

ESTIMAÇÃO BAYESIANA DE COMPONENTES HARMÔNICOS USANDO
VOLTÍMETROS DIGITAIS COM AMOSTRAGEM ASSÍNCRONA

Gregory Amaral Kyriazis

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. Marcello Luiz Rodrigues de Campos, Ph.D.

Prof. Gelson Vieira Mendonça, Ph.D.

Prof. Edson Hirokazu Watanabe, D. Eng.

Dr. Héctor Manuel Laiz, Dr.-Ing.

Prof. João Cesar Moura Mota, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JUNHO DE 2005

KYRIAZIS, GREGORY AMARAL

Estimação Bayesiana de componentes harmônicos usando voltímetros digitais com amostragem assíncrona [Rio de Janeiro] 2005

XI, 254 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Elétrica, 2005)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Metrologia elétrica
2. Inferência estatística
3. Estimação de parâmetros
4. Projeto de experimentos
5. Conversor analógico-digital
6. Qualidade da energia elétrica
7. Harmônicos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À memória de Edmundo Franca Amaral (1885-1958),
engenheiro civil, eletricitista e mecânico,
professor desta universidade,
pioneiro na construção de usinas hidrelétricas interligadas,
por sua contribuição à exploração estatal da energia elétrica
e ao desenvolvimento tecnológico do País.

Às nações latino-americanas,
que se esforçam para se livrar das conseqüências
da colonização de exploração a que foram submetidas.

AGRADECIMENTOS

É importante mencionar aqui todos que, de uma forma ou de outra, colaboraram para que este trabalho se tornasse uma realidade.

Agradeço ao Prof. Marcello L.R. de Campos por ter aceitado a orientação deste trabalho, apesar de sua agenda lotada. Nossas discussões sobre estimação de parâmetros resultaram na publicação de artigos técnicos de reputação internacional. Agradeço também aos outros professores do Programa de Engenharia Elétrica da COPPE/UFRJ por me inspirarem e por apontarem novos caminhos a serem desbravados. Em especial, agradeço aos seguintes professores (em ordem alfabética): Prof. Mauricio Aredes, Prof. Amit Bhaya, Prof. Luiz W. Biscainho, Prof. José M. Seixas, Prof. Richard M. Stephan, Prof. Walter Suemitsu, Prof. Gelson V. Mendonça, Prof. Edson H. Watanabe, e Prof. Marcelo Werneck.

Agradeço também aos professores do Departamento de Pós-graduação em Estatística da UFRJ por terem me permitido assistir como ouvinte a disciplina de Inferência Estatística. Agradeço em especial aos seguintes professores (em ordem alfabética): Prof. Dani Gamerman, Prof. Hedibert F. Lopes, e Prof. Hélio S. Migon.

Agradeço a todos os colegas do Inmetro que, direta ou indiretamente, contribuíram para minha formação profissional e tornaram viável a realização deste trabalho. Agradeço em especial a colaboração do Sr. Luiz Macoto Ogino, chefe do Laboratório de Capacitância e Indutância (LACIN). Nunca esquecerei seu apoio na alocação dos recursos necessários a este trabalho e seu estímulo em momentos difíceis de minha vida profissional. Agradeço também ao Dr. Gustavo Ripper, chefe do Laboratório de Vibrações (LAVIB), e ao Sr. Gilmar Ximenes, chefe da Divisão de Metrologia Acústica e Vibrações (DIAVI), pelo empréstimo do gerador de sinais usado neste trabalho. Agradeço também a Sra. Janice B. Fernandes, chefe do Laboratório de Resistência (LARES) pelo empréstimo de um dos voltímetros digitais usados neste trabalho. Agradeço ao Prof. Endre Tóth, ex-professor da Universidade Técnica de Budapeste (TUB), atualmente trabalhando como consultor técnico do Inmetro, pelos ensinamentos de programação em LabWindows e automação de instrumentos de medição que foram de grande valia neste trabalho. Agradeço também ao Sr. Luiz Carlos Gomes dos Santos, chefe da Divisão de Metrologia Elétrica (DIELE), pela alocação dos recursos necessários ao projeto. E ao Prof. João Alziro Herz da Jornada, presidente do Inmetro, pelo incentivo e apoio dado à metrologia no País.

Meus agradecimentos ao Sr. Ronald Swerlein, da Agilent Technologies, pelas informações fornecidas sobre seu algoritmo e o voltímetro digital usado neste trabalho. Agradeço também ao Sr. Nile Oldham do NIST por me fornecer, em 1996, uma cópia do programa elaborado por R. Swerlein em 1991.

Agradeço também as sugestões que me foram dadas pelo Sr. Ricardo Iuzzolino e pelo Dr. Héctor Laiz durante minha visita ao INTI, em Buenos Aires, Argentina, em novembro de 2002, para mostrar uma versão prévia do algoritmo.

Não poderia deixar de agradecer também ao Dr. W. Guilherme Kürten-Ihlenfeld pela cooperação demonstrada durante a comparação bilateral realizada este ano, em Braunschweig, Alemanha, entre o algoritmo proposto neste trabalho e o sistema de sintetização e amostragem digital síncrona do PTB. Sua atenção aos detalhes foi fundamental para o sucesso da comparação e suas observações enriqueceram sobremaneira esta tese.

Agradeço ao Prof. Maurício N. Frota, da PUC do Rio de Janeiro, pela iniciativa em organizar a I Escola Avançada de Incerteza de Medição, em Angra dos Reis, em 1997, na qual conheci o Dr. Wolfgang Woeger que me mostrou a importância da inferência Bayesiana para a metrologia. Por intermédio do Prof. Maurício N. Frota, conheci também o Prof. Ignacio Lira, da PUC do Chile, com quem discuti tópicos de inferência Bayesiana durante seu período sabático de um ano no Inmetro, em 1998.

Agradeço também aos funcionários das seguintes bibliotecas da UFRJ pela ajuda prestada na localização das referências mencionadas neste trabalho (por favor, autoridades, atualizem estas valiosas bibliotecas!): Biblioteca Central (COPPE), Biblioteca do Instituto de Física, Biblioteca do Instituto de Matemática, Biblioteca do Instituto de Geociências, Biblioteca de Obras Raras, e Biblioteca da COPPEAD. Agradeço também ao pessoal da biblioteca do Inmetro pelo pronto atendimento na localização das referências em outras bibliotecas do País.

Agradeço também aos meus pais Grigorios e Marly pela educação que me proporcionaram.

E, *last but not the least*, gostaria de agradecer em especial às pessoas mais importantes de minha vida que tornam meus dias ainda mais felizes: minha esposa Leila e minha filha Juliana. Esta tese não poderia ter sido elaborada sem sua cooperação.

E a Deus, por tudo que tem tornado possível, inclusive pelos ‘acazos’ que, devido a nossa ignorância, parecem ‘aleatórios’.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ESTIMAÇÃO BAYESIANA DE COMPONENTES HARMÔNICOS USANDO
VOLTÍMETROS DIGITAIS COM AMOSTRAGEM ASSÍNCRONA

Gregory Amaral Kyriazis

Junho/2005

Orientador: Marcello Luiz Rodrigues de Campos

Programa: Engenharia Elétrica

A estatística Bayesiana é aplicada ao problema comum do ajuste de uma série de Fourier truncada, com frequência fundamental constante e conhecida, a uma série temporal criada pelas leituras de um voltímetro digital, usado para digitalizar a saída de um gerador de sinais. Um princípio é fornecido para a escolha do número de funções harmônicas que melhor representa os dados. As condições suficientes para se considerar a transformada de Fourier discreta ou os mínimos quadrados como a melhor estimativa dos parâmetros de ajuste são apresentadas. Um projeto de experimento ortogonal para estimar com exatidão as amplitudes e os ângulos de fase dos harmônicos, usando modelos lineares e técnicas de amostragem assíncrona, é analisado em detalhe. A avaliação de incerteza de medição também leva em consideração os efeitos sistemáticos introduzidos por voltímetros digitais comerciais. Mostra-se que é possível estimar com exatidão as amplitudes em volts de até 64 harmônicos (e as amplitudes em percentuais da fundamental de até 269 harmônicos) de sinais periódicos arbitrários de 60 Hz, e o deslocamento de fase entre as componentes fundamentais destes sinais, usando geradores de sinais e voltímetros digitais comerciais.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

BAYESIAN ESTIMATION OF HARMONIC COMPONENTS USING DIGITAL
VOLTMETERS WITH ASYNCHRONOUS SAMPLING

Gregory Amaral Kyriazis

June/2005

Advisor: Marcello Luiz Rodrigues de Campos

Department: Electrical Engineering

Bayesian statistics is applied to the common problem of fitting a truncated Fourier series with constant and known fundamental frequency to a time series created by the readings of a digital voltmeter used to digitize the output of a signal generator. A rationale is given for the choice of the number of harmonic functions that best accounts for the data. The sufficient conditions for regarding the discrete Fourier transform or the least-squares as the best estimate of the fitting parameters are presented. An orthogonal design of experiment for accurately estimating the magnitudes and phase angles of the harmonics, using linear models and asynchronous sampling techniques, is analyzed in detail. The evaluation of measurement uncertainty also takes into account the systematic effects introduced by commercial digital voltmeters. It is shown that it is possible to estimate accurately up to 64 harmonic magnitudes in volts (or up to 269 harmonic magnitudes as a percentage of the fundamental) of periodic arbitrary signals at 60 Hz, and the phase shift between the fundamental components of these signals, using commercial signal generators and digital voltmeters.

SUMÁRIO

| | | |
|------------|---|-----------|
| I | Introdução | 1 |
| I-1 | Histórico | 1 |
| I-2 | Objetivo | 9 |
| I-3 | Metodologia | 9 |
| I-4 | Aplicações | 12 |
| I-5 | Resultados experimentais | 14 |
| I-6 | Organização | 15 |
| II | Estimação de parâmetros Bayesiana | 18 |
| II-1 | Estatística e teoria da decisão Bayesiana | 18 |
| II-2 | Modelo do voltímetro digital integrador | 20 |
| II-3 | Modelo linear de ajuste para sinais estacionários | 24 |
| II-4 | Modelo linear de ajuste para sinais não estacionários | 29 |
| II-5 | Amostragem síncrona | 33 |
| II-6 | Amostragem assíncrona | 36 |
| II-7 | Estimativas das amplitudes dos harmônicos | 43 |
| II-7-1 | Uso das aproximações do ISO (1995) | 43 |
| II-7-2 | Obtenção da fdp posterior das amplitudes dos harmônicos | 45 |
| II-8 | Estimativas dos ângulos de fase dos harmônicos | 48 |
| II-9 | Estimativas dos deslocamentos de fase entre harmônicos de dois sinais | 51 |
| II-10 | Seleção do modelo | 56 |
| III | Resultados experimentais | 59 |
| III-1 | Medição de sinais senoidais quase puros | 59 |
| III-2 | Medição de amplitude de harmônicos de sinais não senoidais | 64 |
| III-2-1 | Número de harmônicos medidos e tempo de medição | 66 |
| III-2-2 | Sinal senoidal (versão em degraus) | 67 |
| III-2-3 | Sinal parabólico alternado | 70 |
| III-2-4 | Sinal retificado em meia onda | 74 |
| III-2-5 | Sinal de triac | 79 |
| III-2-6 | Sinal trapezoidal | 83 |
| III-3 | Medição de ângulos de fase de harmônicos de sinais não senoidais | 90 |

| | | |
|---------|--|-----|
| III-4 | Medição de deslocamento de fase entre harmônicos de sinais não senoidais | 93 |
| III-5 | Comentários sobre os resultados experimentais..... | 96 |
| III-6 | Comparação internacional | 98 |
| III-6-1 | Programa instalado no sistema síncrono | 99 |
| III-6-2 | Programa instalado em um sistema independente..... | 103 |
| III-6-3 | Comparação com conversores térmicos | 111 |
| IV | Conclusão..... | 116 |
| | Referências | 123 |
| A-I | Algoritmo para a medição do valor eficaz de sinais senoidais de baixa frequência..... | 132 |
| A-I-1 | Algoritmo de Swerlein..... | 132 |
| A-I-1-1 | Modelo | 132 |
| A-I-1-2 | Correção da resposta de frequência dos estágios de entrada. | 135 |
| A-I-1-3 | Resolução de amplitude e de base de tempo do IADC. . . . | 136 |
| A-I-1-4 | Correção da resposta de frequência do IADC..... | 138 |
| A-I-1-5 | Correção do modo de tensão contínua..... | 139 |
| A-I-1-6 | Ruído..... | 140 |
| A-I-2 | Especificações do programa..... | 140 |
| A-I-3 | Descrição do programa..... | 141 |
| A-I-4 | Listagem do programa-fonte | 145 |
| A-II | Resolução da base de tempo do conversor A/D..... | 161 |
| A-III | Aplicação do Princípio de Entropia Máxima | 165 |
| A-III-1 | Mensurando em um intervalo..... | 165 |
| A-III-2 | Mensurando positivo e valor esperado dado..... | 166 |
| A-III-3 | Mensurando positivo e segundo momento dado..... | 167 |
| A-III-4 | Valor esperado e variância dados..... | 169 |
| A-III-5 | Mensurando em um intervalo e valor esperado dado..... | 170 |
| A-IV | Extensão do algoritmo de Swerlein para a medição de parâmetros de harmônicos de sinais periódicos arbitrários..... | 174 |
| A-IV-1 | Especificações do programa..... | 174 |
| A-IV-2 | Descrição do programa | 174 |
| A-V | Matriz do projeto | 184 |

| | |
|--|------------|
| A-VI Cálculo da transformada de Fourier de sinais periódicos arbitrários lineares por partes. | 188 |
| A-VI-1 Transformada de Fourier de sinais periódicos | 188 |
| A-VI-2 Técnicas computacionais importantes | 189 |
| A-VI-3 Sinal senoidal (versão em graus) | 198 |
| A-VI-4 Sinal parabólico alternado | 201 |
| A-VI-5 Sinal retificado em meia onda | 205 |
| A-VI-6 Sinal de triac. | 209 |
| A-VI-7 Sinal trapezoidal. | 215 |
| A-VII Extensão do algoritmo de Swerlein para a medição de deslocamento de fase entre harmônicos de sinais periódicos arbitrários. | 219 |
| A-VII-1 Especificações do programa. | 219 |
| A-VII-2 Descrição do programa | 219 |
| A-VIII Estimação clássica de parâmetros de ajuste de uma série de Fourier truncada a um conjunto de leituras de um voltímetro digital integrador. . . | 229 |
| A-VIII-1 Inferência clássica | 229 |
| A-VIII-2 Modelo do voltímetro digital integrador | 232 |
| A-VIII-3 Modelo linear de ajuste para sinais estacionários | 234 |
| A-VIII-4 Amostragem síncrona | 246 |
| A-VIII-5 Estimadores das amplitudes dos harmônicos | 248 |
| A-VIII-6 Comentários. | 250 |

LISTA DE SIGLAS

- A/D – analógico-digital
- ADC – *Analog-to-digital converter* - conversor analógico-digital
- C.A. – corrente alternada
- C.C. – corrente contínua
- D/A – digital-analógico
- DAC – *Digital-to-analog converter* - conversor digital-analógico
- DCV – tensão contínua
- DFT – *Discrete Fourier Transform* - transformada de Fourier discreta
- DVM – *Digital voltmeter* - voltímetro digital
- fdp – função de densidade de probabilidade
- FFT – *Fast Fourier Transform* – Transformada de Fourier rápida
- GPB – *General Purpose Interface Bus* – barramento IEEE 488 (ou 488.2)
- IADC – *Integrating analog-to digital converter* - conversor analógico-digital integrador
- IEN – *Istituto Eletrotecnico Nazionale Galileo Ferraris* – Instituto Nacional de Metrologia da Itália
- Inmetro – *Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial* – Instituto Nacional de Metrologia do Brasil
- INTI – *Instituto Nacional de Tecnología Industrial* – Instituto Nacional de Metrologia da Argentina
- LED – *Light-emitting diode* - diodo emissor de luz
- LSB – *Least significant bit* - bit menos significativo
- MLE – *Maximum Likelihood Estimator* - estimador de verossimilhança máxima
- NIST – *National Institute for Standards and Technology* – Instituto Nacional de Metrologia dos E.U.A.
- NRC – *National Research Council* – Instituto Nacional de Metrologia do Canadá
- PLL – *Phase-locked Loop*
- PME – *Principle of Maximum Entropy* - Princípio de Entropia Máxima
- PTB – *Physikalisch-Technische Bundesanstalt* – Instituto Nacional de Metrologia da Alemanha
- RMS – *Root-mean square* - valor eficaz
- SP – *Swedish National Testing and Research Institute* – Instituto Nacional de Metrologia da Suécia
- THD – *Total harmonic distortion* - distorção harmônica total

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I-1 Histórico

Um histórico da medição de tensão e potência elétrica por meio de amostragem digital é apresentado aqui. O leitor deve atentar para o fato de que o desenvolvimento das técnicas de amostragem síncrona caminhou paralelo ao das técnicas de amostragem assíncrona.

Há cerca de trinta anos, TURGEL (1974) mostrou que potência elétrica ativa podia ser medida por um sistema que amostrasse sinais de tensão e corrente em intervalos uniformes predeterminados. Os sinais são amostrados e o resultado calculado por integração numérica. O sistema de medição concordava então com os antigos padrões eletrodinâmicos dentro de 0,02% na faixa de C.C. a 1 kHz.

A potência média medida em um intervalo T é dada por

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T V(t)I(t)dt \quad (\text{I-1-1})$$

Esta integral pode ser aproximada pela soma

$$P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_i I_i \quad (\text{I-1-2})$$

onde V_i e I_i são amostras simultâneas dos sinais de tensão e corrente igualmente espaçadas no tempo.

CLARKE, STOCKTON (1982) mostraram que, contanto que certas condições sejam satisfeitas, o resultado (2) tem grande exatidão para relativamente poucas amostras. Além do mais, as amostras não precisam ser colhidas em um único período mas podem ser distribuídas sobre M períodos (onde M é um inteiro) permitindo que o intervalo de amostragem seja correspondentemente aumentado. As condições exigidas são:

- 1) a amostragem deve ocorrer em um número inteiro de períodos do sinal; e
- 2) o sinal deve ser estacionário durante a medição.

Uma vantagem inerente do método é que a multiplicação digital permite uma independência completa entre os canais de tensão e corrente, permitindo que cada um seja calibrado separadamente.

Os sistemas de medição mencionados acima (respectivamente do NIST e do NPL) utilizavam amostragem síncrona. Para baixos valores de N , os erros podem não ser desprezíveis, especialmente se ambos os sinais são distorcidos ou se uma componente C.C. está presente em um sinal enquanto o outro contém distorção significativa. Entretanto, a técnica então prometia exatidão elevada para sinais que são essencialmente senoidais, e é sob estas condições que estes padrões de calibração de potência foram usados na época (CORNEY, PULLMAN, 1987).

STENBAKKEN (1984) descreveu o projeto e a operação de um wattímetro de amostragem digital capaz de medir sinais distorcidos com frequências fundamentais de 1 Hz a 10 kHz e harmônicos de até 100 kHz, usando amostragem assíncrona. Ele quantificou o erro na potência medida causado pela temporização imprecisa da amostra devido à resolução finita do intervalo de amostragem. Este erro, denominado de *erro de truncamento*, faz com que o tempo total de amostragem não coincida com um número inteiro de períodos do sinal. Ele deduziu uma expressão para este erro e com base nesta expressão identificou três métodos para minimizá-lo. Primeiro, o número de amostras é ajustado de tal modo que a diferença entre o tempo total de amostragem e um número inteiro de períodos do sinal seja menor do que o intervalo de amostragem. O número de amostras a ser usado é determinado com base no valor medido da frequência fundamental do sinal. O segundo método de correção estima e corrige o erro de truncamento. O terceiro método disponível para minimizar o erro de truncamento é usar o retardo do disparo da amostragem. Este parâmetro determina o instante de tempo de início da amostragem. Outro erro abordado, e que pode ser compensado, é o retardo de tempo diferencial entre os dois canais. Este retardo causa alterações na deslocamento de fase entre os sinais de entrada e pode afetar seriamente a exatidão do wattímetro.

