo utilizado não é totalmente adequado e as estimativas dos parâmetros K_m , K_M e C são muito maiores do que os valores reais (usualmente 100 vezes maiores). E quanto maior forem esses parâmetros, mais sensível será o controle a qualquer imperfeição de chaveamento ou ruído de medição. Portanto, a forma mais adequada para ajustar

os parâmetros do controle é através de simulações computacionais do sistema e testes experimentais [1].

Fica claro que o controle (2.42) é função da derivada temporal $\dot{\sigma}$, que raramente está disponível em sistemas reais. Este sinal pode ser estimado como uma diferença $\Delta\sigma_i$ entre os valores de σ , onde $\Delta\sigma_i = \sigma(t_i) - \sigma(t_{i-1})$ e o tempo atual $t \in [t_i, t_{i+1})$ [45].

O controlador a seguir, o *super-twisting* também é baseado em modos deslizantes de segunda ordem e destaca-se por não necessitar que a derivada temporal do desvio sobre a restrição esteja disponível para a implementação da lei de controle.

2.4.3 Controlador Super-Twisting

O *super-twisting* (*Super-Twisting Algorithm - STA*) é um controlador baseado em modos deslizantes de segunda ordem, e foi desenvolvido com o objetivo de atenuar o *chattering* em sistemas com grau relativo unitário [8]. A ideia básica é projetar uma lei de controle dinâmica de modo que a ação descontínua esteja presente apenas em sua derivada temporal, visando obter uma convergência em tempo finito para um modo deslizante de segunda ordem por meio de um sinal de controle contínuo. Assim como no caso do controlador *twisting* apresentado na seção 2.4.2, um sistema de controle a estrutura variável baseado no algoritmo *super-twisting* caracteriza-se por um movimento em espiral em torno da origem do plano de fase $(\sigma, \dot{\sigma})$, como ilustrado na figura 2.11. A principal vantagem do *super-twisting* com relação aos demais controladores baseados em modos deslizantes de segunda ordem é não ser necessária nenhuma informação sobre a derivada temporal $\dot{\sigma}$ para a implementação da lei de controle. Este fato fez com que o STA atraísse considerável atenção no contexto de sistemas a estrutura variável, tendo sido utilizado com sucesso em importantes aplicações, como o problema da diferenciação robusta e exata em tempo real [11] e o controle de diversos sistemas de interesse prático [46–48].

Seja um sistema de grau relativo unitário definido por (2.37). Considerando (2.39), tem-se a seguinte dinâmica:

$$\dot{\sigma} = a(t, x) + b(t, x)u, \quad (2.44)$$

com $b(t, x) \neq 0$. Assuma-se que as desigualdades

$$\begin{aligned} |\dot{a}| + U_M|\dot{b}| &\leq C, \\ 0 < K_m &\leq b(t, x) \leq K_M, \\ \left| \frac{a}{b} \right| &< qU_M, \\ 0 < q &< 1, \end{aligned} \quad (2.45)$$

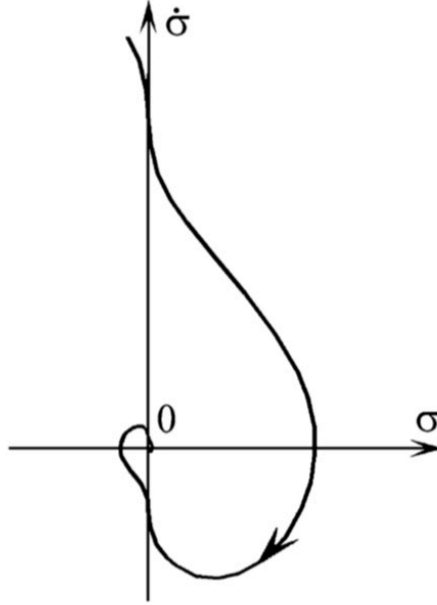


Figura 2.11: Plano de Fase do controle *super-twisting* [1].

sejam satisfeitas para determinadas constantes positivas C , K_m , K_M , U_M , e q . A lei de controle é definida baseada no algoritmo *super-twisting* [8, 45], sendo dada por

$$u = -k_1 |\sigma|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma) + z, \quad (2.46)$$

$$\dot{z} = \begin{cases} -u, & |u| > U_M, \\ -k_2 \operatorname{sgn}(\sigma), & |u| \leq U_M. \end{cases}$$

Note que de fato não é necessária nenhuma informação sobre a derivada temporal $\dot{\sigma}$ para a implementação de u , e que o algoritmo *super-twisting* fornece um sinal de controle contínuo, e portanto menos propenso ao *chattering* [8, 45]. O comportamento do sistema em malha-fechada é enunciado pelo teorema a seguir.

Teorema 2.1 ([45]). *Seja o sistema em malha-fechada definido por (2.44) e (2.46), obedecendo às desigualdades (2.45). Se $K_m k_2 > C$ e k_1 for suficientemente grande, então o controlador (2.46) garante o aparecimento de um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ atraindo as trajetórias do sistema em tempo finito. O sinal de controle u converge em tempo finito para o segmento $[-U_M, U_M]$, e nele permanece. O sinal de controle nunca deixará este segmento se estiver inicialmente localizado dentro dele.*

Demonstração. ver [45, p. 08]. □

Para sistemas com $b(t, x)$ constante em (2.44), pode-se utilizar uma versão modificada da lei de controle (2.46), obtida fazendo $U_M \rightarrow \infty$. Isso é possível em função

da desigualdade $|\dot{a}| + U_M|\dot{b}| \leq C$, de (2.45). Como $\dot{b} \rightarrow 0$, pode-se optar por um limite U_M infinito, pois não haverá impacto na escolha da constante C . Adicionalmente, como $|\frac{a}{b}| < qU_M \rightarrow \infty$, essa desigualdade pode ser descartada. Assim, ficamos com a seguinte lei de controle

$$\begin{aligned} u &= -k_1|\sigma|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma) + z, \\ \dot{z} &= -k_2 \operatorname{sgn}(\sigma), \end{aligned} \tag{2.47}$$

e desigualdades

$$\begin{aligned} |\dot{a}| &\leq C, \\ 0 &< K_m \leq b \leq K_M, \end{aligned} \tag{2.48}$$

para determinadas constantes positivas C, K_m, K_M . Assim, se k_1 e k_2 forem escolhidos apropriadamente, então a lei de controle (2.47) também garante a convergência do sistema em malha-fechada para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$. Este fato é enunciado pelo teorema a seguir.

Teorema 2.2. *Seja o sistema em malha-fechada definido por (2.44) e (2.47), com $b(t, x)$ constante. Assuma que as desigualdades (2.48) sejam satisfeitas. Se $K_m k_2 > C$ e k_1 for suficientemente grande, então o controlador (2.47) garante o aparecimento de um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ atraindo as trajetórias do sistema em tempo finito.*

Demonstração. ver [11]. □

Para sistemas de grau relativo unitário o STA pode ser aplicado diretamente para controle do sistema. No entanto, para sistemas de grau relativo 2, ele também pode ser aplicado como observador para gerar o sinal de $\dot{\sigma}$, na aplicação de um controle de segunda ordem, como o *twisting*, apresentado na seção 2.4.2, por exemplo. Os populares observadores de alto ganho não podem desempenhar a tarefa satisfatoriamente pois apenas são capazes de estabilizar assintoticamente no estado de equilíbrio. O diferenciador necessário para essa aplicação deve ser robusto e exato (*Robust Exact Differentiation - RED*), com convergência em tempo real na ausência de ruído de medição [1]. Esta aplicação é uma das mais importantes do algoritmo *super-twisting*, e será abordado o diferenciador de primeira ordem na subseção a seguir (para o caso de ordem arbitrária, ver [43]):

Diferenciador de Primeira Ordem Robusto e Exato - RED

A diferenciação de sinais em tempo real é um problema antigo e bem conhecido. Um diferenciador ideal deveria ser capaz de fornecer como saída a derivada exata de

qualquer sinal de entrada. Entretanto, na prática, como os sinais são corrompidos por ruídos de alta frequência, que possuem derivadas com amplitudes muito elevadas, seria impossível para estes diferenciadores fornecerem uma estimativa razoável da derivada do sinal base de interesse.

Desta forma, o objetivo é encontrar um diferenciador capaz não só de fornecer a derivada exata para uma classe de sinais de entrada, mas também de rejeitar pequenos ruídos de alta frequência.

A maior parte dos diferenciadores conhecidos fornecem estimativas muito próximas das derivadas dos sinais de entrada, além de serem capazes de rejeitar parcialmente a presença de ruídos de alta frequência. No entanto, estes diferenciadores não são capazes de fornecer derivadas exatas na ausência de ruídos. Deste modo, estes diferenciadores são robustos, mas não são exatos.

Neste trabalho será considerada a seguinte classe de sinais de entrada: seja o sinal de entrada $f(t)$ uma função definida em $[0, \infty)$ constituída por um sinal base $f_0(t)$ desconhecido, cuja derivada de segunda ordem possua constante de Lipschitz C_2 ; e por um ruído mensurável (no sentido de Lebesgue) e limitado com propriedades desconhecidas.

O problema é encontrar uma estimativa em tempo real de $\dot{f}_0(t)$ que seja robusta na presença de ruídos de medição, sendo exata na sua ausência.

Seja um integrador descrito por

$$\dot{x} = u,$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, o estado e a entrada deste sistema. Para estimar, em tempo real, a derivada do sinal base $f_0(t)$, a ideia é projetar um sinal de entrada u contínuo de modo a garantir que o estado x rastreie o sinal base $f_0(t)$ em tempo finito. Desta forma, devido à dinâmica do integrador, é possível estimar a derivada do sinal base a partir do sinal contínuo fornecido por u . Para isso, é definido $\sigma := x - f_0(t)$ como o erro de estimação do sinal base, com dinâmica descrita por

$$\dot{\sigma} = -\dot{f}_0(t) + u, \quad |\ddot{f}_0(t)| \leq C_2, \quad \forall t.$$

Note que esta dinâmica é equivalente a (2.44) com $a(t, x) = -\dot{f}_0(t)$ e $b(t, x) = 1$. Assim, projeta-se u com base no algoritmo super-twisting com $U_M \rightarrow \infty$ ($b(t, x)$ constante) (2.47). O teorema 2.2 garante a convergência em tempo finito das trajetórias do sistema para um modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$. Portanto, a derivada do sinal base $f_0(t)$ pode ser estimada em tempo real utilizando o seguinte

diferenciador de primeira ordem [11]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -k_1|x - f_0(t)|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(x - f_0(t)) + z, \\ \dot{z} &= -k_2 \operatorname{sgn}(x - f_0(t)).\end{aligned}\tag{2.49}$$

Assim, se os parâmetros k_1 e k_2 forem ajustados adequadamente, após um intervalo de tempo finito T e na ausência de ruído, são estabelecidas as igualdades:

$$\begin{aligned}x &= f_0(t) \\ u = z &= \dot{f}_0(t)\end{aligned}, \quad t \geq T.\tag{2.50}$$

Exemplo 2.2 ([1]). O RED de primeira ordem proposto em (2.49) foi comparado com um diferenciador linear, uma das alternativas mais simples e populares para estimar em tempo real a derivada temporal de um sinal antes do desenvolvimento do diferenciador com base em modos deslizantes.

Esse diferenciador é formado pela combinação de um diferenciador ideal com um filtro passa-baixa: $G_d(s) = \frac{s}{(0.1s+1)^2}$.

Para os parâmetros do diferenciador baseado no STA, foram escolhidos ganhos $k_1 = 6$ e $k_2 = 8$.

Os sinais $f(t)$ a serem diferenciados são senóides com frequências crescentes, de forma que $|\dot{f}(t)| \leq 7$, a saber:

$$\begin{aligned}f(t) &= 5t + \sin t, & \frac{df}{dt} &= 5 + \cos t \\ f(t) &= 5t + \sin t + 0.01 \cos 10t, & \frac{df}{dt} &= 5 + \cos t - 0.1 \sin 10t \\ f(t) &= 5t + \sin t + 0.001 \cos 30t, & \frac{df}{dt} &= 5 + \cos t - 0.03 \sin 30t\end{aligned}$$

A figura 2.12 apresenta o resultado comparativo entre ambos os diferenciadores para as três funções propostas. Fica claro que ambos tem um tempo de convergência semelhante e o diferenciador por modos deslizantes tem um overshoot, ao passo que o diferenciador linear é mais suave. No entanto, após o intervalo de convergência T , o diferenciador baseado no STA é perfeito ao rastrear a derivada ideal $\dot{f}_0(t)$, enquanto o diferenciador linear apresenta uma pequena defasagem, além de ser insensível ao sinal de frequência mais alta $\cos 30t$.

2.4.4 Controlador Super-Twisting com Ganhos Variáveis

Nos desenvolvimentos apresentados até aqui, foram consideradas apenas soluções de controles por modos deslizantes, sejam de primeira ordem ou ordem superior, com ganhos constantes. Como ilustrado no exemplo inicial da seção 2.1.1, o controle por

modos deslizantes convencional com ganhos fixos é capaz de compensar perturbações limitadas por um valor conhecido (no caso do exemplo citado, $|f(x_1, x_2, t)| \leq L$). No caso do algoritmo *super-twisting* com ganhos constantes, conforme apresentado na seção 2.4.3, era possível compensar globalmente apenas incertezas/perturbações com derivadas limitadas por constantes conhecidas a priori. Além disso, a natureza homogênea do algoritmo não permitia garantir o deslizamento para sistemas com incertezas linearmente dependentes do estado.

Entretanto, graças à abordagem por função de Lyapunov que permeia sua teoria, controladores por modos deslizantes convencionais (de primeira ordem) apresentavam como vantagem a possibilidade de serem projetados utilizando ganhos variáveis, embora apresentassem o importante problema do *chattering*. Apenas mais recentemente, análises baseadas em funções de Lyapunov foram introduzidas para o algoritmo *super-twisting* [28, 29], permitindo importantes desenvolvimentos em sua teoria. Entre eles a possibilidade de assumir ganhos variáveis.

O *super-twisting* com ganhos variáveis (*Variable Gain Super-Twisting Algorithm - VGSTA*) é uma generalização do *super-twisting* obtida a partir da introdução de ganhos variáveis e inclusão de termos não-homogêneos ao algoritmo [10, 30]. Esta generalização tem como principal vantagem ser capaz de compensar de forma exata uma classe mais abrangente de incertezas/perturbações, permitindo que suas derivadas temporais sejam limitadas por funções contínuas previamente conhecidas. Além disso, com a introdução de termos não-homogêneos lineares ao algoritmo, é possível obter uma convergência mais rápida para condições mais distantes da superfície de deslizamento. A presença destes termos também permite compensar incertezas/perturbações crescentes com as variáveis de estado, garantindo o deslizamento global para sistemas cuja parte linear não seja exatamente conhecida.

Considere um sistema linear e invariante no tempo, com uma perturbação não-linear casada, descrito por

$$\dot{x} = Ax + B[u + d(t, x)], \quad (2.51)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é a ação de controle, A e B são matrizes constantes de dimensões apropriadas, e $d(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função absolutamente contínua que engloba as incertezas/perturbações casadas presentes no sistema. Assume-se que:

Hipótese 2.3. *A matriz de entrada $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($1 \leq m \leq n$) possui posto completo ($\rho(B) = m$).*

Hipótese 2.4. *O par (A, B) é controlável.*

Hipótese 2.5. *A função $d(t, x)$ e sua derivada são limitadas por funções contínuas conhecidas em quase todos os pontos.*

A partir das hipóteses 2.3 e 2.4 é possível garantir que existe uma matriz $B_{\perp} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}$ de posto completo tal que $B_{\perp}B = 0$, e a transformação linear de coordenadas de estado definida por

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\perp} \\ (B^T B)^{-1} B^T \end{bmatrix} x,$$

leva o sistema (2.51) à seguinte forma normal:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + u + \bar{d}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2), \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^m$, e $\bar{d}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = d(t, x)$. Sem perda de generalidade, a análise se restringirá ao caso de entrada simples, ou seja, $m = 1$, que é o objeto de interesse deste trabalho. Os resultados podem ser facilmente estendidos para o caso de múltiplas entradas [38].

Por simplicidade, será considerado apenas o caso onde o coeficiente do controle u em (2.52) seja igual 1, ou seja, a matriz B é conhecida completamente. Nos casos em que isso não se confirmar e houver um termo de controle do tipo $b(t)u$, onde o coeficiente $b(t)$ é incerto, porém positivo, tal que $b(t) \geq b_m$, é suficiente considerar que o coeficiente é constante e, conservadoramente, igual a b_m . Dessa forma, será possível normalizar a equação, tal que o coeficiente de u seja unitário e o sistema fique na forma (2.52).

Deseja-se projetar a superfície de deslizamento, definida por um conjunto deslizante de segunda ordem $\mathcal{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sigma = \dot{\sigma} = 0\}$, de modo que σ possua grau relativo uniforme e unitário com respeito à lei de controle u , e que a dinâmica nesta superfície seja exponencialmente estável. Para isso, define-se a variável de deslizamento como

$$\sigma = \bar{x}_2 - K\bar{x}_1, \quad (2.53)$$

onde a matriz K deve ser escolhida apropriadamente. Note que a variável de deslizamento σ de fato possui grau relativo uniforme e unitário com respeito a u , o que pode ser verificado a partir da dinâmica de \bar{x}_2 em (2.52). Além disso, ao alcançar a superfície de deslizamento, o sistema passa a ser descrito pela seguinte dinâmica de ordem reduzida:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= (\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}K) \bar{x}_1, \\ \bar{x}_2 &= K\bar{x}_1, \end{aligned} \quad \forall x \in \mathcal{S}_2, \quad (2.54)$$

e portanto a escolha da matriz K pode ser interpretada como um problema de estabilização via realimentação linear de estado, uma vez que o par $(\bar{A}_{11}, \bar{A}_{12})$ é

controlável (a partir da hipótese 2.4). Este problema pode ser resolvido utilizando métodos como alocação de polos e minimização linear quadrática [1, 26].

Seja a dinâmica da variável de deslizamento, obtida derivando (2.53):

$$\dot{\sigma} = (\bar{A}_{21} - K\bar{A}_{11})\bar{x}_1 + (\bar{A}_{22} - K\bar{A}_{12})\bar{x}_2 + u + \bar{d}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2). \quad (2.55)$$

Então, a partir de (2.55), a lei de controle é projetada na forma

$$u = - \left[\underbrace{(\bar{A}_{21} - K\bar{A}_{11})\bar{x}_1 + (\bar{A}_{22} - K\bar{A}_{12})\bar{x}_2}_{\text{Termos conhecidos de } \dot{\sigma}} \right] + v, \quad (2.56)$$

onde v é uma variável de controle a ser definida posteriormente.

A partir da equação (2.53), é possível escrever

$$\bar{x}_2 = \sigma + K\bar{x}_1$$

e substituindo \bar{x}_2 no valor de $\dot{\bar{x}}_1$ em (2.52)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 \\ &= \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}(\sigma + K\bar{x}_1) \\ &= (\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}K)\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\sigma \end{aligned} \quad (2.57)$$

Unindo (2.57) com (2.55), considerando o controle (2.56), pode-se chegar a seguinte dinâmica do sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= (\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}K)\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\sigma, \\ \dot{\sigma} &= v + \bar{d} \left(t, \bar{x}_1, \underbrace{\sigma + K\bar{x}_1}_{\bar{x}_2} \right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Quando a perturbação do sistema é limitada por uma função conhecida $\varrho(x)$, tal que

$$|d(t, x)| \leq \varrho(x),$$

um controlador por modos deslizantes convencional (primeira ordem) que poderia ser proposto seria (analogamente ao apresentado para o caso de ganho fixo na seção 2.1.1) para o caso de controle

$$v = -(\varrho(x) + \varrho_0) \operatorname{sgn}(\sigma),$$

com $\varrho_0 > 0$. Porém esse controle teria a grande desvantagem do efeito do *chattering*, que cresceria junto com a função limite $\varrho(x)$. Daí o interesse em se utilizar um

controle por modos deslizantes de segunda ordem com um controle contínuo e que tenha ganhos variáveis.

Sendo assim, a variável de controle $v \in \mathbb{R}$ é definida pelo Variable Gain Super-Twisting Algorithm [10, 30], e dada por

$$v = -k_1(t, x)\phi_1(\sigma) - \int_0^t k_2(\tau, x)\phi_2(\sigma)d\tau, \quad (2.59)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_1(\sigma) &= |\sigma|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma) + k_3\sigma, \\ \phi_2(\sigma) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\sigma) + \frac{3}{2}k_3|\sigma|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(\sigma) + k_3^2\sigma, \\ k_3 &> 0 \end{aligned}$$

Ao fazer $k_3 = 0$ e manter k_1 e k_2 constantes, a equação (2.59) se iguala à do *super-twisting* (2.47). Os termos não-homogêneos obtidos fazendo $k_3 > 0$ permitem ao algoritmo convergir mais rapidamente e compensar incertezas linearmente dependentes de σ , enquanto os ganhos variáveis k_1 e k_2 permitem compensar incertezas/perturbações com derivadas limitadas por funções contínuas conhecidas. Além disso, o termo \bar{d} , que engloba as incertezas/perturbações, pode ser reescrito somando e subtraindo o termo $\bar{d}(t, \bar{x}_1, K\bar{x}_1)$ e rearrumando a equação:

$$\begin{aligned} \bar{d}(t, \bar{x}_1, \sigma + K\bar{x}_1) &= \underbrace{[\bar{d}(t, \bar{x}_1, \sigma + K\bar{x}_1) - \bar{d}(t, \bar{x}_1, K\bar{x}_1)]}_{g_1(t, \bar{x}_1, \sigma)} + \underbrace{\bar{d}(t, \bar{x}_1, K\bar{x}_1)}_{g_2(t, \bar{x}_1)}, \\ &= g_1(t, \bar{x}_1, \sigma) + g_2(t, \bar{x}_1) \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde $g_1(t, \bar{x}_1, \sigma) = 0$, quando $\sigma = 0$. Assim, a partir da hipótese 2.5, sabe-se que as incertezas/perturbações presentes no sistema são limitadas em quase todos os pontos, e devem satisfazer as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} |g_1(t, \bar{x}_1, \sigma)| &\leq \varrho_1(t, x)|\phi_1(\sigma)|, \\ \left| \frac{d}{dt}[g_2(t, \bar{x}_1)] \right| &\leq \varrho_2(t, x)|\phi_2(\sigma)|, \end{aligned} \quad (2.61)$$

onde $\varrho_1(t, x) \geq 0$ e $\varrho_2(t, x) \geq 0$ são funções contínuas conhecidas. Portanto, considerando (2.58), (2.59) e (2.60), tem-se a seguinte a dinâmica para o sistema em

malha-fechada:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= (\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}K) \bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\sigma, \\ \dot{\sigma} &= -k_1(t, x)\phi_1(\sigma) + z + g_1(t, \bar{x}_1, \sigma), \\ \dot{z} &= -k_2(t, x)\phi_2(\sigma) + \frac{d}{dt}[g_2(t, \bar{x}_1)],\end{aligned}\tag{2.62}$$

onde $z = -\int_0^t k_2(\tau, x)\phi_2(\sigma)d\tau + g_2(t, \bar{x}_1)$. O comportamento do sistema em malha-fechada é então enunciado pelo teorema a seguir.

Teorema 2.3 ([10, 30]). *Considere o sistema em malha-fechada (2.62). Suponha que as desigualdades (2.61) sejam satisfeitas para determinadas funções contínuas conhecidas $\varrho_1(t, x) \geq 0$ e $\varrho_2(t, x) \geq 0$. Então, para quaisquer condições iniciais $(\bar{x}_1(0), \sigma(0), z(0))$ as trajetórias do sistema serão globalmente atraídas em tempo finito para o modo deslizante $\sigma = 0$, se os ganhos variáveis forem escolhidos como*

$$\begin{aligned}k_1(t, x) &= \delta + \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon\varrho_2 + \epsilon + [2\epsilon + \varrho_1] (\beta + 4\epsilon^2) \right\} \\ k_2(t, x) &= \beta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(t, x),\end{aligned}\tag{2.63}$$

onde $\beta > 0$, $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ são constantes positivas arbitrárias.

Demonstração. ver [10, 30]. □

O exemplo a seguir ilustra as principais propriedades de um sistema de controle por modos deslizantes de segunda ordem baseado no *super-twisting* com ganhos variáveis (VGSTA).

Exemplo 2.3 ([13]). Considere o sistema descrito por (2.52), com

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Suponha que o termo $\bar{d}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ correspondente às incertezas/perturbações presentes no sistema, representado na forma (2.60), satisfaça as desigualdades (2.61) com

$$\varrho_1(t, \bar{x}) = \frac{2}{k_3}, \quad \varrho_2(t, \bar{x}) = \max \left\{ \frac{8}{k_3^2}, 12|\bar{x}_1| + 8 \right\}.$$

A variável de deslizamento é definida por (2.53) com $K = -1$, e portanto a dinâmica na superfície de deslizamento é exponencialmente estável e dada por (2.55). A lei de controle é projetada com base no VGSTA, e definida por (2.56) e (2.59). Os ganhos variáveis do algoritmo são escolhidos de acordo com (2.63) para constantes $\beta = 30$, $\epsilon = 1$, e $\delta = 0.1$, enquanto o ganho fixo é dado por $k_3 = 1$. A figura 2.13 apresenta

os resultados da simulação do sistema de controle por modos deslizante de segunda ordem projetado neste exemplo, com perturbação

$$\bar{d}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2) = 2\bar{x}_2 + \text{sen}(\pi t), \quad (2.64)$$

representada na forma (2.60) com

$$g_1(t, \bar{x}_1, \sigma) = 2\sigma, \quad g_2(t, \bar{x}_1) = 2K\bar{x}_1 + \text{sen}(\pi t),$$

e portanto

$$\frac{d}{dt}[g_2(t, \bar{x}_1)] = 2K(\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}K)\bar{x}_1 + 2K\bar{A}_{12}\sigma + \pi \cos(\pi t).$$

Observe que o VGSTA permite compensar a perturbação variante no tempo e dependente do estado $\bar{d}(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$, fazendo o sistema convergir para o modo deslizante de segunda ordem $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ após um intervalo de tempo finito $T \approx 0.3$ s. Durante o deslizamento, as variáveis de estado \bar{x}_1 e \bar{x}_2 convergem exponencialmente para zero. Também é importante destacar que, assim como no *super-twisting* convencional, o sinal de controle u fornecido pelo VGSTA é contínuo, e portanto menos propenso ao *chattering*.