SWERLEIN (1991) desenvolveu um algoritmo usando amostragem assíncrona que permite minimizar de forma considerável o erro de truncamento e medir com uma exatidão menor do que 1 parte em 10^5 o valor eficaz da tensão de um sinal de distorção harmônica de até 1%. Este algoritmo foi desenvolvido para ser usado com um voltímetro digital (DVM) então recentemente comercializado pela HEWLETT-PACKARD (1994a). SWERLEIN (1991) deduziu uma expressão aproximada para o

erro de truncamento similar à obtida por STENBAKKEN (1984)¹. O algoritmo usa n trens de amostras, cada trem com um retardo de disparo da amostragem (t_0) diferente (este parâmetro determina o instante de tempo de início da amostragem do trem). O algoritmo define o número de amostras N de cada trem e o intervalo de amostragem t_{samp} de modo que Nt_{samp} seja tão próximo possível de um múltiplo inteiro do período do sinal, e o faz considerando o teorema da amostragem. Historicamente, os DVMs permitiam somente uns poucos valores discretos de tempo de integração (vide, por exemplo, especificações dos voltímetros digitais HP 3455, HP 3456, e HP 3457). Desde o fim da década de 1980, DVMs estão disponíveis comercialmente² que são capazes de prover tempos de integração selecionáveis em incrementos definidos pela quantização da base de tempo (CZENKUSCH, 1989). Isto permitiu a SWERLEIN (1991) ajustar Nt_{samp} de forma a minimizar o erro de truncamento. Entretanto, a amostragem sobre um número inteiro de períodos somente pode ser realizada com uma resolução de metade da quantização da base de tempo do DVM. Algo mais precisaria ser feito para minimizar o erro de truncamento residual. STENBAKKEN (1984) já havia identificado que o erro de truncamento é proporcional ao cosseno do ângulo correspondente ao retardo do disparo, e que o ajuste deste retardo poderia minimizar aquele erro. Entretanto, SWERLEIN (1991) foi mais bem sucedido em identificar o modo mais eficaz de usar o retardo do disparo da amostragem para minimizar o erro de truncamento residual. Nas suas palavras (SWERLEIN, 1997): *“The equation illustrates an error term with a $\sin(2\omega t_0)$ component. If I repeat the measurement with a different delay (t_1), I get a new error term with a $\sin(2\omega t_1)$ value. If I pick my delays right (t_0, t_1, t_2, t_3), I can average the different readings and the errors will sum to zero. The term “frozen ripple” came to mind because I was thinking in terms of a thermal converter which exhibits time varying “ripple” error at low frequency. A sampled data signal triggered off of a zero crossing can “freeze” this ripple.”* O algoritmo foi comparado com conversores térmicos de multijunção planares do PTB (KAMPIK, LAIZ *et al.*, 2000, LAIZ, 1999), confirmando a exatidão do mesmo. Este algoritmo está detalhado no Apêndice I desta tese.

¹ R. Swerlein participou de um seminário no NIST, em 1983, no qual R.S. Turgel e G.N. Stenbakken constavam como palestrantes, e portanto estava a par de suas idéias (BELL, 1985).

² Diferentemente de seus predecessores, o DVM HP 3458, além de apresentar estabilidade e resolução elevadas, permite ao usuário selecionar os parâmetros de amostragem mais convenientes para seu processo de medição. É tão grande sua versatilidade que, desde sua introdução há quase duas décadas, até o momento da redação desta tese continua sendo usado por grande parte dos Institutos Nacionais de Metrologia em seus sistemas avançados de medição.

O problema identificado por STENBAKKEN (1984) está fortemente relacionado com o problema existente no método de transformada de Fourier rápida (FFT). Em ambos os casos, o erro aparece porque a amostragem não está sincronizada com o sinal que está sendo amostrado. Assim, em geral, o tempo total de amostragem não cobrirá um número inteiro de períodos do sinal. Os erros que aparecem nos resultados de FFT são referenciados como vazamento (*leakage*), enquanto que no domínio do tempo este mesmo erro é referenciado como um erro de truncamento.

Como descrito em BRIGHAM (1974), alguns anos após a FFT ter sido reinventada por COOLEY, TUKEY (1965) e sua eficácia ser explanada por BRIGHAM, MORROW (1967) e GENTLEMAN (1968), para que as transformadas de Fourier discreta e contínua de um sinal sejam exatamente as mesmas dentro de uma constante de escala, é necessário que: (1) o sinal seja periódico, (2) o sinal tenha uma largura de banda limitada, (3) a taxa de amostragem seja de pelo menos duas vezes a maior componente harmônica do sinal, e (4) a função de truncamento no domínio do tempo deve ser não nula sobre exatamente um período (ou múltiplo inteiro de um período) do sinal. Se o período é conhecido, deve-se aproveitar este conhecimento para selecionar um intervalo de truncamento igual a um múltiplo inteiro do período.

Se um sinal periódico de banda limitada é amostrado e truncado de forma que o intervalo de truncamento não é um múltiplo inteiro do período do sinal, as transformadas de Fourier discreta e contínua diferem. Vários métodos foram propostos para minimizar o vazamento que ocorre neste caso: algoritmos de interpolação (GRANDKE, 1983), janelas de amostragem (HARRIS, 1978, ANDRIA, SAVINO *et al.*, 1989), rearranjo da seqüência de dados amostrados (FERRERO, OTTOBONI, 1991), e estimação de máxima verossimilhança (SCHOUKENS, PINTELOON *et al.*, 1988).

Tanto o erro de vazamento no domínio da freqüência quanto o erro de truncamento no domínio do tempo podem ser minimizados quando a amostragem está sincronizada com o sinal de entrada. FERRERO, OTTOBONI (1992b) minimizaram o vazamento da FFT sincronizando a taxa de amostragem com a freqüência fundamental do sinal (amostragem síncrona). Este método é muito adequado se o sinal analisado é periódico, apresentando distorção harmônica, de tal modo que a informação necessária para sincronizar o clock da amostragem à freqüência do sinal pode ser extraída do próprio sinal. Eles comprovaram que a sincronização pode aumentar a exatidão da medição tanto da amplitude quanto do ângulo de fase dos harmônicos de tensão, sem

qualquer necessidade de janelas de amostragem. (Como vimos, a idéia já havia sido implementada no domínio do tempo por TURGEL (1974) e CLARKE, STOCKTON (1982), embora somente sinais essencialmente senoidais tenham sido medidos e integração discreta tenha sido usada por estes autores). FERRERO, OTTOBONI (1992b) usaram técnicas de *phase-locked loop* (PLL) para sincronizar a taxa de amostragem com a frequência fundamental do sinal gerado. Estruturas de hardware diferentes podem ser usadas para a sincronização. Entretanto, FERRERO, OTTOBONI (1992a) mostraram que um multiplicador de frequência baseado em uma estrutura de PLL digital (DPLL) é a mais eficaz para lidar com sinais periódicos distorcidos.

O método de amostragem síncrona de FERRERO, OTTOBONI (1992b) foi estendido e aperfeiçoado por SVENSSON, RYDLER (1995) e ARSENEAU, FILIPSKI (1995). Estes últimos construíram um sistema de calibração para avaliar o desempenho de analisadores de potência harmônica trifásicos que foi aperfeiçoado por ARSENEAU, FILIPSKI *et al.* (1997). O sistema de calibração não senoidal do NRC usa dois computadores, um controla a geração dos sinais e o outro controla a amostragem digital destes sinais. Os geradores de sinais arbitrários são operados de um clock comum rodando a 2048×60 Hz, sincronizado com a frequência da rede elétrica. As saídas dos dois geradores são amplificadas para os níveis adequados de tensão e de corrente por meio de três amplificadores de tensão e três amplificadores de transcondutância, respectivamente, e fornecidas ao equipamento sob teste e à instrumentação de referência. Dois DVMS são usados para digitalizar os sinais de teste. O computador associado aos DVMS também controla um multiplexador que conecta os dois DVMS a cada fase do sistema trifásico. O clock dos DVMS é sincronizado com a frequência fundamental dos sinais de teste, que, por seu turno, está sincronizada com a frequência fundamental da rede elétrica. A frequência de amostragem é de até 1024 vezes a fundamental dos sinais de teste. Um divisor indutivo de tensão é usado para atenuar o sinal para a faixa de 10 V dos DVMS. Derivadores de corrente (*shunts*), junto com um amplificador de saída, são usados para converter as correntes de teste para tensões na faixa de 10 V. O princípio de medição é a amostragem simultânea igualmente espaçada da tensão e da corrente durante um período do sinal. Os parâmetros dos harmônicos de tensão e corrente são obtidos por meio de FFT.

O wattímetro de amostragem digital síncrona do SP, projetado também com a finalidade de calibrar analisadores de potência harmônica, foi publicado por SVENSSON, RYDLER. (1995) e aperfeiçoado por SVENSSON (1998, 1999). O

sistema utiliza uma fonte de alimentação comercial de dois canais e dois DVMs comerciais (HEWLETT-PACKARD, 1994a). O princípio de medição é a amostragem simultânea igualmente espaçada da tensão e da corrente durante um intervalo de tempo correspondente a um número inteiro de períodos do sinal. FFT é usada para calcular os parâmetros dos harmônicos de tensão e corrente. Entretanto, integração discreta é também usada quando apropriado. Um circuito especial de PLL e controle de disparo (*trigger*) foi projetado e instalado dentro do computador para obter um controle preciso do processo de amostragem dos DVMs. O circuito de PLL é baseado em FERRERO, OTTOBONI (1992a). A frequência de amostragem é igual à frequência fundamental do sinal multiplicada por N/M , onde M é o número de períodos e N é o número de amostras. Este método foi comparado com o sistema de calibração de ARSENEAU, FILIPSKI (1995) (ARSENEAU, SUTHERLAND *et al.* 2000). O SP também participou de uma comparação internacional de potência elétrica usando este sistema (OLDHAM, N., NELSON, T. *et al.*, 2001). Seus primeiros resultados para fator de potência unitário não foram tão bons devido a problemas com seu sistema de transferência C.A.-C.C. Entretanto, seus resultados para fator de potência nulo comprovaram o sucesso do sistema na medição do ângulo de fase.

No que tange a amostragem assíncrona, POGLIANO (1997) desenvolveu um algoritmo baseado no ajuste de mínimos quadrados de quatro parâmetros (frequência, amplitude, fase e componente C.C.) de uma série de Fourier truncada. Este problema de estimação é não linear. O algoritmo usa um DVM comercial (HEWLETT-PACKARD, 1994a) para medir o valor eficaz de sinais de baixa frequência com base nas amplitudes medidas dos harmônicos. POGLIANO, DALLORTO (1996) usaram as correções para efeitos sistemáticos do DVM propostas por SWERLEIN (1991). Os resultados experimentais obtidos com o sistema confirmaram que, nas frequências de 20 Hz e 40 Hz, as diferenças entre os valores de tensão C.A. obtidos pelo método descrito e aqueles medidos por meio dos conversores térmicos do IEN concordam dentro das incertezas especificadas. O método é usado atualmente no IEN como padrão primário de tensão C.A. para frequências abaixo de 20 Hz.

POGLIANO (2001) estendeu o algoritmo acima para a medição de potência elétrica³. O sistema utiliza uma fonte de alimentação comercial de dois canais e dois DVMs comerciais (HEWLETT-PACKARD, 1994a) em configuração mestre-escravo

³ Este sistema havia sido construído algum tempo atrás (POGLIANO, 1996). Sua publicação no periódico do IEEE se atrasou devido à morte ignorada do revisor (POGLIANO, 2002b).

(um canal de tensão e outro de corrente). Como os dois DVMs operam em faixas de tensão diferentes, um processo de calibração usando um divisor indutivo de tensão calibrado para o erro de ângulo foi adotado para compensar o retardo de tempo diferencial entre os dois canais (POGLIANO, LA PAGLIA, 1997). O IEN participou com sucesso de uma comparação internacional de potência elétrica usando este sistema (OLDHAM, N., NELSON, T. *et al.*, 2001).

Por seu turno, a técnica de amostragem síncrona atingiu seu auge com o desenvolvimento de um sistema de geração e medição de potência elétrica onde a temporização do gerador de sinais de tensão e corrente foi extraída de um DVM comercial (HEWLETT-PACKARD, 1994a) usado para a amostragem dos sinais (RAMM, G., MOSER, H. *et al.*, 1999). Nos sistemas síncronos desenvolvidos até então, a informação necessária para sincronizar o clock da amostragem à frequência do sinal era extraída do próprio sinal. Agora, a informação parte do próprio DVM usado para amostrar o sinal. O sistema utiliza um único DVM que é chaveado sincronamente entre os canais de tensão e corrente. Como a informação de temporização do sistema se origina da base de tempo do DVM, o intervalo de amostragem pode ser selecionado de acordo com a resolução (quantização) da base de tempo do DVM, de modo a cobrir um número inteiro de períodos do sinal, tornando assim desprezível o vazamento da FFT (o algoritmo calcula a transformada de Fourier discreta quando o número de amostras é diferente de uma potência de 2) usada para estimar os parâmetros dos harmônicos dos sinais. Vários detalhes técnicos sobre a sintetização e amostragem síncronas são discutidos em KÜRTEH-IHLENFELD (2001a, 2001b) e KÜRTEH-IHLENFELD, MOHNS *et al.* (2003). Comparações extensivas com os conversores térmicos primários do PTB mostram que o sistema de amostragem síncrono e a técnica de transferência térmica C.A.-C.C. concordam dentro de aproximadamente $\pm 0,5 \mu\text{V V}^{-1}$ para formas de onda senoidais quase puras (KÜRTEH-IHLENFELD, MOHNS, 2004). O PTB participou com sucesso de uma comparação internacional de potência elétrica usando este sistema (OLDHAM, N., NELSON, T. *et al.*, 2001).

Com relação à amostragem assíncrona, uma extensão do algoritmo de SWERLEIN (1991) para medir com exatidão as amplitudes dos harmônicos de sinais de distorção harmônica menor do que 1% foi introduzida por KYRIAZIS (2003). A análise deste trabalho é um dos objetivos desta tese. Duas versões do algoritmo foram apresentadas: uma baseada no ajuste de mínimos quadrados de três parâmetros (amplitude, fase e componente C.C.) de uma série de Fourier truncada e a outra baseada

na transformada de Fourier discreta. Este problema de estimação é linear. Os parâmetros de amostragem são avaliados como descrito em SWERLEIN (1991), minimizando assim os problemas relacionados com a resolução da base de tempo e com a escolha do melhor ajuste operacional do conversor analógico-digital (A/D) do DVM. Este algoritmos foram extensivamente verificados em comparação com o algoritmo de SWERLEIN (1991). Uma fonte estável de baixa distorção foi usada para gerar sinais senoidais quase puros na faixa de tensão de 10 V e na faixa de frequência de 10 Hz a 1000 Hz. Um DVM de estabilidade e resolução elevadas⁴ foi usado para medir o valor eficaz da tensão à medida em que era seqüencialmente controlado por cada algoritmo. A estabilidade dos resultados obtidos por estes algoritmos foi a mesma que aquela relatada por SWERLEIN (1991). As diferenças observadas entre os resultados fornecidos por todos os algoritmos ficaram dentro da estabilidade do conjunto gerador-voltímetro. Isto também foi confirmado independentemente por IUZZOLINO, LAIZ (2005).

Um sistema de medição de potência elétrica que usa amostragem digital assíncrona foi recentemente desenvolvido no Inmetro por TÓTH, FRANCO *et al.* (2005) para assegurar a manutenção das unidades de potência e energia elétrica com baixa incerteza de medição. O sistema utiliza uma fonte de alimentação comercial de dois canais e dois DVMs comerciais (HEWLETT-PACKARD, 1994a). A tensão de teste é reduzida para a faixa de 10 V através de um divisor indutivo de tensão calibrado e aplicada a um DVM. Uma tensão (de 1 V ou 2 V) proporcional à corrente de teste é obtida por um sistema passivo calibrado que compreende um transformador de dois estágios carregado com dois resistores padrão imersos em óleo e conectados em série. Esta tensão é aplicada ao outro DVM. Os dois DVMs operam em configuração mestre-escravo como descrito em POGLIANO (2001). O sistema de medição usa um algoritmo baseado em SWERLEIN (1991) para selecionar as amostras a serem processadas. O sistema tem ajuste automático de faixas e é completamente automatizado. É possível medir tanto potência ativa quanto reativa na faixa de 45-65 Hz para quaisquer pontos de teste com tensão de 60 V a 600 V, corrente de 0,05 A a 200 A, fator de potência de -180 graus a +180 graus, com uma incerteza de 30 μ W/W e 30 μ rad.

⁴ Para efeitos desta tese, por *estabilidade elevada* queremos dizer uma estabilidade de curto prazo (da ordem de 10 min) não cumulativa da ordem de uma (ou poucas) partes em 10⁶ e por *resolução elevada* queremos dizer uma resolução maior ou igual a 6 ½ dígitos.

Um algoritmo de amostragem digital assíncrona que usa dois DVMs comerciais (HEWLETT-PACKARD, 1994a) em uma configuração mestre-escravo para medir com exatidão as amplitudes e os ângulos de fase dos harmônicos de dois sinais de tensão arbitrários de baixa frequência foi publicado recentemente por KYRIAZIS, CAMPOS (2005). A análise deste trabalho é também um dos objetivos desta tese. O algoritmo é uma extensão, para formas de onda distorcidas, do algoritmo publicado por KYRIAZIS (2003). É possível medir as amplitudes *em volts* de até 64 harmônicos de sinais de 60 Hz com uma incerteza de menos de $13 \mu\text{V V}^{-1}$ relativa à fundamental usando geradores de sinais de estabilidade elevada e DVMs de resolução elevada comerciais. Além disso, é possível medir as amplitudes *em percentuais da fundamental* de até 269 harmônicos de sinais de 60 Hz. É também possível medir o deslocamento de fase entre as componentes fundamentais de dois sinais igualmente sintetizados de 60 Hz com THD de aproximadamente 3,8% com uma incerteza menor do que $2,5 \mu\text{rad}$. Incertezas ainda menores podem ser obtidas para sinais com distorção menor do que 1%. O algoritmo foi aplicado na medição de harmônicos de sinais periódicos arbitrários gerados por uma fonte comercial. As diferenças entre os valores computados e medidos de amplitudes dos harmônicos sugerem que geradores de sinais sintetizados de forma digital de estabilidade elevada podem ser usados como padrões calculáveis de distorção harmônica com uma exatidão menor do que 6 partes em 10^5 relativa à fundamental.

I-2 Objetivo

O objetivo do presente trabalho é aplicar estatística Bayesiana para estimar com exatidão as amplitudes e os ângulos de fase dos harmônicos de sinais de tensão periódicos arbitrários de baixa frequência, com base em dados de DVMs comerciais, usando modelos lineares e um projeto de experimento ortogonal baseado em amostragem assíncrona. Os resultados de uma recente comparação internacional comprovam experimentalmente que o algoritmo proposto fornece estimativas que se aproximam da transformada de Fourier discreta avaliada usando amostragem síncrona.

I-3 Metodologia

Há pelo menos duas abordagens principais à inferência estatística: a freqüentista (ou clássica) e a Bayesiana. Para a abordagem clássica, probabilidades são limites de

freqüências de eventos observáveis. Nesta abordagem estamos preocupados não somente com o único vetor de observações que foi realmente feito, mas também com outros que poderiam ter sido feitos mas não foram. A abordagem Bayesiana reconhece que a probabilidade fornece uma descrição numérica do estado de conhecimento incompleto baseado em qualquer tipo de informação racional relevante disponível. Esta última abordagem tem sido crescentemente reconhecida como uma importante ferramenta de inferência estatística, já que pode ser usada para avaliar probabilidades tanto de hipóteses quanto de eventos observáveis, baseado somente na informação disponível.

O uso de *anteriores*⁵ não informativas e modelos lineares geralmente conduz a estimativas pontuais dos parâmetros e matrizes de covariâncias correspondentes que são essencialmente as mesmas que aquelas derivadas da estimação de máxima verossimilhança (ver Apêndice VIII). Entretanto, apesar de sua similaridade, é importante ressaltar a distinção entre estimadores clássicos e estimativas Bayesianas. Os primeiros são estatísticas e portanto têm uma distribuição de amostragem. Estimativas Bayesianas são baseadas na distribuição posterior que é sempre condicional ao valor da amostra observada. Embora estas possam ser vistas como funções das amostras observadas e deste modo comparadas numericamente com estimadores clássicos, o cientista ou engenheiro tipicamente observa apenas uma amostra e deseja fazer tantas inferências quanto possível com base somente nesta amostra.

Por outro lado, como será visto, correções para os efeitos sistemáticos são consideradas nos modelos físicos usados. A informação disponível sobre os valores destes parâmetros é baseada em conhecimento não estatístico. Deve-se notar que, em forte contraste com a estatística clássica, parâmetros são tratados como variáveis aleatórias no paradigma Bayesiano. Isto não é uma descrição de sua variabilidade (erros sistemáticos são tipicamente grandezas fixas desconhecidas), mas uma descrição da incerteza a respeito de seus valores ‘verdadeiros’. A abordagem de máxima verossimilhança tem fundamentos matemáticos bem estabelecidos na ausência de efeitos sistemáticos.

⁵ Os termos *anterior* e *a priori* não são sinônimos. Conhecimento *a priori* é aquele no qual se deve acreditar independentemente da experiência, e cobre as leis da lógica, matemática, e probabilidade. Conhecimento *anterior* cobre todo tipo de conhecimento que possamos ter antes de conduzir o experimento real sob consideração, e portanto inclui grande parte da experiência prévia que possa ser relevante para a probabilidade *anterior* (JEFFREYS, 1933). O termo *priori* muito usado pelos estatísticos no Brasil é aqui propositadamente evitado. Preferimos usar o termo *anterior*, mais de acordo com a prática atual na literatura. O termo é usado em itálico para diferenciá-lo de seu uso habitual no idioma.

A estatística Bayesiana tem sido crescentemente aplicada em ciência e tecnologia de medição. Uma teoria Bayesiana da incerteza de medição foi recentemente introduzida (WEISE, WÖGER, 1993). A metrologia tem sido vista como um exercício de inferência com base em informação incompleta (ESTLER, 1998). A abordagem Bayesiana foi aplicada na avaliação dos dados obtidos de medições repetidas de uma grandeza (LIRA, KYRIAZIS, 1999), com e sem informação adicionada sobre as variâncias ou limites de erro dos valores indicados, e na avaliação da incerteza padrão e da probabilidade de abrangência correspondente a um mensurando modelado como a soma de duas outras grandezas (LIRA, WÖGER, 2001). O método é aplicável à avaliação da estabilidade de padrões de medição mesmo quando uma pequena quantidade de dados está disponível (ROCHA, KYRIAZIS, 2004). Propostas de revisão do *Guia para a Expressão da Incerteza de Medição* (ISO, 1995), para torná-lo consistente sob o enfoque da estatística Bayesiana, têm sido sugeridas (KACKER, JONES, 2003).

No presente trabalho, a estatística Bayesiana é aplicada ao problema comum do ajuste de uma série de Fourier truncada a um conjunto de dados $\{(t_1, y_1) \dots (t_N, y_N)\}$ obtidos da digitalização da saída de um gerador de sinais, nos quais os valores dos instantes de tempo t_i são conhecidos com exatidão e cada leitura y_i do DVM está sujeita a ruído aditivo (KYRIAZIS, CAMPOS, 2004a, 2004b). O problema é estimar os parâmetros de ajuste e avaliar a incerteza associada com as estimativas. O modelo de ajuste é linear nos parâmetros, já que a frequência fundamental do sinal é suposta constante e conhecida.

As estimativas dos parâmetros de ajuste, não corrigidas para os efeitos sistemáticos, são derivadas diretamente das regras da teoria da probabilidade (JEFFREYS, 1961, JAYNES, 2003) tanto para sinais estacionários quanto não estacionários (como será visto, o ajuste de mínimos quadrados de uma série de Fourier truncada de três parâmetros fornece a melhor estimativa para sinais não estacionários). Estas estimativas são ótimas se a série temporal contém um sinal periódico de frequência única com ruído branco aditivo. Entretanto, tais estimativas apresentam as seguintes desvantagens: as operações matriciais tomam muito espaço de memória e tempo de computador, os elementos do vetor de parâmetros de ajuste são geralmente correlacionados e as estimativas são muito sensíveis à exatidão da frequência.

Dois projetos de experimentos ortogonais, que fornecem estimativas que não apresentam estas desvantagens, são também analisados. Um deles é tomar as leituras do

DVM com uma taxa de amostragem sincronizada com a frequência fundamental do sinal a ser analisado. Mostra-se que, sob esta condição, as melhores estimativas, tanto para sinais estacionários quanto não estacionários, coincidem com a transformada de Fourier discreta. O outro projeto de experimentos ortogonal é o algoritmo publicado por KYRIAZIS (2003) e KYRIAZIS, CAMPOS (2005). Com este último pode-se obter estimativas de exatidão elevada dos parâmetros de ajuste usando amostragem assíncrona. Ele fornece estimativas que se aproximam da transformada de Fourier discreta avaliada usando amostragem síncrona. Este projeto de experimentos é vantajoso em comparação com o anterior, pois dispensa o uso dos circuitos de sincronização entre o gerador e o DVM (embora apresente a desvantagem de ser mais lento). As condições suficientes para se considerar tais estimativas como a melhor estimativa dos parâmetros de ajuste são apresentadas. Expressões para as estimativas da variância do ruído são também derivadas.

Estimativas para as amplitudes e deslocamentos de fase dos harmônicos da série de Fourier truncada, corrigidas para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, são então derivadas supondo que estes projetos de experimentos sejam usados. As incertezas associadas com as amplitudes e ângulos de fase dos harmônicos da série de Fourier truncada são avaliadas. A avaliação de incerteza leva em conta os efeitos sistemáticos introduzidos por DVMs comerciais. Um critério é também fornecido para a escolha do número de funções harmônicas que melhor representa os dados.

I-4 Aplicações

Este problema de inferência tem muitas aplicações em ciência e tecnologia de medição. Algoritmos baseados em amostragem digital têm sido usados para a medição com exatidão dos parâmetros de sinais de tensão de baixa frequência amostrados por DVMs integradores de resolução elevada (POGLIANO, 1997, KYRIAZIS, 2003, KÜRTEH-IHLENFELD, MOHNS *et al.*, 2003). Na última década, atenção especial tem sido dada aos problemas relacionados à poluição harmônica, causada pelo número crescente de cargas não lineares conectadas às redes de distribuição. A indústria elétrica tem feito esforços para reduzir os níveis de harmônicos por meio da introdução de guias, práticas recomendadas e normas técnicas (IEEE, 1993, IEC, 1991).

Como conseqüência, analisadores de potência harmônica e medidores de energia elétrica capazes de realizar medições de qualidade de energia estão sendo

crescentemente usados para monitorar o estado da rede de energia elétrica. Analisadores de potência harmônica devem medir com exatidão tensões e correntes harmônicas. Devem também medir com exatidão os ângulos de fase dos harmônicos. Disto resultou a necessidade dos Institutos Nacionais de Metrologia fornecerem sistemas de calibração e rastreabilidade para as grandezas relacionadas com harmônicos medidas por estes instrumentos (ARSENEAU, FILIPSKY, 1995, SVENSSON, RYDLER, 1995). Poderia se tornar uma atividade essencial se as estratégias de cobrança (contas de energia elétrica) considerassem a poluição harmônica. Um debate está em curso no tocante à definição de novas grandezas capazes de fornecer informação sobre a alocação de responsabilidade pela distorção harmônica entre consumidores e concessionárias, e no tocante à implementação de métodos de medição relevantes (IEEE, 1996, 2000).

Pesquisa intensa tem sido realizada atualmente no que tange o desenvolvimento e a calibração de divisores de tensão e derivadores (*shunts*) de corrente com resposta plana em toda a faixa de frequência de interesse das medições de qualidade de energia (SO, ARSENEAU *et al.*, 2003, SO, ANGELO *et al.*, 2005). Estes são necessários para reduzir e converter as tensões e correntes relativamente elevadas para os níveis baixos de tensão exigidos pelas entradas de exatidão elevada dos DVMs. A disponibilidade de divisores de tensão e derivadores de corrente adequadamente calibrados contribuirá para aumentar a exatidão dos atuais sistemas de calibração de analisadores de potência harmônica.

O sistema de medição detalhado neste trabalho, publicado em KYRIAZIS, CAMPOS (2005), pode ser usado vantajosamente em quase qualquer tipo de aplicação de corrente alternada de baixa frequência onde dois (ou mais) sinais de tensão periódicos arbitrários medidos por dois (ou mais) DVMs devem ser comparados com relação à amplitude e ao deslocamento de fase dos harmônicos. Isto inclui a medição das grandezas: resistência, capacitância, indutância, perdas, indutância mútua, potência, energia elétrica, deslocamento de fase, e relações de transformação. Encontra também aplicações na calibração de instrumentos de medição e calibradores destas grandezas. Pode ser usado na calibração e verificação da especificação de geradores de sinais. Pode também ser usado no levantamento da resposta de amplificadores, filtros, atenuadores, divisores e sistemas em geral. Encontra possíveis aplicações na avaliação da linearidade de conversores A/D. É de grande utilidade na calibração de analisadores harmônicos. E em diversas outras aplicações na área da qualidade de energia elétrica. É também viável sua aplicação na medição de diversas grandezas não elétricas.

O sistema de medição aqui detalhado também será de grande valia para laboratórios secundários acreditados pelo Inmetro já que somente exige equipamentos disponíveis comercialmente.

I-5 Resultados experimentais

Mostra-se neste trabalho que DVMS integradores comerciais (GOECKE, 1989), de resolução elevada, podem ser usados para medir com exatidão os parâmetros dos harmônicos de sinais não senoidais na faixa de 10 V. A maior largura de banda está disponível nesta faixa de tensão, quando o amplificador C.C. de entrada está operando com ganho unitário. O percurso de entrada de C.C. permite uma resolução de amostragem mais elevada e é projetado para ruído extremamente baixo, *offset* baixo e exatidão de partes em 10^6 (GOECKE, 1989, CZENKUSCH, 1989). No modo de tensão contínua, o sinal de entrada é amostrado diretamente pelo conversor analógico-digital integrador (IADC), i.e., o circuito de amostragem-e-retenção é desativado.

Resultados experimentais usando o projeto de experimentos para amostragem assíncrona são apresentados. Mostra-se que é possível medir as amplitudes *em volts* de 64 harmônicos de sinais periódicos arbitrários de 60 Hz, baixo ruído e distorção harmônica total (THD) da ordem de 45% com uma incerteza de $13 \mu\text{V V}^{-1}$ relativa à fundamental, usando geradores de sinais de estabilidade elevada e DVMS comerciais de resolução elevada (KYRIAZIS, CAMPOS, 2005). Incertezas ainda menores podem ser obtidas para sinais de distorção menor do que 1%. As incertezas associadas com as estimativas dependem da estabilidade do sinal, do conteúdo harmônico, da variância do ruído e das especificações do DVM.

O algoritmo permite medir os parâmetros de sinais arbitrários de tensão com frequência fundamental de 2 Hz a 1 kHz. Pode-se medir com exatidão as amplitudes *em percentuais da fundamental* de um máximo de 269 harmônicos de um sinal de 60 Hz. Esta limitação é imposta pelo tempo de abertura mínimo dos IADCs usados nos DVMS comerciais atuais. À medida que aumenta o número de harmônicos, o intervalo entre amostras deve diminuir de modo a atender o teorema da amostragem. O tempo de abertura deve ser reduzido correspondentemente de forma a evitar erros de disparador (*trigger*) muito rápido. O tempo de abertura mínimo é de $1 \mu\text{s}$. O número máximo de harmônicos varia de acordo com o valor da frequência fundamental, mas um valor

aproximado pode ser obtido tendo-se em conta que o harmônico de maior frequência medido para um sinal de 60 Hz é de 16140 Hz.

O algoritmo baseado na transformada de Fourier discreta foi aplicado na medição da amplitude dos harmônicos de sinais periódicos arbitrários gerados por uma fonte comercial. As diferenças entre os valores computados e medidos sugerem que geradores de sinais de estabilidade elevada, sintetizados de forma digital, podem ser usados como padrões calculáveis de distorção harmônica com uma exatidão menor do que 6 partes em 10^5 relativa à fundamental. Estes geradores poderiam ser usados para prover uma biblioteca padronizada de sinais estáveis, de baixo ruído, com formas de onda lineares por partes programáveis, tendo harmônicos de amplitudes e ângulos de fase calculáveis. Eles poderiam ser úteis na calibração do módulo de amostragem digital interno da maioria dos sistemas de medição de harmônicos.

Mostra-se também que é possível medir o deslocamento de fase entre as componentes fundamentais de dois sinais periódicos arbitrários de baixa frequência, baixo ruído, e THD da ordem de 4%, com uma incerteza de 2,3 μ rad, usando geradores de sinais de estabilidade elevada e dois DVMS de resolução elevada em configuração mestre-escravo. Incertezas ainda menores podem ser obtidas para sinais de distorção menor do que 1%. As incertezas associadas com os deslocamentos de fase entre harmônicos dependem da estabilidade, do conteúdo harmônico, e da variância de ruído de cada sinal e são inversamente proporcionais às amplitudes dos harmônicos.

Uma comparação internacional foi feita entre o sistema de medição detalhado neste trabalho e o sistema de sintetização e amostragem digital síncrona do PTB construído por RAMM, G., MOSER, H. *et al.* (1999) e detalhado em KÜRTEH IHNLENFELD (2001a, 2001b). Os resultados da comparação confirmam experimentalmente o que havia sido adiantado em KYRIAZIS, CAMPOS (2004a, 2004b), isto é, que as estimativas obtidas pelo algoritmo de amostragem assíncrona se aproximam da transformada de Fourier discreta avaliada usando amostragem síncrona.

I-6 Organização

Este trabalho está organizado como segue. No Capítulo II, a inferência e a teoria de decisão Bayesiana são resumidas, o modelo do DVM integrador é apresentado, e as estimativas dos parâmetros de ajuste, não corrigidas para os efeitos sistemáticos introduzidos pelo DVM, são consideradas tanto para sinais estacionários quanto não

estacionários. Projetos de experimentos ortogonais são introduzidos para evitar as desvantagens das estimativas derivadas nas seções iniciais do capítulo. Estimativas das amplitudes e dos ângulos de fase dos harmônicos do sinal, corrigidas para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, baseadas nestes projetos de experimentos, são então apresentadas. Um critério é fornecido para a escolha do número de funções harmônicas que melhor representa os dados.

No Capítulo III, são discutidos os resultados experimentais obtidos com o algoritmo na medição de sinais periódicos arbitrários, com THD de 0,00035% a 61,8%, gerados por fontes comerciais. Os seguintes sinais foram medidos: (a) sinais senoidais quase puros, (b) sinal senoidal (versão em degraus), (c) sinal parabólico alternado, (d) sinal retificado em meia onda, (e) sinal de triac, e (f) sinal trapezoidal. Os valores medidos dos parâmetros dos harmônicos de cada sinal são comparados com valores teóricos correspondentes avaliados numericamente (pelo método descrito no Apêndice VI). As medições foram repetidas variando-se o número de funções harmônicas da série de Fourier truncada usada no ajuste, a fim de determinar o número ótimo de harmônicos para cada sinal. Vários gráficos e tabelas ilustram os resultados experimentais obtidos. Os resultados da comparação internacional também são discutidos neste capítulo. As conclusões são apresentadas no Capítulo IV e as referências são apresentadas a seguir.

Uma série de apêndices complementam e aprofundam o material apresentado nos capítulos. O autor desta tese elaborou uma versão do algoritmo de SWERLEIN (1991) em LabWindows CVI. O Apêndice I detalha a interface gráfica do programa. Uma listagem do programa-fonte é também fornecida e, acreditamos, será de grande valia para os que desejarem desenvolver um algoritmo similar ao descrito nesta tese. O Apêndice II deduz algumas expressões matemáticas usadas por SWERLEIN (1991) no desenvolvimento de seu algoritmo. O Apêndice III ilustra como o Princípio de Entropia Máxima pode ser usado na dedução de *anteriores* com base na informação disponível. O Apêndice IV mostra a interface gráfica do programa para medição das amplitudes e dos ângulos de fase dos harmônicos de sinais periódicos arbitrários elaborado pelo autor desta tese. O Apêndice V mostra resultados experimentais que confirmam a eficácia do algoritmo na ortogonalização da matriz do projeto. O Apêndice VI apresenta a listagem dos programas em LabWindows usados para gerar os sinais periódicos não senoidais analisados no Capítulo III. Neste apêndice, é também apresentado o método de cálculo dos coeficientes de Fourier destas formas de onda e a listagem dos programas em MATLAB usados para calculá-los. O Apêndice VII detalha a interface gráfica do

programa para medição do deslocamento de fase entre os harmônicos de dois sinais periódicos arbitrários elaborado pelo autor desta tese. O Apêndice VIII aborda o problema de inferência deste trabalho sob o ponto de vista da estatística clássica.

CAPÍTULO II

ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS BAYESIANA

II-1 Inferência e teoria de decisão Bayesiana

O problema de inferência na ciência da medição envolve os seguintes passos:

- (1) Uma variável aleatória é atribuída a cada uma das grandezas físicas (e parâmetros de modelo) envolvidas nas medições e na tarefa de avaliação de incertezas correspondente. Se há grandezas (ou parâmetros) bem conhecidas de modo que suas incertezas possam ser desprezadas, então elas são tratadas como constantes e removidas do conjunto de mensurandos em questão.
- (2) Estas variáveis aleatórias devem obedecer a todas as relações e restrições das grandezas físicas envolvidas. Um modelo de medição é portanto introduzido. Ele expressa e pondera a informação previamente disponível sobre os mensurandos, antes que quaisquer dados sejam obtidos de medições ou de outra forma.
- (3) A função de densidade de probabilidade (fdp) conjunta para mensurandos que foram avaliados previamente, expressando toda a informação sobre eles, é algumas vezes reportada. Esta é a *anterior* baseada nos dados. Entretanto, quase sempre há somente dados à mão que fornecem estimativas primárias dos valores dos mensurandos com incertezas associadas ou limites de erro. Se este é o caso, uma *anterior* pode ser deduzida usando, por exemplo, o Princípio de Entropia Máxima com estes dados como restrições conhecidas (Apêndice III).
- (4) Há situações nas quais os investigadores sabem pouco (ou desejam proceder como se soubessem pouco) sobre os mensurandos. Assim sendo, há necessidade de regras explícitas para selecionar *anteriores* que representem ignorância. O atendimento desta necessidade tem sido um aspecto difícil e controverso da abordagem Bayesiana à inferência. Entretanto, como a influência da *anterior* na forma da fdp posterior geralmente diminui à medida que o tamanho da amostra aumenta, isto não é motivo de preocupação para os problemas de estimação de grandes amostras estudados

aqui. Seguindo JAYNES (1968) e ZELLNER (1971), *anteriores* não informativas são usadas neste trabalho: uma *anterior* uniforme é usada para parâmetros de localização desconhecidos e uma *anterior* de Jeffreys (JEFFREYS, 1961) é usada para parâmetros de escala desconhecidos.

- (5) Se um novo experimento vai aumentar significativamente o conhecimento de um cientista ou engenheiro, então presumivelmente a verossimilhança dominará a *anterior*. Se este for o caso, então a *anterior* não precisa ser normalizável. A fim de determinar a verossimilhança, deve-se tentar ponderar sobre as razões físicas que fornecem os conjuntos de dados observados. Uma distribuição de amostragem, que descreve o conhecimento anterior sobre o ruído, é atribuída. A finalidade de se atribuir uma distribuição de amostragem ao ruído é definir a faixa das diferentes variações possíveis dos dados devido ao ruído que se permitirá na inferência, uma das quais será realmente realizada. Como a matriz de covariância desta distribuição não está geralmente disponível, esta é algumas vezes substituída por uma matriz de covariância diagonal com variância (global) de ruído desconhecida, se os mensurandos são do mesmo tipo e independentemente medidos sob condições de medição similares. A estimação da variância do ruído é de grande interesse. Ela indica quão bem os dados aparecem à luz do modelo, e pode ajudar alguém a decidir se deve tentar um novo modelo, controlar uma grandeza de influência ou mesmo construir um novo sistema de medição.
- (6) Informação de ruído e informação anterior são combinadas com o teorema de Bayes, i.e., $posterior \propto anterior \times verossimilhança$, assim obtendo a fdp posterior conjunta para todos os mensurandos. Esta fdp expressa toda a informação sobre os mensurandos que está contida na informação anterior e nos dados. Se alguém está interessado em um mensurando específico, os outros sendo “parâmetros irrelevantes”, a fdp posterior marginal é obtida integrando-se a fdp posterior conjunta sobre os parâmetros irrelevantes. Este é o fim do problema de inferência.

A fdp posterior fornece a informação mais completa e detalhada sobre os mensurandos desconhecidos, mas quase sempre se está interessado apenas na melhor estimativa dos valores dos mensurandos e nas incertezas associadas. Para avaliar a melhor estimativa que resume toda a informação da fdp posterior, é necessário aplicar a

teoria de decisão Bayesiana (LEE, 1989, ZELLNER, 1971). Para resolver o problema de decisão há outros três passos: (7) As decisões possíveis devem ser enumeradas. (8) Uma função de perda é associada a cada decisão. (9) A decisão que minimiza a perda esperada sobre a fdp posterior é tomada. Em ciência da medição, como uma função de perda quadrática é geralmente suposta, a esperança da fdp posterior é a melhor estimativa do mensurando. Tendo tomado esta decisão, a raiz quadrada da variância, i.e., o desvio padrão, descreve a dispersão típica da fdp em torno da esperança, e assim é a incerteza padrão associada com a melhor estimativa do mensurando.