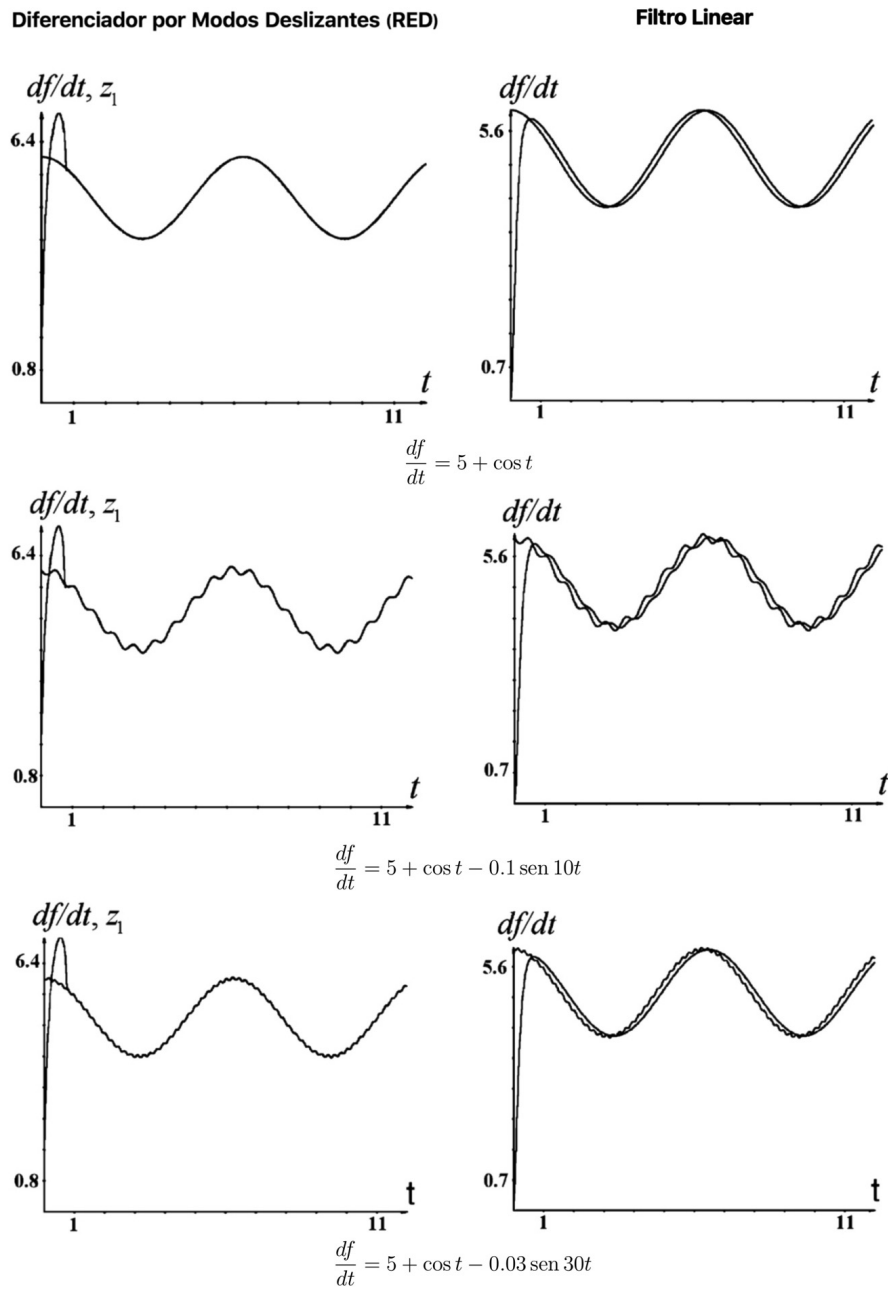


Figura 2.12: Comparação entre saídas do diferenciador RED por modos deslizantes e filtro linear [1].

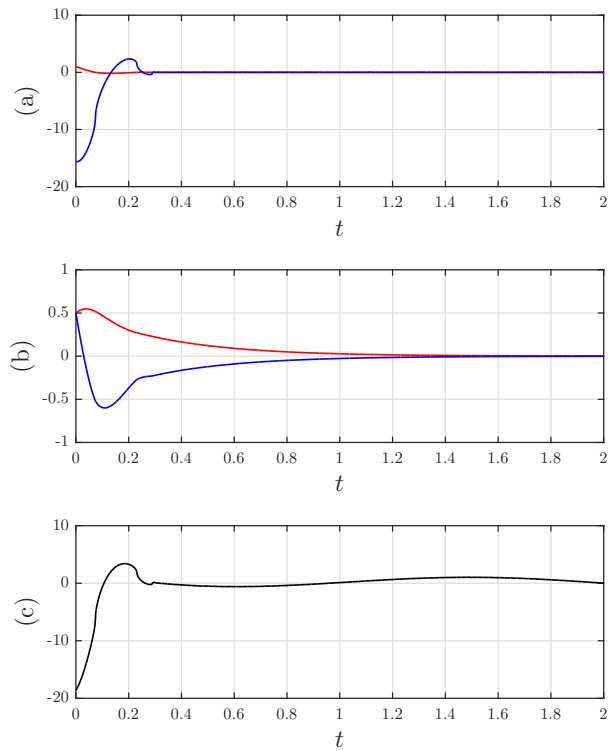


Figura 2.13: Desempenho da lei de controle (2.56), baseada no VGSTA (2.59), aplicada ao sistema do Exemplo 2.3 com perturbação (2.64): (a) (●) variável de deslizamento σ , (●) derivada $\dot{\sigma}$; (b) (●) estado \bar{x}_1 , (●) estado \bar{x}_2 ; (c) (●) ação de controle u .

Capítulo 3

Controle Adaptativo por Modelo de Referência - MRAC

Adaptação - a capacidade de se ajustar ou acomodar de acordo com as condições mutáveis do ambiente ou de sua estrutura - é um atributo fundamental para a sobrevivência dos organismos. Certamente também é um atributo desejável para máquinas ou sistemas [49]. Como destacado nos trabalhos recentes [50, 51], o campo do controle adaptativo tem crescido e evoluído ao longo dos últimos 50 anos, tendo seus conceitos, métodos e ferramentas como pilares para novos campos e vertentes técnicas. Grande atenção foi dada ao tema num esforço para superar as limitações intrínsecas do controle adaptativo clássico. Graças ao esforço de muitos pesquisadores, uma nova classe de estratégias surgiram e, hoje, um grande número de fundamentações e abordagens técnicas, bem como aplicações práticas, estão disponíveis [52].

Como em diversas outras técnicas, o controle adaptativo é baseado na realimentação de sinais do sistema. Porém, o seu diferencial frente às demais técnicas está justamente na sua capacidade de adaptação, de ajustar-se de acordo com o sistema a ser controlado, lidando bem com incertezas paramétricas ou estruturais [53].

Incerteza paramétrica é quando a estrutura da planta é conhecida, porém alguns de seus parâmetros são desconhecidos ou variantes no tempo. Um exemplo é um avião em voo, que ao longo do percurso vai consumindo seu combustível e, conseqüentemente, reduzindo sua massa total. Portanto, por mais que ele seja modelado corretamente, há ao menos um parâmetro que está variando com o tempo, de forma intrínseca a operação do sistema. Já a incerteza estrutural pode ser resumida em dinâmicas não modeladas. Um exemplo simples para esse tipo de incerteza é quando ignoramos o efeito do atrito do ar sobre uma esfera caindo e consideramos que apenas o efeito da gravidade atua sobre ela.

Um controle adaptativo é formado pela combinação de um estimador de parâmetros do modelo em tempo real com base nos sinais mensuráveis do sistema, e de uma

lei de controle baseada nos parâmetros conhecidos [3]. A forma como o estimador de parâmetros, também conhecido como lei de adaptação, é combinado com a lei de controle dá origem a duas estratégias distintas: método direto e indireto.

No método indireto, os parâmetros da planta são estimados em tempo real e, então, usados para calcular os parâmetros de controle; ao passo que, no método direto, o controle é calculado diretamente da planta, sem cálculos intermediários das estimativas paramétricas [53].

Dentre as diferentes estratégias presentes na literatura de controle adaptativo, a técnica de controle adaptativo por modelo de referência (*Model Reference Adaptive Control - MRAC*) se destaca como sendo uma das principais abordagens para lidar com sistemas lineares e invariantes no tempo [54].

O objetivo básico do MRAC é produzir um sinal de controle que torne o comportamento do sistema em malha fechada próximo ao de um modelo de referência arbitrado (rastreamento), mesmo na presença de incertezas ou variações nos parâmetros do sistema. A estrutura básica do sistema é apresentada na Figura 3.1.

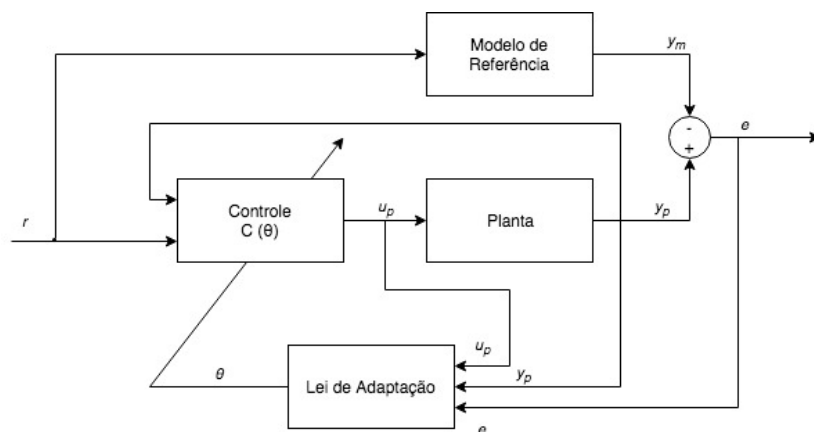


Figura 3.1: Estrutura geral de um controle MRAC.

Portanto, a trajetória desejada gerada pelo modelo de referência é y_m , a qual deve ser seguida pela saída da planta y_p . O erro de rastreamento $e \triangleq y_p - y_m$ representa o desvio entre a saída da planta e a do modelo desejado. O controle é feito por uma realimentação da saída da planta para o controlador $C(\theta)$. Os parâmetros θ do controlador, responsáveis pelo perfeito casamento da planta com o modelo de referência, são estimados em tempo real através de uma lei de adaptação. Como esta estimativa é feita usando apenas informações provenientes da entrada e saída da planta, além do erro de rastreamento, esta estratégia de controle possui um grande interesse prático.

Embora seja destinado para sistemas incertos, o controlador *MRAC* apresenta problemas de robustez na presença de perturbações ou dinâmicas não modeladas. Além disso, a qualidade do transitório de adaptação não é uniforme com respeito às

condições iniciais e a convergência pode ser muito lenta [4].

Neste capítulo, será apresentada a estrutura básica de um sistema baseado em controle por modelo de referência, bem como as hipóteses iniciais necessárias para o projeto do controlador. Por se tratar do foco deste trabalho, será tratado apenas o caso de plantas com grau relativo unitário. Para mais informações sobre a aplicação do MRAC a plantas de grau relativos superiores, ver [53] ou [55].

3.1 Controle por Modelo de Referência - MRC

Como já descrito anteriormente, uma planta com controle MRAC conta com um estimador de parâmetros e um controlador que, com base nestes parâmetros calculados em tempo real, leva a planta a seguir um modelo de referência. Para uma planta conhecida, cujos parâmetros ideais para controle possam ser calculados e não precisem ser adaptados, a estratégia de controle seria simplesmente controle por modelo de referência (*Model Reference Control - MRC*). Esta seção será dedicada a explorar essa estratégia, a qual é base para o controle MRAC que é objeto do capítulo.

Primeiramente será apresentado o problema de controle por modelo de referência e seus objetivos e hipóteses necessárias às quais a planta deve obedecer para essa estratégia ser aplicável. Então, será apresentada uma fórmula geral para o cálculo dos parâmetros de controle, dado o conhecimento completo da planta, que garantem o cumprimento do objetivo do MRC. É importante destacar, nesta subseção a garantia de que sempre será possível encontrar um grupo de parâmetros que garantirão o casamento da planta com o modelo. Por fim, será apresentado uma análise do erro de rastreamento, provando que este irá para zero garantindo o *matching* entre planta e modelo.

3.1.1 Definição do Problema

Considere a planta monovariável (*Single-Input Single-Output - SISO*), linear invariante no tempo (*Linear Time Invariant - LTI*) descrita pela seguinte representação no espaço de estado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= A_p x_p + b_p u_p \\ y_p &= h_p^T x_p,\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $x_p \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u_p \in \mathbb{R}$ é a entrada e $y_p \in \mathbb{R}$ é a saída da planta. O correspondente modelo entrada-saída é dado por

$$y_p = G_p(s)u_p, \quad G_p(s) = k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$$

onde $k_p \in \mathbb{R}$ é o ganho de alta frequência, $N_p(s)$ e $D_p(s)$ são polinômios mônicos de graus m e n , respectivamente. O grau relativo é dado por $n^* = n - m$.

As especificações da resposta dinâmica em malha fechada desejada pelo projetista são estabelecidas através do modelo de referência:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= A_m x_m + b_m r \\ y_m &= h_m^T x_m, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $x_m \in \mathbb{R}^{p_m}$, para algum inteiro p_m , é o estado, $y_m \in \mathbb{R}$ é a saída do modelo, e $r \in \mathbb{R}$ é um sinal de referência. O sinal de referência r é uma função arbitrária do tempo, continua por partes e uniformemente limitada. O correspondente modelo entrada-saída é dado por

$$y_m = M(s)r, \quad M(s) = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)}$$

onde $k_m \in \mathbb{R}$ é o ganho de alta frequência, $N_m(s)$ e $D_m(s)$ são polinômios mônicos de graus p_m e q_m , respectivamente. O grau relativo é dado por $n_m^* = q_m - p_m$.

O objetivo é projetar uma lei de controle u_p tal que o erro de rastreamento da saída $e \triangleq y_p - y_m$ tenda assintoticamente para zero, ou para algum pequeno conjunto residual em torno de zero, para condições iniciais quaisquer e sinais de referência r arbitrários (contínuos por partes e uniformemente limitados).

Para garantir esse objetivo com uma lei de controle que seja implementável, ou seja, não dependa de diferenciadores ou utilize apenas sinais mensuráveis, por exemplo. Algumas hipóteses de projeto são assumidas para a planta e o modelo de referência:

Hipótese 3.1. *A planta $G_p(s)$ é de fase mínima ($N_p(s)$ é Hurwitz).*

Hipótese 3.2. *A planta $G_p(s)$ é controlável e observável (os polinômios $N_p(s)$ e $D_p(s)$ são coprimos).*

Hipótese 3.3. *O grau da planta n é conhecido.*

Hipótese 3.4. *O grau relativo da planta n^* é conhecido.*

Hipótese 3.5. *O sinal do ganho de alta frequência da planta (k_p) é conhecido (assume-se positivo por simplicidade, sem perda de generalidade).*

Hipótese 3.6. *O modelo de referência $M(s)$ é assintoticamente estável e de fase mínima, com mesmo grau relativo que a planta ($n_m^* = n^*$).*

A hipótese 3.1 é consequência do objetivo de controle, que é atingido projetando uma lei de controle que cancele os zeros da planta e os substitua pelos do modelo de referência, num esforço de fazer com que a função de transferência de malha fechada da planta de r para y_p seja igual a $M(s)$. Para estabilidade do controle, é fundamental que esses cancelamentos ocorram no semi-plano lateral esquerdo, ou seja, que $N_p(s)$ seja Hurwitz.

3.1.2 Equação Geral de Cálculo dos Parâmetros Ideais

Adicionalmente às hipóteses apresentadas anteriormente, considere que os parâmetros da planta $G_p(s)$ sejam conhecidos exatamente. Uma vez que a planta é LTI e conhecida, é possível projetar um controle por modelo de referência (MRC) usando teoria de sistemas lineares. Inicialmente, não será considerado o efeito de perturbações no sistema.

O objetivo de rastreamento do modelo é atingido caso u_p seja escolhido de forma que a função de transferência de malha fechada, de r para y_p seja igual ao modelo $M(s)$. Dessa forma, fica garantido que para qualquer sinal de referência $r(t)$ que atenda aos requisitos apresentados anteriormente, a saída y_p convergirá para y_m exponencialmente.

Uma escolha trivial para u_p é a lei de controle em cascata de malha aberta

$$u_p = C(s)r, \quad C(s) = \frac{k_m N_m(s) D_p(s)}{k_p D_m(s) N_p(s)} \quad (3.3)$$

o que leva para a seguinte função de transferência de malha fechada

$$\frac{y_p}{r} = \frac{k_m N_m(s) D_p(s) k_p N_p}{k_p D_m(s) N_p(s) D_p} = M(s). \quad (3.4)$$

Essa função de controle somente é viável na prática caso a hipótese 3.1 seja confirmada. Caso contrário, a equação (3.4) envolverá cancelamentos de polos e zeros instáveis (fora do semi-plano lateral esquerdo), o que acarretará em estados ilimitados para condições iniciais não-nulas. Adicionalmente, a equação (3.3) tem todos os problemas de um controle em malha aberta, como perda acentuada de performance com o menor descasamento paramétrico e cancelamentos de polos e zeros inexatos, afinal caso haja qualquer diferença entre o valor esperado para algum parâmetro e seu valor real, o cancelamento previsto matematicamente não ocorre, podendo levar o sistema a um comportamento diferente do modelado e, em certos casos, instável.

Ao invés do controle em malha aberta (3.3), considere o controle realimentado

$$u_p = \theta_1^{*T} \overbrace{\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}}^{\omega_u} u_p + \theta_2^{*T} \overbrace{\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}}^{\omega_y} y_p + \theta_3^* y_p + \theta_4^* r \quad (3.5)$$

conforme apresentado no diagrama de blocos da Figura 3.2, onde

$$\alpha(s) \triangleq \alpha_{n-2}(s) = \begin{bmatrix} s^{n-2} & s^{n-3} & \dots & s & 1 \end{bmatrix}^T, \quad n \geq 2$$

$$\alpha(s) \triangleq 0, \quad n = 1$$

e os parâmetros podem ser compilados em um vetor

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \theta_1^{*T} & \theta_2^{*T} & \theta_3^* & \theta_4^* \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (3.6)$$

sendo que $\theta_3^*, \theta_4^* \in \mathbb{R}$; $\theta_1^*, \theta_2^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ são parâmetros ideais que asseguram o casamento entre a planta e o modelo de referência serão projetados, e $\Lambda(s)$ é um polinômio Hurwitz mônico de grau $n - 1$ que contenha $N_m(s)$ como um fator:

$$\Lambda(s) = \Lambda_0(s)N_m(s) \quad (3.7)$$

o que implica que $\Lambda_0(s)$ é mônico, Hurwitz e de grau $n_0 = n - 1 - q_m$.

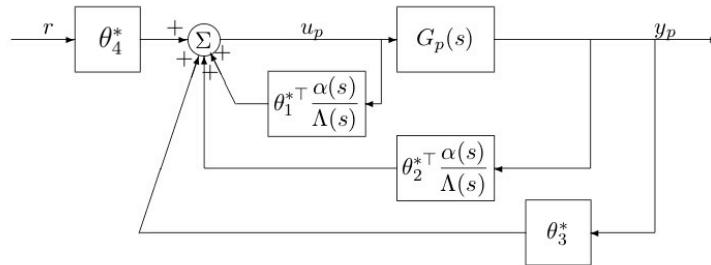


Figura 3.2: Diagrama de blocos do Controle por Modelo de Referência (MRC).

Pode-se definir o seguinte vetor de regressores

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_u^T & \omega_y^T & y_p & r \end{bmatrix}^T, \quad (3.8)$$

onde $\omega_u, \omega_y \in \mathbb{R}^{n-1}$, tal que $\omega_u = \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u_p$ e $\omega_y = \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y_p$. Então, a equação (3.5) pode ser reescrita utilizando os vetores descritos em (3.6) e (3.8):

$$u_p = \theta^{*T} \omega.$$

Dadas as dimensões dos vetores θ^* e ω , fica claro que são necessários $2n$ parâmetros

e sinais da planta, obtidos diretamente da planta ou através dos regressores ω_u e ω_y , para controlar uma planta de grau n .

Do ponto de vista de relação entrada-saída, a planta em malha fechada da figura 3.2 pode ser descrita pela função de transferência

$$y_p = G_c(s)r$$

onde

$$G_c(s) = \frac{\theta_4^* k_p N_p(s) \Lambda(s)^2}{\Lambda(s) [(\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)) D_p(s) - k_p N_p(s) (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s))]} \quad (3.9)$$

Como mencionado anteriormente, caso os parâmetros de controle ideais θ^* sejam selecionados adequadamente, a função de transferência de malha fechada $G_c(s)$ será igual ao modelo de referência $M(S)$. Então, podemos reescrever a equação (3.9) como

$$\underbrace{\frac{\theta_4^* k_p N_p(s) \Lambda(s)^2}{\Lambda(s) [(\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)) D_p(s) - k_p N_p(s) (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s))]}_{G_c(s)} = k_m \frac{N_m(s)}{D_m(s)}. \quad (3.10)$$

Como $N_p(s)$ é Hurwitz, pela hipótese 3.1, e $\Lambda(s)$ é projetado para ser Hurwitz, percebe-se que todos os zeros de $G_c(s)$ são estáveis. Como $G_c(s)$ é estável, os cancelamentos de pólos e zeros ocorrem no semi-plano lateral esquerdo. Desta forma, fazendo

$$\theta_4^* = \frac{k_m}{k_p} \quad (3.11)$$

e utilizando a equação (3.7), podemos simplificar (3.10) em

$$(\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)) D_p(s) - k_p N_p(s) (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s)) = N_p(s) \Lambda_0(s) D_m(s) \quad (3.12)$$

ou, reorganizando os termos,

$$\theta_1^{*T} \alpha(s) D_p(s) + k_p (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s)) N_p(s) = \Lambda(s) D_p(s) - N_p(s) \Lambda_0(s) D_m(s) \quad (3.13)$$

Esta equação diofantina (3.13) pode ser resolvida igualando as potências de s , de forma que chega-se a um sistema linear dado por

$$S \bar{\theta}^* = p \quad (3.14)$$

onde $\bar{\theta}^* = [\theta_1^{*T} \quad \theta_2^{*T} \quad \theta_3^*]^T$, $S \in \mathbb{R}^{2n-1 \times 2n-1}$ e $p \in \mathbb{R}^{2n-1}$. Lembrando que θ_4^* foi definido em (3.11), e considerando uma matriz S não-singular, fica fácil perceber

que é possível definir unicamente o conjunto completo de parâmetros θ^* tal que o controle faça um casamento perfeito entre a planta e o modelo de referência.

Lema 3.1. *Sejam os graus de $N_p(s)$, $D_p(s)$, $\Lambda(s)$, $\Lambda_0(s)$ e $D_m(s)$ conforme especificado na equação (3.5). Então,*

(i) *A solução para as equações (3.13) e (3.14) sempre irá existir.*

(ii) *Caso as hipóteses 3.2 e 3.3 se apliquem, a solução $\bar{\theta}^*$ é única.*

Prova: ver [53, p. 336].

Com relação ao item (ii) do Lema 3.1, é interessante destacar que trata-se do caso base tratado por esse trabalho. Porém, a hipótese 3.2 poderia ser flexibilizada para uma planta detectável e estabilizável, abrangendo assim uma classe maior de sistemas. Adicionalmente, a Hipótese 3.3 poderia ser generalizada para casos em que se conheça um limite superior n_{max} para o grau da planta, tal que $n_{max} \geq n$, contemplando assim plantas com maior grau de incerteza sobre seu modelo. Entretanto, por simplicidade esses casos não serão considerados nesse trabalho. Eles poderiam ser abordados utilizando os desenvolvimentos apresentados em [53].

3.1.3 Equação do Erro de Saída do MRC

Na seção 3.1.2 foi desenvolvida a lei de controle que garante que o sistema em malha fechada $G_c(s)$ apresenta função de transferência igual ao modelo $M(s)$. No entanto, para tal foi considerado que as condições iniciais da planta, controle e filtros são nulas. Com essa premissa, fica fácil perceber que $y_m(t) = y_p(t), \forall t \geq 0$ e para qualquer referência $r(t)$ uniformemente limitada e contínua por partes.