A avaliação da esperança e da variância da fdp posterior (e também de intervalos de credibilidade com probabilidades de abrangência específicas) geralmente exige métodos computacionais intensivos (GAMERMAN, 1997, MIGON, GAMERMAN, 1999). Em todo caso, se o modelo de medição pode ser linearizado, a análise Bayesiana se reduz à aplicação das regras de aproximação adotadas pelo ISO (1995) (WÖGER, 1997, LIRA, 2002). Propostas têm sido feitas para se usar a estatística Bayesiana com o fim de tornar consistente o ISO (1995) (KACKER, JONES, 2003).

Para simplificar a notação, o mensurando, a variável aleatória atribuída ao mesmo, e seus valores numéricos são denotados pelo mesmo símbolo. Boa parte do texto deste capítulo foi publicada em KYRIAZIS (2004a, 2004b) e KYRIAZIS, CAMPOS (2004a, 2004b, 2004c, 2005).

II-2 Modelo do voltímetro digital integrador

Uma descrição resumida das especificações do DVM usado neste trabalho consta de STEVER (1989). O projeto do conversor A/D usado neste DVM é discutido em GOECKE (1989). Um dos requisitos do projeto deste DVM foi o desenvolvimento de um meio de calibrá-lo a partir de somente dois padrões de referência externos (GOEKE, SWERLEIN *et al.*, 1989). Como este DVM foi projetado para ser usado como o componente principal de sistemas de teste automatizados (sendo o principal limitador da produtividade dos mesmos), o instrumento não somente deveria ser capaz de tomar e transferir leituras em alta velocidade, mas também ter capacidade de se reconfigurar rapidamente quando da medição de vários parâmetros diferentes em rápida sucessão. Duas metas de projeto do DVM foram definidas: (a) o instrumento deveria ser capaz de se reconfigurar e tomar uma leitura 200 vezes por segundo e (b) tomar e transferir leituras (ou armazená-las internamente) a uma taxa de 100000 leituras por

segundo. O projeto de sistema adotado para o hardware e firmware do DVM com o fim de atingir tais metas está descrito em CEELY, RUSTICI (1989). A capacidade e as limitações do DVM usado neste trabalho são discutidas por CZENKUSCH (1989).

Como mostrado por SWERLEIN (1991), KYRIAZIS, SWERLEIN (2002) e KÜRTEH-IHLENFELD (2003), os estágios de entrada do DVM e a amostragem não ideal introduzem vários efeitos sistemáticos que precisam ser corrigidos. O DVM integrador pode ser modelado por

$$\kappa y(t) = \frac{1}{t_{\text{aper}}} \cdot \int_{t-t_{\text{aper}}/2}^{t+t_{\text{aper}}/2} \{ h_{\text{bw}}(\tau) * [s(\tau) + n(\tau)] \} d\tau \cdot \sum_i \delta(t - it_{\text{samp}}) \quad (\text{II-2-1})$$

onde o símbolo * denota convolução, $s(\tau)$ e $n(\tau)$ são, respectivamente, o sinal e o ruído branco aditivo presentes na entrada do DVM, $h_{\text{bw}}(\tau)$ é a resposta ao impulso dos estágios de entrada do DVM, t_{aper} é o tempo de abertura, t_{samp} é o intervalo de amostragem (maior do que t_{aper} para evitar erros de disparador muito rápido), $y(t)$ é o sinal de saída cujo valor no instante it_{samp} é a i -ésima leitura do DVM, e κ é a correção do erro do modo de tensão contínua do DVM. Supõe-se que o ruído de amostragem dos circuitos internos do DVM é desprezível em comparação com o ruído adicionado ao sinal. Supõe-se também que a contribuição de incerteza associada com a resolução de amplitude do IADC possa ser desprezada. Como as temporizações, tanto da amostragem quanto da medição de frequência, usam o mesmo *clock*, em princípio, a incerteza da base de tempo do DVM é invisível. As incertezas associadas com as grandezas temporais são também desprezadas, já que a inquietude (*jitter*) da temporização da amostragem e a distorção da base de tempo são supostas desprezíveis em comparação com o ruído superposto às amostras.

Supondo que o sinal seja uma forma de onda com frequência fundamental única f_0 , o modelo no domínio da frequência é

$$\kappa Y(f) = f_1 \cdot \sum_k H_{\text{int}}(f - kf_1) \cdot H_{\text{bw}}(f - kf_1) \cdot \left[\sum_j C_j \delta(f - jf_0 - kf_1) + N_0 \right] \quad (\text{II-2-2})$$

onde $\delta(\cdot)$ denota a função delta, $f_1 (= 1/t_{\text{samp}})$ é a frequência de amostragem, $Y(f)$ é a transformada de Fourier do sinal de saída, $H_{\text{int}}(f - kf_1)$ é a resposta de frequência do

IADC deslocada de kf_1 , $H_{bw}(f - kf_1)$ é a resposta de frequência dos estágios de entrada do DVM também deslocadas de kf_1 , N_0 é potência de ruído média por unidade de largura de banda, e C_j é o j -ésimo coeficiente da série de Fourier exponencial complexa que representa a forma de onda do sinal de entrada. Esta equação pode também ser escrita como

$$\begin{aligned} \kappa Y(f) = & f_1 \sum_k \sum_j H_{\text{int}}(jf_0) \cdot H_{\text{bw}}(jf_0) \cdot C_j \delta(f - jf_0 - kf_1) \\ & + N_0 f_1 \sum_k H_{\text{int}}(f - kf_1) \cdot H_{\text{bw}}(f - kf_1) \end{aligned} \quad (\text{II-2-3})$$

Retornando ao domínio do tempo, o modelo do DVM integrador é então

$$\kappa y(t) = \left\{ \sum_j |H_{\text{int}}(jf_0)| \cdot |H_{\text{bw}}(jf_0)| \cdot (A_j \cos 2\pi jf_0 t + B_j \text{sen } 2\pi jf_0 t) + e(t) \right\} \cdot \sum_i \delta(t - it_{\text{samp}}) \quad (\text{II-2-4})$$

onde A_j e B_j são os coeficientes da série de Fourier trigonométrica que representa a forma de onda do sinal de entrada e $e(t)$ é o ruído de banda limitada na saída do IADC.

Após ser aplicado aos terminais de entrada do DVM, o sinal é conduzido a um condicionador de sinal passivo. E após passar através deste atenuador passivo, o sinal é aplicado a um amplificador ativo. A resposta de frequência destes estágios de entrada é modelada como

$$k_{\text{bw}}(jf_0) = |H_{\text{bw}}(jf_0)|^{-1} = \left(1 + (jf_0/bw)^2 \right)^{1/2} \quad (\text{II-2-5})$$

onde bw é a largura de banda dos estágios de entrada cuja melhor estimativa bw_e e incerteza $u(bw_e)$ ($= 30\% bw_e$) são fornecidas pelo fabricante. A melhor estimativa de $k_{\text{bw}}(jf_0)$ e a incerteza associada (ISO, 1995) são

$$k_{\text{bwe}}(jf_0) = \left(1 + (jf_0/bw_e)^2 \right)^{1/2} \quad (\text{II-2-6a})$$

$$u(k_{\text{bwe}}(jf_0)) = \frac{(jf_0/bw_e)^2 \cdot u(bw_e)/bw_e}{\left[1 + (jf_0/bw_e)^2 \right]^{1/2}} \quad (\text{II-2-6b})$$

Supondo $bw_e \gg jf_0$ (aproximação válida para sinais de baixa distorção) e expandindo (5) em uma série de Taylor,

$$k_{\text{bwe}}(jf_0) = 1 + (jf_0/bw_e)^2 / 2 \quad (\text{II-2-6c})$$

$$u(k_{\text{bwe}}(jf_0)) = (jf_0/bw_e)^2 \cdot u(bw_e)/bw_e \quad (\text{II-2-6d})$$

Finalmente, o sinal é aplicado ao IADC. No domínio do tempo, a resposta é uma média do sinal de entrada em um intervalo de tempo equivalente ao tempo de abertura especificado t_{aper} . Claramente, de (1), a leitura do IADC é a saída de um sistema cuja resposta ao impulso é um pulso retangular de duração t_{aper} . A correção da resposta de frequência do IADC para o j -ésimo harmônico do sinal é, portanto,

$$k_{\text{int}}(jf_0) = |H_{\text{int}}(jf_0)|^{-1} = \left(\frac{\text{sen } \pi j f_0 t_{\text{aper}}}{\pi j f_0 t_{\text{aper}}} \right)^{-1} \quad (\text{II-2-7})$$

A melhor estimativa de $k_{\text{int}}(jf_0)$ e a incerteza associada (ISO, 1995) são

$$k_{\text{int e}}(jf_0) = \left(\frac{\text{sen } \pi j f_0 t_{\text{aper e}}}{\pi j f_0 t_{\text{aper e}}} \right)^{-1} \quad (\text{II-2-8a})$$

$$u(k_{\text{int e}}(jf_0)) = \frac{(\pi j f_0)^2 t_{\text{aper e}} \cos \pi j f_0 t_{\text{aper e}} - \pi j f_0 \text{sen } \pi j f_0 t_{\text{aper e}}}{\text{sen}^2 \pi j f_0 t_{\text{aper e}}} \cdot u(t_{\text{aper e}}) \quad (\text{II-2-8b})$$

onde a incerteza $u(t_{\text{aper e}})$ associada com a estimativa do tempo de abertura $t_{\text{aper e}}$ é avaliada da resolução de base de tempo (100 ns) fornecida pelo fabricante. Supondo $\pi j f_0 t_{\text{aper}} \ll 1$ (aproximação válida para sinais de baixa distorção) e expandindo (7) em uma série de Taylor,

$$k_{\text{int e}}(jf_0) = 1 + (\pi j f_0 t_{\text{aper e}})^2 / 3! \quad (\text{II-2-8c})$$

$$u(k_{\text{int e}}(jf_0)) = \frac{1}{3} (\pi j f_0 t_{\text{aper e}})^2 \cdot u(t_{\text{aper e}}) / t_{\text{aper e}} \quad (\text{II-2-8d})$$

O IADC usa uma referência interna de tensão contínua que tem de ser periodicamente calibrada com um padrão de referência de tensão contínua externo. Esta referência é calibrada no Inmetro com uma incerteza padrão de $1 \mu\text{V V}^{-1}$, por meio de um potenciômetro de exatidão elevada rastreável a um sistema de reprodução do Volt baseado no efeito Josephson (AFONSO, TÓTH *et al.*, 2000). Os valores do certificado de calibração são usados na correção do resultado do algoritmo. A correção do erro do

modo de tensão contínua do DVM pode ser modelada como $\kappa = k_{dc}k_Lk_G$, onde k_{dc} é a correção do erro listado em um certificado de calibração (a estimativa da correção k_{dce} é obtida do certificado com uma incerteza $u(k_{dce})$), k_G é a correção do erro de ganho do IADC para tempos de abertura menores do que 1 s e k_L é a correção da linearidade do instrumento (estes erros estão definidos em MITRA (1998)). O fabricante estabelece os limites de erro de linearidade $[-c, +c]$ para cada faixa de tensão e período de calibração. A exatidão básica de 24 h é escolhida neste trabalho. Esta exatidão é baseada em um tempo de abertura equivalente ou maior do que 1 s e é degradada para tempos de abertura menores. Os limites de erro de ganho $[-d, +d]$ são também fornecidos pelo fabricante. A melhor estimativa de κ e a incerteza associada são

$$\kappa_e = k_{dce} \quad (\text{II-2-9a})$$

$$u(\kappa_e) = \left[u^2(k_{dce}) + k_{dce}^2 (c^2 + d^2) / 3 \right]^{1/2} \quad (\text{II-2-9b})$$

Para o DVM usado neste trabalho, o limite de erro d foi modelado como (SWERLEIN, 1991)

$$\begin{aligned} d &= \min(0,002 / t_{\text{aper}}, 30) \mu V / V, & t_{\text{aper}} &\geq 100 \mu s \\ d &= 10 + 0,0002 / t_{\text{aper}} \mu V / V, & 1 \mu s &< t_{\text{aper}} < 100 \mu s \end{aligned} \quad (\text{II-2-10})$$

Como a resolução de amplitude do IADC decresce com o tempo de abertura, este último deve ser selecionado de modo a preservar uma resolução mínima de 6½ dígitos (21 bits) para que a contribuição de incerteza associada com a resolução de amplitude possa ser considerada desprezível.

II-3 Modelo linear de ajuste para sinais estacionários

Um total de n trens de N amostras uniformes em instantes de tempo $t_i, i = 0, \dots, N-1$, são tomados retardados um do outro por um intervalo de tempo t_D . A série temporal a ser considerada contém um sinal periódico estacionário $f(t)$ com ruído aditivo. Um sinal é considerado estacionário se os parâmetros de ajuste são os mesmos para cada trem de amostras. De (II-2-4), supõe-se que cada trem possa ser modelado por

$$\begin{aligned} \kappa y_{ik} &= f(t_i + kt_D) + e_{ik} \\ &= \sum_{j=1}^m k_{\text{bw}}^{-1}(jf_0) k_{\text{int}}^{-1}(jf_0) \{ A_j \cos 2\pi j f_0 (t_i + kt_D) + B_j \text{sen } 2\pi j f_0 (t_i + kt_D) \} + e_{ik} \end{aligned} \quad (\text{II-3-1})$$

onde y_{ik} ($= y(t_{ik})$) é a i -ésima leitura do DVM no k -ésimo trem ($k = 0, \dots, n-1$), A_j e B_j são parâmetros de ajuste desconhecidos corrigidos para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, jf_0 é o j -ésimo harmônico da frequência fundamental constante conhecida f_0 , m é o número de harmônicos especificados da série de Fourier truncada, e e_{ik} ($= e(t_{ik})$) é o i -ésimo valor do ruído na saída do IADC no k -ésimo trem (Este termo de ruído agora inclui tanto uma parte “aleatória” devido ao ruído de banda limitada na saída do IADC e uma parte sistemática devido ao truncamento da série de Fourier. É importante notar que tudo que a teoria de probabilidade não pode ajustar ao modelo será considerado como ruído). O modelo supõe que o conjunto de dados tem um valor médio nulo (qualquer valor médio não nulo foi subtraído dos dados). Em notação matricial,

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{x} + \mathbf{e}_k, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (\text{II-3-2})$$

onde $\mathbf{y}_k = (y_{1k}, \dots, y_{Nk})'$ é o vetor de dados no k -ésimo trem, \mathbf{W}_k é a matriz $N \times 2m$ conhecida com (i, j) -ésimo elemento $\cos 2\pi j f_0 (t_i + kt_D)$ para $j = 1, \dots, m$ e $\text{sen } 2\pi(j-m)f_0(t_i + kt_D)$ para $j = m+1, \dots, 2m$, $\mathbf{x} = (\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_m, \underline{B}_1, \dots, \underline{B}_m)'$, com $\underline{A}_j = A_j/k_{\text{bw}}(jf_0)k_{\text{int}}(jf_0)\kappa$ e $\underline{B}_j = B_j/k_{\text{bw}}(jf_0)k_{\text{int}}(jf_0)\kappa$, é o vetor de parâmetros de ajuste não corrigido para os efeitos sistemáticos, e $\mathbf{e}_k = (e_{1k}, \dots, e_{Nk})'$ é o vetor dos termos de ruído na saída do IADC no k -ésimo trem.

Supõe-se que os elementos de \mathbf{e}_k sejam normalmente e independentemente distribuídos, cada um com esperança nula e variância comum desconhecida ϕ^{-1} ; isto é, $E[\mathbf{e}_k] = 0$ and $E[\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k'] = \phi^{-1} \mathbf{I}_N$, onde \mathbf{I}_N é uma matriz identidade de ordem N . O raciocínio embutido nesta suposição é apresentado a seguir. Supõe-se que ruído branco aditivo esteja presente na entrada do DVM. Como os estágios de entrada e o IADC podem ser considerados um sistema linear invariante no tempo, a saída do IADC contém ruído aditivo normalmente distribuído (PAPOULIS, 1991) (isto não é válido quando a resolução de amplitude do IADC é muito baixa, tornando o sistema não linear e alterando o modelo de probabilidade atribuído ao ruído). Para simplificar a análise, a função de transferência do sistema é aproximada por uma função de transferência

idealizada que tem uma magnitude que é plana dentro de sua banda de passagem e zero fora desta banda (PEEBLES, 1993). A largura de banda de ruído equivalente do IADC é $1/2t_{\text{aper}}$. Como esta é muito menor do que bw_e , a contribuição da largura de banda dos estágios de entrada do DVM pode ser desprezada e a largura de banda de ruído equivalente resultante pode ser aproximada por $1/2t_{\text{aper}}$. O período de amostragem é $t_{\text{samp}} = 1/f_s$, onde $f_s/2$ é uma frequência arbitrária maior do que qualquer uma que ocorra no espectro de frequência do sinal (sem *aliasing*). Como $f_s/2 < 1/2t_{\text{aper}}$ (veja seção II-2), o espectro de ruído se estende uniformemente sobre todas as frequências até $f_s/2$, e assim as amostras de ruído não são correlacionadas. Como os elementos de \mathbf{e}_k são normalmente distribuídos e não correlacionados, eles são também independentemente distribuídos (WHALEN, 1971). Isto é apenas aproximadamente válido para a função de transferência não idealizada do sistema.

Com as suposições acima, a distribuição de amostragem para os elementos de \mathbf{y}_k , dados \mathbf{W}_k , \mathbf{x} , e ϕ , é

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{W}_k, \mathbf{x}, \phi) \propto \phi^{N/2} \exp\left\{-\frac{\phi}{2}(\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x})'(\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x})\right\} \quad (\text{II-3-3})$$

Supondo que ϕ é o mesmo em todos os trens de amostras, a distribuição de amostragem conjunta para os elementos de \mathbf{y}_k de todos os n trens é

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y} | \mathbf{W}, \mathbf{x}, \phi) &\propto \phi^{nN/2} \exp\left\{-\frac{\phi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x})'(\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x})\right\} \\ &\propto \phi^{nN/2} \exp\left\{-\frac{\phi}{2} \left[v_1 s^2 + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})' \mathbf{M}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right]\right\}, \end{aligned} \quad (\text{II-3-4})$$

onde \mathbf{y} e \mathbf{W} são notações compactas para $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{n-1}$ e $\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_{n-1}$, respectivamente, $v_1 = nN - 2m$,

$$\mathbf{M} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{W}_k' \mathbf{W}_k \quad (\text{II-3-5})$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{W}_k' \mathbf{y}_k \quad (\text{II-3-6})$$

$$\begin{aligned}
v_1 s^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}})' (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \{ \mathbf{y}'_k \mathbf{y}_k - \mathbf{y}'_k \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}} \}
\end{aligned} \tag{II-3-7}$$

Uma *anterior* não informativa é suposta na análise do modelo de regressão linear múltipla considerando os elementos de \mathbf{x} e $\ln \phi$ independentemente e uniformemente distribuídos (JAYNES, 1968, ZELLNER, 1971); isto é,

$$p(\mathbf{x}, \phi) \propto \phi^{-1}, \tag{II-3-8}$$

com $-\infty < A_j < \infty$, $-\infty < B_j < \infty$, para $j = 1, \dots, m$, e $0 < \phi < \infty$.

Combinando (4) e (8), a fdp posterior conjunta para os parâmetros \mathbf{x} e ϕ é

$$p(\mathbf{x}, \phi | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \phi^{nN/2-1} \exp \left\{ -\frac{\phi}{2} \left[v_1 s^2 + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})' \mathbf{M}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right] \right\} \tag{II-3-9}$$

que pode ser fatorada em um produto de dois termos: a fdp posterior condicional para \mathbf{x} , dado ϕ [i.e., $p(\mathbf{x} | \phi, \mathbf{y}, \mathbf{W})$], a saber, uma fdp normal generalizada de dimensão $2m$, e a fdp posterior marginal para ϕ , isto é

$$p(\phi | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \phi^{v_1/2-1} \exp(-\phi v_1 s^2 / 2), \quad 0 < \phi < \infty \tag{II-3-10}$$

Esta é uma fdp gama (MIGON, GAMERMAN, 1999). Ela também pode ser obtida integrando (9) sobre todos os elementos de \mathbf{x} .

Integrando (9) com relação a ϕ , a fdp posterior marginal para os elementos de \mathbf{x} é

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \left[v_1 s^2 + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})' \mathbf{M}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \right]^{-nN/2} \tag{II-3-11}$$

Esta é uma fdp *t*-Student generalizada com v_1 graus de liberdade (MIGON, GAMERMAN, 1999). A fdp posterior marginal para um único elemento de \mathbf{x} pode ser obtida de (11) integrando com relação a todos os outros elementos de \mathbf{x} (ZELLNER, 1971), isto é,

$$p((\mathbf{x})_j | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \left\{ v_1 + [(\mathbf{x})_j - (\hat{\mathbf{x}})_j]^2 / s (\mathbf{M}^{-1})_{jj}^{1/2} \right\}^{-(v_1+1)/2} \tag{II-3-12}$$

onde $j = 1, \dots, 2m$ e os símbolos $(\cdot)_j$ e $(\cdot)_{jj}$ denotam o j -ésimo e o (j, j) -ésimo elementos, respectivamente. Esta é uma fdp t -Student com v_1 graus de liberdade (MIGON, GAMERMAN, 1999).