Como todos os cancelamentos de pólos e zeros realizados no desenvolvimento da equação (3.12) foram realizados no semi-plano lateral esquerdo, garante-se que não haverá condições iniciais que podem levar a estados internos do sistema ilimitados em função de polos e zeros instáveis que foram cancelados. Porém, condições iniciais diferentes de zero irão afetar o comportamento transiente de $y_p(t)$. Portanto, não mais poderá se garantir que $y_m(t) = y_p(t), \forall t \geq 0$, mas sim que $y_p(t) \rightarrow y_m(t)$ exponencialmente, em velocidade que depende da dinâmica em malha fechada. O objetivo é desenvolver a equação do erro de saída (ou erro de rastreamento) $e(t) \triangleq y_p(t) - y_m(t)$, considerando possíveis condições iniciais.

Seja a seguinte realização no espaço de estado do controle (3.5) para uma planta (3.1), com seus filtros de entrada e saída:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_u &= F\omega_u + g u_p, & \omega_u(0) &= 0 \\ \dot{\omega}_y &= F\omega_y + g y_p, & \omega_y(0) &= 0 \\ u_p &= \theta^{*T} \omega\end{aligned}\tag{3.15}$$

onde ω é definido conforme (3.8) e θ^* como (3.6).

$$F = \begin{bmatrix} -\lambda_{n-2} & -\lambda_{n-3} & -\lambda_{n-4} & \dots & -\lambda_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

λ_i são coeficientes da equação de Λ :

$$\Lambda(s) = s^{n-1} + \lambda_{n-2}s^{n-2} + \dots + \lambda_1s + \lambda_0 = \det(sI - F)$$

e (F, g) é uma realização no espaço de estados dos filtros, tal que $(sI - F)^{-1}g = \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}$. O diagrama de blocos da planta com a lei de controle descrita em (3.15) é apresentada na Figura 3.3.

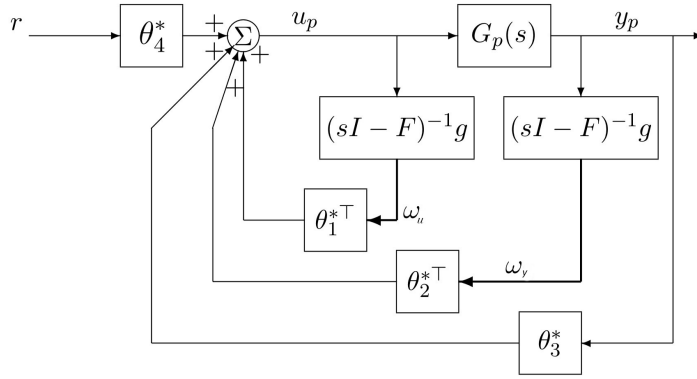


Figura 3.3: Diagrama de blocos do Controle por Modelo de Referência (MRC) com lei de controle com filtros.

A partir da representação de estados da planta (3.1), podemos definir uma representação para o sistema em malha fechada, aumentando o estado x_p com os estados ω_u e ω_y do filtro:

$$X = \begin{bmatrix} x_p^T & \omega_u^T & \omega_y^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n-2} \quad (3.17)$$

A seguinte representação aumentada no espaço de estados pode ser obtida:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_c X + B_c \theta_4^* r \\ y_p &= h_c^T X \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde:

$$\begin{aligned}
A_c &= \begin{bmatrix} A_p + B_p \theta_3^* h_p^T & B_p \theta_1^{*T} & B_p \theta_2^{*T} \\ g \theta_3^* h_p^T & F + g \theta_1^{*T} & g \theta_2^{*T} \\ g h_p^T & 0 & F \end{bmatrix}, \\
B_c &= \begin{bmatrix} b_p \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \\
h_c^T &= \begin{bmatrix} h_p^T & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

e X_0 é o vetor de condições iniciais. Já havia sido estabelecido em (3.10) que

$$\begin{aligned}
\frac{y_p(s)}{r(s)} &= \frac{\theta_4^* k_p N_p(s) \Lambda(s)^2}{\Lambda(s) [(\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)) D_p(s) - k_p N_p(s) (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s))]} = \\
&= h_c^T (sI - A_c)^{-1} B_c \theta_4^*
\end{aligned}$$

portanto, a partir de (3.12)

$$\begin{aligned}
\det(sI - A_c) &= \Lambda(s) [(\Lambda(s) - \theta_1^{*T} \alpha(s)) D_p(s) - k_p N_p(s) (\theta_2^{*T} \alpha(s) + \theta_3^* \Lambda(s))] = \\
&= \Lambda(s) N_p(s) \Lambda_0(s) D_m(s)
\end{aligned}$$

Fica claro que os autovalores de A_c são as raízes dos polinômios $\Lambda(s)$, $N_p(s)$ e $D_m(s)$, ou seja, a matriz A_c é estável. Por esse fato, e como a entrada r é limitada por hipótese, sabe-se que o vetor X em (3.18) é limitado.

Percebe-se que, uma vez que $h_c^T (sI - A_c)^{-1} B_c \theta_4^* = M(s)$, $(A_c, B_c \theta_4^*, h_c^T)$ é uma realização não mínima do modelo de referência, sua dinâmica pode ser representada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\dot{X}_m &= A_c X_m + B_c \theta_4^* r \\
y_m &= h_c^T X_m \\
X_m(0) &= X_{m0}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde $X_m \in \mathbb{R}^{3n-2}$.

Seja $X_e = X - X_m$ o erro de estado, e $e(t) \triangleq y_p(t) - y_m(t)$ o erro de rastreamento. A partir das representações de estados aumentados (3.18) e (3.20), pode-se deduzir que

$$\dot{X}_e = A_c X_e.$$

Essa equação diferencial tem como resposta

$$X_e = e^{A_c t}(X(0) - X_m(0)). \quad (3.21)$$

Adicionalmente, é possível obter das representações de estados que

$$e = h_c^T X_e.$$

Substituindo o valor de X_e obtido na equação (3.21), chega-se ao erro de rastreamento no tempo:

$$e(t) = h_c^T e^{A_c t}(X_0 - X_{m0}) \quad (3.22)$$

Como A_c é uma matriz estável, $e(t)$ converge exponencialmente para zero. A velocidade de convergência irá variar com os autovalores da matriz A_c , que são as raízes dos polinômios $\Lambda(s)$, $N_p(s)$ e $D_m(s)$. Pode-se projetar $\Lambda(s)$ e $D_m(s)$ para que tenha pólos rápidos, no entanto fica-se limitado aos zeros de $N_p(s)$, que são oriundos da planta.

3.2 Controle Adaptativo por Modelo de Referência – MRAC

Na seção 3.1 foi desenvolvida a teoria do controle por modelo de referência considerando um conhecimento completo da planta a ser controlada, a partir da qual eram gerados os parâmetros ideais. Para plantas com parâmetros desconhecidos, os parâmetros do controlador podem ser adaptados de forma a buscar o casamento perfeito com a planta. Portanto, o foco desta seção será apresentar esse controle para plantas incertas, bem como sua lei de adaptação. Adicionalmente, há uma breve análise caso se introduza uma perturbação na entrada da planta.

Um ponto relevante é, conforme já citado inicialmente, somente será abordado o caso de grau relativo unitário ($n^* = 1$), por ser o objeto de interesse do presente trabalho. Para aprofundamento nos cenários de grau relativo maiores que 1, ver [53, 55].

3.2.1 Definição do Problema

Seja uma planta de grau relativo unitário, conforme apresentado em (3.1). Ao contrário do caso apresentado na seção 3.1.1, esta planta é incerta. Adicionalmente, por simplicidade, o modelo de referência é descrito por

$$M(s) = k_m \frac{1}{D_m(s)}. \quad (3.23)$$

Assuma que todas as hipóteses apresentadas na seção 3.1.1 sejam satisfeitas.

O controle projetado para atender ao objetivo de fazer com que o erro de rastreamento da saída ($e \triangleq y_p - y_m$) tenda assintoticamente para zero, ou para algum pequeno conjunto residual em torno de zero é o mesmo apresentado em (3.15). No entanto, como os parâmetros da planta são desconhecidos, não é possível calcular diretamente o vetor θ^* que garantirá o casamento entre planta e modelo. Portanto, uma solução possível é alterar o controle para

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_u &= F\omega_u + gu_p, & \omega_u(0) &= 0 \\ \dot{\omega}_y &= F\omega_y + gy_p, & \omega_y(0) &= 0 \\ u_p &= \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\omega}\end{aligned}\tag{3.24}$$

com apenas a alteração destacada, onde $\theta(t)$ será a estimativa de θ^* em tempo real, gerado por uma lei de adaptação. Assim como foi feito para o caso MRC na seção 3.1.3, a descrição no espaço de estado do sistema aumentado composto pela planta e pelos filtros, com vetor de estados X conforme (3.17), e com o controle (3.24) é dada por

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A_0 X + B_c u_p \\ y_p &= h_c^T X \\ X(0) &= X_0\end{aligned}\tag{3.25}$$

onde:

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ gh_p^T & 0 & F \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} b_p \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad h_c^T = \begin{bmatrix} h_p^T & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{3.26}$$

O vetor regressor ω , definido em (3.8) pode ser escrito em função do vetor de estados X da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\omega &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ h_p^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Omega} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ &= \Omega X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r\end{aligned}$$

Multiplicando a relação acima pelo vetor de parâmetros ideais θ^* , definida em

(3.6) obtém-se a seguinte expressão para o controle ideal u^* :

$$\begin{aligned} u^* &= \theta^{*T} \omega \\ &= \theta^{*T} \Omega X + \theta_4^* r \end{aligned} \quad (3.27)$$

Agora, somando e subtraindo a entrada ideal u^* na equação de \dot{X} em (3.25):

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_0 X + B_c u_p + B_c u^* - B_c u^* \\ \dot{X} &= A_0 X + B_c u_p + B_c (\theta^{*T} \Omega X + \theta_4^* r) - B_c u^* \\ \dot{X} &= \underbrace{(A_0 + B_c \theta^{*T} \Omega)}_{A_c} X + B_c \theta_4^* r + B_c (u_p - u^*) \end{aligned}$$

Portanto, o sistema em malha fechada terá a seguinte representação, onde A_c foi definido em (3.19):

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_c X + B_c \theta_4^* r + B_c (u_p - u^*) \\ y_p &= h_c^T X \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Percebe-se que a equação (3.28) é igual à obtida no MRC em (3.19), exceto pelo termo $B_c (u_p - u^*)$. No entanto, caso o sinal de controle u_p escolhido seja igual ao ideal u^* , esse termo é nulo e ambas as equações ficam idênticas, como era de se esperar.

Assim como feito na seção 3.1.3, seja $X_e = X - X_m$ o estado do sistema do erro, sendo X_m o estado da representação não-mínima do modelo dada por (3.20); e $e = y_p - y_m$ o erro de rastreamento. A partir das representações (3.20) e (3.28), pode-se verificar que

$$\begin{aligned} \dot{X}_e &= A_c X_e + B_c (u_p - u^*) \\ e &= h_c^T X_e \\ X_e(0) &= X_{e0} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Uma vez que $h_c^T (sI - A_c)^{-1} B_c \theta_4^* = M(s)$, tem-se que

$$e = M(s) \left(\frac{1}{\theta_4^*} \right) \left(u_p - \underbrace{\theta^{*T} \omega}_{u^*} \right). \quad (3.30)$$

Para esse tipo de modelagem, há uma ampla gama de leis de adaptação desenvolvidas, conforme pode-se verificar em [53, Cap. 4.5].

3.2.2 Lei de Adaptação

Seja o sinal de controle $u_p = \theta^T(t)\omega$ do sistema dado por (3.29), define-se o erro de parâmetro como $\tilde{\theta} \triangleq \theta(t) - \theta^*$. Portanto, a partir de (3.29) é possível encontrar a seguinte representação no espaço de estado do erro, em função do erro de parâmetro:

$$\begin{aligned}\dot{X}_e &= A_c X_e + \bar{B}_c \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \theta_4^* \end{pmatrix}}^{\rho^*} \tilde{\theta}^T \omega \\ e &= h_c^T X_e,\end{aligned}\tag{3.31}$$

onde $\bar{B}_c = B_c \frac{k_m}{k_p}$ e $\rho^* = \frac{1}{\theta_4^*}$.

Seja a seguinte função do tipo Lyapunov proposta:

$$V(\tilde{\theta}, X_e) = \frac{X_e^T P_c X_e}{2} + \frac{\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}}{2} |\rho^*|,\tag{3.32}$$

onde Γ e P_c são positivas definidas ($\Gamma = \Gamma^T > 0$ e $P_c = P_c^T > 0$) e satisfazem as seguintes equações

$$\begin{aligned}P_c A_c + A_c^T P_c &= -qq^T - \nu_c L_c \\ P_c \bar{B}_c &= h_c\end{aligned}\tag{3.33}$$

para A_c , \bar{B}_c e h_c conforme (3.31). A matriz L_c é definida positiva ($L_c = L_c^T > 0$), q é um vetor e ν_c é uma constante positiva e pequena. A derivada temporal de V é dada por:

$$\dot{V} = -\frac{X_e^T qq^T X_e}{2} - \frac{\nu_c}{2} X_e^T L_c X_e + X_e^T P_c \bar{B}_c \rho^* \tilde{\theta}^T \omega + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} |\rho^*|.$$

A partir de (3.31) e (3.33), pode-se verificar que $X_e^T P_c \bar{B}_c = e$. Adicionalmente, pode-se reescrever $\rho^* = |\rho^*| \text{sgn}(\rho^*)$, tal que:

$$\dot{V} = -\frac{X_e^T qq^T X_e}{2} - \frac{\nu_c}{2} X_e^T L_c X_e + \underbrace{e |\rho^*| \text{sgn}(\rho^*) \tilde{\theta}^T \omega + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} |\rho^*|}_{\text{Parte positiva de } \dot{V}}.$$

Portanto, para garantir que $\dot{V} < 0$, deve-se zerar a parte positiva de V , admitindo:

$$\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} = -\Gamma e \omega \text{sgn}(\rho^*),\tag{3.34}$$

de forma que a derivada temporal de V se torne

$$\dot{V} = -\frac{X_e^T qq^T X_e}{2} - \frac{\nu_c}{2} X_e^T L_c X_e.\tag{3.35}$$

As equações (3.32) e (3.35) demonstram que V é globalmente limitada e, por consequência, X_e e $\tilde{\theta}$ são globalmente limitadas. Uma vez que $X_e = X - X_m$ e X_m é globalmente limitada por hipótese do modelo ser estável, então X é globalmente limitado, o que implica que y_p , ω_u e ω_y também são globalmente limitadas (conforme equação (3.26)). Como $u_p = \theta^T \omega$, dado que θ e ω são globalmente limitadas, então u_p também será globalmente limitada. Desta forma, demonstra-se que todos os sinais do sistema são limitados.

Como o sinal de $\tilde{\theta}$ é globalmente limitado, a partir de (3.31) pode-se verificar que \dot{X}_e é globalmente limitado. Como \dot{V} é uniformemente contínua, então pode-se aplicar o teorema de Barbalat (ver [3]) que garante que $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Ou seja, o erro de rastreamento vai a zero garantindo o casamento da planta com o modelo em tempo finito.

3.2.3 Análise da Perturbação de Entrada no Controle

Até o presente momento, toda a análise desconsiderou qualquer perturbação que pudesse afetar o controle. No entanto, em implementações reais esse é um ponto relevante a se considerar, afinal dificilmente se consegue um sistema absolutamente isolado e imune de distúrbios.

Na análise deste trabalho, será considerada apenas a perturbação de entrada, ou seja, um sinal aditivo ao controle u_p na entrada da planta. Na representação equivalente do modelo MRAC apresentada na Figura 3.4, o distúrbio é representado por d . Com relação a essa perturbação, define-se uma hipótese adicional às definidas na seção 3.1.1:

Hipótese 3.7. *A perturbação de entrada é desconhecida, localmente integrável e uniformemente limitada. Também assume-se que um limite superior $\bar{d} \geq |d(t)|$ ($\forall t$) existe, e é conhecido.*

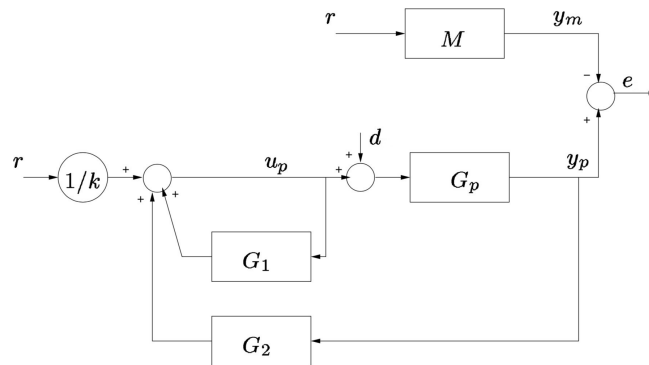


Figura 3.4: Representação equivalente do controle MRAC com perturbação d de entrada.

A lei de controle u_p que rege esta representação equivalente é a mesma da Figura 3.3, porém a sua representação é composta pelas saídas dos filtros $G_1(s)$ e $G_2(s)$ e pela entrada de referência r , sendo dada por:

$$u_p = \frac{1}{k}r + G_1(s)u + G_2(s)y \quad (3.36)$$

onde:

- $k := \frac{k_p}{k_m} = \frac{1}{\theta_4}$.
- $G_1(s) := \theta_1^T \underbrace{(sI - F)^{-1}g}_{\frac{\omega_u}{u_p}}$.
- $G_2(s) := \theta_2^T \underbrace{(sI - F)^{-1}g}_{\frac{\omega_y}{y_p}} + \theta_3$.

A representação sentação no espaço de estado da planta, descrito em (3.1), considerando a perturbação de entrada fica

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + b_p [u_p + d] \\ y_p &= h_p^T x_p, \end{aligned} \quad (3.37)$$

e sua versão aumentada com o vetor de estado X definido em (3.17), à semelhança da obtida em (3.25), é

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_0 X + B_c u_p + B'_c d \\ y_p &= h_c^T X \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde, A_0 , B_c e h_c são idênticas às definidas em (3.26), e B'_c é dado por:

$$B'_c = \begin{bmatrix} b_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Com essa perturbação de entrada, a representação de estados do erro de rastreamento e em função do estado do sistema do erro X_e , apresentado inicialmente em (3.29), tem um termo adicional do distúrbio, descasado da entrada u_p .

$$\begin{aligned} \dot{X}_e &= A_c X_e + B_c (u_p - u^*) + B'_c d \\ e &= h_c^T X_e \\ X_e(0) &= X_{e0} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Deseja-se fazer um casamento da perturbação d e da entrada u_p . Para tal, define-se $\bar{W}_d := h_c^T (sI - A_c)^{-1} B_c'$ como sendo a função de transferência entre a perturbação d e o erro de rastreamento e , com $u = u^*$. Adicionalmente, é possível perceber na equação (3.30) que

$$\begin{aligned} e &= k^* M(s) (u_p - u^*) + \bar{W}_d d \\ &= k^* M(s) \left[u_p - u^* + \underbrace{(k^* M(s))^{-1} \bar{W}_d d}_{W_d} \right] \end{aligned}$$

definindo $W_d := (k^* M(s))^{-1} \bar{W}_d$, de forma que o erro de rastreamento fique

$$e = k^* M(s) (u_p - u^* + W_d d)$$

conforme Figura 3.5.

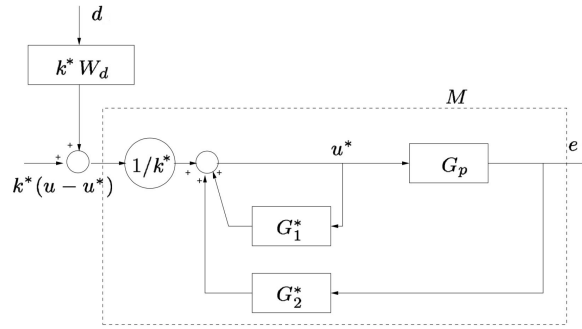


Figura 3.5: Representação equivalente do controle MRAC com parâmetros ideais e perturbação casada.

É possível notar pelo diagrama de blocos da Figura 3.5 que $W_d = 1 - G_1^*$. Como a função de transferência $G_1^*(s) = \theta_1^{*T} (sI - F)^{-1} g$, é estritamente própria e estável, pode-se concluir que a função de transferência W_d é própria e estável.

Finalmente, definindo $\bar{U} = -u^* + W_d d$ a equação do erro pode ser reescrita por:

$$e = k^* M(s) (u_p + \bar{U}) \quad (3.40)$$

Equivalentemente, a equação do erro pode ser representada no espaço de estado por:

$$\begin{aligned} \dot{X}_e &= A_c X_e + B_c (u_p + \bar{U}) \\ e &= h_c^T X_e \\ X_e(0) &= X_{e0} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Capítulo 4

Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída Baseado no Controle Adaptativo por Modelo de Referência

O controle *super-twisting*, apresentado na seção 2.4.3, ou sua extensão com ganhos variáveis (seção 2.4.4), é um algoritmo poderoso de controle que tem a vantagem de não depender da derivada temporal da variável de deslizamento para garantir sua convergência de segunda ordem para zero. Além disso, é capaz de atenuar o indesejável efeito do *chattering* e conta com uma lei de controle contínua. Todas essas vantagens fizeram com que essa estratégia de controle tenha diversas aplicações, como [11, 46–48, 56].

Uma das maiores desvantagens do controle *super-twisting* é a amplitude de seu controle, muitas vezes elevada até em regime permanente. Diante dessa dificuldade, foi proposto em [13, 57, 58] uma estratégia de controle por realimentação de saída utilizando o VGSTA para sistemas incertos. Dessa forma, foi possível obter reduções na amplitude do sinal de controle.

Este trabalho introduz uma variação do controle VGSTA com realimentação de saída se valendo do paradigma do controle adaptativo por modelo de referência para projetar seu controlador. Desta forma, é possível aproveitar-se de uma estrutura otimizada combinada com um controle MRC nominal, diminuindo ainda mais a amplitude do sinal de controle, porém sem abrir mão das vantagens que o controle *super-twisting* traz como convergência em tempo finito e capacidade de rejeitar ampla variedade de perturbações casadas.

Adicionalmente nos casos onde a perturbação não for dependente dos estados do sistema, evita-se a necessidade de transformar o sistema para sua forma normal e

estabelecer um limitante para um estado não-medido, como no caso da realimentação de saída anterior.

Inicialmente, será apresentado o controle que é a grande contribuição deste trabalho, o VGSTA por realimentação de saída baseado no MRAC. Por fim, será apresentado o trabalho do *super-twisting* com realimentação de saída [13], e seu resultado será comparado ao controle proposto.

4.1 Controlador Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída Baseado no Controle Adaptativo por Modelo de Referência

Nesta seção será apresentado o controle proposto no presente trabalho. Inicialmente, será detalhada a definição do problema. Na sequência, será tratado o caso em que a perturbação na entrada do sistema não depende dos estados da planta, somente da sua saída. Por fim, será apresentado uma adaptação para o caso com perturbações dependentes de estados do sistema.

4.1.1 Definição do Problema

Considere um sistema não-linear incerto, monovariável (SISO), descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p [u_p + d(t)] \\ y_p &= h_p^T x_p, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde $x_p \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u_p \in \mathbb{R}$ é a entrada, $y_p \in \mathbb{R}$ é a saída da planta e $d(t) : \mathbb{R}$ é uma função absolutamente contínua não-linear que engloba as incertezas/perturbações casadas no sistema. Será considerado que apenas a saída do sistema estará disponível para a implementação do controlador. O correspondente modelo entrada-saída é dado por

$$y_p = G_p(s)u_p, \quad G_p(s) = k_p \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$$

onde $k_p \in \mathbb{R}$ é o ganho de alta frequência, $N_p(s)$ e $D_p(s)$ são polinômios mônicos de graus m e n , respectivamente. O grau relativo é dado por $n^* = n - m$.

As especificações da resposta dinâmica em malha fechada desejada pelo projetista são estabelecidas através do modelo de referência:

$$\dot{y}_m = -a_m y_m + k_m r \quad (4.2)$$

onde $a_m > 0$, $k_m \in \mathbb{R}$ é o ganho de alta frequência, $y_m \in \mathbb{R}$ é a saída do modelo, e $r \in \mathbb{R}$ é um sinal de referência. O sinal de referência r é uma função arbitrária do tempo, continua por partes e uniformemente limitada. O correspondente modelo entrada-saída é dado por

$$y_m = M(s)r, \quad M(s) = \frac{k_m}{s + a_m}$$

e seu grau relativo é unitário. Esse modelo sem zeros pode ser assumido por simplicidade. No caso de um modelo com maior número de pólos e zeros, é sempre possível aplicar uma simplificação de forma que o sinal de referência seja modificado pela dinâmica complementar do modelo, conforme:

$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{k_m}{s + a_m} \frac{\overbrace{N_m(s)}^{L(s)}}{D'_m(s)} \\ M(s)r &= \frac{k_m}{s + a_m} \underbrace{L(s)r}_{r'} \\ &= \frac{k_m}{s + a_m} r' \end{aligned}$$

O objetivo é determinar uma lei de controle u por realimentação de saída baseado no algoritmo *super-twisting* com ganhos variáveis (apresentado na seção 2.4.4) que irá garantir que a saída y_p rastreie em tempo finito o sinal de referência y_m , em uma estrutura baseada no controlador MRAC (apresentado na seção 3.2).