Das expressões para a esperança e variância da fdp t -Student e da fdp gama (MIGON, GAMERMAN, 1999), segue que as melhores estimativas dos elementos do vetor de parâmetros de ajuste, não corrigidos para os efeitos sistemáticos, e da variância de ruído na saída do IADC são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_e &= \hat{\mathbf{x}}, & v_1 &> 1 \\ u^2((\mathbf{x}_e)_j) &= v_1 s^2 (\mathbf{M}^{-1})_{jj} / (v_1 - 2), & v_1 &> 2 \end{aligned} \quad (\text{II-3-13})$$

e

$$\begin{aligned} \phi_e^{-1} &= v_1 s^2 / (v_1 - 2) & v_1 &> 2 \\ u^2(\phi_e^{-1}) &= 2v_1^2 s^4 / (v_1 - 2)^2 (v_1 - 4) & v_1 &> 4 \end{aligned} \quad (\text{II-3-14})$$

O comportamento assintótico das fdps posteriores quando o tamanho da amostra nN é grande deve ser considerado. A fdp posterior marginal para os elementos de \mathbf{x} é *aproximadamente*

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2s_1^2} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})' \mathbf{M} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\right\} \quad (\text{II-3-15})$$

A fdp posterior marginal para um único elemento de \mathbf{x} é *aproximadamente*

$$p((\mathbf{x})_j | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2s_1^2 (\mathbf{M}^{-1})_{jj}} [(\mathbf{x})_j - (\hat{\mathbf{x}})_j]^2\right\} \quad (\text{II-3-16})$$

onde

$$s_1^2 = \frac{1}{nN} \sum_{k=0}^{n-1} \{\mathbf{y}'_k \mathbf{y}_k - \mathbf{y}'_k \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}}\} \quad (\text{II-3-17})$$

As estimativas assintóticas dos elementos do vetor de parâmetros de ajuste, não corrigidos para os efeitos sistemáticos, e da variância de ruído na saída do IADC são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{ea}} &= \hat{\mathbf{x}}, \\ u^2 \left((\mathbf{x}_{\text{ea}})_j \right) &= s_1^2 (\mathbf{M}^{-1})_{jj} \end{aligned} \quad (\text{II-3-18})$$

e

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ea}}^{-1} &= s_1^2 \\ u^2 \left(\phi_{\text{ea}}^{-1} \right) &= 2s_1^4 / nN \end{aligned} \quad (\text{II-3-19})$$

II-4 Modelo linear de ajuste para sinais não estacionários

A série temporal a ser considerada contém agora um sinal periódico não estacionário $g(t)$ com ruído aditivo. O sinal é não estacionário no seguinte sentido: cada k -ésimo trem de amostras tem um vetor de parâmetros de ajuste \mathbf{x}_k diferente. Supõe-se que cada trem possa ser modelado por

$$\begin{aligned} \kappa y_{ik} &= g(t_i + kt_D) + e_{ik} \\ &= \sum_{j=1}^m k_{\text{bw}}^{-1}(jf_0) k_{\text{int}}^{-1}(jf_0) \left\{ C_{jk} \cos 2\pi jf_0(t_i + kt_D) + D_{jk} \text{sen } 2\pi jf_0(t_i + kt_D) \right\} + e_{ik} \end{aligned} \quad (\text{II-4-1})$$

onde C_{jk} e D_{jk} são parâmetros desconhecidos no k -ésimo trem de amostras, corrigidos para todos os efeitos sistemáticos conhecidos. Em notação matricial,

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{e}_k, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (\text{II-4-2})$$

onde $\mathbf{x}_k = (\underline{C}_{1k}, \dots, \underline{C}_{mk}, \underline{D}_{1k}, \dots, \underline{D}_{mk})'$, com $\underline{C}_{jk} = C_{jk}/k_{\text{bw}}(jf_0)k_{\text{int}}(jf_0)\kappa$ e $\underline{D}_{jk} = D_{jk}/k_{\text{bw}}(jf_0)k_{\text{int}}(jf_0)\kappa$, é o vetor de parâmetros de ajuste no k -ésimo trem de amostras não corrigido para os efeitos sistemáticos.

Com as suposições acima, a distribuição de amostragem conjunta para os elementos de \mathbf{y}_k , dados \mathbf{W}_k , \mathbf{x}_k , e ϕ , é

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{W}_k, \mathbf{x}_k, \phi) \propto \phi^{N/2} \exp \left\{ -\frac{\phi}{2} (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x}_k)' (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x}_k) \right\} \quad (\text{II-4-3})$$

e, supondo-se que ϕ é o mesmo para todos os trens de amostras, a distribuição de amostragem conjunta para os elementos de \mathbf{y}_k de todos os n trens é

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{y} | \mathbf{W}, \mathbf{x}, \phi) &\propto \phi^{nN/2} \exp\left\{-\frac{\phi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x}_k)' (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x}_k)\right\} \\
&\propto \phi^{nN/2} \exp\left\{-\frac{\phi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[v_2 s_k^2 + (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)' \mathbf{F}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) \right]\right\},
\end{aligned} \tag{II-4-4}$$

onde \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{W} são notações compactas para $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$, $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{n-1}$ e $\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_{n-1}$, respectivamente, $v_2 = N - 2m$,

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{W}_k' \mathbf{W}_k \tag{II-4-5}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{W}_k' \mathbf{y}_k \tag{II-4-6}$$

$$\begin{aligned}
v_2 s_k^2 &= (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}}_k)' (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}}_k) \\
&= \mathbf{y}_k' \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_k' \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}}_k
\end{aligned} \tag{II-4-7}$$

Uma *anterior* não informativa (II-3-8) é suposta novamente, e combinando com (4), a fdp posterior conjunta para os parâmetros \mathbf{x} e ϕ é

$$p(\mathbf{x}, \phi | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \phi^{nN/2-1} \exp\left\{-\frac{\phi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[v_2 s_k^2 + (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)' \mathbf{F}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k) \right]\right\} \tag{II-4-8}$$

que pode ser fatorado em um produto de dois termos: a fdp posterior condicional para \mathbf{x} , dado ϕ [i.e., $p(\mathbf{x} | \phi, \mathbf{y}, \mathbf{W})$], a saber, uma fdp normal generalizada de dimensão $2mn$, e a fdp posterior marginal para ϕ , isto é,

$$p(\phi | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \phi^{nv_2/2-1} \exp\left(-\frac{\phi v_2}{2} \sum_{k=0}^{n-1} s_k^2\right), \quad 0 < \phi < \infty \tag{II-4-9}$$

Esta distribuição gama pode também ser obtida integrando (8) sobre todos os elementos de \mathbf{x} .

Fatorando $p(\mathbf{x} | \phi, \mathbf{y}, \mathbf{W})$ em um produto de $p(\mathbf{x}_k | \phi, \mathbf{y}, \mathbf{W})$ termos, a fdp posterior condicional para cada \mathbf{x}_k , dado ϕ , é

$$p(\mathbf{x}_k | \phi, \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \phi^{2m} \exp\left\{-\frac{\phi}{2} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)' \mathbf{F}_k (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k)\right\} \tag{II-4-10}$$

É interessante estimar a média \mathbf{z} dos vetores de parâmetros de ajuste sobre todos os trens de amostras. A fdp posterior condicional para \mathbf{z} , dado ϕ , pode ser obtida de

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{z} | \phi, \mathbf{y}, \mathbf{W}) &= p((\mathbf{x}_1/n) | \phi, \mathbf{y}, \mathbf{W}) * \dots * p((\mathbf{x}_n/n) | \phi, \mathbf{y}, \mathbf{W}) \\
&\propto \phi^{2m} \exp\left\{-\frac{n\phi}{2} (\mathbf{z} - \langle \hat{\mathbf{x}}_k \rangle)' \langle \mathbf{F}_k^{-1} \rangle^{-1} (\mathbf{z} - \langle \hat{\mathbf{x}}_k \rangle)\right\}
\end{aligned} \tag{II-4-11}$$

onde o símbolo * denota convolução e o símbolo $\langle \cdot \rangle$ denota média sobre n termos.

Para se obter a fdp posterior de \mathbf{z} , pode-se notar que a fdp posterior conjunta para \mathbf{z} e ϕ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{z}, \phi | \mathbf{y}, \mathbf{W}) &= p(\mathbf{z} | \phi, \mathbf{y}, \mathbf{W}) p(\phi | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \\
&\propto \phi^{(nv_2+2m)/2-1} \exp\left\{-\frac{n\phi}{2} \left[v_2 \langle s_k^2 \rangle + (\mathbf{z} - \langle \hat{\mathbf{x}}_k \rangle)' \langle \mathbf{F}_k^{-1} \rangle^{-1} (\mathbf{z} - \langle \hat{\mathbf{x}}_k \rangle) \right]\right\}
\end{aligned} \tag{II-4-12}$$

e integrando (12) sobre ϕ , a fdp posterior para \mathbf{z} é

$$p(\mathbf{z} | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \left[nv_2 \langle s_k^2 \rangle + (\mathbf{z} - \langle \hat{\mathbf{x}}_k \rangle)' \left(\langle \mathbf{F}_k^{-1} \rangle / n \right)^{-1} (\mathbf{z} - \langle \hat{\mathbf{x}}_k \rangle) \right]^{-(nv_2+2m)/2} \tag{II-4-13}$$

Esta é uma fdp t -Student generalizada com nv_2 graus de liberdade. A fdp posterior marginal para um único elemento de \mathbf{z} pode ser obtida de (13) integrando com relação a todos os outros elementos de \mathbf{z} (ZELLNER, 1971), isto é,

$$p((\mathbf{z})_j | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \left\{ nv_2 + n \left[(\mathbf{z})_j - \langle \hat{\mathbf{x}}_k \rangle_j \right]^2 / \left[\langle s_k^2 \rangle \langle \mathbf{F}_k^{-1} \rangle_{jj} \right] \right\}^{-(nv_2+1)/2}, \quad j = 1, \dots, 2m \tag{II-4-14}$$

onde o símbolo $(\cdot)_j$ denota o j -ésimo elemento e os símbolos $\langle \cdot \rangle_j$ e $\langle \cdot \rangle_{jj}$ denotam o j -ésimo e o (j, j) -ésimo elementos da média sobre os n termos, respectivamente. Esta é uma fdp t -Student com nv_2 graus de liberdade.

Das expressões para a esperança e variância da fdp t -Student e da fdp gama (MIGON, GAMERMAN, 1999), segue que as melhores estimativas dos elementos do vetor médio de parâmetros de ajuste, não corrigido para os efeitos sistemáticos, e da variância do ruído na saída do IADC são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{z}_e &= \langle \hat{\mathbf{x}}_k \rangle, & nv_2 &> 1 \\
u^2((\mathbf{z}_e)_j) &= v_2 \langle s_k^2 \rangle \langle \mathbf{F}_k^{-1} \rangle_{jj} / (nv_2 - 2), & nv_2 &> 2
\end{aligned} \tag{II-4-15}$$

e

$$\begin{aligned}\phi_e^{-1} &= nv_2 \langle s_k^2 \rangle / (nv_2 - 2) & nv_2 > 2 \\ u^2(\phi_e^{-1}) &= 2n^2 v_2^2 \langle s_k^2 \rangle^2 / (nv_2 - 2)^2 (nv_2 - 4) & nv_2 > 4\end{aligned}\quad (\text{II-4-16})$$

O comportamento assintótico das fdps posteriores quando o tamanho da amostra nN é grande deve ser considerado. A fdp posterior marginal para os elementos de \mathbf{z} é *aproximadamente*

$$p(\mathbf{z} | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \exp\left\{-\frac{n}{2s_2^2} (\mathbf{z} - \langle \hat{\mathbf{x}}_k \rangle)' \langle \mathbf{F}_k^{-1} \rangle^{-1} (\mathbf{z} - \langle \hat{\mathbf{x}}_k \rangle)\right\} \quad (\text{II-4-17})$$

A fdp posterior marginal para um único elemento de \mathbf{z} é *aproximadamente*

$$p((\mathbf{z})_j | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \exp\left\{-\frac{n}{2s_2^2 \langle \mathbf{F}_k^{-1} \rangle_{jj}} [(\mathbf{z})_j - \langle \hat{\mathbf{x}}_k \rangle_j]^2\right\} \quad (\text{II-4-18})$$

onde

$$s_2^2 = \frac{1}{nN} \sum_{k=0}^{n-1} \{\mathbf{y}'_k \mathbf{y}_k - \mathbf{y}'_k \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}}_k\} \quad (\text{II-4-19})$$

As estimativas assintóticas dos elementos do vetor de parâmetros de ajuste, não corrigidos para os efeitos sistemáticos, e da variância de ruído na saída do IADC são, respectivamente,

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{\text{ea}} &= \langle \hat{\mathbf{x}}_k \rangle, \\ u^2((\mathbf{z}_{\text{ea}})_j) &= s_2^2 \langle \mathbf{F}_k^{-1} \rangle_{jj} / n\end{aligned}\quad (\text{II-4-20})$$

e

$$\begin{aligned}\phi_{\text{ea}}^{-1} &= s_2^2 \\ u^2(\phi_{\text{ea}}^{-1}) &= 2s_2^4 / nN\end{aligned}\quad (\text{II-4-21})$$

II-5 Amostragem síncrona

As estimativas dos parâmetros de ajuste, não corrigidas para os efeitos sistemáticos, para sinais estacionários e não estacionários, respectivamente (II-3-22) e (II-4-15), são ótimas se as condições suficientes seguintes são satisfeitas: (a) o sinal contém uma única frequência, (b) a frequência do sinal é estacionária, (c) a frequência do sinal é conhecida com exatidão, (d) não há componente C.C. nos dados, (e) a amostragem é uniforme e não há *aliasing*, (f) o ruído adicionado ao sinal é branco, (g) o ruído de amostragem do DVM é desprezível em comparação com o ruído adicionado ao sinal, (h) a variância do ruído na saída do IADC é a mesma em todos os trens de amostras, (i) a incerteza associada com as grandezas temporais pode ser desprezada, (j) o IADC tem uma resolução de amplitude elevada, (k) não há nenhuma informação anterior sobre os valores dos parâmetros de ajuste e da variância de ruído, e (l) a função de perda é quadrática.

Estas estimativas têm as desvantagens seguintes: (i) as operações matriciais tomam muito tempo e espaço de memória de computador, (ii) os elementos de \mathbf{x} são geralmente correlacionados (o mesmo é verdade para os elementos de \mathbf{z}), e (iii) as estimativas são tão sensíveis à exatidão da frequência que estimação não linear de mínimos quadrados de quatro parâmetros é algumas vezes adotada (POGLIANO, 1997). Um projeto de experimentos que resulta em estimativas que não apresentam essas desvantagens será discutido na seção II-6. Outro método a ser considerado abaixo é sincronizar a taxa de amostragem com a frequência fundamental do sinal.

Se $t_i = i/N_T f_0$ e $t_D = M_T/f_0$, onde N_T é o número de amostras por período e M_T é o número de períodos em um trem de amostras, i.e. $N = N_T M_T$, pode-se facilmente mostrar que as colunas de \mathbf{W}_k são ortogonais e que suas normas euclidianas são iguais a $(N/2)^{1/2}$. Portanto, cada \mathbf{F}_k é diagonal com todos os $2m$ elementos diagonais iguais a $N/2$. As fdfs posteriores marginais para os elementos de \mathbf{x} e \mathbf{z} tornam-se, respectivamente,

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \left\{ s_0^2 + \frac{nN}{2} \sum_{j=1}^{2m} \left((\mathbf{x})_j - (\mathbf{x}_e)_j \right)^2 \right\}^{-nN/2} \quad (\text{II-5-1})$$

$$p(\mathbf{z} | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \left\{ s_0^2 + \frac{nN}{2} \sum_{j=1}^{2m} \left((\mathbf{z})_j - (\mathbf{z}_e)_j \right)^2 \right\}^{-(nN/2 + 2m)/2} \quad (\text{II-5-2})$$

onde

$$\mathbf{x}_e = \mathbf{z}_e = \frac{2}{nN} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{W}'_k \mathbf{y}_k \quad (\text{II-5-3})$$

$$s_0^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{y}'_k \mathbf{y}_k - \frac{nN}{2} \mathbf{x}'_e \mathbf{x}_e \quad (\text{II-5-4})$$

As melhores estimativas dos parâmetros de ajuste, não corrigidas para os efeitos sistemáticos, tanto para sinais estacionários quanto não estacionários, coincidem com a média das transformadas de Fourier discretas sobre todos os trens de amostras. Em cada trem, os dados são expandidos em um conjunto de vetores ortonormais. Os coeficientes de expansão em cada trem são apenas as projeções dos dados nos vetores de expansão para aquele trem. A estimativa resultante é uma média destas projeções sobre todos os trens de amostras.

Entretanto, a matriz de covariância associada com as estimativas para sinais estacionários e não estacionários diferem (embora elas sejam quase equivalentes quando $N \gg 2m$), isto é,

$$\mathbf{\Omega}_x = u^2 \left((\mathbf{x}_e)_j \right) \cdot \mathbf{I}_{2m} = \frac{2s_0^2}{nN(v_1 - 2)} \cdot \mathbf{I}_{2m}, \quad v_1 > 2 \quad (\text{II-5-5})$$

$$\mathbf{\Omega}_z = u^2 \left((\mathbf{z}_e)_j \right) \cdot \mathbf{I}_{2m} = \frac{2s_0^2}{nN(nv_2 - 2)} \cdot \mathbf{I}_{2m}, \quad nv_2 > 2 \quad (\text{II-5-6})$$

onde \mathbf{I}_{2m} é a matriz identidade de ordem $2m$. Assim, os elementos de \mathbf{x} não são correlacionados. O mesmo é verdade para os elementos de \mathbf{z} .

A estimativa da variância de ruído na saída do IADC para sinais estacionários se torna

$$\begin{aligned} \phi_e^{-1} &= s_0^2 / (v_1 - 2) & v_1 > 2 \\ u^2(\phi_e^{-1}) &= 2s_0^4 / (v_1 - 2)^2 (v_1 - 4) & v_1 > 4 \end{aligned} \quad (\text{II-5-7})$$

e a estimativa correspondente para sinais não estacionários é

$$\begin{aligned} \phi_e^{-1} &= s_0^2 / (nv_2 - 2) & nv_2 > 2 \\ u^2(\phi_e^{-1}) &= 2s_0^4 / (nv_2 - 2)^2 (nv_2 - 4) & nv_2 > 4 \end{aligned} \quad (\text{II-5-8})$$

Elas são quase equivalentes quando $N \gg 2m$.

A estimativa dos parâmetros de ajuste linear de funções senoidais para sinais estacionários e não estacionários, a saber, (3), é ótima se todas as condições listadas no começo desta seção (exceto (c)) e as adicionais seguintes são satisfeitas: (m) a taxa de amostragem é um múltiplo inteiro da frequência do sinal e (n) os trens de amostras são tomados retardados um do outro por um número inteiro de períodos de sinal.

O comportamento assintótico das fdps posteriores quando o tamanho da amostra nN é grande deve ser considerado. A fdp posterior marginal para os elementos de \mathbf{x} (ou \mathbf{z}) é *aproximadamente*

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \exp \left\{ -\frac{n^2 N^2}{4s_0^2} \sum_{j=1}^{2m} \left((\mathbf{x})_j - (\mathbf{x}_e)_j \right)^2 \right\} \quad (\text{II-5-9})$$

A fdp posterior marginal para um único elemento de \mathbf{x} (ou \mathbf{z}) é *aproximadamente*

$$p((\mathbf{x})_j | \mathbf{y}, \mathbf{W}) \propto \exp \left\{ -\frac{n^2 N^2}{4s_0^2} \left[(\mathbf{x})_j - (\mathbf{x}_e)_j \right]^2 \right\} \quad (\text{II-5-10})$$

As estimativas assintóticas dos elementos do vetor de parâmetros de ajuste, não corrigidos para os efeitos sistemáticos, e da variância de ruído na saída do IADC são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{ea}} = \mathbf{z}_{\text{ea}} = \mathbf{x}_e = \mathbf{z}_e, \\ u^2 \left((\mathbf{x}_{\text{ea}})_j \right) = 2s_0^2 / n^2 N^2 \end{aligned} \quad (\text{II-5-11})$$

e

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ea}}^{-1} = s_0^2 / nN \\ u^2 \left(\phi_{\text{ea}}^{-1} \right) = 2s_0^4 / n^3 N^3 \end{aligned} \quad (\text{II-5-12})$$

Vários métodos de sincronização entre a taxa de amostragem e a frequência fundamental do sinal têm sido empregados em sistemas de medição (FERRERO, OTTOBONI, 1992, SVENSSON, RYDLER, 1995, ARSENEAU, FILIPSKI, 1995, RAMM, MOSER *et al.*, 1999). A sintetização e medição síncronas de uma tensão senoidal usando a frequência de *clock* interna de um DVM de resolução elevada permite a determinação de tensões C.A. com incertezas da ordem de $1 \mu\text{V V}^{-1}$. Vários detalhes técnicos sobre a sintetização e amostragem síncronas são discutidos em KÜRTEN-

IHLENFELD (2001) e KÜRTEH-IHLENFELD, MOHNS *et al.* (2003). Comparações extensivas com os conversores térmicos primários do PTB mostram que o sistema de amostragem síncrono e a técnica de transferência térmica C.A.-C.C. concordam dentro de aproximadamente $\pm 0,5 \mu\text{V V}^{-1}$ para formas de onda senoidais quase puras (KÜRTEH-IHLENFELD, MOHNS, 2004).

II-6 Amostragem assíncrona

Um projeto de experimentos baseado em KYRIAZIS (2003) para obter estimativas dos parâmetros de ajuste com exatidão elevada usando amostragem assíncrona é apresentado nesta seção. Este projeto de experimentos é vantajoso em comparação com o anterior, pois dispensa o uso dos circuitos de sincronização entre o gerador e o voltímetro digital.

Supõe-se que o nível de ruído seja suficientemente baixo de modo que a frequência fundamental possa ser conhecida do número de cruzamentos pelo nulo⁶ do sinal. A frequência fundamental é usada em um algoritmo que calcula o intervalo de amostragem t_{samp} e o número de amostras N em um trem de modo que $N \cdot t_{\text{samp}}$ se aproxime de um número inteiro de períodos do sinal e t_{samp} atenda o teorema da amostragem para o número especificado de harmônicos da forma de onda. Em geral, a amostragem sobre um número inteiro de períodos somente pode ser realizada com uma resolução de metade da quantização da base de tempo do DVM. O erro de truncamento residual é minimizado pelo procedimento descrito a seguir desenvolvido por SWERLEIN (1991).

Um circuito de disparador de nível (interno ao DVM) é usado para estabelecer uma referência temporal (o cruzamento pelo nulo é tipicamente usado, mas qualquer outro ponto pode ser selecionado). Um circuito de temporização, ou base de tempo, é usado para selecionar retardos a partir deste ponto de referência. O circuito de temporização espera por um cruzamento pelo nulo⁷ (com inclinação positiva) do sinal e toma um trem de N amostras (cobrindo um número de períodos do sinal). Este é o trem de amostras de número zero. Após terminar o processamento deste trem de amostras, a base de tempo é configurada para esperar um intervalo de tempo t_D a partir de um

⁶ Recentemente, o algoritmo foi alterado de modo que a frequência fundamental do sinal pode ser medida por técnicas de cruzamento de um nível C.C. arbitrário selecionado pelo usuário.

⁷ Ou cruzamento de um nível C.C. arbitrário selecionado pelo usuário.

cruzamento pelo nulo⁷ com inclinação positiva e então iniciar a amostragem. Este é o trem de amostras de número um. Após terminar o processamento do k -ésimo trem de amostras, a base de tempo é configurada para esperar um intervalo de tempo kt_D a partir de um cruzamento pelo nulo⁷ com inclinação positiva e então iniciar a amostragem. E assim sucessivamente até o trem de amostras de número $n-1$ (SWERLEIN, 1991). Será mostrado no que se segue que, com este projeto de experimento, as estimativas (II-3-22) e (II-4-15) se aproximam de (II-5-3).

Se o DVM tivesse uma resolução de base de tempo infinita, seria possível fazer $N \cdot t_{\text{samp}}$ exatamente igual a um número inteiro de períodos do sinal e t_D exatamente igual a $1/nf_0$. Neste caso, para cada trem de amostras, $\mathbf{F}_k = (N/2)\mathbf{I}_{2m}$, onde \mathbf{I}_{2m} é a matriz identidade de ordem $2m$, e as estimativas (II-3-22) and (II-4-15) coincidiriam com (II-5-3). Entretanto, devido à resolução de base de tempo finita, \mathbf{F}_k é uma matriz $2m \times 2m$ simétrica não diagonal, i.e.,

$$\mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} cC_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ cC_{1m} & \cdots & cC_{mm} & \cdot & \cdot & \cdot \\ cS_{11} & \cdots & cS_{m1} & sS_{11} & \cdot & \cdot \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdot \\ cS_{1m} & \cdots & cS_{mm} & sS_{1m} & \cdots & sS_{mm} \end{pmatrix} \quad (\text{II-6-1})$$

Para N grande e t_{samp} pequeno comparado com o período do sinal, os elementos de \mathbf{F}_0 ($\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_k$ para $k = 0$) podem ser aproximados por

$$\begin{aligned} cC_{jj} &= \sum_{i=1}^N \cos^2 j\omega_0 t_i \approx \int_{t_0}^{t_0 + Nt_{\text{samp}}} \cos^2 j\omega_0 t \, dt = \frac{N}{2}(1 - \delta_1) \\ sS_{jj} &= \sum_{i=1}^N \sin^2 j\omega_0 t_i \approx \int_{t_0}^{t_0 + Nt_{\text{samp}}} \sin^2 j\omega_0 t \, dt = \frac{N}{2}(1 + \delta_1) \\ cS_{jj} &= \sum_{i=1}^N \cos j\omega_0 t_i \sin j\omega_0 t_i \approx \int_{t_0}^{t_0 + Nt_{\text{samp}}} \cos j\omega_0 t \sin j\omega_0 t \, dt = \frac{N\delta_2}{2} \end{aligned} \quad j = 1, \dots, m$$

(II-6-2a)

$$\begin{aligned}
cs_{jl} &= \sum_{i=1}^N \cos j\omega_0 t_i \operatorname{sen} l\omega_0 t_i \approx \int_{t_0}^{t_0+Nt_{\text{samp}}} \cos j\omega_0 t \operatorname{sen} l\omega_0 t \, dt = \frac{N\delta_3}{2} \\
cc_{jl} &= \sum_{i=1}^N \cos j\omega_0 t_i \cos l\omega_0 t_i \approx \int_{t_0}^{t_0+Nt_{\text{samp}}} \cos j\omega_0 t \cos l\omega_0 t \, dt = \frac{N\delta_4}{2} \quad j, l = 1, \dots, m; j \neq l \\
ss_{jl} &= \sum_{i=1}^N \operatorname{sen} j\omega_0 t_i \operatorname{sen} l\omega_0 t_i \approx \int_{t_0}^{t_0+Nt_{\text{samp}}} \operatorname{sen} j\omega_0 t \operatorname{sen} l\omega_0 t \, dt = \frac{N\delta_5}{2}
\end{aligned}
\tag{II-6-2b}$$

onde t_0 é o instante inicial de amostragem, $\omega_0 = 2\pi f_0$ e

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= (1/\eta_1) \cdot [(\cos 2j\omega_0 Nt_{\text{samp}} - 1)\operatorname{sen} 2j\omega_0 t_0 - \operatorname{sen} 2j\omega_0 Nt_{\text{samp}} \cos 2j\omega_0 t_0] \\
\delta_2 &= (1/\eta_1) \cdot [(\cos 2j\omega_0 Nt_{\text{samp}} - 1)\cos 2j\omega_0 t_0 - \operatorname{sen} 2j\omega_0 Nt_{\text{samp}} \operatorname{sen} 2j\omega_0 t_0] \\
\delta_3 &= (1/\eta_2) \cdot [(jG + lH - j) \cdot P + (jH + lG - l) \cdot Q + (jL - lM) \cdot S + (jM - lL) \cdot T] \\
\delta_4 &= (1/\eta_2) \cdot [-(jG + lH - j) \cdot T + (jH + lG - l) \cdot S - (jL - lM) \cdot Q + (jM - lL) \cdot P] \\
\delta_5 &= (1/\eta_2) \cdot [-(lG + jH - l) \cdot T + (lH + jG - j) \cdot S - (lL - jM) \cdot Q + (lM - jL) \cdot P]
\end{aligned}
\tag{II-6-3a}$$

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= 2j\omega_0 Nt_{\text{samp}} \\
\eta_2 &= (j-l)(j+l)\omega_0 Nt_{\text{samp}} \\
G &= \cos j\omega_0 Nt_{\text{samp}} \cos l\omega_0 Nt_{\text{samp}} \\
H &= \operatorname{sen} j\omega_0 Nt_{\text{samp}} \operatorname{sen} l\omega_0 Nt_{\text{samp}} \\
L &= \cos j\omega_0 Nt_{\text{samp}} \operatorname{sen} l\omega_0 Nt_{\text{samp}} \\
M &= \operatorname{sen} j\omega_0 Nt_{\text{samp}} \cos l\omega_0 Nt_{\text{samp}} \\
P &= \cos j\omega_0 t_0 \cos l\omega_0 t_0 \\
Q &= \operatorname{sen} j\omega_0 t_0 \operatorname{sen} l\omega_0 t_0 \\
S &= \cos j\omega_0 t_0 \operatorname{sen} l\omega_0 t_0 \\
T &= \operatorname{sen} j\omega_0 t_0 \cos l\omega_0 t_0
\end{aligned}
\tag{II-6-3b}$$

Na prática, a aproximação acima é válida somente para sinais de muito baixa frequência. Entretanto, ela fornece as expressões simplificadas (3) que serão usadas nos argumentos que seguem. O leitor pode verificar que as expressões exatas conduzirão a conclusões similares.

A matriz de erro $\Lambda_0 = \mathbf{F}_0 - (N/2)\mathbf{I}_{2m}$, onde \mathbf{I}_{2m} é a matriz identidade de ordem $2m$, poderia ser anulada mediante o aumento do tempo de medição $N \cdot t_{\text{samp}}$. Isto aumentaria os denominadores em (3a). O período de amostragem deve ser tão grande

quanto permitido pela largura de banda exigida, que pode ser definida como mf_0 , onde m é o número mínimo de harmônicos da forma de onda sem *aliasing*.

A fim de manter o tempo de medição num valor razoável, o algoritmo tenta fazer $N \cdot t_{\text{samp}}$ quase igual a um número inteiro de períodos, de modo que os numeradores de (3a) se tornam quase nulos. Na prática, entretanto, devido à resolução q ($= 100$ ns) da base de tempo do IADC, para um dado número de amostras, o tempo de amostragem total pode diferir de até Nq de um número inteiro de períodos. Esta diferença alcança um máximo quando $Nq = t_{\text{samp}}$, uma vez que é sempre possível escolher N de modo que a diferença entre o tempo de amostragem total e um número inteiro de períodos seja menor do que t_{samp} . O termo de erro diagonal δ_1 em cada trem de amostras é limitado pelo menor de $q/4t_{\text{samp}}$ ou $1/4N$ (SWERLEIN, 1991).

Para decrescer os termos de erro ainda mais, o algoritmo também cancela a ondulação que depende do instante inicial de amostragem t_0 em (3). Se escolhermos t_D quase igual a $1/nf_0$ e a média dos \mathbf{F}_k sobre todos os trens de amostras é avaliada, as matrizes de erro “congeladas” $\mathbf{\Lambda}_k$ (para cada valor de kt_D) serão canceladas. Assim, a média dos \mathbf{F}_k sobre todos os trens de amostra se aproxima de $(N/2)\mathbf{I}_{2m}$ e portanto a estimativa (II-3-22) se aproxima de (II-5-3). Como as frequências de ondulação nos termos de erro diagonais δ_1 são $2jf_0$, o teorema de amostragem implica em um valor máximo para t_D de $1/4mf_0$, i.e., um número mínimo de $4m$ trens de amostras, se a forma de onda deve ser amostrada sobre um período. Pode-se avaliar um limite de erro R_T devido à resolução da base de tempo do IADC como $R_T = \|\langle \mathbf{\Lambda}_k \rangle\|$, onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana e $\langle \cdot \rangle$ denota a média sobre todos os trens de amostras, e obter que R_T é menor do que uma parte em 10^7 . O Apêndice V mostra como a matriz do projeto $\langle \mathbf{F}_k \rangle$ se torna quase ortogonal com o uso deste algoritmo. Tais resultados foram colhidos durante a medição de sinais senoidais quase puros (seção III-1) usando a estimativa (II-6-6). O algoritmo foi modificado para armazenar a matriz \mathbf{F}_k de cada trem de amostras e por fim calcular a matriz média $\langle \mathbf{F}_k \rangle$. Verificou-se também que para um sinal de 60 Hz com $m = 42$, todos os elementos da matriz $\langle \mathbf{\Lambda}_k \rangle$ eram menores do que 4 (quatro) partes em 10^8 , com a maioria sendo uma ordem de grandeza menor do que isto. Estes resultados, entretanto, não foram registrados no apêndice por limitações de espaço.

Portanto, a melhor estimativa dos parâmetros de ajuste para sinais estacionários, avaliada usando amostragem assíncrona (e este algoritmo), se aproxima da média das transformadas de Fourier discretas sobre todos os trens de amostras, avaliada usando

amostragem síncrona. É ainda necessário mostrar que a estimativa (II-4-15) para sinais não estacionários também se aproximará de (II-5-3). Para ver isso, é melhor usar o conceito de matriz de rotação.

Tomar trens de amostras retardados de kt_D de um cruzamento pelo nulo⁸ é o mesmo que substituir $\mathbf{W}_0\mathbf{A}_{k\theta}$ no lugar de \mathbf{W}_k em (II-3-2) e (II-4-2), onde $\mathbf{W}_0 = \mathbf{W}_k$ para $k = 0$ e $\mathbf{A}_{k\theta}$ é a matriz de rotação de ordem $2m$. Por exemplo, a matriz de rotação de ordem 4 é

$$\mathbf{A}_{k\theta} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi f_0 kt_D & 0 & -\sin 2\pi f_0 kt_D & 0 \\ 0 & \cos 4\pi f_0 kt_D & 0 & -\sin 4\pi f_0 kt_D \\ \sin 2\pi f_0 kt_D & 0 & \cos 2\pi f_0 kt_D & 0 \\ 0 & \sin 4\pi f_0 kt_D & 0 & \cos 4\pi f_0 kt_D \end{bmatrix} \quad (\text{II-6-4})$$

Substituindo-se \mathbf{W}_k por $\mathbf{W}_0\mathbf{A}_{k\theta}$ em (II-3-22) e (II-4-15), e usando o algoritmo descrito acima, as estimativas dos parâmetros de ajuste para sinais estacionários e não estacionários tornam-se, respectivamente,

$$\mathbf{x}_e \approx \frac{2}{nN} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}'_{k\theta} \mathbf{W}'_0 \mathbf{y}_k \quad (\text{II-6-5})$$

$$\mathbf{z}_e = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}'_{k\theta} \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{W}'_0 \mathbf{y}_k \quad (\text{II-6-6})$$

A estimativa (5) é preferível para sinais muito distorcidos ($m > 10$) por consumir muito menos tempo de computador e espaço de memória.

As estimativas (II-5-3) e (5) são equivalentes. (É interessante, entretanto, notar a diferença entre (II-5-3) e (5). Cada \mathbf{W}_k em (5) é uma matriz retangular com colunas não ortogonais e há um erro na transformada de Fourier discreta avaliada a cada trem de amostras. Entretanto, estes erros são cancelados quando a média sobre todos os trens de amostras é computada (KYRIAZIS, 2003). Por outro lado, cada \mathbf{W}_k avaliado com amostragem síncrona é uma matriz retangular com colunas ortogonais e não há erro na transformada de Fourier discreta avaliada a cada trem de amostras).

Também, nenhuma diferença razoável entre as estimativas (5) e (6) pôde ser detectada experimentalmente (veja Capítulo III). Portanto, ambas as estimativas (II-3-

⁸ Ou de um cruzamento de um nível C.C. arbitrário selecionado pelo usuário.

22) e (II-4-15) se aproximam de (II-5-3) quando o algoritmo descrito acima para amostragem assíncrona é usado.

As estimativas (5) e (6) são ótimas se todas as condições listadas na seção anterior (exceto (c), (m) e (n)) e as adicionais seguintes são satisfeitas: (o) o sinal tem cruzamentos pelo nulo⁹ de tensão, (p) o nível de ruído é suficientemente baixo de modo que a frequência fundamental pode ser conhecida do número de cruzamentos pelo nulo⁹ do sinal, (q) um número mínimo de $4m$ trens de amostras é usado, (r) cada k -ésimo trem de amostras é tomado retardado de $k/4mf_0$ de um cruzamento pelo nulo⁹ do sinal, e (s) a duração de cada trem de amostras é aproximadamente igual a um número inteiro de períodos do sinal.

As matrizes de covariância associadas com a estimativa (5) para sinais estacionários e com a estimativa (6) para sinais não estacionários são, respectivamente,

$$\mathbf{\Omega}_x \approx u^2 \left((\mathbf{x}_e)_j \right) \cdot \mathbf{I}_{2m} = \frac{2s_0^2}{nN(v_1 - 2)} \cdot \mathbf{I}_{2m}, \quad v_1 > 2 \quad (\text{II-6-7})$$

$$\mathbf{\Omega}_z \approx u^2 \left((\mathbf{z}_e)_j \right) \cdot \mathbf{I}_{2m} = \frac{2v_2 \langle s_k^2 \rangle}{N(nv_2 - 2)} \cdot \mathbf{I}_{2m}, \quad nv_2 > 2 \quad (\text{II-6-8})$$

onde

$$s_0^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{y}'_k \mathbf{y}_k - \frac{nN}{2} \mathbf{x}'_e \mathbf{x}_e \quad (\text{II-6-9})$$

$$v_2 \langle s_k^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \mathbf{y}'_k \mathbf{y}_k - \mathbf{y}'_k \mathbf{W}_0 \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{W}'_0 \mathbf{y}_k \right\} \quad (\text{II-6-10})$$

Verificou-se experimentalmente para sinais de baixa distorção (veja Capítulo III) que, embora as matrizes de covariância (7) e (8) difiram de menos de uma parte em 10^6 para formas de onda estáveis, os elementos diagonais de (7) eram aproximadamente duas vezes maiores do que os correspondentes de (8). A incerteza associada com a estimativa (6) é menor. Deve-se notar que a classificação entre sinais estacionários e não estacionários é um tanto subjetiva. Os sinais na saída de um gerador de sinais estável podem ser considerados não estacionários em aplicações onde uma exatidão elevada seja exigida.

⁹ Ou de um nível C.C. arbitrário selecionado pelo usuário.

A melhor estimativa da variância do ruído na saída do IADC para sinais estacionários se torna

$$\begin{aligned}\phi_e^{-1} &= s_0^2 / (v_1 - 2) & v_1 > 2 \\ u^2(\phi_e^{-1}) &= 2s_0^4 / (v_1 - 2)^2 (v_1 - 4) & v_1 > 4\end{aligned}\tag{II-6-11}$$

onde s_0 é avaliado de (9). A estimativa correspondente para sinais não estacionários é obtida de (II-4-16) e (10).

A análise acima supõe que a frequência real do sinal amostrado seja estável e conhecida (a exatidão da base de tempo não é importante). A sensibilidade de ambas as estimativas (5) e (6) com respeito a exatidão da frequência foi avaliada inserindo erros numericamente na entrada dos algoritmos e verificando a saída dos mesmos com relação a qualquer variação. Nenhuma diferença foi detectada na estimativa para o valor eficaz da amplitude em volts do j -ésimo harmônico de um sinal estacionário, corrigido para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, quando os erros de medição de frequência estavam dentro de $\pm 10^{-5}$. Além disso, nenhuma diferença foi detectada na estimativa para a amplitude do j -ésimo harmônico relativa à melhor estimativa da fundamental quando os erros estavam dentro de $\pm 10^{-4}$. Uma incerteza dentro destes limites é facilmente obtida para frequências acima de 10 Hz, quando a frequência é medida do número de cruzamentos pelo nulo¹⁰ do sinal. De qualquer modo, a variância de ruído aumenta com o aumento do erro da frequência, fornecendo estimativas de incerteza mais conservadoras.

A estabilidade dos resultados obtidos pelo algoritmo desenvolvido por KYRIAZIS (2003) foi a mesma que aquela relatada por SWERLEIN (1991). As diferenças observadas entre os resultados de ambos os algoritmos estão dentro da estabilidade do conjunto gerador-voltímetro. Por outro lado, comparações extensivas com os conversores térmicos primários do PTB mostram que o algoritmo descrito em SWERLEIN (1991) e a técnica de transferência térmica C.A.-C.C. concordam dentro de $1 \mu\text{V V}^{-1}$ com uma incerteza de $2,5 \mu\text{V V}^{-1}$ para formas de onda senoidais quase puras na faixa de frequência de 10 Hz to 100 Hz (LAIZ, 1999, KAMPIK, LAIZ *et al.*, 2000).