Aplicam-se as seguintes hipóteses básicas do MRAC 3.1, 3.2, 3.3, 3.5 e 3.6. Com relação às hipóteses 3.4 e 3.7, considera-se, respectivamente, que:

Hipótese 4.1. *A planta $G_p(s)$ tem grau relativo uniforme e unitário ($n^* = 1$).*

Hipótese 4.2. *A perturbação de entrada é desconhecida e não há necessidade de que seja uniformemente limitada. Entretanto, $d(t)$ e sua derivada $\dot{d}(t)$ são limitados em norma por funções contínuas e conhecidas.*

Assim como definido no controle por modelo de referência, o erro de rastreamento é dado por $e(t) \triangleq y_p(t) - y_m(t)$ e pretende-se projetar um controle u_p que leve o erro a zero. A equação deste erro pode ser descrita como (3.40):

$$\begin{aligned} e &= k^* M(s)(u_p + \bar{U}) \\ &= \underbrace{\left(\frac{k_p}{k_m}\right)}_{k^*} \underbrace{\left(\frac{k_m}{s + a_m}\right)}_{M(s)} \left[u_p + \underbrace{(-u^* + W_d d(t))}_{\bar{U}} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

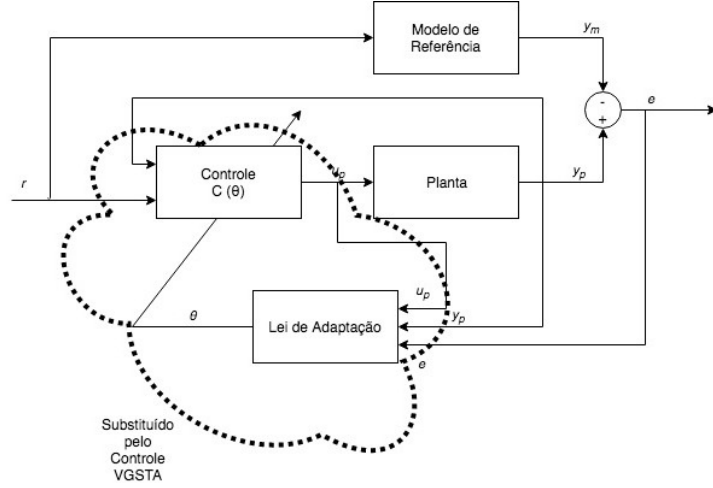


Figura 4.1: Controle MRAC da Figura 3.1, destacando ponto a ser alterado no controle Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída Baseado no Controle Adaptativo por Modelo de Referência.

A partir desta equação (4.3), é possível chegar ao seguinte formato diferencial:

$$\dot{e} = -a_m e + k_p [u_p - u^* + W_d d(t)] \quad (4.4)$$

A configuração proposta neste capítulo, visa construir um controle que sintetize o sinal $u_p = u^* - W_d d(t)$, tal como faria um controle adaptativo descrito no capítulo 3. No diagrama de blocos, o novo controle será incluído conforme indicado na Figura 4.1. No entanto, este sinal será fruto de um controlador do tipo VGSTA.

4.1.2 O Controlador

É possível reescrever a equação (4.4) da forma apresentada em (2.58), com $\sigma = e$:

$$\underbrace{\dot{e}}_{\dot{\sigma}} = \underbrace{k_p u_p}_v + \underbrace{(-a_m e - k_p u^* + k_p W_d d(t))}_{\bar{d}(t,e)} \quad (4.5)$$

$$\dot{\sigma} = v + \bar{d}(t, \sigma),$$

onde

$$\sigma = e$$

$$v = k_p u_p \quad (4.6)$$

$$\bar{d}(t, e) = -a_m e - k_p u^* + k_p W_d d(t). \quad (4.7)$$

Inicialmente, o termo u^* de $\bar{d}(t, e)$ será analisado. Conforme apresentado em

(3.5), seu valor é

$$u^* = \theta_1^{*T} \overbrace{\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u_p}^{\omega_u} + \theta_2^{*T} \overbrace{\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y_p}^{\omega_y} + \theta_3^* y_p + \theta_4^* r. \quad (4.8)$$

Iniciando a análise pelo termo $\theta_1^{*T} \omega_u$, e considerando que $U_p(s) = G_p^{-1}(s) Y_p(s)$:

$$\begin{aligned} \omega_u(s) &= \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} U_p(s) \\ &= \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} [G_p^{-1}(s) Y_p(s)]. \end{aligned}$$

Pela hipótese 4.1 e por saber que o filtro $\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}$ é uma função estritamente própria, é possível afirmar que a função $\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} G_p^{-1}(s)$ é uma função própria, tal que pode ser reescrita da forma:

$$\begin{aligned} \omega_u(s) &= \left[\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} G_p^{-1}(s) \right] Y_p(s) \\ &= k_p^{-1} \left[1 + \frac{N'(s)}{\Lambda(s)N(s)} \right] Y_p(s), \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $N'(s) = \alpha(s)D(s) - \Lambda(s)N(s)$. Como $y_p = e + y_m$, então chega-se ao formato

$$\theta_1^{*T} \omega_u(s) = \theta_1^{*T} k_p^{-1} \left[(E(s) + Y_m(s)) + \frac{N'(s)}{\Lambda(s)N(s)} Y_p(s) \right]. \quad (4.10)$$

Com relação ao termo $\theta_2^{*T} \omega_y$:

$$\theta_2^{*T} \omega_y(s) = \theta_2^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} Y_p(s). \quad (4.11)$$

Por fim, para o termo $\theta_3^* y_p$, fica fácil ver que:

$$\theta_3^* y_p = \theta_3^* (e + y_m) \quad (4.12)$$

Com relação ao termo da perturbação $W_d d(t)$, sabe-se, a partir da figura 3.5 na seção 3.2.3, que $W_d = \left(1 - \theta_1^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right)$. Portanto,

$$\begin{aligned} W_d d(t) &= \left(1 - \theta_1^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right) d(t) \\ &= d(t) - \left(\theta_1^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right) d(t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Com isso, pode-se expandir a equação (4.7), a partir de (4.10), (4.11), (4.12) e

(4.13) de forma que

$$\begin{aligned}
\bar{d}(t, e) = & -a_m e \\
& -k_p \left\{ \theta_1^{*T} k_p^{-1} \left[(E(s) + Y_m(s)) + \frac{N'(s)}{\Lambda(s)N(s)} Y_p(s) \right] \right. \\
& + \theta_2^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} Y_p(s) + \theta_3^*(e + y_m) + \theta_4^* r \left. \right\} \\
& + k_p \left[d(t) - \left(\theta_1^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right) d(t) \right].
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Considerando que a perturbação $d(t)$ pode ser reescrita como $d(t) = [d(t, e) - d(t, 0)] + d(t, 0)$, podemos agrupar os termos de (4.14) entre os que são dependentes do erro e e dos que não são diretamente dependentes do erro (em outras palavras, não vão necessariamente a zero quando o erro é nulo):

$$\begin{aligned}
\bar{d}(t, e) = & \{ -a_m e - \theta_1^{*T} E(s) - k_p \theta_3^* e + k_p (d(t, e) - d(t, 0)) \} + \\
& \left\{ -\theta_1^{*T} Y_m(s) - \theta_1^{*T} \frac{N'(s)}{\Lambda(s)N(s)} Y_p(s) - k_p \theta_2^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} Y_p(s) - k_p \theta_3^* y_m - k_p \theta_4^* r \right. \\
& \left. + k_p d(t, 0) - k_p \left(\theta_1^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right) d(t) \right\}.
\end{aligned}$$

Conforme a equação (2.60), $\bar{d}(t, e)$ pode ser reescrita como [10]

$$\bar{d}(t, e) = \underbrace{[\bar{d}(t, e) - \bar{d}(t, 0)]}_{g_1(t, e)} + \underbrace{\bar{d}(t, 0)}_{g_2(t)},$$

ou seja, fica claro que os valores de g_1 e g_2 são

$$g_1(t, e) = -a_m e - \theta_1^{*T} e - k_p \theta_3^* e + k_p [d(t, e) - d(t, 0)] \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
g_2(t) = & -\theta_1^{*T} y_m - \theta_1^{*T} \frac{N'(s)}{\Lambda(s)N(s)} Y_p(s) - k_p \theta_2^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} Y_p(s) \\
& - k_p \theta_3^* y_m - k_p \theta_4^* r + k_p d(t, 0) - k_p \left(\theta_1^{*T} \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right) d(t).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

É fácil perceber que $g_1(t, 0) = 0$.

Para o projeto do sistema de controle VGSTA, de acordo com (2.61) é necessário obter a derivada temporal de $g_2(t)$ (importante notar que, para os termos com funções de transferência, utiliza-se o operador diferencial no domínio de Laplace s):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [g_2(t)] = & -(\theta_1^{*T} + k_p \theta_3^*) \dot{y}_m - \theta_1^{*T} \frac{sN'(s)}{\Lambda(s)N(s)} Y_p(s) - k_p \theta_2^{*T} \frac{s\alpha(s)}{\Lambda(s)} Y_p(s) \\
& - k_p \theta_4^* \dot{r} + k_p \dot{d}(t, 0) - k_p \theta_1^{*T} \left(\frac{s\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right) d(t)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Contudo, sabe-se que as funções de transferência $\frac{N'(s)}{\Lambda(s)N(s)}$ e $\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}$ são estritamente próprias pelas suas formações. No caso da expansão em frações parciais $\frac{sN'(s)}{\Lambda(s)N(s)}$, deve-se encontrar o ganho de alta frequência, uma vez que pode ser diferente de 1. Desta forma,

$$\frac{sN'(s)}{\Lambda(s)N(s)} = \left[k'' + \frac{N''(s)}{\Lambda(s)N(s)} \right], \quad N''(s) = s\alpha(s)D(s) - (s + k'')\Lambda(s)N(s)$$

$$k'' = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{sN'(s)}{\Lambda(s)N(s)} \quad (4.18)$$

$$\frac{s\alpha(s)}{\Lambda(s)} = \left[1 + \frac{N_\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right], \quad N_\alpha(s) = s\alpha(s) - \Lambda(s).$$

O que possibilita reescrever (4.17) da forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [g_2(t)] &= -(\theta_1^{*T} + k_p\theta_3^*) \dot{y}_m - \theta_1^{*T} \left[k'' + \frac{N''(s)}{\Lambda(s)N(s)} \right] Y_p(s) - k_p\theta_2^{*T} \left[1 + \frac{N_\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right] Y_p(s) \\ &\quad - k_p\theta_4^* \dot{r} + k_p \dot{d}(t, 0) - k_p\theta_1^{*T} \left[1 + \frac{N_\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right] d(t) \\ &= -(\theta_1^{*T} + k_p\theta_3^*) \dot{y}_m - k''\theta_1^{*T} \underbrace{(E(s) + Y_m(s))}_{Y_p(s)} - \theta_1^{*T} \frac{N''(s)}{\Lambda(s)N(s)} Y_p(s) \\ &\quad - k_p\theta_2^{*T} \underbrace{(E(s) + Y_m(s))}_{Y_p(s)} - k_p\theta_2^{*T} \frac{N_\alpha(s)}{\Lambda(s)} Y_p(s) - k_p\theta_4^* \dot{r} \\ &\quad + k_p \dot{d}(t, 0) - k_p\theta_1^{*T} d(t) - k_p\theta_1^{*T} \frac{N_\alpha(s)}{\Lambda(s)} d(t) \end{aligned}$$

Reorganizando os termos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [g_2(t)] &= -(k''\theta_1^{*T} + k_p\theta_2^{*T})E(s) - (k''\theta_1^{*T} + k_p\theta_2^{*T})Y_m(s) \\ &\quad - \left(\theta_1^{*T} \frac{N''(s)}{\Lambda(s)N(s)} + k_p\theta_2^{*T} \frac{N_\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right) Y_p(s) - (\theta_1^{*T} + k_p\theta_3^*) \dot{y}_m \quad (4.19) \\ &\quad - k_p\theta_4^* \dot{r} + k_p \dot{d}(t, 0) - k_p\theta_1^{*T} d(t) - k_p\theta_1^{*T} \frac{N_\alpha(s)}{\Lambda(s)} d(t) \end{aligned}$$

A lei de controle u_p é portanto definida com base no algoritmo *Super-Twisting* com ganhos variáveis, conforme (2.59), lembrando que $\sigma = e$:

$$u_p = -k_1(t)\phi_1(e) - \int_0^t k_2(\tau)\phi_2(e)d\tau, \quad (4.20)$$

onde

$$\begin{aligned}\phi_1(e) &= |e|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e) + k_3 e, \\ \phi_2(e) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(e) + \frac{3}{2} k_3 |e|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(e) + k_3^2 e, \\ k_3 &> 0\end{aligned}\tag{4.21}$$

A seguinte hipótese, relacionada ao controle VGSTA é estabelecida:

Hipótese 4.3. *A perturbação (4.7) satisfaz as seguintes desigualdades, análogas às apresentadas em (2.61),*

$$\begin{aligned}|g_1(t, e)| &\leq [\varrho_1(t) + |\pi_1(t)|] |\phi_1(e)|, \\ \left| \frac{d}{dt} [g_2(t)] \right| &\leq [\varrho_2(t) + |\pi_2(t)|] |\phi_2(e)|,\end{aligned}\tag{4.22}$$

exceto pelos termos exponencialmente decrescentes $|\pi_n(t)| = c_n e^{-\lambda_n(t-t_0)}$, onde $c_n, \lambda_n > 0$. As funções $\varrho_n(t)$ são conhecidas e contínuas.

Os termos exponenciais $\pi_n(t)$ são introduzidos com o objetivo de representar perturbações relacionadas às condições iniciais do sistema, que foram descartadas ao utilizarmos análise no domínio da frequência ou ao fazermos aproximações por filtros de primeira ordem, como será visto na seção 4.1.3.

Portanto, considerando a equação do estado do erro MRAC dada por (3.41), a dinâmica do erro de rastreamento dada por (4.5) e o sinal de controle dado por (4.20), pode-se construir a seguinte dinâmica em malha fechada do sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_e &= A_c x_e + B_c (u_p + \bar{U}) \\ \dot{e} &= -k_p k_1(t) \phi_1(e) + z + g_1(t, e) \\ \dot{z} &= -k_p k_2(t) \phi_2(e) + \frac{d}{dt} [g_2(t)],\end{aligned}\tag{4.23}$$

com $z = k_p \int_0^t k_2(\tau) \phi_2(e) d\tau + g_2(t)$ e $\bar{U} = -u^* + W_d d(t)$. A Figura 4.2 ilustra o sistema completo e seu controle em diagrama de blocos.

Teorema 4.1. *Seja o sistema em malha fechada (4.23), considerando as hipóteses 3.1, 3.2, 3.3, 3.5, 3.6, 4.1, 4.2 e 4.3. Então, as trajetórias do sistema serão atraídas globalmente e em tempo finito para $\dot{e} = e = 0$, se os ganhos variáveis forem escolhidos como:*

$$\begin{aligned}k_1(t) &= \delta + \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon\varrho_2 + \epsilon + [2\epsilon + \varrho_1] (\beta + 4\epsilon^2) \right\} \\ k_2(t) &= \beta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(t),\end{aligned}\tag{4.24}$$

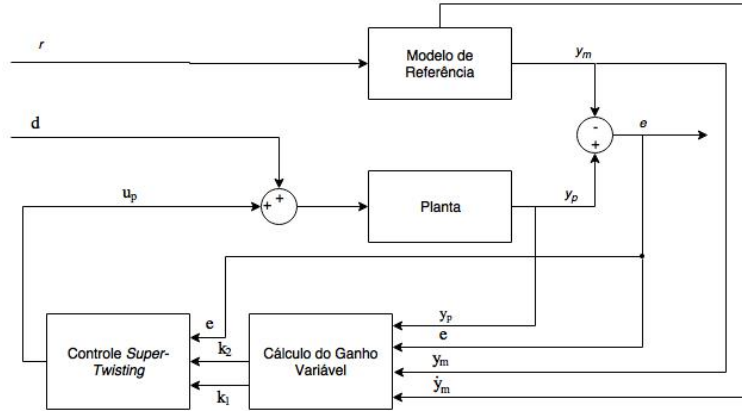


Figura 4.2: Diagrama de blocos do controle Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída Baseado no Controle Adaptativo por Modelo de Referência.

onde $\beta > 0$, $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ são constantes positivas arbitrárias.

Demonstração. Ver A.1. □

O exemplo simples a seguir ilustra a aplicação do controle em uma planta conhecida e com perturbação $d(t)$ dependente apenas da saída $y_p(t)$, apenas para demonstrar sua metodologia. Posteriormente, será apresentado um exemplo mais completo, com planta incerta, e com perturbação dependente de estados da planta.

Exemplo 4.1. Considere um sistema não-linear descrito por:

$$\dot{x} = Ax + B[u + d(t, y_p)], \quad y = Cx,$$

e seja:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s+1}{(s-1)^2},$$

com ganho de alta frequência $k_p = CB = 1$.

Seja o modelo de referência dado por:

$$M(s) = \frac{2}{(s+1)}.$$

A perturbação é igual a $d(t, y_p) = y_p + 0.1 \sin 10t$ e depende apenas de sua saída. Portanto, pode ser reescrita como

$$d(t, e, y_m) = (e + y_m) + 0.1 \sin 10t = \overbrace{[e]}^{d(t,e)-d(t,0)} + \underbrace{[y_m + 0.1 \sin 10t]}_{d(t,0)}.$$

E sua derivada temporal é igual a

$$\dot{d}(t, e, y_m) = \overbrace{\dot{e}}^{\dot{d}(t,e) - \dot{d}(t,0)} + \underbrace{\dot{y}_m + \cos 10t}_{\dot{d}(t,0)} \leq \dot{e} + \dot{y}_m + 1.$$

A referência é uma senoíde de amplitude unitária $r(t) = \sin t$, cuja derivada temporal é

$$|\dot{r}| = |\cos t| \leq 1.$$

O objetivo é elaborar um controle u_p que faça a saída da planta rastrear o modelo, utilizando VGSTA com realimentação de saída baseado no MRAC. Conforme equação (4.5), o sistema pode ser escrito da forma:

$$\dot{e} = 1 \cdot u_p + (-1 \cdot e - 1 \cdot u^* + 1 \cdot W_d d(t))$$

O primeiro passo é calcular os parâmetros ideais θ^* que compõem o termo u^* da equação.

Com base num $\alpha(s) = 1$ e $\Lambda(s) = s + 2$, utilizando a equação (3.13):

$$\theta^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(s) = s + 2 \quad (4.25)$$

onde,

$$\theta^{*T} \omega = \theta_1^{*T} \omega_u + \theta_2^{*T} \omega_y + \theta_3^* y_p + \theta_4^* r.$$

O passo seguinte é estabelecer os valores das funções g_1 e $\frac{d}{dt}g_2$, conforme equação (4.15) e (4.19). Porém, para o cálculo de $\frac{d}{dt}g_2$, é necessário estabelecer os valores de $N''(s)$, k'' e $N_\alpha(s)$, conforme (4.18):

$$N'(s) = 1 \cdot (s - 1)^2 - (s + 2) \cdot (s + 1) = -5s - 1$$

$$k'' = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{-5s^2 - s}{(s + 2)(s + 1)} \right) = -5$$

$$N''(s) = s \cdot 1 \cdot (s - 1)^2 - (s - 5) \cdot (s + 2) \cdot (s + 1) = 14s + 10$$

$$N_\alpha(s) = s \cdot 1 - (s + 2) = -2$$

Com isso, é possível calcular os valores das funções g_1 e $\frac{d}{dt}g_2$:

$$\begin{aligned}
g_1 &= -e - e + 5e + e = 4e \\
\frac{d}{dt}g_2 &= -(-5 + 9)e - (-5 + 9)y_m - \left(\frac{14s + 10}{(s + 2)(s + 1)} + 9 \cdot \frac{-2}{(s + 2)} \right) Y_p(s) \\
&\quad - (1 - 5)\dot{y}_m - 2 \cos t + (\dot{y}_m + \cos 10t) - (e + y_m + 0.1 \sin 10t) \\
&\quad - \frac{-2}{(s + 2)}(Y_p(s) + 0.1 \sin 10t) \\
&= -5e - 5y_m + \frac{6s + 10}{(s + 1)(s + 2)}Y_p(s) + 5\dot{y}_m - 2 \cos t + \cos 10t \\
&\quad - 0.1 \sin 10t + \frac{2}{(s + 2)}0.1 \sin 10t
\end{aligned}$$

Então, deve-se estabelecer funções ϱ_1 e ϱ_2 , conforme (4.22), a partir de majorantes de $|g_1|$ e $|\frac{d}{dt}g_2|$:

$$|g_1| \leq 4|e| \leq \overbrace{\frac{4}{k_3}}^{\varrho_1} \underbrace{\left[|e|^{\frac{1}{2}} + k_3|e| \right]}_{|\phi_1|}$$

e

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dt}g_2 \right| &\leq 5|e| + 5|y_m| + \frac{6s + 10}{(s + 1)(s + 2)}|Y_p(s)| + 5|\dot{y}_m| + 2 \cos t + \cos 10t \\
&\quad + 0.1 \sin 10t + \frac{2}{(s + 2)}0.1 \sin 10t \\
&\leq 5|e| + 5|y_m| + \frac{6s + 10}{(s + 1)(s + 2)}|Y_p(s)| + \underbrace{|\pi_2(t)|}_{\text{Condições Iniciais de } \frac{6s+10}{(s+1)(s+2)}} + 5|\dot{y}_m| + 3.3 \\
&\leq \underbrace{\max \left(\frac{5}{k_3^2}, 10|y_m| + \frac{12s + 20}{(s + 1)(s + 2)}|Y_p(s)| + 10|\dot{y}_m| + 6.6 \right)}_{\varrho_2} \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}k_3|e|^{\frac{1}{2}} + k_3^2|e| \right]}_{|\phi_2|}
\end{aligned}$$

Por fim, com os valores de ϱ_1 e ϱ_2 calculados e utilizando $k_3 = 1$, $\delta = 0.1$, $\beta = 10$ e $\epsilon = 1$, é possível calcular a função dos ganhos variáveis $k_1(t, x)$ e $k_2(t, x)$ conforme (4.24). Aplicando estes ganhos no sistema, com condições iniciais nulas, temos os seguintes resultados de simulação, ilustrados na Figura 4.3:

Caso o sistema conte com condições iniciais não nulas, o sinal de controle rapidamente traz o erro para zero (ou para uma faixa muito pequena em torno do zero), porém ao custo de uma ação de controle bastante intensa. Na Figura 4.4 o mesmo exemplo é apresentado, porém com condições iniciais $x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

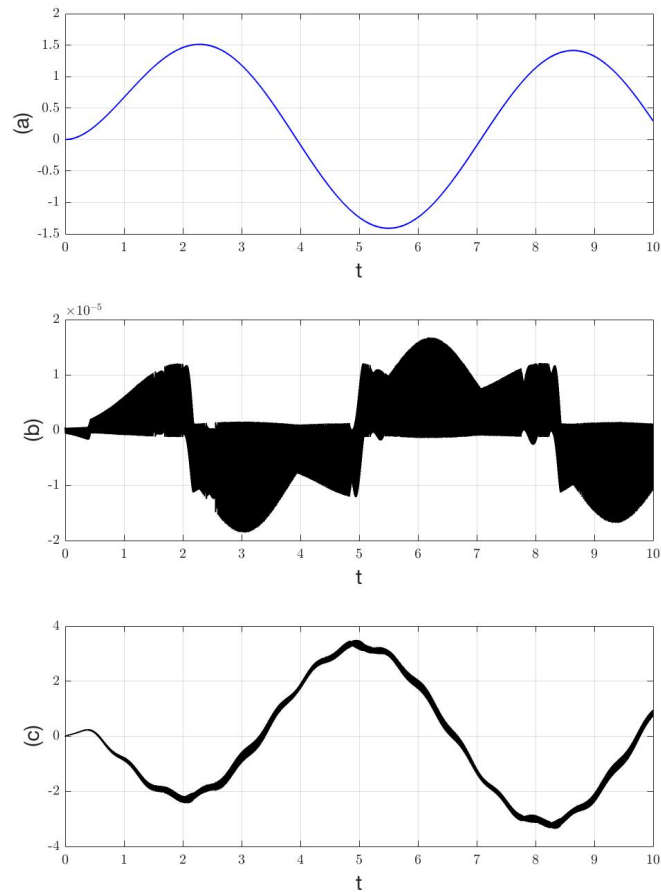


Figura 4.3: Desempenho da lei de controle *variable gain super-twisting* por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.1 com condições iniciais nulas: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u .

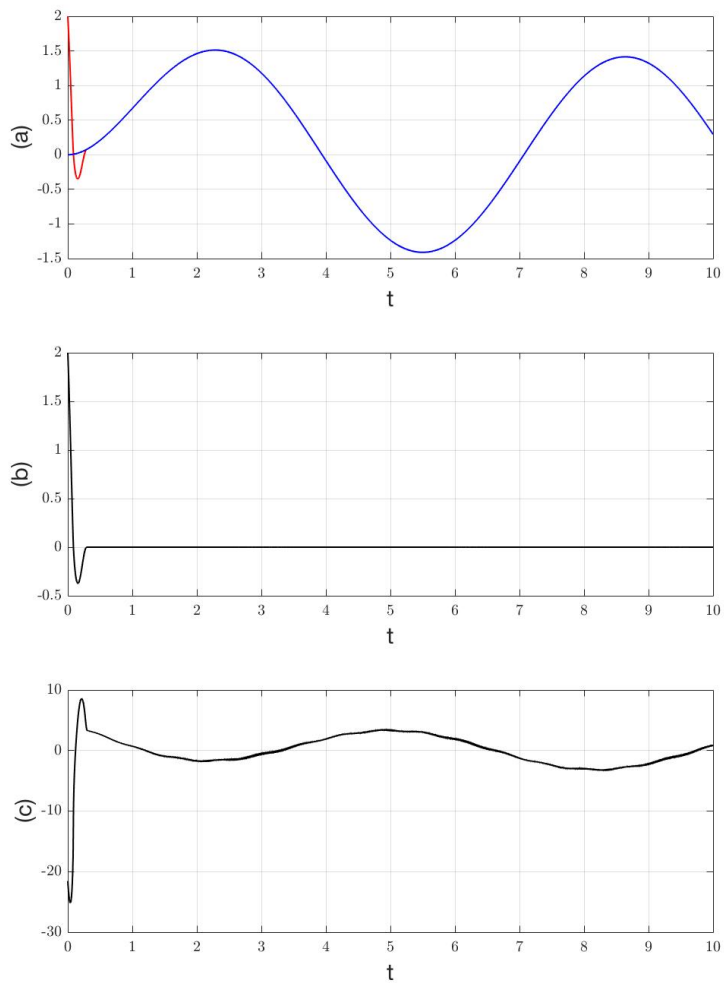


Figura 4.4: Desempenho da lei de controle *variable gain super-twisting* por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.1 com condições iniciais $x_0 = [11]^T$: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u .

4.1.3 Implementação em uma Planta Incerta

Na seção 4.1.2 foi apresentada a técnica de controle *variable gain super-twisting* por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência. No entanto, como ficou claro no Exemplo 4.1, a aplicação está configurada para uma planta cujos parâmetros são totalmente conhecidos. Porém, o caso de interesse prático mais relevante é sua aplicação para plantas incertas.

Nesse cenário, as matrizes A_p , B_p e h_p^T são incertas e pertencentes a um conjunto compacto, de modo que os limitantes necessários para suas incertezas são conhecidos. Para o controle, algumas diferenças com relação ao exposto na seção supracitada são necessárias e serão apresentadas aqui. Posteriormente, será apresentado um exemplo demonstrando a aplicação da técnica.

Para o cálculo dos ganhos do VGSTA, conforme (4.24), são diretamente dependentes das funções ϱ_1 e ϱ_2 . Estas, por sua vez, são estabelecidas como majorantes das funções $|g_1|$ e $|\frac{d}{dt}g_2|$, de acordo com (4.22). Portanto, busca-se maximizar os valores dos módulos das funções g_1 e $\frac{d}{dt}g_2$ dentre os possíveis parâmetros da planta incerta, para que mesmo no pior caso, o controle projetado seja suficiente, mesmo que esse controle fique muito conservador dentro da gama de plantas possíveis.

Num cenário de planta incerta, não é possível uma aplicação direta da equação diofantina (3.13) para o cálculo exato de θ^* . Neste caso, serão feitos cálculos analíticos e estabelecidas faixas de valores para os parâmetros ideais do controle MRAC. Ou seja

$$\theta_i^* \in [\theta_{i\ min}^*, \theta_{i\ max}^*], \quad i = 1, \dots, 4.$$

Para o cálculo dos ganhos VGSTA, deverão ser utilizados os valores de θ_i^* mais conservadores, ou seja, os que tiverem maior valor em módulo. Desta forma, convencionou-se

$$\bar{\theta}_i = \max(|\theta_i^*|), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (4.26)$$

E nas equações de $|g_1|$ e $|\frac{d}{dt}g_2|$, serão utilizados os valores limites $\bar{\theta}_i^*$ como parâmetros.

O ganho k_p também pode ser incerto, e portanto deverá ser maximizado dentro de sua faixa possível de valores, à semelhança do que foi feito para os parâmetros θ^* . Deverá ser substituído pelo seu maior valor k_p^{max} .

Adicionalmente, ao analisar a função (4.9), não é possível estabelecer ao certo a $\frac{N'(s)}{\Lambda(s)N(s)}$, uma vez que esta é função da inversa da planta, que é incerta. Portanto, deverá ser utilizado um filtro de aproximação de primeira ordem (1.3.1) para estimar esta função de transferência.

Para o estabelecimento do FOAF podem ser utilizadas diversas técnicas de otimização conforme referências citadas na seção 1.3.1. Adicionalmente, pode ser utilizado uma metodologia prática de avaliação dos parâmetros conhecidos da planta

e escolha de uma função de transferência cuja resposta ao impulso seja superior em módulo à resposta ao impulso da função $\frac{N'(s)}{\Lambda(s)N(s)}$, conforme equação (1.1).

Independente da metodologia aplicada para a obtenção do filtro, seja a resposta ao impulso de $\frac{N'(s)}{\Lambda(s)N(s)}$ uma função $h(t)$, deseja-se encontrar os valores de c_f e λ_f tais que

$$\|h(t)\| \leq c_f e^{-\lambda_f t} + |\pi(t)|, \quad \forall t, \quad (4.27)$$

onde $|\pi(t)|$ é uma função exponencialmente decrescente. Dado o filtro, é possível dizer que, utilizando um abuso de notação,

$$|k_p^{-1}| \left[1 + \frac{c_f}{s + \lambda_f} \right] \geq \left| \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} G_p^{-1} \right| = |k_p^{-1}| \left| 1 + \frac{N'(s)}{\Lambda(s)N(s)} \right|, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\frac{c_f}{s + \lambda_f} * x(t) \geq \left| \frac{N'(s)}{\Lambda(s)N(s)} \right| * x(t)$$

Portanto, pode-se atualizar a equação (4.14) para:

$$\begin{aligned} \bar{d}(t, e) = & -a_m e \\ & - \left\{ \bar{\theta}_1^T \left[(E(s) + Y_m(s)) + \frac{c_f}{s + \lambda_f} Y_p(s) \right] \right. \\ & + k_p^{max} \bar{\theta}_2^T \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} Y_p(s) + k_p^{max} \bar{\theta}_3 (e + y_m) + k_p^{max} \bar{\theta}_4 r \left. \right\} \\ & + k_p^{max} \left[d(t) - \left(\bar{\theta}_1^T \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right) d(t) \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

A partir da nova $\bar{d}(t, e)$, pode-se estabelecer as novas funções g_1 e g_2 , em substituição à (4.15) e (4.16), de acordo com

$$g_1(t, e) = -a_m e - \bar{\theta}_1^T E(s) - k_p^{max} \bar{\theta}_3 e + k_p^{max} [d(t, e) - d(t, 0)] \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} g_2(t) = & -\bar{\theta}_1^T Y_m(s) - \bar{\theta}_1^T \frac{c_f}{s + \lambda_f} Y_p(s) - k_p^{max} \bar{\theta}_2^T \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} Y_p(s) \\ & - k_p^{max} \bar{\theta}_3 y_m - k_p^{max} \bar{\theta}_4 r + k_p^{max} d(t, 0) \\ & - k_p^{max} \left(\bar{\theta}_1^T \frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right) d(t). \end{aligned} \quad (4.30)$$

E diante da nova g_2 , calcular sua derivada temporal, analogamente a (4.19):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [g_2(t)] = & - (c_f \bar{\theta}_1^T + k_p^{max} \bar{\theta}_2^T) E(s) - (c_f \bar{\theta}_1^T + k_p^{max} \bar{\theta}_2^T) Y_m(s) \\
& - \left(\frac{\bar{\theta}_1^T - c_f \lambda_f}{s + \lambda_f} + k_p^{max} \bar{\theta}_2^T \frac{N_\alpha(s)}{\Lambda(s)} \right) Y_p(s) \\
& - (\bar{\theta}_1^T + k_p^{max} \bar{\theta}_3) \dot{y}_m - k_p^{max} \bar{\theta}_4 \dot{r} + k_p^{max} \dot{d}(t, 0) \\
& - k_p^{max} \bar{\theta}_1^T d(t) - k_p^{max} \bar{\theta}_1^T \frac{N_\alpha(s)}{\Lambda(s)} d(t),
\end{aligned} \tag{4.31}$$

onde $n_\alpha(s) = s\alpha(s) - \Lambda(s)$, como em (4.18).

Como o que deve ser majorado para o cálculo dos ganhos é o módulo de g_1 e $\frac{d}{dt} g_2$, então:

$$|g_1(t, e)| = |a_m| |e| + \bar{\theta}_1^T |E(s)| + k_p^{max} \bar{\theta}_3 |e| + k_p^{max} |[d(t, e) - d(t, 0)]| \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dt} [g_2(t)] \right| = & (c_f \bar{\theta}_1^T + k_p^{max} \bar{\theta}_2^T) |E(s)| + (c_f \bar{\theta}_1^T + k_p^{max} \bar{\theta}_2^T) |Y_m(s)| \\
& + \left(\frac{\bar{\theta}_1^T - c_f \lambda_f}{s + \lambda_f} + k_p^{max} \bar{\theta}_2^T \frac{|N_\alpha(s)|}{\Lambda(s)} \right) |Y_p(s)| \\
& + (\bar{\theta}_1^T + k_p^{max} \bar{\theta}_3) |\dot{y}_m| + k_p^{max} \bar{\theta}_4 |\dot{r}| + k_p^{max} |\dot{d}(t, 0)| \\
& + k_p^{max} \bar{\theta}_1^T |d(t)| + k_p^{max} \bar{\theta}_1^T \frac{|N_\alpha(s)|}{\Lambda(s)} |d(t)|,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

A partir dos novos valores majorados de $|g_1|$ e $|\frac{d}{dt} g_2|$, pode ser aplicada a mesma metodologia anteriormente na seção 4.1.2 para estabelecer os ganhos do controle (4.20).

O exemplo abaixo considera uma planta incerta e aplica a metodologia apresentada para o seu controle. Sua perturbação é considerada apenas dependente da saída y_p .

Exemplo 4.2. Considere um sistema SISO incerto e não-linear descrito por:

$$\dot{x} = Ax + B[u + d(t)], \quad y = Cx, \tag{4.34}$$

onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [b_0 \quad 1], \tag{4.35}$$

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0}, \tag{4.36}$$

com ganho de alta frequência conhecido $k_p = CB = 1$.

Os parâmetros se encontram em faixas conhecidas e dadas por

$$\begin{aligned} a_0 &\in [1, 9] \\ a_1 &\in [-6, -2] \\ b_0 &\in [1, 3] \end{aligned} \quad (4.37)$$

Percebe-se que o sistema, nas faixas de valores apresentadas, atende a todas as hipóteses necessárias para a aplicação do controle, conforme descrito ao longo do capítulo.

Seja o modelo de referência dado por:

$$M(s) = \frac{k_m}{(s + a_m)} = \frac{2}{(s + 1)}. \quad (4.38)$$

A perturbação é igual a $d(t) = y_p + 0.1 \sin 8t$. Portanto, pode ser reescrita como

$$d(t) = (e + y_m) + 0.1 \sin 8t = \overbrace{[e]}^{d(t,e)-d(t,0)} + \underbrace{[y_m + 0.1 \sin 8t]}_{d(t,0)}. \quad (4.39)$$

E sua derivada temporal é igual a

$$\dot{d}(t) = \overbrace{\dot{e}}^{\dot{d}(t,e)-\dot{d}(t,0)} + \underbrace{\dot{y}_m + 0.8 \cos 8t}_{\dot{d}(t,0)} \leq \dot{e} + \dot{y}_m + 0.8.$$

A referência é uma senóide de amplitude unitária $r(t) = \sin t$, cuja derivada temporal é

$$|\dot{r}| = |\cos t| \leq 1.$$

Utilizando a equação diofantina dada por (3.13), é possível estabelecer as seguintes relações, considerando o filtro $\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} = \frac{1}{s + \lambda}$:

$$\begin{aligned} \theta_1^* &= \lambda - b_0 \\ \theta_2^* &= \frac{a_0 + \lambda^2 - \lambda \cdot a_1}{k_p} \\ \theta_3^* &= \frac{a_1 + a_m - \lambda}{k_p} \\ \theta_4^* &= \frac{k_m}{k_p} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Com $\lambda = 4$, além dos conhecidos $k_p = 1$, $k_m = 2$, $a_m = 1$ e os intervalos de valores para a_0 , a_1 e b_0 , calcula-se as faixas possíveis para os valores de θ^{ast} e,

conforme (4.26), os valores de $\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned}
\theta_1^* &\in [1, 3], & \bar{\theta}_1 &= 3 \\
\theta_2^* &\in [25, 49], & \bar{\theta}_2 &= 49 \\
\theta_3^* &\in [-11, -7], & \bar{\theta}_3 &= 11 \\
\theta_4^* &= \bar{\theta}_4 = 2.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Como k_p é conhecido, $k_p^{max} = k_p = 1$.

O próximo passo é calcular o filtro de aproximação de primeira ordem $\frac{c_f}{s+\lambda_f}$. Para este exemplo, não será utilizada nenhuma técnica de otimização dentre as referências citadas na seção 1.3.1. Será feita uma avaliação gráfica da resposta ao impulso da função a ser aproximada, e então será escolhido um filtro que seja superior ao módulo para todo t .

A função $\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}G_p^{-1}(s)$, neste caso, é tal que

$$\frac{1}{s+4} \frac{s^2 + a_1s + a_0}{s + b_0} = 1 + \overbrace{\frac{c_1}{s+4} + \frac{c_2}{s+b_0}}^{\text{A ser aproximada por FOAF}},$$

onde $c_1 = \frac{16 + a_0 - 4a_1}{-4 + b_0}$ e $c_2 = \frac{a_0 - b_0a_1 + b_0^2}{-4 + b_0}$. Portanto, a resposta ao impulso da parcela a ser aproximada é:

$$h(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-b_0t}.$$

Observando essa equação, é possível perceber que o pólo de menor módulo possível (decaimento da exponencial mais lento) para a função de transferência é 1. Portanto, será escolhido este valor para o filtro, tal que $\lambda_f = 1$. Adicionalmente, é possível determinar que o maior valor que a função $|h(t)|$ pode obter é 13 (quando $a_1 = -6$ e $b_0 = 3, \forall a_0$) no instante inicial $t = 0$. Portanto, de forma conservadora e com base em simulações, será escolhido o valor de $c_f = 15$. O gráfico do módulo da resposta ao impulso $|h(t)|$ para diferentes combinações de a_0, a_1 e b_0 , com o FOAF selecionado em destaque em vermelho, encontra-se na Figura 4.5.

Com isso, é possível calcular os valores das funções $|g_1|$ e $|\frac{d}{dt}g_2|$, de acordo com

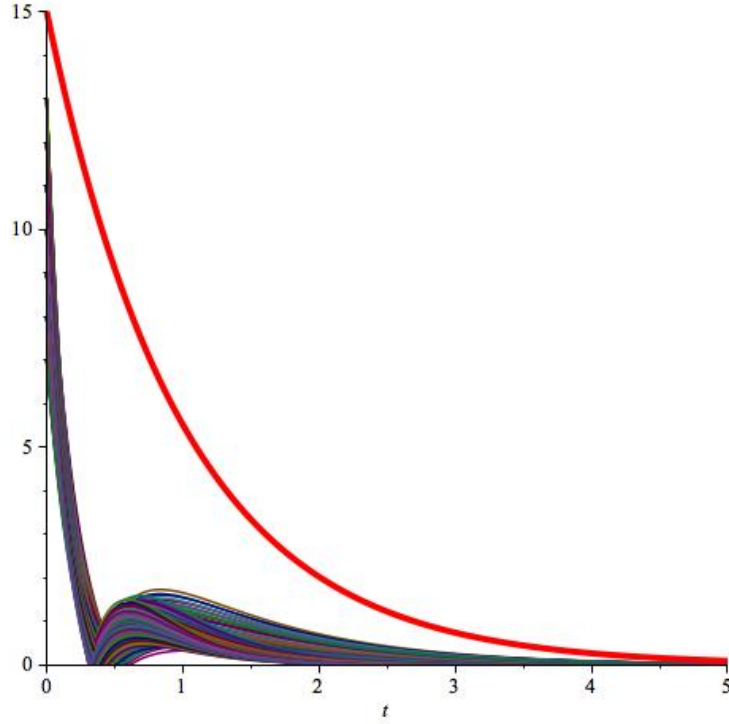


Figura 4.5: Resposta ao impulso de diversas curvas de $|h(t)|$, com o FOAF $\frac{15}{s+1}$ em destaque.

as equações (4.32) e (4.33), respectivamente:

$$\begin{aligned}
 |g_1(t, e)| &= 1|e| + 3|e| + 1 \cdot 11 \cdot |e| + 1|e| = 16|e| \\
 \left| \frac{d}{dt} [g_2(t)] \right| &= (15 \cdot 3 + 1 \cdot 49)|e| + (15 \cdot 3 + 1 \cdot 49)|y_m| \\
 &+ \left(3 \cdot \frac{15 \cdot 1}{s+1} + 1 \cdot 49 \cdot \frac{4}{s+4} \right) |Y_p(s)| \\
 &+ (3 + 1 \cdot 11) |\dot{y}_m| + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (|\dot{y}_m| + 0.8) \\
 &+ 1 \cdot 3 \cdot (|e| + |y_m| + 0.8) + 1 \cdot 3 \cdot \frac{4}{s+4} \cdot (|Y_p(s)| + 0.8) \\
 &= 97|e| + 97|y_m| + \left(\frac{45}{s+1} + \frac{208}{s+4} \right) |Y_p(s)| + 15|\dot{y}_m| + 14.8
 \end{aligned}$$

Finalmente, é possível calcular os valores de ϱ_1 e ϱ_2

$$\begin{aligned}
 \varrho_1 &= \frac{16}{k_3} \\
 \varrho_2 &= \max \left(\frac{97}{k_3^2}, 2 \cdot \left[97|y_m| + \left(\frac{45}{s+1} + \frac{208}{s+4} \right) |Y_p(s)| + 15|\dot{y}_m| + 14.8 \right] \right),
 \end{aligned}$$

e com $k_3 = 0.8$, $\delta = 1$, $\beta = 1000$ e $\epsilon = 1$, é possível calcular os ganhos $k_1(t)$ e $k_2(t)$ utilizando (4.24). A Figura 4.6 apresenta os resultados obtidos por simulação do sistema com $a_0 = 5$, $a_1 = -3$ e $b_0 = 2$.

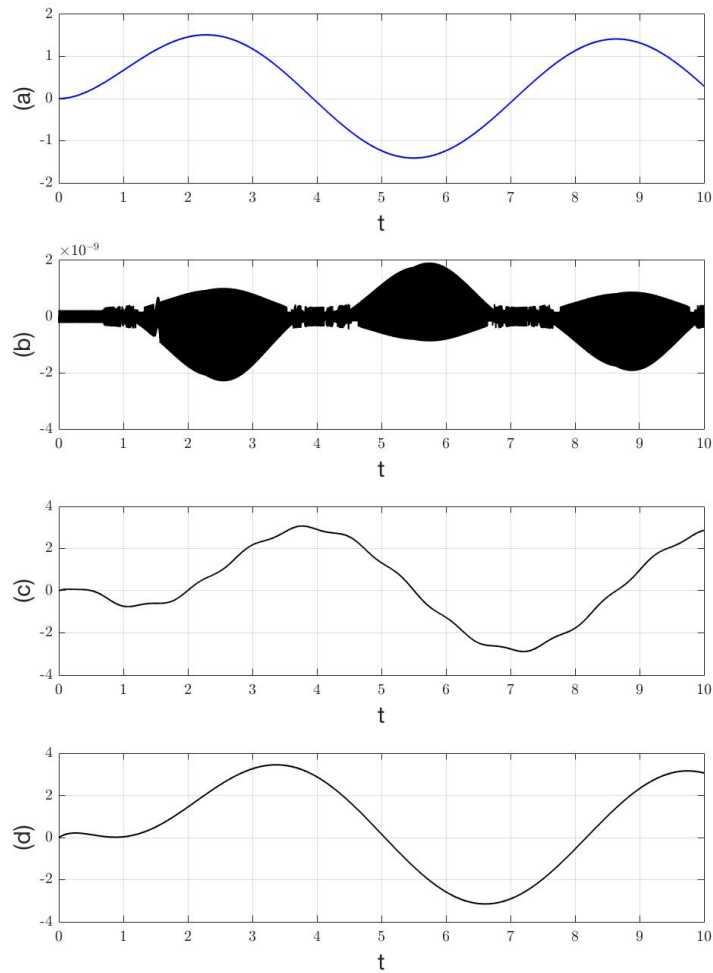


Figura 4.6: Desempenho da lei de controle *variable gain super-twisting* por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.2 com condições iniciais nulas: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u ; (d) controle MRC com parâmetros ideais para a planta.

Adicionalmente, a Figura 4.6 apresenta o controle ideal MRC, conforme (3.5) com $\theta^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 33 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$. Esse sinal representa uma referência de menor valor possível

necessário para o controle da planta utilizando a estrutura MRAC. Percebe-se que, em regime permanente, ambos tem amplitude bem próxima.

Para o sistema com condições iniciais não nulas, o sinal de controle rapidamente traz o erro para zero (ou para uma faixa muito pequena em torno do zero), porém ao custo de uma ação de controle bastante intensa. Na Figura 4.7 o mesmo exemplo é apresentado, porém com condições iniciais $x_0 = [0 \ 10]^T$.

Quando faz-se a comparação ao controle MRC ideal, percebe-se que o tempo de assentamento do controle VGSTA é muito mais rápido, porém também apresenta uma amplitude muito grande de controle, que tende a ser prejudicial em aplicações práticas.

4.1.4 O Controlador Otimizado pelo Conhecimento Nominal da Planta

Na seção 4.1.2 foi apresentada a técnica de controle *variable gain super-twisting* por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência. Nela, a aplicação dos paradigmas do MRAC é apenas para a determinação da saída do VGSTA que irá garantir o rastreamento do modelo de referência na estrutura proposta de controle. Qualquer conhecimento prévio da planta não é aproveitado para otimizar o projeto do controle.

O sinal de controle do algoritmo *super-twisting* tende a ser bastante elevado, e uma das vantagens que se busca com a nova abordagem é reduzir a amplitude do controle para aplicação da técnica em sistemas reais. Afinal, um sinal que tenha grandes amplitudes e variações muito intensas não são desejáveis para imensa maioria das aplicações reais, pois dificilmente serão reproduzidas pelos elementos finais de controle que atuam no processo e podem, no limite, até levar à perda dos atuadores. Porém, como ilustrou a Figura 4.7 do Exemplo 4.2, o resultado ainda é um controle com sinal de amplitude bastante superior ao ideal.

A otimização no controle que será apresentada nesta seção tem como objetivo tirar proveito de algum conhecimento prévio da planta e então ser capaz de dividir o controle em duas parcelas: uma base com sinal baseado em um controle MRAC tradicional, e uma parcela VGSTA que será responsável pelo casamento final do controle com a planta real, em função de suas incertezas.

Portanto, em outras palavras, o que se busca é um sinal de controle $u_p = u_p^{nom} + \tilde{u}_p$

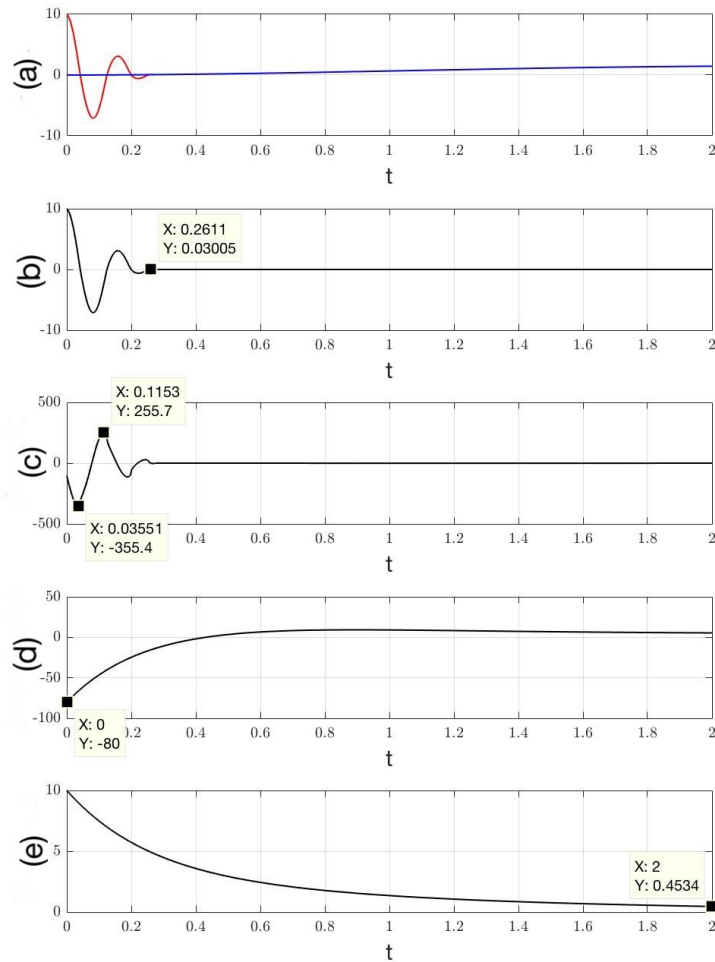


Figura 4.7: Desempenho da lei de controle *variable gain super-twisting* por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.1 com condições iniciais $x_0 = [0 \ 10]^T$: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u ; (d) controle MRC com parâmetros ideais para a planta; (e) erro de rastreamento do controle MRC ideal.