¹⁰ Ou de um nível C.C. arbitrário selecionado pelo usuário.

II-7 Estimativas das amplitudes dos harmônicos

Três estratégias **W** foram apresentadas neste trabalho. A primeira está descrita nas seções II-3 e II-4. Ela supõe que n trens de N amostras uniformes são tomados retardados um do outro de t_D , e ponto. A segunda, descrita na seção II-5, supõe que os n trens de N amostras uniformes são tomados de forma sincronizada com o gerador de sinal. Na terceira, descrita na seção II-6, Nt_{samp} aproxima um número inteiro de períodos do sinal e o nível do disparador interno do DVM é usado para iniciar cada trem de amostras retardado de kt_D ($k = 0, \dots, n-1$) de um cruzamento pelo nulo¹⁰ do sinal, onde t_D aproxima $1/nf_0$. Tanto a segunda quanto a terceira estratégias são projetos ortogonais.

Nas duas seções seguintes, obtemos as estimativas das amplitudes dos harmônicos de duas maneiras estreitamente relacionadas. Na primeira, tais estimativas são obtidas usando tão-somente as aproximações do ISO (1995). Na segunda, usamos inferência Bayesiana para obter a fdp posterior das amplitudes dos harmônicos.

II-7-1 Uso das aproximações do ISO (1995)

Supondo-se que a segunda ou a terceira estratégia seja usada, o valor eficaz da amplitude do j -ésimo harmônico de um sinal estacionário, corrigido para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, é

$$V_j = \kappa k_{\text{bw}}(jf_0) k_{\text{int}}(jf_0) \cdot \left[\left((\mathbf{x})_j^2 + (\mathbf{x})_{m+j}^2 \right) / 2 \right]^{1/2} \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{II-7-1-1})$$

A incerteza associada com a sincronização (para amostragem síncrona) e aquela associada com o limite de erro R_T (para amostragem assíncrona) são supostas desprezíveis. Para sinais não estacionários, é somente necessário substituir \mathbf{x} por \mathbf{z} em (1). Os elementos de \mathbf{x} não são correlacionados. O mesmo é verdadeiro para os elementos de \mathbf{z} . As correções são supostas não correlacionadas.

Expandindo (1) em uma série de Taylor de *dois* termos em torno de $(\mathbf{x}_e)_j$ e $(\mathbf{x}_e)_{m+j}$, descartando o resíduo, e tomando o valor esperado de ambos os lados, a melhor

estimativa do valor eficaz da amplitude do j -ésimo harmônico de um sinal estacionário, corrigido para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, é¹¹

$$V_{je} = k_{dce} k_{bwe}(jf_0) k_{inte}(jf_0) \cdot \left[\left((\mathbf{x}_e)_j^2 + (\mathbf{x}_e)_{m+j}^2 \right) / 2 \right]^{1/2} \quad (\text{II-7-1-2a})$$

Expandindo (1) em uma série de Taylor de *um* termo em torno de $(\mathbf{x}_e)_j$ e $(\mathbf{x}_e)_{m+j}$, descartando o resíduo, e tomando a variância de ambos os lados, a incerteza associada com a estimativa (2a) é (ISO, 1995)

$$u^2(V_{je}) = V_{je}^2 \cdot \left[\frac{u^2(\kappa_e)}{k_{dce}^2} + \frac{u^2(k_{bwe}(jf_0))}{k_{bwe}^2(jf_0)} + \frac{u^2(k_{inte}(jf_0))}{k_{inte}^2(jf_0)} \right] + \frac{u^2((\mathbf{x}_e)_j)}{2} \quad (\text{II-7-1-2b})$$

onde a contribuição da variância do ruído é em geral dominante para $j = 2, \dots, m$. Para sinais não estacionários, é somente necessário substituir \mathbf{x}_e por \mathbf{z}_e em (2). A incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude d_{je} do j -ésimo harmônico ($j = 2, \dots, m$) relativa à melhor estimativa da fundamental V_{1e} é (ISO, 1995)

$$u(d_{je}) = \left\{ d_j^2 \left[\frac{u^2(k_{bwe}(jf_0))}{k_{bwe}^2(jf_0)} + \frac{u^2(k_{bwe}(f_0))}{k_{bwe}^2(f_0)} + \frac{u^2(k_{inte}(jf_0))}{k_{inte}^2(jf_0)} + \frac{u^2(k_{inte}(f_0))}{k_{inte}^2(f_0)} \right] + (1 + d_j^2) \cdot u^2((\mathbf{x}_e)_j) / 2V_{1e}^2 \right\}^{1/2} \quad (\text{II-7-1-3})$$

onde novamente a contribuição da variância do ruído é em geral dominante.

A melhor estimativa do valor eficaz (sem a componente C.C.) é então obtida de

$$V_{ACRMS\ e} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m V_{je}^2} \quad (\text{II-7-1-4})$$

Supondo que as correções sejam não correlacionadas e que o sinal seja uma forma de onda senoidal de baixa distorção, a incerteza relativa associada com o valor eficaz é (ISO, 1995)

¹¹ Esta aproximação é válida somente se a amplitude do harmônico é relativamente grande em comparação com desvio padrão do ruído na saída do IADC (ver seção II-7-2).

$$\frac{u(V_{\text{ACRMS } e})}{V_{\text{ACRMS } e}} = \left(\frac{u^2(\kappa_e)}{k_{\text{dce}}^2} + \frac{u^2(k_{\text{bwe}}(jf_0))}{k_{\text{bwe}}^2(jf_0)} + \frac{u^2((\mathbf{x}_e)_j)}{2nNV_{\text{ACRMS } e}^2} + \sum_{j=1}^m d_{je}^4 \frac{u^2(k_{\text{inte}}(jf_0))}{k_{\text{inte}}^2(jf_0)} \right)^{1/2} \quad (\text{II-7-1-5})$$

É importante ressaltar que esta expressão é somente válida para senóides quase puras. Uma expressão genérica válida para formas de onda não senoidais pode ser deduzida de ISO (1995). Valores numéricos para cada contribuição de incerteza (válidas para senóides quase puras) estão listados em KYRIAZIS, SWERLEIN (2002).

II-7-2 Obtenção da fdp posterior das amplitudes dos harmônicos

As expressões da seção anterior foram obtidas usando as aproximações do ISO (1995). Veremos nesta seção como obter a fdp posterior que descreve o estado de conhecimento das amplitudes dos harmônicos, não corrigidas para os efeitos sistemáticos, com base na informação disponível.

Notando-se que $\mathbf{x}_e = (A_{1e}, \dots, A_{me}, B_{1e}, \dots, B_{me})'$, podemos escrever a aproximação assintótica (II-5-9) como

$$p(\mathbf{x} | \mathbf{x}_e) \propto \exp \left\{ -\frac{n^2 N^2}{4s_0^2} \sum_{j=1}^m \left[(A_j - A_{je})^2 + (B_j - B_{je})^2 \right] \right\} \quad (\text{II-7-2-1})$$

Portanto, a fdp conjunta para A_j e B_j , dados A_{je} e B_{je} , é

$$p(A_j, B_j | A_{je}, B_{je}) \propto \exp \left\{ -\frac{n^2 N^2}{4s_0^2} \left[(A_j - A_{je})^2 + (B_j - B_{je})^2 \right] \right\} \quad (\text{II-7-2-2})$$

Introduzindo as coordenadas polares \mathbf{r} e $\boldsymbol{\theta}$, em vez de \mathbf{x} , isto é,

$$(\mathbf{r})_j = (A_j^2 + B_j^2)^{1/2} \quad (\text{II-7-2-3a})$$

$$(\boldsymbol{\theta})_j = \text{tg}^{-1}[B_j/A_j], \quad (\text{II-7-2-3b})$$

onde o símbolo $(\cdot)_j$ denota o j -ésimo elemento, e inserindo o Jacobiano, a fdp conjunta para $(\mathbf{r})_j$ e $(\boldsymbol{\theta})_j$, dados A_{je} e B_{je} , se torna

$$p(\mathbf{r})_j, (\boldsymbol{\theta})_j | A_{je}, B_{je} \propto (\mathbf{r})_j \exp \left\{ -\frac{n^2 N^2}{4s_0^2} \left[(\mathbf{r})_j^2 + A_{je}^2 + B_{je}^2 - 2(\mathbf{r})_j A_{je} \cos((\boldsymbol{\theta})_j) - 2(\mathbf{r})_j B_{je} \sin((\boldsymbol{\theta})_j) \right] \right\} \quad (\text{II-7-2-4})$$

Introduzindo as coordenadas polares $(\mathbf{r}_e)_j$ e $(\boldsymbol{\theta}_e)_j$, em vez de A_{je} e B_{je} , isto é,

$$(\mathbf{r}_e)_j = (A_{je}^2 + B_{je}^2)^{1/2} \quad (\text{II-7-2-5a})$$

$$(\boldsymbol{\theta}_e)_j = \text{tg}^{-1} [B_{je} / A_{je}], \quad (\text{II-7-2-5b})$$

a fdp conjunta para $(\mathbf{r})_j$ e $(\boldsymbol{\theta})_j$, dados $(\mathbf{r}_e)_j$ e $(\boldsymbol{\theta}_e)_j$, é

$$p(\mathbf{r})_j, (\boldsymbol{\theta})_j | (\mathbf{r}_e)_j, (\boldsymbol{\theta}_e)_j \propto (\mathbf{r})_j \exp \left\{ -\frac{n^2 N^2}{4s_0^2} \left[(\mathbf{r})_j^2 + (\mathbf{r}_e)_j^2 - 2(\mathbf{r})_j (\mathbf{r}_e)_j \cos((\boldsymbol{\theta}_e)_j - (\boldsymbol{\theta})_j) \right] \right\} \quad (\text{II-7-2-6})$$

Integrando sobre $(\boldsymbol{\theta})_j$, e usando a relação (ABRAMOWITZ, STEGUN, 1965)

$$\int_0^{2\pi} \exp\{p \cos(\boldsymbol{\theta})_j\} d(\boldsymbol{\theta})_j = 2\pi I_0(p) \quad (\text{II-7-2-7})$$

onde $I_0(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de ordem zero e argumento puramente imaginário, a fdp para $(\mathbf{r})_j$, dado $(\mathbf{r}_e)_j$, é

$$p((\mathbf{r})_j | (\mathbf{r}_e)_j) = \frac{n^2 N^2 (\mathbf{r})_j}{2s_0^2} \exp \left\{ -\frac{n^2 N^2}{4s_0^2} \left[(\mathbf{r})_j^2 + (\mathbf{r}_e)_j^2 \right] \right\} \cdot I_0 \left[\frac{n^2 N^2 (\mathbf{r})_j (\mathbf{r}_e)_j}{2s_0^2} \right] \quad (\text{II-7-2-8})$$

Esta é uma fdp Rayleigh não central, uma fdp Riciana, uma fdp Rayleigh-Rice ou uma fdp Rice-Nakagami (HELSTROM, 1995, WHALEN, 1971). Quando $(\mathbf{r}_e)_j$ se aproxima de zero, esta é a distribuição de Rayleigh. Esta fdp posterior descreve o estado de conhecimento das amplitudes dos harmônicos com base na informação disponível. O r -ésimo momento desta fdp é (HELSTROM, 1995, WHALEN, 1971)

$$E\{(\mathbf{r})_j^r\} = \left(\frac{2s_0}{nN} \right)^r \Gamma \left(\frac{r}{2} + 1 \right) {}_1F_1 \left(-\frac{r}{2}; 1; -\frac{n^2 N^2 (\mathbf{r}_e)_j^2}{4s_0^2} \right) \quad (\text{II-7-2-9})$$

onde ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$ é a função hipergeométrica confluyente e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama. Em especial, a melhor estimativa da amplitude do j -ésimo harmônico, não corrigida para os efeitos sistemáticos, pode ser obtida desta expressão. Para relação harmônico-ruído grande, isto é, $n^2 N^2(\mathbf{r}_e)_j^2 / 4s_0^2 \gg 1$, $p((\mathbf{r})_j | (\mathbf{r}_e)_j)$ se torna aproximadamente Gaussiana em torno do seu valor esperado. A melhor estimativa da amplitude do j -ésimo harmônico, não corrigida para os efeitos sistemáticos, é então

$$\begin{aligned} E\{(\mathbf{r})_j\} &\approx (\mathbf{r}_e)_j \\ u^2((\mathbf{r}_e)_j) &\approx 2s_0^2 / n^2 N^2 \end{aligned} \quad (\text{II-7-2-10})$$

A obtenção da fdp posterior para as amplitudes dos harmônicos, corrigidas para os efeitos sistemáticos, exige integração numérica. Entretanto, procedemos como na seção anterior, usando a aproximação do ISO (1995). A amplitude do j -ésimo harmônico de um sinal estacionário relativa à fundamental, corrigida para os efeitos sistemáticos, é modelada como

$$(\mathbf{d})_j = \frac{k_{\text{bw}}(jf_0) \cdot k_{\text{int}}(jf_0) \cdot (\mathbf{r})_j}{k_{\text{bw}}(f_0) \cdot k_{\text{int}}(f_0) \cdot (\mathbf{r})_1} \quad j = 2, \dots, m \quad (\text{II-7-2-11})$$

Supondo que qualquer dos projetos de experimentos ortogonais descritos anteriormente esteja sendo usado, os elementos de \mathbf{r} são não correlacionados. Supondo que as correções sejam também não correlacionadas, a melhor estimativa de $(\mathbf{d})_j$ é (ISO, 1995)

$$(\mathbf{d}_e)_j = \frac{k_{\text{bwe}}(jf_0) \cdot k_{\text{inte}}(jf_0) \cdot (\mathbf{r}_e)_j}{k_{\text{bwe}}(f_0) \cdot k_{\text{inte}}(f_0) \cdot (\mathbf{r}_e)_1} \quad (\text{II-7-2-12a})$$

$$\begin{aligned} u^2((\mathbf{d}_e)_j) &\approx (\mathbf{d}_e)_j^2 \left[u^2(k_{\text{bwe}}(jf_0)) + u^2(k_{\text{bwe}}(f_0)) + u^2(k_{\text{inte}}(jf_0)) + u^2(k_{\text{inte}}(f_0)) \right] \\ &\quad + \left(1 + (\mathbf{d}_e)_j^2 \right) \cdot u^2((\mathbf{r}_e)_j) / (\mathbf{r}_e)_1^2 \end{aligned} \quad (\text{II-7-2-12b})$$

Considerando (II-5-11), e que as estimativas das correções têm aproximadamente valor unitário, esta expressão é praticamente equivalente a (II-7-1-3)¹². As contribuições de incerteza associadas com os efeitos sistemáticos podem ser desprezadas se as amplitudes dos harmônicos decrescem de modo considerável com j crescente. A contribuição de incerteza associada com o ruído então se torna dominante. Portanto,

$$u^2\left(\left(\mathbf{d}_e\right)_j\right) \approx u^2\left(\left(\mathbf{r}_e\right)_j\right) / \left(\mathbf{r}_e\right)_1^2 \quad (\text{II-7-2-13})$$

A amplitude (em volts) do j -ésimo harmônico de um sinal estacionário, corrigido para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, é modelada por

$$V_j = \kappa k_{\text{bw}}(jf_0) k_{\text{int}}(jf_0) \cdot \left(\mathbf{r}\right)_j \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{II-7-2-14})$$

A melhor estimativa da amplitude (em volts) do j -ésimo harmônico de um sinal estacionário, corrigido para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, é (ISO, 1995)

$$V_{je} = \kappa_e k_{\text{bwe}}(jf_0) k_{\text{inte}}(jf_0) \cdot \left(\mathbf{r}_e\right)_j$$

$$u^2\left(V_{je}\right) = V_{je}^2 \cdot \left[u^2\left(\kappa_e\right) + u^2\left(k_{\text{bwe}}\left(jf_0\right)\right) + u^2\left(k_{\text{inte}}\left(jf_0\right)\right) \right] + u^2\left(\left(\mathbf{r}_e\right)_j\right) \quad (\text{II-7-2-15})$$

Considerando (II-5-11), e que as estimativas das correções têm aproximadamente valor unitário, esta expressão é praticamente equivalente a (II-7-1-2).

As estimativas dos ângulos de fase dos harmônicos são obtidas na próxima seção.

II-8 Estimativas dos ângulos de fase dos harmônicos

Um modelo para a medição das amplitudes dos harmônicos de sinais periódicos usando um DVM integrador foi proposto na seção II-2. Aqui estendemos aquele modelo para a medição de ângulos de fase dos harmônicos de sinais periódicos. Como estamos interessados em estimar os parâmetros dos harmônicos relativos à fundamental, tanto a correção k_{dc} da referência interna de tensão C.C. do DVM e a correção k_G do erro de ganho do IADC para tempos de abertura menores do que 1 s podem ser suprimidas do modelo.

O tempo inicial de amostragem não afeta as amplitudes dos harmônicos, mas determina os ângulos de fase dos harmônicos. Erros de fase são introduzidos tanto na fundamental quanto nos harmônicos como resultado de (a) a latência de um disparador (*trigger*) interno para o início da amostragem e (b) os retardos introduzidos pelo IADC e pelos estágios de entrada do DVM. Supõe-se que tanto o IADC quanto os estágios de entrada possam ser modelados como filtros de fase linear, i.e., que o erro de fase do j -

¹² Esta é uma estimativa da amplitude do harmônico e não do valor eficaz da amplitude do harmônico.

ésimo harmônico é igual ao erro de fase da fundamental multiplicado pelo número harmônico j (a validade desta suposição é discutida mais adiante nesta seção). Como estamos interessados em estimar os ângulos de fase relativos à fundamental, de tal modo que o ângulo de fase da fundamental é um ângulo de fase de referência arbitrário, o retardo do circuito do disparador interno e as respostas de fase, tanto do IADC quanto dos estágios de entrada do DVM podem ser desconsiderados no modelo.

Supondo que o sinal tem uma forma de onda com frequência fundamental única f_0 , o modelo é

$$y(t) = \left\{ \sum_j |H_{\text{int}}(jf_0)| \cdot |H_{\text{bw}}(jf_0)| \cdot (A_j \cos 2\pi j f_0 t + B_j \sin 2\pi j f_0 t) + e(t) \right\} \cdot \sum_i \delta(t - it_{\text{samp}}) \quad (\text{II-8-1})$$

Os termos desta expressão foram definidos na seção II-2.

O modelo supõe que a contribuição de incerteza associada com a resolução do IADC possa ser desprezada. Supõe também que os erros integral e diferencial do IADC são desprezíveis (a correção k_L da linearidade do instrumento é suprimida do modelo). O ruído de amostragem dos circuitos internos do DVM são supostos desprezíveis comparados com o ruído adicionado ao sinal.

Uma vez que o mesmo *clock* usado para a temporização da amostra é também usado para estabelecer a temporização na medição de frequência, em princípio, a incerteza da base de tempo do DVM é invisível. As incertezas associadas com as grandezas temporais são também desconsideradas, já que a inquietude (*jitter*) e a distorção da base de tempo são supostas desprezíveis em comparação com o ruído superposto nas amostras.

Os estágios de entrada do DVM são tipicamente modelados como um filtro de polo único. Portanto, a correção da resposta de frequência para o j -ésimo harmônico é

$$k_{\text{bw}}(jf_0) = |H_{\text{bw}}(jf_0)|^{-1} = \left(1 + (jf_0/bw)^2\right)^{1/2} \quad (\text{II-8-2a})$$

$$\angle k_{\text{bw}}(jf_0) = -\angle H_{\text{bw}}(jf_0) = \text{tg}^{-1}(jf_0/bw) \quad (\text{II-8-2b})$$

onde bw é a largura de banda dos estágios de entrada cuja melhor estimativa bw_e e incerteza $u(bw_e)$ são fornecidas pelo fabricante (SWERLEIN, 1991). Este modelo pode ser aproximado por um filtro de fase linear se $jf_0 \ll bw$. Com efeito, a função $\text{tg}^{-1}(\cdot)$

difere de uma aproximação linear por menos de uma parte em 10^6 se consideramos somente os primeiros j harmônicos de tal modo que $jf_0 < 0.1bw_e$.

A correção da resposta de frequência do IADC para o j -ésimo harmônico é

$$k_{\text{int}}(jf_0) = |H_{\text{int}}(jf_0)|^{-1} = [\text{Si}(\pi j f_0 t_{\text{aper}})]^{-1} \quad (\text{II-8-3a})$$

$$\angle k_{\text{int}} = -\angle H_{\text{int}}(2\pi j f_0) = \begin{cases} -\pi j f_0 t_{\text{aper}}, & r \text{ even} \\ \pi j f_0 t_{\text{aper}}, & r \text{ odd} \end{cases} \quad [r/t_{\text{aper}} < jf_0 < (r+1)/t_{\text{aper}}] \quad (\text{II-8-3b})$$

onde $\text{Si}(x) (= \text{sen}(x)/x)$ é a função seno integral e t_{aper} é o tempo de abertura. As respostas (2b) e (3b) são apresentadas apenas para mostrar que tanto o IADC quanto os estágios de entrada do DVM podem ser modelados como filtros de fase linear.