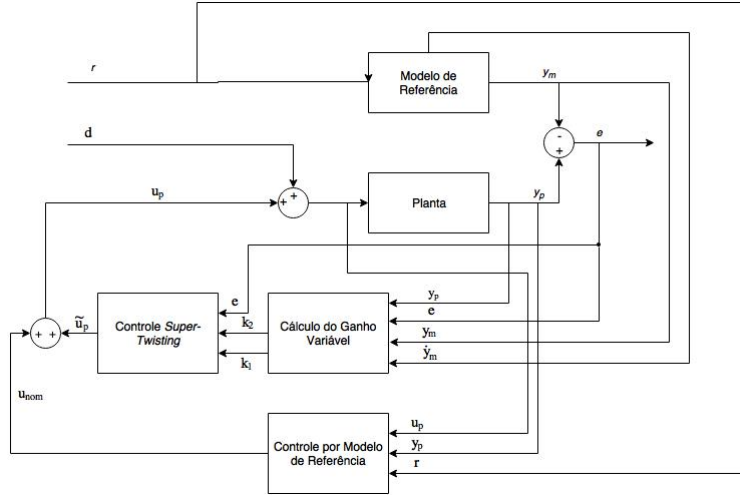


Figura 4.8: Diagrama de blocos do controle Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída Baseado no Controle Adaptativo por Modelo de Referência com controle MRAC nominal.

para (4.5), onde u_p^{nom} é o controle nominal via MRAC tradicional, ao passo que \tilde{u}_p é a parcela VGSTA, à semelhança da apresentada em 4.1.3. A Figura 4.8 ilustra esse controle por diagrama de blocos.

O conhecimento nominal mencionado se refletirá na prática em estabelecer valores base, dentro da faixa esperada para os parâmetros de ajuste θ^* , de forma que $\theta^* = \theta^{nom} + \tilde{\theta}$. Por exemplo, seja $\theta_1^* \in [3, 21]$, então uma opção seria tomar o ponto médio do intervalo de θ_1^* , ou seja, $\theta_1^{nom} = 12$ e $\tilde{\theta}_1 \in [-9, 9]$. Em um caso prático, pode-se estimar esses valores nominais através de princípios físicos ou técnicas de identificação da planta. Para fins de cálculo dos ganhos, assim como foi feito em (4.26), deve-se utilizar o maior valor em módulo da faixa $\tilde{\theta}$, que por simplicidade será chamado também de $\tilde{\theta}$. No exemplo apresentado, $\tilde{\theta} = 9$, em contraponto ao $\bar{\theta} = 21$ caso aplicado o método sem otimização por conhecimento nominal. A partir do que foi visto na seção 4.1.3, fica claro que essa redução irá se refletir em ganhos menores para o controle e, portanto, amplitude menor de controle, como se deseja.

Portanto, a equação (4.8) poderia ser revisada para

$$\begin{aligned}
u^* &= \left(\theta_1^{nomT} + \tilde{\theta}_1^T \right) \overbrace{\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} u_p}^{\omega_u} + \left(\theta_2^{nomT} + \tilde{\theta}_2^T \right) \overbrace{\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)} y_p}^{\omega_y} \\
&+ \left(\theta_3^{nom} + \tilde{\theta}_3 \right) y_p + \left(\theta_4^{nom} + \tilde{\theta}_4 \right) r \\
&= \underbrace{\theta_1^{nomT} \omega_u + \theta_2^{nomT} \omega_y + \theta_3^{nom} y_p + \theta_4^{nom} r}_{u^{nom}} \\
&+ \underbrace{\tilde{\theta}_1^T \omega_u + \tilde{\theta}_2^T \omega_y + \tilde{\theta}_3^T y_p + \tilde{\theta}_4^T r}_{\tilde{u}} \\
u^* &= u^{nom} + \tilde{u}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Com base nas novas u_p e u^* , é possível reescrever (4.5) como

$$\begin{aligned}
\dot{e} &= k_p \overbrace{(u_p^{nom} + \tilde{u}_p)}^{u_p} + \left(-a_m e - k_p \overbrace{(u^{nom} + \tilde{u})}^{u^*} + k_p W_d d(t) \right) \\
&= [k_p (u_p^{nom} - u^{nom})] + [k_p \tilde{u}_p + (-a_m e - k_p \tilde{u} + k_p W_d d(t))].
\end{aligned}$$

Dado que $u_p^{nom} = u^{nom}$, então

$$\begin{aligned}
\sigma &= e \\
v &= k_p \tilde{u}_p \\
\bar{d}(t, e) &= -a_m e - k_p \tilde{u} + k_p W_d d(t).
\end{aligned}$$

Desta forma, as funções $|g_1|$ e $|\frac{d}{dt} g_2|$, que são a base para o cálculo dos ganhos variáveis do controle VGSTA de plantas incertas, terão como parâmetros para o termo $k_p \tilde{u}$ os valores de $\tilde{\theta}$. Fica claro que para o termo $k_p W_d d(t)$, não há qualquer alteração e este continua dependente de $\bar{\theta}_1$. Assim, as equações (4.32) e (4.33) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
|g_1(t, e)| &= |a_m| |e| + \tilde{\theta}_1^T |E(s)| + k_p^{max} \tilde{\theta}_3 |e| + k_p^{max} |[d(t, e) - d(t, 0)]| \tag{4.43} \\
\left| \frac{d}{dt} [g_2(t)] \right| &= (c_f \tilde{\theta}_1^T + k_p^{max} \tilde{\theta}_2^T) |E(s)| + (c_f \tilde{\theta}_1^T + k_p^{max} \tilde{\theta}_2^T) |Y_m(s)| \\
&+ \left(\tilde{\theta}_1^T \frac{c_f \lambda_f}{s + \lambda_f} + k_p^{max} \tilde{\theta}_2^T \frac{|N_\alpha(s)|}{\Lambda(s)} \right) |Y_p(s)| \\
&+ \left(\tilde{\theta}_1^T + k_p^{max} \tilde{\theta}_3 \right) |\dot{y}_m| + k_p^{max} \tilde{\theta}_4 |\dot{r}| + k_p^{max} |\dot{d}(t, 0)| \\
&+ k_p^{max} \tilde{\theta}_1^T |d(t)| + k_p^{max} \tilde{\theta}_1^T \frac{|N_\alpha(s)|}{\Lambda(s)} |d(t)|. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

A lei de controle \tilde{u}_p é definida como em (4.20):

$$\tilde{u}_p = -k_1(t)\phi_1(e) - \int_0^t k_2(\tau)\phi_2(e)d\tau, \quad (4.45)$$

onde são válidas as relações (4.21), (4.22) e (4.24), a partir das novas funções $|g_1|$ e $|\frac{d}{dt}g_2|$ formuladas em (4.43) e (4.44).

O exemplo a seguir utiliza a mesma planta, referência e perturbação (dependente apenas da saída) do Exemplo 4.2, pois o objetivo é apresentar as diferenças na metodologia do projeto do controle e uma comparação entre os resultados.

Exemplo 4.3. Seja o sistema incerto não-linear (4.34), onde as matrizes de estados são dadas por (4.35) e a função de transferência da planta é (4.36). Os parâmetros são dados pelas faixas (4.37).

O modelo a ser rastreado é (4.38), com a presença da perturbação $d(t)$ dado por (4.39). A referência a ser utilizada será uma senóide de frequência e amplitude unitária $r(t) = \text{sen}(t)$.

Os parâmetros do controle MRAC, calculados utilizando a equação diofantina (3.13), são dados parametricamente por (4.40). Porém, a partir da faixa de parâmetros ideais θ^* , dada por (4.41), pode-se chegar a valores para θ^{nom} (mediana) e $\tilde{\theta}$ (módulo máximo da variação).

$$\begin{aligned} \theta_1^* &\in [1, 3], & \theta_1^{nom} &= 2, & \tilde{\theta}_1 &= 1 \\ \theta_2^* &\in [25, 49], & \theta_2^{nom} &= 37, & \tilde{\theta}_2 &= 12 \\ \theta_3^* &\in [-11, -7], & \theta_3^{nom} &= -9, & \tilde{\theta}_3 &= 2 \\ \theta_4^* &= 2, & \theta_4^{nom} &= 2, & \tilde{\theta}_4 &= 0. \end{aligned}$$

Como k_p é conhecido, $k_p^{max} = k_p = 1$.

Para o cálculo das funções $|g_1|$ e $|\frac{d}{dt}g_2|$, aplicam-se os valores de $\tilde{\theta}$ nas funções (4.43) e (4.44), respectivamente:

$$\begin{aligned} |g_1(t, e)| &= 1|e| + 1|e| + 1 \cdot 2 \cdot |e| + 1|e| = 5|e| \\ \left| \frac{d}{dt} [g_2(t)] \right| &= (15 \cdot 1 + 1 \cdot 12)|e| + (15 \cdot 1 + 1 \cdot 12)|y_m| \\ &+ \left(1 \cdot \frac{15 \cdot 1}{s+1} + 1 \cdot 12 \cdot \frac{4}{s+4} \right) |Y_p(s)| + (1 + 1 \cdot 2) |\dot{y}_m| \\ &+ 0 + 1 \cdot (|\dot{y}_m| + 0.8) + 1 \cdot 3 \cdot (|e| + |y_m| + 0.8) \\ &+ 1 \cdot 3 \cdot \frac{4}{s+4} \cdot (|Y_p(s)| + 0.8) \\ &= 30|e| + 30|y_m| + \left(\frac{15}{s+1} + \frac{60}{s+4} \right) |Y_p(s)| + 4|\dot{y}_m| + 12.8 \end{aligned}$$

Com isso, é possível obter os valores de ϱ_1 e ϱ_2

$$\varrho_1 = \frac{5}{k_3}$$

$$\varrho_2 = \max\left(\frac{30}{k_3^2}, 2 \cdot \left[30|y_m| + \left(\frac{15}{s+1} + \frac{60}{s+4}\right)|Y_p(s)| + 4|\dot{y}_m| + 12.8\right]\right),$$

e com $k_3 = 0.8$, $\delta = 2$, $\beta = 100$ e $\epsilon = 1$, é possível calcular os ganhos $k_1(t)$ e $k_2(t)$ utilizando (4.24) para o controle (4.45).

Além do controle VGSTA \tilde{u}_p , haverá uma parcela aditiva relativa ao MRAC nominal:

$$u^{nom} = \theta_1^{nomT} \overbrace{\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}}^{\omega_u} u_p + \theta_2^{nomT} \overbrace{\frac{\alpha(s)}{\Lambda(s)}}^{\omega_y} y_p + \theta_3^{nom} y_p + \theta_4^{nom} r$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{s+4} u_p + 37 \cdot \frac{1}{s+4} y_p - 9y_p + 2r$$

A Figura 4.9 apresenta os resultados obtidos por simulação do sistema com a mesma planta do Exemplo 4.2: $a_0 = 5$, $a_1 = -3$ e $b_0 = 2$.

É possível perceber na comparação com a Figura 4.6 que a amplitude do controle é pouco inferior, da mesma ordem do controle ideal MRC. No entanto, para o sistema com condições iniciais não nulas, é possível perceber claramente a vantagem da otimização levando em conta o conhecimento nominal da planta. Na Figura 4.10 o mesmo exemplo é apresentado, porém com condições iniciais $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix}^T$.

Quando faz-se a comparação da Figura 4.10 com a Figura 4.7, percebe-se que o tempo de assentamento do controle VGSTA se manteve, porém com uma amplitude de controle menor que a metade do exemplo anterior. Confirma-se, portanto, a vantagem do uso do conhecimento nominal.

4.1.5 O Controle com Perturbação Dependente de Estados do Sistema

Para todos os casos apresentados até o momento, considerou-se que a perturbação não era dependente de estados da planta, e portanto ao utilizar o valor de $d(t)$ no cálculo dos ganhos variáveis do VGSTA não havia qualquer realimentação de estados. No entanto, para garantir maior abrangência da estratégia de controle proposta, faz-se necessário atender a esses casos sem comprometer a propriedade proposta de realimentação de saída.

Nesse caso, pode-se adotar uma estratégia conforme proposta em [13], onde transforma-se o sistema para sua forma normal e, então, utiliza-se um Filtro de Aproximação de Primeira Ordem para estimar o vetor de estados. E a partir desta

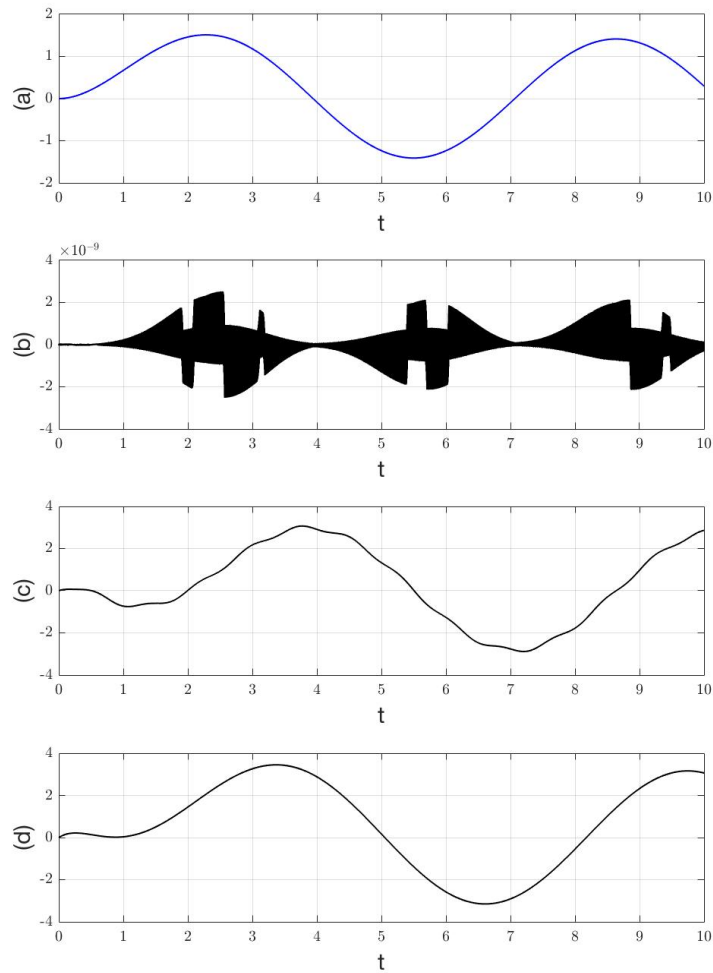


Figura 4.9: Desempenho da lei de controle *variable gain super-twisting* por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.3 com condições iniciais nulas: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u ; (d) controle MRC com parâmetros ideais para a planta.

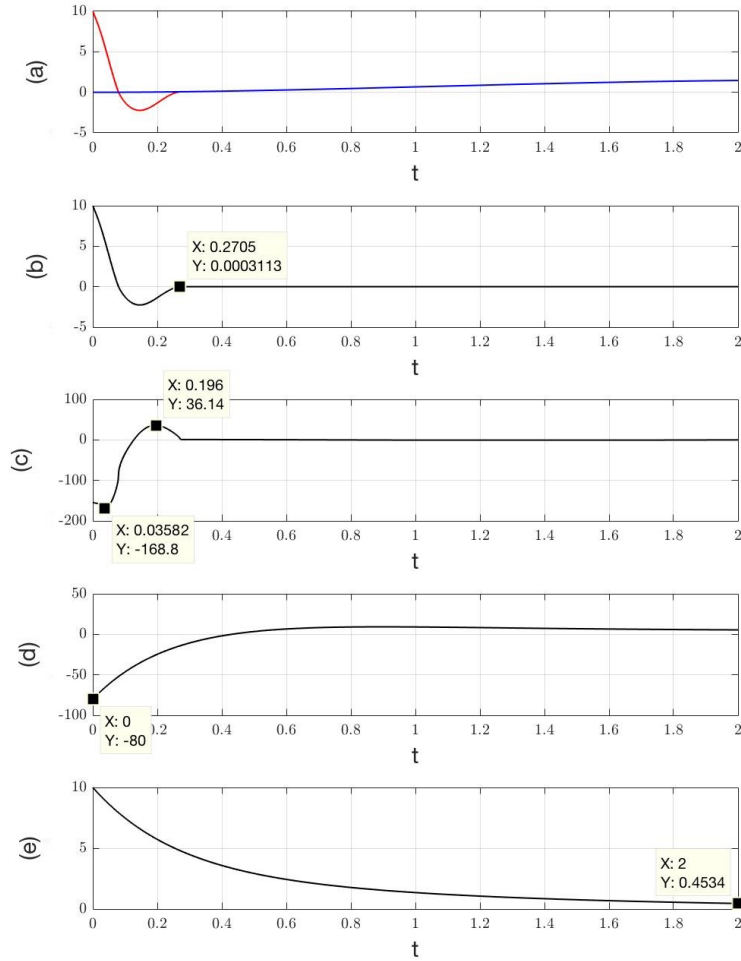


Figura 4.10: Desempenho da lei de controle *variable gain super-twisting* por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.1 com condições iniciais $x_0 = [0 \ 10]^T$: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u ; (d) controle MRC com parâmetros ideais para a planta; (e) erro de rastreamento do controle MRC ideal.

estimativa, calcular os ganhos variáveis do controle.

Considerando a Hipótese 3.2, pode-se mostrar que as matrizes B_p e h_p^T possuem posto completo. Neste caso, é possível obter uma matriz B_\perp de posto completo tal que $B_\perp B_p = 0$. Logo, como o produto $k_p = h_p^T B_p$ é não-nulo de acordo com a Hipótese 4.1, tem-se que a transformação linear de coordenadas de estado definida por

$$\begin{bmatrix} \eta \\ y_p \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_\perp \\ h_p^T \end{bmatrix}}_T x_p = T x_p, \quad (4.46)$$

aplicada ao sistema (4.1)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{y}_p \end{bmatrix} &= T \dot{x}_p \\ &= T \{A_p x_p + B_p [u_p + d(t)]\} \\ &= T A_p \underbrace{T^{-1} \begin{bmatrix} \eta \\ y_p \end{bmatrix}}_{x_p} + T B_p [u_p + d(t)], \end{aligned}$$

utilizando as propriedades de formação da matriz T , essa transformação leva o sistema à seguinte forma normal:

$$\dot{\eta} = A_{11}\eta + A_{12}y_p, \quad (4.47)$$

$$\dot{y}_p = A_{21}\eta + A_{22}y_p + k_p[u_p + d(x, t)], \quad (4.48)$$

onde a dinâmica dos zeros $\dot{\eta} = A_{11}\eta$ é estável, considerando as Hipóteses 3.1 e 3.2. Note que η é uma variável de estado não-medida, e esta será estimada por um FOAF para o cálculo dos ganhos variáveis do controle. É importante destacar que, apesar da transformação para a forma normal, a função de transferência da planta é preservada, não havendo qualquer impacto na definição dos parâmetros do MRAC, conforme descrito em 4.1.2 e seções subsequentes.

Portanto, ao analisar $\bar{d}(t, e)$ conforme descrito em (4.14), percebe-se que a única diferença é que as perturbações $d(t)$, dependentes do estado x_p , serão reescritas em função de η e y_p , a partir da transformação apresentada em (4.46).

Busca-se, então, obter um limitante superior do estado não-medido η para obter g_1 e $\frac{d}{dt}g_2$, afinal $d(t)$, dependente de η , aparece em (4.15) e (4.19). Para obter esse limitante, será aplicado um Filtro de Aproximação de Primeira Ordem, conforme apresentado em 1.3.1.

O objetivo é determinar uma aproximação de primeira ordem de um limitante superior para a norma da variável de estado não-medida η , com dinâmica dada

por (4.47). Neste caso, é necessário ter algum conhecimento sobre a margem de estabilidade da matriz A_{11} , que é Hurwitz uma vez que $G_p(s)$ é de fase mínima e o sistema é controlável e observável. Assim, é feita a seguinte hipótese:

Hipótese 4.4. *Um limitante inferior $\lambda > 0$ para a margem de estabilidade de A_{11} é conhecido.*

Logo, um limitante superior para a norma de η pode ser obtido pelo seguinte FOAF:

$$\dot{\hat{\eta}} = -\lambda_\eta \hat{\eta} + c_\eta \|y_p\|, \quad (4.49)$$

com constantes apropriadas $c_\eta > 0$ e $\lambda_\eta > 0$. Considerando o Teorema 1.1, é possível obter a desigualdade

$$\|\eta(t)\| \leq \hat{\eta}(t) + |\pi_\eta(t)|, \quad |\pi_\eta(t)| = c_0 \|x_\eta(t_0)\| e^{-\lambda_0(t-t_0)}, \quad (4.50)$$

para determinadas constantes $c_0 > 0$ e $\lambda_0 > 0$, com $x_\eta = \begin{bmatrix} \eta^T & \hat{\eta} \end{bmatrix}^T$.

Transformando o sistema para a forma normal e reescrevendo a perturbação em função de η e y_p , obtém-se uma formulação de g_1 e $\frac{d}{dt}g_2$ bastante semelhantes às apresentadas em (4.15) e (4.19), respectivamente, exceto pelo fato de que os termos associados à perturbação $d(t)$ também serão função do estado η . Desta forma, pode-se reescrever a Hipótese 4.3 como:

Hipótese 4.5. *A perturbação (4.7) satisfaz as seguintes desigualdades, análogas às apresentadas em (2.61):*

$$\begin{aligned} |g_1(t, \eta, e)| &\leq [\varrho_1(t, \hat{\eta}, e) + |\pi_1(t)|] |\phi_1(e)|, \\ \left| \frac{d}{dt}[g_2(t, \eta)] \right| &\leq [\varrho_2(t, \hat{\eta}, e) + |\pi_2(t)|] |\phi_2(e)|, \end{aligned} \quad (4.51)$$

exceto pelos termos exponencialmente decrescentes $|\pi_n(t)| = c_n e^{-\lambda_n(t-t_0)}$, onde $c_n, \lambda_n > 0$. As funções $\varrho_n(t)$ são conhecidas e contínuas.

Portanto, verifica-se que a dinâmica do sistema em malha fechada é:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= A_c x_e + B_c (u_p + \bar{U}) \\ \dot{\hat{\eta}} &= -\lambda_\eta \hat{\eta} + c_\eta \|e + y_m\| \\ \dot{e} &= -k_p k_1(t, \hat{\eta}, e) \phi_1(e) + z + g_1(t, \eta, e) \\ \dot{z} &= -k_p k_2(t, \hat{\eta}, e) \phi_2(e) + \frac{d}{dt}[g_2(t, \eta)], \end{aligned} \quad (4.52)$$

com $z = k_p \int_0^t k_2(\tau, \hat{\eta}, e) \phi_2(e) d\tau + g_2(t, \eta)$ e $\bar{U} = -u^* + W_d d(t, \eta, e)$.

Teorema 4.2. *Seja o sistema em malha fechada (4.52), considerando as hipóteses 3.1, 3.2, 3.3, 3.5, 3.6, 4.1, 4.2, 4.4 e 4.5. Então, as trajetórias do sistema serão atraídas globalmente e em tempo finito para $\dot{e} = e = 0$, se os ganhos variáveis forem escolhidos como:*

$$\begin{aligned} k_1(t, \hat{\eta}, e) &= \delta + \frac{1}{\beta} \left\{ \frac{1}{4\epsilon} [2\epsilon\varrho_1 + \varrho_2]^2 + 2\epsilon\varrho_2 + \epsilon + [2\epsilon + \varrho_1] (\beta + 4\epsilon^2) \right\} \\ k_2(t, \hat{\eta}, e) &= \beta + 4\epsilon^2 + 2\epsilon k_1(t, \hat{\eta}, e), \end{aligned} \quad (4.53)$$

onde $\beta > 0$, $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ são constantes positivas arbitrárias.

Demonstração. Ver [13, Apêndice B.1]. □

Para demonstrar a aplicação desta estratégia e suas diferenças com relação ao cenário apresentado nas seções anteriores, a mesma planta utilizada no Exemplo 4.1 será considerada, porém com uma perturbação dependente do estado.

Exemplo 4.4. Considere um sistema não-linear descrito por:

$$\dot{x} = Ax + B[u + d(t, x)], \quad y = Cx,$$

e seja:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s+1}{(s-1)^2},$$

com ganho de alta frequência $k_p = CB = 1$.

A transformação T pode ser escolhida como

$$\begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_\perp \\ C \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x,$$

que ao ser aplicada ao sistema, leva à seguinte forma normal:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -\eta + y \\ \dot{y} &= -4\eta + 3y + [u + d]. \end{aligned}$$

Portanto, por se tratar de uma planta conhecida, sabe-se que o valor de $A_{11} = -1$.

Seja o modelo de referência dado por:

$$M(s) = \frac{2}{(s+1)}.$$

A perturbação, dependente do estado, é igual a $d(t, x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x + 0.1 \text{ sen } 10t$.
Aplicando a transformação T , conforme (4.46):

$$\begin{aligned} d(t, \eta, y) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} T^{-1} \begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} + 0.1 \text{ sen } 10t \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} + 0.1 \text{ sen } 10t \\ &= y - \eta + 0.1 \text{ sen } 10t \end{aligned}$$

Como $y = y_m + e$,

$$d(t, \eta, e, y_m) = (e + y_m) - \eta + 0.1 \text{ sen } 10t = \overbrace{[e]}^{d(t,e)-d(t,0)} + \underbrace{[y_m - \eta + 0.1 \text{ sen } 10t]}_{d(t,0)}$$

E sua derivada temporal é igual a

$$\dot{d}(t, \eta, e, y_m) = \dot{e} + \dot{y}_m - \dot{\eta} + \cos 10t = \dot{e} + \dot{y}_m - \underbrace{(-\eta + y)}_{\dot{\eta}} + \cos 10t$$

$$\dot{d}(t, \eta, e, y_m, y) \leq \overbrace{\dot{e}}^{d(t,e)-d(t,0)} + \underbrace{\dot{y}_m + \eta - y + 1}_{\dot{d}(t,0)}$$

A referência é uma senóide de amplitude unitária $r(t) = \text{sen } t$, cuja derivada temporal é

$$|\dot{r}| = |\cos t| \leq 1.$$

O objetivo é elaborar um controle u_p que faça a saída da planta rastrear o modelo, utilizando VGSTA com realimentação de saída baseado no MRAC. Conforme equação (4.5), o sistema pode ser escrito da forma:

$$\dot{e} = 1 \cdot u_p + (-1 \cdot e - 1 \cdot u^* + 1 \cdot W_d d(t))$$

O primeiro passo é calcular os parâmetros ideais θ^* que compõem o termo u^* da equação.

Com base num $\alpha(s) = 1$ e $\Lambda(s) = s + 2$, utilizando a equação (3.13):

$$\theta^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(s) = s + 2 \quad (4.54)$$

onde,

$$\theta^{*T} \omega = \theta_1^{*T} \omega_u + \theta_2^{*T} \omega_y + \theta_3^* y_p + \theta_4^* r.$$

O passo seguinte é estabelecer os valores das funções g_1 e $\frac{d}{dt}g_2$, conforme equação (4.15) e (4.19). Porém, para o cálculo de $\frac{d}{dt}g_2$, é necessário estabelecer os valores de $N''(s)$, k'' e $N_\alpha(s)$, conforme (4.18):

$$\begin{aligned} N'(s) &= 1 \cdot (s-1)^2 - (s+2) \cdot (s+1) = -5s - 1 \\ k'' &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{-5s^2 - s}{(s+2)(s+1)} \right) = -5 \\ N''(s) &= s \cdot 1 \cdot (s-1)^2 - (s-5) \cdot (s+2) \cdot (s+1) = 14s + 10 \\ N_\alpha(s) &= s \cdot 1 - (s+2) = -2 \end{aligned}$$

Com isso, é possível calcular os valores das funções g_1 e $\frac{d}{dt}g_2$:

$$\begin{aligned} g_1 &= -e - e + 5e + e = 4e \\ \frac{d}{dt}g_2 &= -(-5+9)e - (-5+9)y_m - \left(\frac{14s+10}{(s+2)(s+1)} + 9 \cdot \frac{-2}{(s+2)} \right) Y_p(s) \\ &\quad - (1-5)\dot{y}_m - 2 \cos t + (\dot{y}_m + \eta - e - y_m + \cos 10t) \\ &\quad - (e + y_m - \eta + 0.1 \sin 10t) - \frac{-2}{(s+2)} (Y_p(s) - \eta + 0.1 \sin 10t) \\ &= -6e - 6y_m + \frac{6s+10}{(s+1)(s+2)} Y_p(s) + 5\dot{y}_m + 2\eta - \frac{2}{(s+2)} \eta - 2 \cos t \\ &\quad + \cos 10t - 0.1 \sin 10t + \frac{2}{(s+2)} 0.1 \sin 10t \end{aligned}$$

Para obter o limitante superior do estado não-medido η , presente em $\frac{d}{dt}g_2$, utiliza-se um FOAF, com constantes:

$$\lambda_\eta = 0.5, \quad c_\eta = 1.2$$

Então, lançando mão do limitante $\hat{\eta}$, deve-se estabelecer funções g_1 e g_2 , conforme

(4.22), a partir de majorantes de $|g_1|$ e $|\frac{d}{dt}g_2|$:

$$|g_1| \leq 4|e| \leq \overbrace{\frac{4}{k_3}}^{\rho_1} \underbrace{\left[|e|^{\frac{1}{2}} + k_3|e|\right]}_{|\phi_1|}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt}g_2 \right| &\leq 6|e| + 6|y_m| + \frac{6s+10}{(s+1)(s+2)}|Y_p(s)| + 5|\dot{y}_m| + 2\hat{\eta} + \frac{2}{(s+2)}\hat{\eta} + 2\cos t + \cos 10t \\ &\quad + 0.1\sin 10t + \frac{2}{(s+2)}0.1\sin 10t \\ &\leq 6|e| + 6|y_m| + \frac{6s+10}{(s+1)(s+2)}|Y_p(s)| + \underbrace{|\pi_2(t)|}_{\text{Condições Iniciais de } \frac{6s+10}{(s+1)(s+2)}} + 5|\dot{y}_m| + 2\hat{\eta} + \frac{2}{(s+2)}\hat{\eta} + 3.3 \\ &\leq \underbrace{\max\left(\frac{6}{k_3^2}, 12|y_m| + \frac{12s+20}{(s+1)(s+2)}|Y_p(s)| + 10|\dot{y}_m| + 4\hat{\eta} + \frac{4}{(s+2)}\hat{\eta} + 6.6\right)}_{\rho_2} \\ &\quad \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2}k_3|e|^{\frac{1}{2}} + k_3^2|e|\right]}_{|\phi_2|} \end{aligned}$$

Por fim, com os valores de ρ_1 e ρ_2 calculados e utilizando $k_3 = 1$, $\delta = 0.1$, $\beta = 10$ e $\epsilon = 1$, é possível calcular a função dos ganhos variáveis $k_1(t)$ e $k_2(t)$ conforme (4.24). Aplicando estes ganhos no sistema, com condições iniciais $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix}^T$, temos os seguintes resultados de simulação, ilustrados na Figura 4.11:

4.2 Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída

A estratégia apresentada nesta seção foi proposta em [13, 57, 58], sendo o primeiro controlador por realimentação de saída baseado em um algoritmo *super-twisting* multivariável não-desacoplado capaz de garantir propriedades uniformes globais de estabilidade assintótica com convergência em tempo finito. Embora tenha sido estendida ao caso multivariável, esta estratégia também é apresentada para o caso SISO [13, Seção 4.4]. Além disso, guarda semelhanças à estratégia proposta neste trabalho e descrita na seção 4.1.

Diante disso, o objetivo desta seção é apresentar essa estratégia de controle e, utilizando a planta proposta no Exemplo 4.2, apresentar seus resultados e compará-los aos obtidos anteriormente.

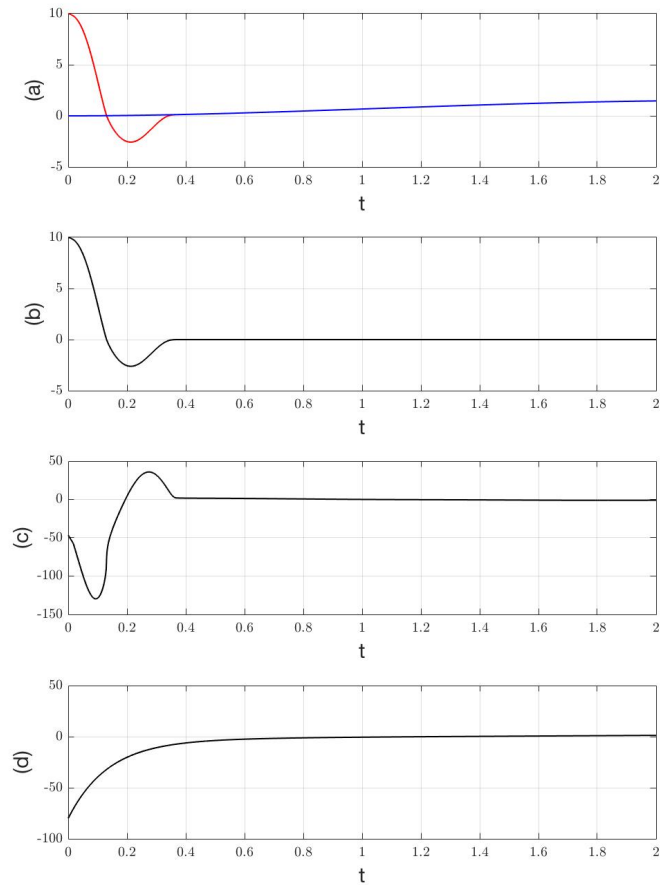


Figura 4.11: Desempenho da lei de controle *variable gain super-twisting* por realimentação de saída baseado no controle adaptativo por modelo de referência aplicada ao sistema do Exemplo 4.4 com condições iniciais $x_0 = [0 \ 10]^T$: (a) (●) saída da planta y , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u ; (d) controle MRC com parâmetros ideais para a planta.

4.2.1 Definição do Problema

Considere um sistema não-linear incerto descrito conforme (4.1). Assim como anteriormente, apenas a saída é considerada estar disponível para a implementação da lei de controle. A perturbação respeita a hipótese 4.2. As matrizes A_p , B_p e h_p^T são incertas e pertencentes a um conjunto compacto, de modo que os limitantes necessários para suas incertezas são conhecidos.

De forma semelhante ao exposto na seção 4.1.1, as seguintes hipóteses básicas devem ser satisfeitas:

- (A1) A matriz de transferência $G_p(s) = h_p^T(sI - A_p)^{-1}B_p$ é de fase mínima e possui posto completo.
- (A2) O sistema é controlável e observável.
- (A3) $G_p(s)$ possui grau relativo uniforme e unitário, isto é, $\lim_{s \rightarrow \infty} sG_p(s) = k_p = h_p^T B_p$, onde $k_p \neq 0$.
- (A4) O sinal do ganho de alta frequência $k_p = CB$ é conhecido e, sem perda de generalidade, suposto positivo. Caso k_p seja negativo, deve-se inverter o sinal da lei de controle escalar $u_p \in \mathbb{R}$ e substituir k_p por $|k_p|$.

Seja um modelo de referência conforme (4.2), o objetivo é determinar uma lei de controle u_p por realimentação de saída baseada no algoritmo *variable gain super-twisting* de modo que a saída y_p rastreie em tempo finito o sinal de referência y_m gerado pelo modelo.

Em outras palavras, considerando o erro de rastreamento de saída $e(t) \triangleq y_p(t) - y_m(t)$, pretende-se projetar u_p tal que as trajetórias do sistema sejam atraídas globalmente e em tempo finito para a superfície de deslizamento $e = \dot{e} = 0$.

Conforme apresentado na seção 4.1.5, considerando a Hipótese (A2), pode-se mostrar que as matrizes B_p e h_p^T possuem posto completo. Neste caso, é possível obter uma matriz B_\perp de posto completo tal que $B_\perp B_p = 0$. Logo, como o produto $k_p = h_p^T B_p$ é não-nulo de acordo com a Hipótese (A3), tem-se que a transformação linear de coordenadas de estado definida conforme (4.46) aplicada ao sistema (4.1), leva o sistema à forma apresentada em (4.47) e (4.48), re-apresentadas aqui por simplicidade:

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= A_{11}\eta + A_{12}y_p, \\ \dot{y}_p &= A_{21}\eta + A_{22}y_p + k_p[u_p + d(t)],\end{aligned}$$

onde a dinâmica dos zeros $\dot{\eta} = A_{11}\eta$ é estável, considerando as Hipóteses (A1) e (A2). Note que η é uma variável de estado não-medida, ao contrário do considerado

em [10, 30]. A dinâmica do erro de rastreamento de saída, análogo ao apresentado em (2.58) considerando $\sigma = e$, é descrita por

$$\dot{e} = k_p u_p + \bar{d}(\eta, e, t), \quad (4.55)$$

onde o termo

$$\bar{d}(\eta, e, t) = A_{21}\eta + A_{22}e + k_p d(\eta, e, t) + A_{22}y_m - \dot{y}_m, \quad (4.56)$$

com $d(\eta, e, t) = d(x, t)$, é considerado como uma perturbação não-linear dependente do estado. Esta perturbação pode ser reescrita conforme (2.60)

$$\bar{d}(\eta, e, t) = \underbrace{[\bar{d}(\eta, e, t) - \bar{d}(\eta, 0, t)]}_{g_1(\eta, e, t)} + \underbrace{\bar{d}(\eta, 0, t)}_{g_2(\eta, t)} = g_1(\eta, e, t) + g_2(\eta, t),$$

onde

$$g_1(\eta, e, t) = A_{22}e + k_p \{d(\eta, e, t) - d(\eta, 0, t)\}, \quad (4.57)$$

$$g_2(\eta, t) = A_{21}\eta + k_p d(\eta, 0, t) + A_{22}y_m - \dot{y}_m, \quad (4.58)$$

e $g_1(\eta, 0, t) = 0$. Para o cálculo dos ganhos do controle VGSTA, é necessário obter a derivada temporal de g_2 :

$$\frac{d}{dt} [g_2(\eta, t)] = A_{21}A_{11}\eta + A_{21}A_{12}(e + y_m) + k_p \frac{d}{dt} [d(\eta, 0, t)] + A_{22}\dot{y}_m - \ddot{y}_m. \quad (4.59)$$

4.2.2 O Controlador

Para o projeto do controlador, é necessário obter os limitantes superiores para o módulo das funções g_1 e $\frac{d}{dt}g_2$. No entanto, as funções (4.57) e (4.59) dependem da variável não-medida η . Para obter esse limitante, será aplicado um Filtro de Aproximação de Primeira Ordem, conforme apresentado em 1.3.1.

O objetivo é determinar uma aproximação de primeira ordem de um limitante superior para a norma da variável de estado não-medida η , com dinâmica dada por (4.47). Neste caso, é necessário ter algum conhecimento sobre a margem de estabilidade da matriz A_{11} , que é Hurwitz uma vez que $G_p(s)$ é de fase mínima e o sistema é controlável e observável. Assim, é feita a seguinte hipótese:

(A5) Um limitante inferior $\lambda > 0$ para a margem de estabilidade de A_{11} é conhecido.

Logo, um limitante superior para a norma de η pode ser obtido pelo FOAF apresentado em (4.49) e re-apresentado aqui por simplicidade:

$$\dot{\hat{\eta}} = -\lambda_\eta \hat{\eta} + c_\eta \|y_p\|,$$

com constantes apropriadas $c_\eta > 0$ e $\lambda_\eta > 0$. Considerando o Teorema 1.1, é possível obter a desigualdade apresentada em (4.50):

$$\|\eta(t)\| \leq \hat{\eta}(t) + |\pi_\eta(t)|, \quad |\pi_\eta(t)| = c_0 \|x_\eta(t_0)\| e^{-\lambda_0(t-t_0)},$$

para determinadas constantes $c_0 > 0$ e $\lambda_0 > 0$, com $x_\eta = \begin{bmatrix} \eta^T & \hat{\eta} \end{bmatrix}^T$.

Neste caso, a lei de controle u_p é definida como em (4.20), e é dada por

$$u_p = -k_1(t, \hat{\eta}, e)\phi_1(e) - \int_{t_0}^t k_2(t, \hat{\eta}, e)\phi_2(e)dt, \quad (4.60)$$

onde ϕ_1 , ϕ_2 e k_3 são definidos conforme (4.21).

Assim como a Hipótese 4.3, assume-se:

(A6) A perturbação (4.56) satisfaz as desigualdades dadas por (4.22).

Assim como no caso apresentado na seção 4.1.2, são incluídos termos exponencialmente decrescentes $|\pi_1(t)|$ e $|\pi_2(t)|$ com o objetivo de representar perturbações relacionadas a $|\pi_\eta(t)|$ na desigualdade (4.50). Portanto, considerando as equações dinâmicas do erro de rastreamento (4.55) e da variável de estado não-medida (4.47) do sistema, em conjunto com o filtro de aproximação de primeira ordem (4.49) e a lei de controle *variable gain super-twisting* (4.60), verifica-se que a dinâmica do sistema em malha-fechada é descrita por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}} &= -\lambda_\eta \hat{\eta} + c_\eta |e + y_m|, \\ \dot{\eta} &= A_{11}\eta + A_{12}[e + y_m], \\ \dot{e} &= -k_p k_1(t, \hat{\eta}, e)\phi_1(e) + z + g_1(\eta, e, t), \\ \dot{z} &= -k_p k_2(t, \hat{\eta}, e)\phi_2(e) + \frac{d}{dt}[g_2(\eta, t)], \end{aligned} \quad (4.61)$$

com $z = -k_p \int_{t_0}^t k_2(\tau, \hat{\eta}, e)\phi_2(e)d\tau + g_2(\eta, t)$.

E o teorema análogo ao 4.2 é

Teorema 4.3 ([13]). *Considere o sistema em malha-fechada (4.61). Assuma que as Hipóteses (A1)–(A6) sejam satisfeitas. Então, as trajetórias do sistema serão atraídas globalmente e em tempo finito para a superfície de deslizamento $\dot{e} = e = 0$ se os ganhos variáveis forem escolhidos como em 4.24.*

Demonstração. ver [13, Apêndice B.1]. □

O exemplo a seguir considera o mesmo sistema incerto proposto no Exemplo 4.2. O foco é apresentar a metodologia de aplicação dessa estratégia de controle e comparar seus resultados com os obtidos nos exemplos 4.2 e 4.3.

Exemplo 4.5. Seja o sistema incerto não-linear (4.34), onde as matrizes de estados são dadas por (4.35) e a função de transferência da planta é (4.36). Os parâmetros são dados pelas faixas (4.37). O ganho de alta frequência é $k_p = CB = 1$. As hipóteses (A1) – (A4) são respeitadas.

O modelo a ser rastreado é (4.38), com a presença da perturbação $d(x, t)$ dada por (4.39). A referência a ser utilizada será uma senóide de frequência e amplitude unitária $r(t) = \text{sen}(t)$.

A transformação T pode ser escolhida como

$$\begin{bmatrix} \eta \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{\perp} \\ C \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b_0 & 1 \end{bmatrix} x,$$

que ao ser aplicada ao sistema (4.34), leva à seguinte forma normal:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -b_0\eta + y \\ \dot{y} &= (b_0(a_1 - b_0) - a_0)\eta + (b_0 - a_1)y + u. \end{aligned}$$

Portanto, pode-se dizer que os parâmetros de (4.47) e (4.48) são

$$\begin{aligned} A_{11} &= -b_0, & A_{11} &\in [-3, -1] \\ A_{12} &= 1 \\ A_{21} &= (b_0(a_1 - b_0) - a_0), & A_{21} &\in [-36, -4] \\ A_{22} &= (b_0 - a_1), & A_{22} &\in [3, 9] \end{aligned}$$

Para o projeto do controlador, serão definidos os seguintes limitantes:

$$\begin{aligned} |A_{11}| &\leq 3 \\ |A_{12}| &\leq 1 \\ |A_{21}| &\leq 36 \\ |A_{22}| &\leq 9 \end{aligned}$$

Com relação ao FOAF que estimará η conforme (4.49), serão considerados os valores $\lambda_{\eta} = 0.5$ e $c_{\eta} = 1.5$.

Assim, é possível aplicar estes valores no cálculo de g_1 , conforme (4.57)

$$\begin{aligned} g_1(\eta, e, t) &= A_{22}e + k_p \{d(\eta, e, t) - d(\eta, 0, t)\} \\ |g_1| &\leq |A_{22}||e| + k_p | \{d(\eta, e, t) - d(\eta, 0, t)\} | \\ &\leq 9 \cdot |e| + 1 \cdot |e| = 10|e| \end{aligned}$$

e $\frac{d}{dt}g_2$, segundo (4.59)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[g_2(\eta, t)] &= A_{21}[A_{11}\eta + A_{12}(e + y_m)] + k_p \frac{d}{dt}[d(\eta, 0, t)] + A_{22}\dot{y}_m - \ddot{y}_m \\ \left| \frac{d}{dt}g_2(\eta, t) \right| &\leq |A_{21}|[|A_{11}||\eta| + |A_{12}|(|e| + |y_m|)] + k_p \left| \frac{d}{dt}[d(\eta, 0, t)] \right| + |A_{22}||\dot{y}_m| + |\ddot{y}_m| \\ &\leq 36 \cdot [3 \cdot (\hat{\eta} + |\pi_n(t)|) + 1 \cdot (|e| + |y_m|)] + 1 \cdot (|\dot{y}_m| + 1) + 9 \cdot |\dot{y}_m| + |\ddot{y}_m| \\ &\leq 108\hat{\eta} + 36|e| + 36|y_m| + 10|\dot{y}_m| + |\ddot{y}_m| + 1 + 108 \cdot |\pi_n(t)| \end{aligned}$$

Logo, pode-se calcular as funções que servirão de insumo para os ganhos variáveis:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{10}{k_3} \\ \varrho_2 &= \max \left(\frac{36}{k_3^2}, [216\hat{\eta} + 72|y_m| + 20|\dot{y}_m| + 2|\ddot{y}_m| + 2 + |\pi_2(t)|] \right), \end{aligned}$$

onde $|\pi_2(t)| = 216|\pi_n(t)|$.

Com $k_3 = 0.8$, $\delta = 1$, $\beta = 1000$ e $\epsilon = 1$, é possível calcular os ganhos $k_1(t)$ e $k_2(t)$ utilizando (4.24). A Figura 4.12 apresenta os resultados obtidos por simulação do sistema com $a_0 = 5$, $a_1 = -3$ e $b_0 = 2$.

Na comparação deste resultado com a Figura 4.6 e Figura 4.9 da abordagem nominal, percebe-se que não há diferença considerável no desempenho em regime permanente. Porém, ao aplicar com condições iniciais não nulas, nota-se a diferença entre os sistemas. Na Figura 4.13 o mesmo exemplo é apresentado, porém com condições iniciais $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix}^T$.

Na comparação da Figura 4.13 com o resultado do controle otimizado pelo conhecimento nominal, Figura 4.10, percebe-se que há uma redução grande na amplitude do sinal de controle, sem prejuízo significativo ao desempenho, na estratégia otimizada. Portanto, fica claro que o objetivo de redução da amplitude do sinal de controle sem perda das propriedades do controle de convergência em tempo finito foi atingido.

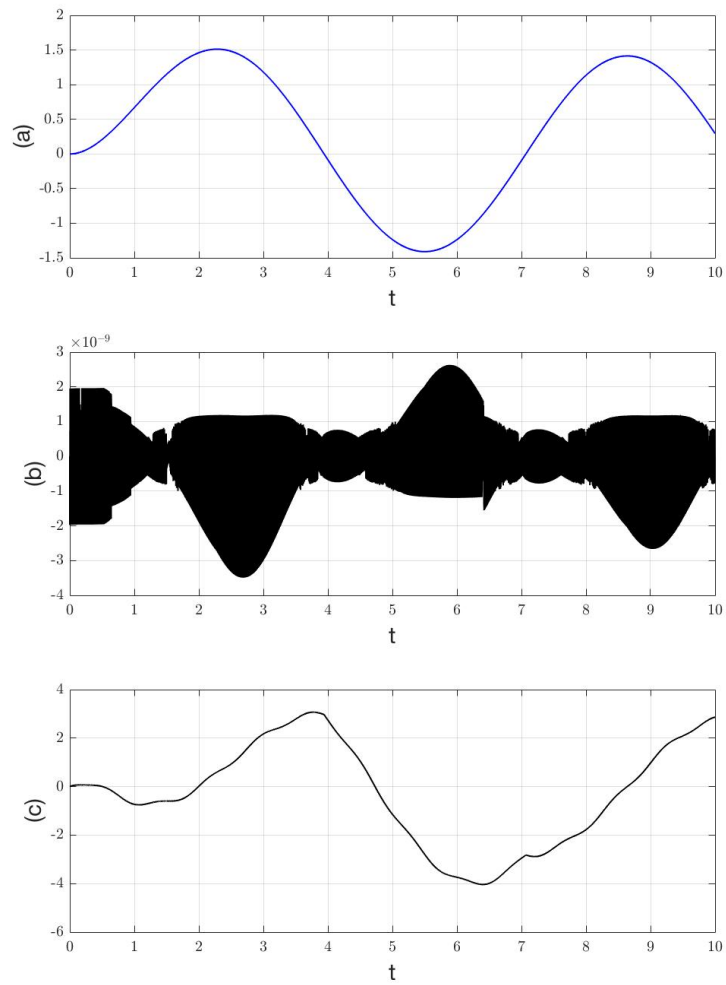


Figura 4.12: Desempenho da lei de controle *variable gain super-twisting* por realimentação de saída aplicada ao sistema do Exemplo 4.5 com condições iniciais nulas: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u .

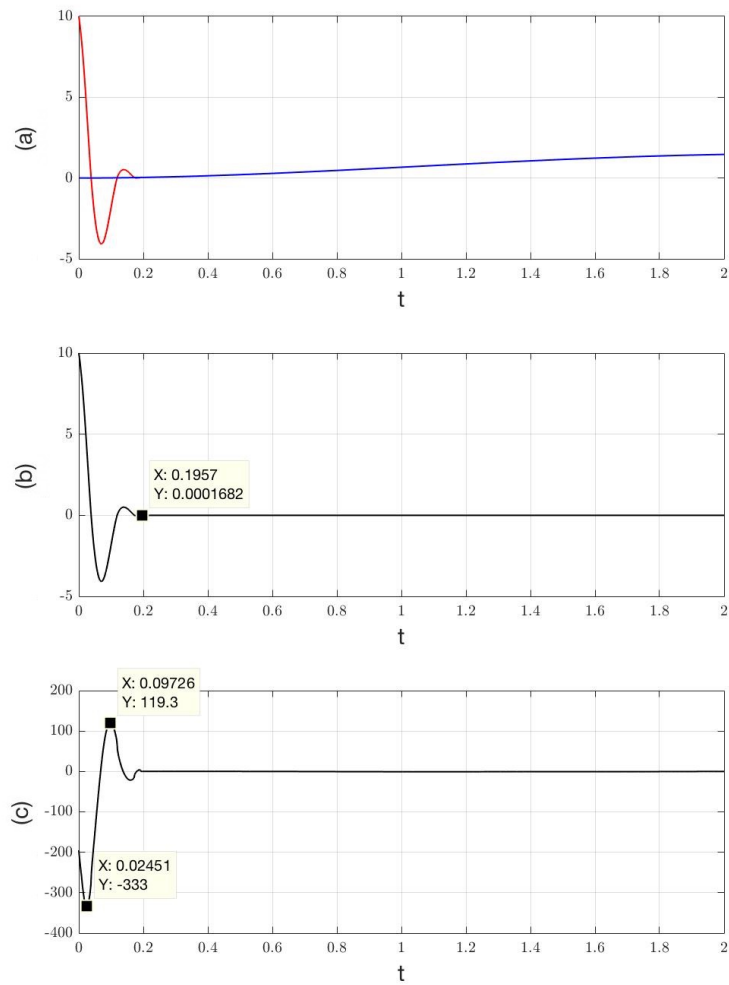


Figura 4.13: Desempenho da lei de controle *variable gain super-twisting* por realimentação de saída aplicada ao sistema do Exemplo 4.5 com condições iniciais $x_0 = [0 \ 10]^T$: (a) (●) saída da planta y_p , (●) sinal de referência y_m ; (b) erro de rastreamento e ; (c) ação de controle u .

Capítulo 5

Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foram apresentados os conceitos básicos de controles por modos deslizantes e controle adaptativo por modelo de referência. Como contribuição principal, foi proposta uma nova estratégia de controle para sistemas incertos e monovariáveis de grau relativo um, baseado no algoritmo *super-twisting* com ganhos variáveis considerando o paradigma do controle adaptativo por modelo de referência.

Por ser baseado na estrutura do controle MRAC, a utilização do conhecimento nominal da planta é facilitado e, ao utilizar desta abordagem, consegue-se atingir esforços de controle ainda menores.

Essa nova implementação traz benefícios no projeto do controle, na comparação com a estratégia recentemente proposta na literatura de controle *super-twisting* com realimentação de saída (inclusive o uso do conhecimento nominal era uma recomendação de trabalho futuro apresentada em [13, Cap. 5]). Essa comparação de performance é feita por simulação através de um exemplo de planta incerta. É recomendado como trabalho futuro sua aplicação e comparação em sistemas físicos.

Ambos os controles são baseados apenas na realimentação da saída da planta, não necessitando de estados da planta, o que é uma vantagem na comparação com demais controles por modos deslizantes de ordem superior, capazes de garantir rastreamento exato de um modelo de referência com convergência global em tempo finito mesmo em aplicações com perturbações ou incertezas de uma ampla classe. No entanto, o controle baseado no paradigma MRAC, em especial na abordagem com aplicação do conhecimento nominal, se mostrou bastante eficiente, mantendo a amplitude do sinal de controle dentro de valores bastante baixos, da mesma ordem de um controle MRC com parâmetros ideais.

Proposta de Trabalhos Futuros

São propostos os seguintes tópicos de pesquisa para continuação dos trabalhos apresentados nesta dissertação de mestrado:

- **Aplicação Prática:**

Uma aplicação prática do controle em uma planta real com todas as suas incertezas, imperfeições de modelagem, não-linearidades e ruídos poderia confirmar seu bom desempenho, verificado apenas por meio de simulação.

- **Extensão multivariável:**

Uma extensão que poderia ser aplicada sem grandes desafios aparentes seria para o caso multivariável. Em diversos sistemas MIMO (Multiple-Input-Multiple-Output), os benefícios do controle proposto poderiam trazer vantagens.

- **Comportamento Transitório do *Super-Twisting*:**

Estratégias de controle baseadas no algoritmo *super-twisting* podem tentar impor uma convergência muito rápida por meio de uma ação de controle suficientemente intensa, o que pode comprometer a aplicação prática desses métodos. Desta forma, seria interessante desenvolver novas estratégias com o objetivo de melhorar o comportamento transitório de controladores baseados no algoritmo *super-twisting* ou avaliar sua estabilidade e desempenho com saturação no sinal de controle.

- **Observador *Super-Twisting* para um controle MRAC:**

A aplicação do algoritmo *super-twisting* como observador para controles do tipo MRAC pode ser uma arquitetura em que as melhores características de cada estratégia são potencializadas. É possível aproveitar o transitório bastante agressivo do STA para garantir uma rápida convergência do controle MRAC, sem que isso se reflita em um controle de grande energia.

Referências Bibliográficas

- [1] SHTESSEL, Y., EDWARDS, C., FRIDMAN, L., et al. *Sliding Mode Control and Observation*. Springer, New York, 2014.
- [2] OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. Pearson Prentice Hall, 2003. ISBN: 9788587918239.
- [3] SLOTINE, J., LI, W. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [4] HSU, L., COSTA, R. R. “Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurement: Part I”, *Int. J. Contr.*, v. 49, n. 2, pp. 399–416, 1989.
- [5] HSU, L., ARAÚJO, A. D., COSTA, R. R. “Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control”, *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 39, n. 1, pp. 4–21, 1994.
- [6] CUNHA, J. P. V. S. *Controle de Sistemas Multivariáveis Incertos por Realimentação de Saída e Modo Deslizante*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2004.
- [7] NUNES, E. V. L., HSU, L., LIZARRALDE, F. “Global Tracking for Uncertain Systems using Output-Feedback Sliding Mode Control”, *IEEE Trans. Aut. Contr.*, v. 54, n. 5, pp. 1141–1147, 2009.
- [8] LEVANT, A. “Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control”, *Int. J. Robust and Nonlinear Contr.*, v. 58, n. 6, pp. 1247–1263, 1993.
- [9] FRIDMAN, L., LEVANT, A. “Higher Order Sliding Modes”. In: Perruquetti, W., Barbot, J. (Eds.), *Sliding Mode Control in Engeneering*, Marcel Dekker Inc., pp. 53–101, 2002.
- [10] GONZALEZ, T., MORENO, J. A., FRIDMAN, L. “Variable Gain Super-Twisting Sliding Mode Control”, *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 57, n. 8, pp. 2100–2105, 2012.

- [11] LEVANT, A. “Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique”, *Automatica*, v. 34, n. 3, pp. 379–384, 1998.
- [12] NAGESH, I., EDWARDS, C. “A multivariable super-twisting sliding mode approach”, *Automatica*, v. 50, n. 3, pp. 984–988, 2014.
- [13] VIDAL, P. V. N. M. *Controle de Sistemas Incertos Baseado no Algoritmo Super-Twisting para Rastreamento Global e Exato de Trajetórias*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2016.
- [14] UTKIN, V. I. *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. MIR, 1978.
- [15] MAREELS, I., POLDERMAN, J. *Adaptive Systems: An Introduction*. Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhauser Boston, 1996. ISBN: 0-8176-3877-6.
- [16] VIDAL, P. V. N. M., KEIJOCK, T. A., NUNES, E. V. L., et al. “Variable Gain Super-Twisting Control Using Only Output Feedback”, *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 2015.
- [17] IOANNOU, P., TSAKALIS, K. “A robust direct adaptive controller”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 31, n. 11, pp. 1033–1043, Nov 1986. ISSN: 0018-9286. doi: 10.1109/TAC.1986.1104168.
- [18] HSU, L., DA CUNHA, J. P. V. S., COSTA, R. R., et al. “Multivariable Output-Feedback Sliding Mode Control”. In: Yu, X., Xu, J.-X. (Eds.), *Variable Structure Systems: Towards the 21st Century*, pp. 283–313, Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 978-3-540-45666-7. doi: 10.1007/3-540-45666-X_12. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/3-540-45666-X_12>.
- [19] FILIPPOV, A. F. “Differential equations with discontinuous right-hand side”, *American Math. Soc. Translations*, v. 42, n. 2, pp. 199–231, 1964.
- [20] CUNHA, J. P. V. S., COSTA, R. R., HSU, L. “Design of first-order approximation filters for sliding-mode control of uncertain systems”, *IEEE Trans. Ind. Electron.*, v. 55, n. 11, pp. 4037–4046, 2008.
- [21] HSU, L., COSTA, R. R., CUNHA, J. P. V. S. “Model-reference output-feedback sliding mode controller for a class of multivariable nonlinear systems”, *Asian Journal of Control*, v. 5, n. 4, pp. 543–556, 2003.

- [22] CUNHA, J. P. V. S., COSTA, R. R., HSU, L. “Design of sliding mode controllers for linear uncertain systems based on first order approximation filters”. In: *Proc. 9th Int. Workshop Variable Structure Syst., Alghero, Italy*, pp. 340–345, 2006.
- [23] HUNG, J. Y., GAO, W., HUNG, J. C. “Variable structure control: a survey”, *IEEE Trans. on Ind. Electronics*, v. 40, n. 1, pp. 2–22, 1993.
- [24] FLUGGE-LOTZ, I. *Discontinuous automatic control*. Princeton U.P Princeton, N.J, 1953.
- [25] ITKIS, U. *Control Systems of Variable Structure*. John Wiley, 1976.
- [26] EDWARDS, C., SPURGEON, S. K. *Sliding Mode Control: Theory and Applications*. Series in Systems and Control. Taylor & Francis, 1998.
- [27] LEVANT, A. “Homogeneity approach to high-order sliding mode design”, *Automatica*, v. 41, n. 5, pp. 823–830, 2005.
- [28] MORENO, J., OSORIO, M. “A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers”. In: *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pp. 2856–2861, 2008.
- [29] MORENO, J., OSORIO, M. “Strict Lyapunov Functions for the Super-Twisting Algorithm”, *IEEE Trans. Autom. Control*, v. 57, n. 4, pp. 1035–1040, 2012.
- [30] DÁVILA, A., MORENO, J., FRIDMAN, L. “Variable gains super-twisting algorithm: A Lyapunov based design”. In: *Proc. American Contr. Conf.*, Baltimore, MD, 2010.
- [31] KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems, 3rd Ed.* John Wiley, 2002.
- [32] YOUNG, K. D., UTKIN, V. I., OZGUNER, U. “A control engineer’s guide to sliding mode control”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 7, n. 3, pp. 328–342, May 1999. ISSN: 1063-6536. doi: 10.1109/87.761053.
- [33] NUNES, E. V. L. *Rastreamento Global e Exato para uma Classe de Sistemas Não-Lineares Incertos*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2009.
- [34] FILIPPOV, A. F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, 1988.

- [35] ISIDORI, A. *Nonlinear Control Systems*. Communications and Control Engineering. Springer New York, 1995.
- [36] NUNES, E. V. L. “Controle por Modos Deslizantes de Ordem Superior com Estabilidade Global”. 2004.
- [37] OLIVEIRA, T. R., PEIXOTO, A. J., NUNES, E. V. L., et al. “Control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree and unknown control direction using sliding modes”, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 21, n. 8-9, pp. 692–707, 2007. ISSN: 1099-1115. doi: 10.1002/acs.978.
- [38] UTKIN, V. I. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, 1992.
- [39] UTKIN, V., GULDNER, J., SHI, J. *Sliding mode control in electromechanical systems*. Taylor & Francis, 1999.
- [40] LEVANT, A. “Universal single-input-single-output (SISO) sliding-mode controllers with finite-time convergence”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 9, pp. 1447–1451, Sep 2001. ISSN: 0018-9286. doi: 10.1109/9.948475.
- [41] LEVANT, A. “Controlling output variables via higher order sliding modes”. In: *1999 European Control Conference (ECC)*, pp. 3798–3803, Aug 1999.
- [42] LEVANT, A. “Higher order sliding modes and arbitrary-order exact robust differentiation”. In: *2001 European Control Conference (ECC)*, pp. 996–1001, Sept 2001.
- [43] LEVANT, A. “Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control”, *Int. J. Contr.*, v. 76, n. 9, pp. 924–941, 2003.
- [44] LEVANTOVSKY, L. “Second order sliding algorithms: Their realization”, pp. 32–43, 01 1985.
- [45] LEVANT, A. “Introduction to high-order sliding modes”. 2002. Disponível em: <http://www.tau.ac.il/~levant/hosm2002.pdf>.
- [46] KUNUSCH, C., PULESTON, P. F., MAYOSKY, M. A., et al. “Sliding Mode Strategy for PEM Fuel Cells Stacks Breathing Control Using a Super-Twisting Algorithm”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 17, n. 1, pp. 167–174, Janeiro 2009.

- [47] DERAFA, L., BENALLEGUE, A., FRIDMAN, L. “Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors UAV”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 349, n. 2, pp. 685–699, 2012.
- [48] EVANGELISTA, C., PULESTON, P., VALENCIAGA, F., et al. “Lyapunov-Designed Super-Twisting Sliding Mode Control for Wind Energy Conversion Optimization”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 60, n. 2, pp. 538–545, Fevereiro 2013.
- [49] ASELTINE, J., MANCINI, A., SARTURE, C. “A survey of adaptive control systems”, *IRE Transactions on Automatic Control*, v. 6, n. 1, pp. 102–108, Dec 1958. ISSN: 0096-199X. doi: 10.1109/TAC.1958.1105168.
- [50] SUN, J., KRSTIC, M., BEKIARIS-LIBERIS, N. “Robust adaptive control: Legacies and horizons”, v. 27, 02 2013.
- [51] CASAVOLA, A., HESPANHA, J., IOANNOU, P. “Recent trends on the use of switching and mixing in adaptive control”, v. 26, 08 2012.
- [52] OLIVEIRA, T. R., PEIXOTO, A. J., NUNES, E. V. L. “Binary robust adaptive control with monitoring functions for systems under unknown high-frequency-gain sign, parametric uncertainties and unmodeled dynamics”, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 30, n. 8-10, pp. 1184–1202, 2016. ISSN: 1099-1115. doi: 10.1002/acs.2629. acs.2629.
- [53] IOANNOU, P., SUN, K. *Robust Adaptive Control*. Prentice-Hall, 1996.
- [54] OLIVEIRA, T. R., RODRIGUES, V. H. P. “Generalização do Controle Adaptativo por Modelo de Referência Através de Diferenciadores Globais”, pp. 1375–1381, 10 2017. ISSN: 2175-8905.
- [55] NARENDRA, K. S., ANNASWAMY, A. M. *Stable Adaptive Systems*. Upper Saddle River, NJ, USA, Prentice-Hall, 1989.
- [56] CHEN, Y., DONG, H., LÜ, J., et al. “A Super-Twisting-Like Algorithm and Its Application to Train Operation Control With Optimal Utilization of Adhesion Force”, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, v. 17, n. 11, pp. 3035–3044, Nov 2016. ISSN: 1524-9050. doi: 10.1109/TITS.2016.2539361.
- [57] VIDAL, P. V. N. M., NUNES, E. V. L., HSU, L. “Variable Gain Super-Twisting Algorithm Multivariável por Realimentação de Saída”, *XXI Congresso Brasileiro de Automática*, 2016.

- [58] VIDAL, P. V. N. M., NUNES, E. V. L., HSU, L. “Output-Feedback Multivariable Global Variable Gain Super-Twisting Algorithm”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016. doi: 10.1109/TAC.2016.2609602.
- [59] DEIMLING, K. *Multivalued Differential Equations*. De Gruyter Series in Non-linear Analysis and Applications. De Gruyter, 1992.

Apêndice A

Variable Gain Super-Twisting por Realimentação de Saída

A.1 Demonstração do Teorema 4.2

Demonstração. Conforme [13], seja a seguinte função candidata de Lyapunov, ligeiramente modificada (inclusão do ganho k_p destacado) em relação à função proposta para a demonstração do teorema 2.3 em [10, 30]:

$$V(e, z) = \zeta^T P \zeta, \quad P = \begin{bmatrix} k_p \beta + 4\epsilon^2 & -2\epsilon \\ -2\epsilon & 1 \end{bmatrix},$$

com $\zeta = [\phi_1(e) \ z]^T$, e $\beta, \epsilon > 0$. Note que esta função é contínua em todo ponto, e diferenciável em todo ponto exceto no subespaço $\mathcal{S} = \{(e, z) \in \mathbb{R}^2 | e = 0\}$. Considere a seguinte propriedade das funções $\phi_1(e)$ e $\phi_2(e)$, definidas em (4.21):

$$\phi_1'(e) = \frac{d\phi_1}{de} = \frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3, \quad \phi_2 = \phi_1' \phi_1 = \left(\frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \phi_1.$$

Logo, segue que a derivada temporal de ζ é dada por

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \phi_1'(e) \overbrace{\{-k_p k_1(t) \phi_1(e) + z + g_1(t, e)\}}^{\dot{e}} \\ \underbrace{-k_p k_2(t) \phi_2(e) + \frac{d}{dt}[g_2(t)]}_{\dot{z}} \end{bmatrix} = \phi_1'(e) \mathcal{A}(t) \zeta + \psi(t, e),$$

com

$$\mathcal{A}(t) = \begin{bmatrix} -k_p k_1(t) & 1 \\ -k_p k_2(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad \psi(t, e) = \begin{bmatrix} \phi_1'(e) g_1(t, e) \\ \frac{d}{dt}[g_2(t)] \end{bmatrix},$$

para todo ponto em $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}$, onde esta derivada existe. Neste caso, é possível verificar

que a derivada temporal da função candidata $V(e, z)$ no mesmo subconjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{S}$ é dada por

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} \\ &= \phi_1'(e) \zeta^T (\mathcal{A}(t)^T P + P \mathcal{A}(t)) \zeta + \zeta^T P \psi + \psi^T P \zeta \\ &= -\phi_1'(e) \zeta^T \mathcal{Q}(t) \zeta + 2\zeta^T P \psi(t, e),\end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{Q}(t) = -(\mathcal{A}(t)^T P + P \mathcal{A}(t)) = \begin{bmatrix} 2\beta k_p^2 k_1 + 4\epsilon k_p(2\epsilon k_1 - k_2) & \star \\ k_p(k_2 - 2\epsilon k_1 - \beta) - 4\epsilon^2 & 4\epsilon \end{bmatrix}.$$

Substituindo o ganho k_2 pelo definido em (4.24), tem-se

$$\mathcal{Q}(t) = \begin{bmatrix} 2\beta k_p^2 k_1 - 4\epsilon k_p \beta & \star \\ -4\epsilon^2 & 4\epsilon \end{bmatrix}.$$

Além disso, como

$$\begin{aligned}\zeta^T P \psi(t, e) &= \{(k_p \beta + 4\epsilon^2)\phi_1 - 2\epsilon z\} \phi_1' g_1 + \{-2\epsilon \phi_1 + z\} \frac{dg_2}{dt} \\ &\leq (k_p \beta + 4\epsilon^2) \phi_1' |\phi_1| |g_1| + 2\epsilon \phi_1' |z| |g_1| + \{2\epsilon |\phi_1| + |z|\} \left| \frac{dg_2}{dt} \right| \\ &\leq \phi_1' \{ [(\varrho_1 + |\pi_1|)(k_p \beta + 4\epsilon^2) + 2\epsilon(\varrho_2 + |\pi_2|)] |\phi_1|^2 \\ &\quad + [(\varrho_2 + |\pi_2|) + 2\epsilon(\varrho_1 + |\pi_1|)] |z| |\phi_1| \},\end{aligned}$$

então tem-se

$$2\zeta^T P \psi(t, e) \leq \phi_1' \{ \bar{\zeta}^T \Gamma(t, e) \bar{\zeta} + \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta} \},$$

com $\bar{\zeta} = [|\phi_1| \quad |z|]^T$ e

$$\Gamma(t, e) = \begin{bmatrix} 2\varrho_1(k_p \beta + 4\epsilon^2) + 4\epsilon \varrho_2 & \star \\ \varrho_2 + 2\epsilon \varrho_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi(t) = \begin{bmatrix} 2|\pi_1|(k_p \beta + 4\epsilon^2) + 4\epsilon |\pi_2| & \star \\ |\pi_2| + 2\epsilon |\pi_1| & 0 \end{bmatrix}.$$

Da desigualdade $\bar{\zeta}^T \mathcal{Q} \bar{\zeta} \leq \zeta^T \mathcal{Q} \zeta$, segue que

$$\dot{V} \leq -\phi_1' \{ \bar{\zeta}^T \mathcal{Q}(t, e) \bar{\zeta} - \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta} \},$$

onde

$$Q(t, e) = \mathcal{Q}(t) - \Pi(t, e),$$

e

$$Q - 2\epsilon I = \begin{bmatrix} 2\beta k_p^2 k_1 - 2\varrho_1(k_p \beta + 4\epsilon^2) - 4\epsilon(\varrho_2 + k_p \beta) - 2\epsilon & \star \\ -(4\epsilon^2 + \varrho_2 + 2\epsilon \varrho_1) & 2\epsilon \end{bmatrix},$$

Note que selecionando o ganho k_1 de acordo com (4.24), tem-se que $Q - 2\epsilon I$ é uma matriz positiva definida. Logo, a derivada temporal da função candidata é limitada pela seguinte desigualdade:

$$\dot{V} \leq - \left(\frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \{2\epsilon \|\zeta\|^2 - \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta}\}, \quad (\text{A.1})$$

uma vez que $\|\bar{\zeta}\| = \|\zeta\|$. Além disso, como $|\pi_1(t)|$ e $|\pi_2(t)|$ são limitados, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \left(\frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta} \leq \left(\frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) |\phi_1| \{c_{\phi_1} |\phi_1| + c_z |z|\} \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} k_3 |e|^{\frac{1}{2}} + k_3^2 |e| \right) \{c_\zeta \|\zeta\|\} \\ &\leq c_1 \|\zeta\| + c_2 \|\zeta\|^2, \end{aligned}$$

para determinadas constantes $c_{\phi_1}, c_z, c_\zeta, c_1, c_2 > 0$, uma vez que

$$\|\zeta\|^2 = |\phi_1|^2 + |z|^2 = |e| + 2k_3|e|^{3/2} + k_3^2|e|^2 + |z|^2.$$

Assim, segue da desigualdade

$$\lambda_{\min} \{P\} \|\zeta\|^2 \leq V(e, z) = \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max} \{P\} \|\zeta\|^2 \quad (\text{A.2})$$

que a derivada temporal da função candidata é limitada por

$$\dot{V} \leq \bar{c}_1 V^{\frac{1}{2}}(e, z) + \bar{c}_2 V(e, z),$$

para constantes $\bar{c}_1, \bar{c}_2 > 0$. Portanto, $V(e, z)$ não pode escapar em tempo finito.

Por outro lado, é possível mostrar que a seguinte desigualdade é válida:

$$\bar{\zeta}^T \Pi(t) \bar{\zeta} \leq |\pi_\zeta(t)| \|\bar{\zeta}\|^2,$$

para determinada função exponencial decrescente $\pi_\zeta(t)$. Esta desigualdade, em conjunto com (A.1), implica

$$\dot{V} \leq -(2\epsilon - |\pi_\zeta(t)|) \left(\frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \|\bar{\zeta}\|^2.$$

Logo, como $|\pi_\zeta(t)|$ é um termo exponencialmente decrescente, tem-se a seguinte relação após um instante de tempo finito t_1 :

$$2\epsilon - |\pi_\zeta(t)| \geq 2\mu, \quad \forall t \geq t_1,$$

onde $\mu < \epsilon$ é uma constante positiva. Assim, tem-se

$$\dot{V} \leq -2\mu \left(\frac{1}{2|e|^{\frac{1}{2}}} + k_3 \right) \|\zeta\|^2, \quad \forall t \geq t_1.$$

Então, considerando (A.2) e a desigualdade

$$|e|^{\frac{1}{2}} \leq \|\zeta\| \leq \frac{V^{\frac{1}{2}}(e, z)}{\lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}},$$

pode-se mostrar que a derivada temporal da função candidata $V(e, z)$ é limitada de acordo com a seguinte desigualdade:

$$\dot{V} \leq -\kappa_1 V^{\frac{1}{2}}(e, z) - \kappa_2 V(e, z), \quad \forall t \geq t_1,$$

para constantes positivas

$$\kappa_1 = \frac{\mu \lambda_{\min}^{\frac{1}{2}}\{P\}}{\lambda_{\max}\{P\}}, \quad \kappa_2 = \frac{2\mu k_3}{\lambda_{\max}\{P\}}.$$

Neste caso, observando que as trajetórias do subsistema (e, z) do sistema em malha-fechada (4.23) não podem permanecer no subconjunto $\mathcal{S} \setminus \{0\}$, verifica-se que $V(e, z)$ é uma função continuamente decrescente. Logo, a partir do Teorema de Lyapunov generalizado para Inclusões Diferenciais [59, Proposição 14.1], pode-se concluir que $V(e, z)$ é uma função de Lyapunov para o subsistema (e, z) . A propriedade que permite esta conclusão é que o Teorema de Lyapunov generalizado requer apenas a continuidade, e não diferenciabilidade, da função de Lyapunov. Além disso, a solução da equação de comparação

$$\dot{v} = -\kappa_1 v^{\frac{1}{2}} - \kappa_2 v, \quad v(t_1) = v_1 \geq 0, \quad \forall t \geq t_1$$

é dada por

$$v(t) = e^{-\kappa_2(t-t_1)} \left[v_1^{\frac{1}{2}} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \left(1 - e^{\frac{\kappa_2}{2}(t-t_1)} \right) \right]^2, \quad \forall t \geq t_1.$$

Logo, $V(e, z)$ converge para zero após um instante de tempo finito T limitado por

$$T \leq t_1 + \frac{2}{\kappa_2} \ln \left(1 + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} V^{\frac{1}{2}}(e(t_1), z(t_1)) \right).$$

Note que $V(e, z) = 0$ implica $z = e = \dot{e} = 0$. Portanto, as trajetórias do sistema são atraídas em tempo finito para a superfície de deslizamento $e = \dot{e} = 0$. \square