Integrando (II-7-2-6) sobre $(\mathbf{r})_j$, a fdp para $(\boldsymbol{\theta})_j$, dados $(\mathbf{r}_e)_j$ e $(\boldsymbol{\theta}_e)_j$, é

$$p((\boldsymbol{\theta})_j | (\mathbf{r}_e)_j, (\boldsymbol{\theta}_e)_j) = \exp\left\{-\frac{nN(\mathbf{r}_e)_j^2}{4s_0^2} \text{sen}^2((\boldsymbol{\theta}_e)_j - (\boldsymbol{\theta})_j)\right\} \cdot \left(\frac{nN}{4\pi s_0^2}\right) \cdot \int_0^\infty (\mathbf{r})_j \exp\left\{-\frac{nN}{4s_0^2} [(\mathbf{r})_j - (\mathbf{r}_e)_j \cos((\boldsymbol{\theta}_e)_j - (\boldsymbol{\theta})_j)]^2\right\} \cdot d(\mathbf{r})_j \quad (\text{II-8-4})$$

que fornece, após alguma manipulação (WHALEN, 1971),

$$p((\boldsymbol{\theta})_j | (\mathbf{r}_e)_j, (\boldsymbol{\theta}_e)_j) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{nN(\mathbf{r}_e)_j^2}{4s_0^2}\right\} + \frac{(nN)^{1/2}(\mathbf{r}_e)_j \cos((\boldsymbol{\theta}_e)_j - (\boldsymbol{\theta})_j)}{4\pi^{1/2}s_0} \cdot \exp\left\{-\frac{nN(\mathbf{r}_e)_j^2}{4s_0^2} \text{sen}^2((\boldsymbol{\theta})_j - (\boldsymbol{\theta}_e)_j)\right\} \cdot \left\{1 + \text{erf}\left[\frac{(nN)^{1/2}(\mathbf{r}_e)_j \cos((\boldsymbol{\theta}_e)_j - (\boldsymbol{\theta})_j)}{2s_0}\right]\right\} \quad (\text{II-8-5})$$

onde $\text{erf}(\cdot)$ é a função de erro. Para relação harmônico-ruído grande, isto é, $n^2N^2(\mathbf{r}_e)_j^2/4s_0^2 \gg 1$, e deslocamentos de fase pequenos relativos a $(\boldsymbol{\theta}_e)_j$, $p((\boldsymbol{\theta})_j | (\mathbf{r}_e)_j, (\boldsymbol{\theta}_e)_j)$ se torna aproximadamente Gaussiana em torno do seu valor esperado.

estimativa do ângulo de fase do j -ésimo harmônico, não corrigido para os efeitos sistemáticos, é portanto

$$\begin{aligned} E\{(\boldsymbol{\theta})_j\} &\approx (\boldsymbol{\theta}_e)_j \\ u^2((\boldsymbol{\theta}_e)_j) &\approx 2s_0^2/nN(\mathbf{r}_e)_j^2 \end{aligned} \quad (\text{II-8-6})$$

Portanto, quanto menor a estimativa da amplitude do harmônico, maior a incerteza padrão associada com a estimativa do ângulo de fase do harmônico correspondente.

Neste trabalho, estamos interessados em estimar os ângulos de fase relativos à fundamental, de modo que o ângulo de fase da fundamental é um ângulo de fase de referência arbitrário θ_R para todos os trens de amostras. Supondo que tanto o IADC quanto os estágios de entrada do DVM possam ser modelados como filtros de fase linear, o ângulo de fase do j -ésimo harmônico relativo à fundamental pode ser modelado como

$$(\boldsymbol{\gamma})_j = (\boldsymbol{\theta})_j + j(\theta_R - (\boldsymbol{\theta})_1) \quad (\text{II-8-7})$$

onde $(\boldsymbol{\theta})_1$ é o ângulo de fase da fundamental. A melhor estimativa de $(\boldsymbol{\gamma})_j$ é (ISO, 1995)

$$(\boldsymbol{\gamma}_e)_j = (\boldsymbol{\theta}_e)_j + j(\theta_R - (\boldsymbol{\theta}_e)_1) \quad (\text{II-8-8a})$$

$$u^2((\boldsymbol{\gamma}_e)_j) = u^2((\boldsymbol{\theta}_e)_j) + j^2 u^2((\boldsymbol{\theta}_e)_1) \quad (\text{II-8-8b})$$

II-9 Estimativas dos deslocamentos de fase entre harmônicos de dois sinais

A estimação do deslocamento de fase entre os harmônicos de dois sinais arbitrários depende do projeto de experimento adotado.

No caso de amostragem síncrona, dois sinais de mesma frequência fundamental são aplicados alternativamente ao mesmo DVM. Os dois sinais são aplicados à entrada do DVM através de uma chave eletrônica cuja frequência de chaveamento é sincronizada com a frequência fundamental dos sinais. Tipicamente, a chave fica em cada posição o tempo suficiente para a passagem de 8 ou 16 ciclos de cada sinal de tensão. Este método foi usado por RAMM, MOSER *et al.* (1999) na medição de potência elétrica na frequência fundamental da rede elétrica. Vários detalhes técnicos

são discutidos nas referências citadas por KÜRTEH IHLENFELD, MOHNS *et al.* (2003).

No caso de amostragem assíncrona, dois DVMs são necessários para a estimação do deslocamento de fase entre os harmônicos de dois sinais arbitrários (KYRIAZIS, CAMPOS, 2005). Os sinais são independentemente medidos por dois DVMs integradores de resolução elevada em uma configuração mestre-escravo (POGLIANO, 2001). Os parâmetros de amostragem do DVM 1 (MESTRE) são avaliados como em SWERLEIN (1991). O DVM 1 tem como função estabelecer a temporização para todo o processo de amostragem. O DVM 2 (ESCRAVO) é configurado para disparo externo; ele amostra o sinal em sua entrada somente quando o DVM 1 envia (através de um conector de saída do instrumento) um sinal digital para a entrada de disparador do DVM 2 indicando quando uma leitura está sendo feita. Deste modo, os circuitos digitais dos dois conversores estão interligados através de um retardo de tempo fixo. Ambos os DVMs são configurados com o mesmo tempo de abertura.

O DVM 1 amostra o sinal em sua entrada de acordo com o projeto de experimentos da seção II-6. O disparador externo do DVM 1 é usado para iniciar os trens de amostras correspondentes do DVM 2 retardados de kt_D+d de um cruzamento pelo nulo¹³ do sinal, onde d é o retardo entre as duas séries temporais devido à latência do disparador externo e às respostas de fase dos DVMs. Supõe-se que cada trem de amostras possa ser modelado por

$$\mathbf{y}_{pk} = \mathbf{W}_{pk} \mathbf{x}_p, \quad (\text{II-9-1})$$

onde o subscrito $p = 1$ para o DVM 1 e $p = 2$ para o DVM 2, \mathbf{y}_{pk} é o vetor de dados de dimensão N no k -ésimo trem de amostras para cada DVM, \mathbf{W}_{1k} é a matriz $N \times 2m$ conhecida com (i, j) -ésimo elemento $\cos 2\pi j f_0(t_i + kt_D)$ para $j = 1, \dots, m$ e $\sin 2\pi(j-m)f_0(t_i + kt_D)$ para $j = m+1, \dots, 2m$, \mathbf{W}_{2k} é a matriz $N \times 2m$ conhecida com (i, j) -ésimo elemento $\cos 2\pi j f_0(t_i + kt_D + d)$ para $j = 1, \dots, m$ e $\sin 2\pi(j-m)f_0(t_i + kt_D + d)$ para $j = m+1, \dots, 2m$, \mathbf{x}_p é o vetor de parâmetros de ajuste de dimensão $2m$ (não corrigido para os efeitos sistemáticos) para cada DVM, $j f_0$ é o j -ésimo harmônico ($j = 1, \dots, m$) da frequência fundamental constante conhecida f_0 , e m é o número de harmônicos especificados da série de Fourier truncada. O modelo supõe que o sinal é estacionário (\mathbf{x}_p é o mesmo para todos os trens de amostras), os conjuntos de dados têm um valor

médio nulo (qualquer valor médio não nulo foi subtraído dos dados) e que a incerteza associada com as grandezas temporais possa ser desprezada.

Supondo que o projeto de experimentos descrito na seção II-6 seja adotado, a melhor estimativa de \mathbf{x}_p é dada por (II-6-5), isto é,

$$\mathbf{x}_{ep} \approx \frac{2}{nN} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}'_{pk\theta} \mathbf{W}'_{p0} \mathbf{y}_{pk} \quad (\text{II-9-2})$$

onde $\mathbf{W}_{p0} = \mathbf{W}_{pk}$ para $k = 0$ e $\mathbf{A}_{pk\theta}$ é a matriz de rotação de ordem $2m$. Por exemplo, a matriz de rotação de ordem 4 para $p = 1$ é dada por (II-6-4). A correspondente para $p = 2$ é

$$\mathbf{A}_{2k\theta} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi f_0 (kt_D + d) & 0 & -\sin 2\pi f_0 (kt_D + d) & 0 \\ 0 & \cos 4\pi f_0 (kt_D + d) & 0 & -\sin 4\pi f_0 (kt_D + d) \\ \sin 2\pi f_0 (kt_D + d) & 0 & \cos 2\pi f_0 (kt_D + d) & 0 \\ 0 & \sin 4\pi f_0 (kt_D + d) & 0 & \cos 4\pi f_0 (kt_D + d) \end{bmatrix} \quad (\text{II-9-3})$$

Os estágios de entrada e o IADC do DVM introduzem um erro de ângulo de fase. A correção da resposta de fase dos estágios de entrada e a incerteza associada com a estimativa para cada DVM são, respectivamente,

$$(\boldsymbol{\eta})_j = \text{tg}^{-1}(jf_0/bw) \quad (\text{II-9-4a})$$

$$u((\boldsymbol{\eta})_j) = \frac{jf_0/bw}{1 + jf_0/bw} \cdot \frac{u(bw)}{bw}, \quad -\pi/2 < \text{tg}^{-1}(jf_0/bw) < \pi/2 \quad (\text{II-9-4b})$$

onde bw e $u(bw)$ são, respectivamente, a largura de banda dos estágios de entrada e a incerteza associada, ambos fornecidos pelo fabricante HEWLETT-PACKARD (1998)..

A correção da resposta de fase do IADC e a incerteza associada com a estimativa para cada DVM são, respectivamente,

$$(\boldsymbol{\psi})_j = \pi j f_0 t_{\text{aper}} \quad (\text{II-9-5a})$$

$$u((\boldsymbol{\psi})_j) = \pi j f_0 t_{\text{aper}} \cdot u(t_{\text{aper}}) / t_{\text{aper}}, \quad (\text{II-9-5b})$$

¹³ Ou de um cruzamento de um nível C.C. arbitrário selecionado pelo usuário.

onde t_{aper} é o tempo de abertura e $u(t_{\text{aper}})$ é avaliada da incerteza associada com a resolução da base de tempo do IADC (HEWLETT-PACKARD, 1998).

O ângulo de fase do j -ésimo harmônico de um sinal estacionário, corrigido para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, é então

$$(\boldsymbol{\theta})_{pj} = (\boldsymbol{\eta})_j + (\boldsymbol{\psi})_j + \text{tg}^{-1} \left[\frac{(\mathbf{x}_p)_{m+j}}{(\mathbf{x}_p)_j} \right], \quad (\text{II-9-6})$$

onde o símbolo $(\cdot)_j$ denota o j -ésimo elemento. Os elementos de \mathbf{x}_p não são correlacionados. Supondo também que as correções não são correlacionadas, a incerteza associada com o j -ésimo ângulo de fase é

$$u((\boldsymbol{\theta})_{pj}) = \left[u^2((\boldsymbol{\eta})_j) + u^2((\boldsymbol{\psi})_j) + u^2(\mathbf{x}_p) / 2V_{pj}^2 \right]^{1/2} \quad (\text{II-9-7})$$

onde V_{pj} é a amplitude do j -ésimo harmônico para cada DVM e $u(\mathbf{x}_p)$ é elemento diagonal da matriz de covariância diagonal associada com a estimativa (2) para cada DVM, para $nN - 2m$ grande, isto é,

$$u^2(\mathbf{x}_p) = \frac{2}{nN(nN - 2m)} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{y}'_{pk} \mathbf{y}_{pk} - \frac{nN}{2} \mathbf{x}'_p \mathbf{x}_p \right\} \quad (\text{II-9-8})$$

A análise acima supõe que a frequência real do sinal amostrado é estável e conhecida (a exatidão da base de tempo não é importante). Infelizmente, o algoritmo acima é um tanto sensível a erros de frequência. A sensibilidade da saída a erros de frequência foi avaliada inserindo erros numericamente no algoritmo e verificando qualquer variação na saída. Para um sinal de 60 Hz, uma diferença média de $\pm 413 \mu\text{rad}$ foi detectada nas estimativas para $(\boldsymbol{\theta})_{1j}$ quando o erro de frequência era de $\pm 10^{-5}$. Além disso, a sensibilidade é proporcional à ordem do harmônico (se a componente harmônica tem uma relação sinal-ruído elevada).

A sensibilidade a erros de frequência pode ser reduzida para bem abaixo da contribuição de ruído se estamos interessados em estimar os ângulos de fase relativos à fundamental, de modo que o ângulo de fase da tensão fundamental no DVM 1 é um ângulo de fase de referência arbitrário θ_R para todos os trens de amostras. Mas, rigorosamente, só se pode fazer isso caso tanto os estágios de entrada quanto o IADC possam ser modelados por filtros de fase linear. Os estágios de entrada somente podem ser modelados assim para $jf_0 \ll bw$. Como $bw = 120 \text{ kHz}$ (SWERLEIN, 1991), para jf_0

= 1500 Hz, (4a) difere de uma aproximação linear por 0,65 μrad . Isto significa que $m \leq 25$ para um sinal de 60 Hz. Entretanto, se as amplitudes dos harmônicos decrescem de forma considerável com m crescente, o requisito acima pode ser relaxado. Para um sinal de 60 Hz com $m = 64$, (4a) difere de uma aproximação linear por aproximadamente 11 μrad . Este valor é desprezível em comparação com a contribuição de ruído se a amplitude do 64-ésimo harmônico é aproximadamente duas ordens de grandeza menor do que a fundamental. Assim, supondo que os estágios de entrada e o IADC do DVM possam ser considerados como filtros de fase linear, o ângulo de fase do j -ésimo harmônico relativo à fundamental para cada DVM e a incerteza associada com a estimativa são, respectivamente,

$$(\gamma_e)_{pj} = (\theta_e)_{pj} + j(\theta_R - (\theta_e)_{11}) \quad (\text{II-9-9a})$$

$$u((\gamma_e)_{pj}) = \left[u^2((\theta_e)_{pj}) + j^2 u^2((\theta_e)_{11}) \right]^{1/2}, \quad (\text{II-9-9b})$$

onde $(\theta)_{pj}$ ($e (\theta)_{11} = (\theta)_{pj}$ para $p = j = 1$) e a incerteza associada com a estimativa para cada DVM são obtidas diretamente de

$$(\theta_e)_{pj} = \text{tg}^{-1} \left[\frac{(\mathbf{x}_{pe})_{m+j}}{(\mathbf{x}_{pe})_j} \right] \quad (\text{II-9-10a})$$

$$u((\theta_e)_{pj}) = u(\mathbf{x}_{pe}) / \sqrt{2} V_{p/e} \quad (\text{II-9-10b})$$

A análise acima também supõe que a incerteza associada com as grandezas temporais possa ser desprezada. Isto é verdadeiro para todas as grandezas temporais exceto o retardo d . Uma análise Bayesiana exigiria uma generalização do modelo de regressão (adotado nas seções II-3 e II-4) que considerasse tanto o ruído adicionado às variáveis dependentes quanto às variáveis independentes. Tanto quanto é do conhecimento do autor, esta generalização só foi feita para o modelo de regressão simples (ajuste de linha reta) (ZELLNER, 1996). Aproximações são feitas aqui de modo a desviar da análise Bayesiana e simplificar a avaliação da incerteza de medição.

O fabricante estabelece o desvio padrão D do retardo do disparador externo (*rms external trigger jitter*). Uma forma de onda digital é fornecida pelo DVM 1 indicando quando o IADC está integrando o sinal de entrada. Esta forma de onda é usada para sincronizar o DVM 2 ao DVM 1. Como há n trens de N amostras, o desvio padrão relativo da média do retardo do disparador externo é $D/d(nN)^{1/2}$. A sensibilidade da saída

do DVM 2 para erros de retardo de disparo foi avaliada inserindo numericamente erros no algoritmo e verificando qualquer variação na saída. Os dois DVMS foram alimentados em paralelo por um único sinal na mesma faixa de 10 V, de modo que as saídas dos DVMS idealmente apresentassem um deslocamento de fase relativo nulo. Para um sinal de 60 Hz, uma diferença de ângulo de fase de $\pm 2 \mu\text{rad}$ (ou $\pm 20 \mu\text{rad}$) foi observada entre as saídas (para $j = 1$) dos dois DVMS quando o erro de retardo de disparo era de $\pm 1\%$ (ou $\pm 10\%$). Além disso, a sensibilidade é proporcional à ordem do harmônico (se a relação harmônico-ruído é elevada). Portanto, a contribuição de incerteza associada com o retardo d para o j -ésimo harmônico é (em μrad)

$$u_d\left(\left(\theta_e\right)_{2j}\right) = \frac{10jf_0D}{3d\sqrt{nN}} \quad (\text{II-9-11})$$

e esta contribuição deve ser incorporada à incerteza (10b) associada com a estimativa para o DVM 2, isto é,

$$u\left(\left(\theta_e\right)_{2j}\right) = \left[u^2\left(\mathbf{x}_{2e}\right) / 2V_{2je}^2 + u_d^2\left(\left(\theta_e\right)_{2je}\right) \right]^{1/2} \quad (\text{II-9-12})$$

Finalmente, o deslocamento de fase entre os j -ésimos harmônicos de dois sinais arbitrários e a incerteza associada com a estimativa são

$$\Delta\left(\gamma_e\right)_j = \left(\gamma_e\right)_{1j} - \left(\gamma_e\right)_{2j} \quad (\text{II-9-13a})$$

$$u\left(\Delta\left(\gamma_e\right)_j\right) = \left[u^2\left(\left(\gamma_e\right)_{1j}\right) + u^2\left(\left(\gamma_e\right)_{2j}\right) \right]^{1/2} \quad (\text{II-9-13b})$$

II-10 Seleção do modelo

Um problema básico é determinar o número de funções harmônicas que melhor representa os dados. Constatou-se que a inclusão da exatidão do instrumento de medição na análise permite que se obtenha uma solução única para este problema. O projeto de experimentos baseado em amostragem assíncrona é usado nesta seção.

O algoritmo para o cálculo dos parâmetros de amostragem está estruturado para garantir imunidade contra *aliasing* somente para o número mínimo m de harmônicos especificado pelo usuário (Apêndice I). O intervalo de amostragem máximo não deve violar o teorema de amostragem, i.e., $t_{\text{samp}} < 1/2mf_0$. Se isso ocorre, o algoritmo aumenta

a frequência de amostragem a fim de assegurar a ocorrência do *alias* exatamente em mf_0 . O algoritmo leva isto em conta e estima o tempo de abertura como $t_{\text{aper}} = t_{\text{samp}} - \tau$, onde τ ($= 30 \mu\text{s}$) é um pequeno retardo especificado pelo fabricante (SWERLEIN, 1991) para evitar erros devido a um disparador muito rápido. Devido aos requisitos de largura de banda expostos acima, o tempo de abertura real é mantido quase constante em torno de 0,001 s até $m = 1/2f_0t_{\text{samp}}$ onde este começa a decrescer com o aumento da frequência do sinal de acordo com $t_{\text{aper}} = 1/2mf_0 - \tau$. Se m é muito elevado, o tempo de abertura será muito pequeno, e isso causará uma degradação da exatidão do DVM (a contribuição da incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC aumenta de forma considerável).

Por outro lado, as incertezas associadas com as amplitudes dos harmônicos, (II-7-1-2b) e (II-7-1-3) dependem explicitamente da variância de ruído estimada, a saber: (II-4-16), (II-5-7), (II-5-8) ou (II-6-11). A variância de ruído é tipicamente usada como uma medida da qualidade do ajuste. A variância estimada é a diferença quadrática média entre o modelo e os dados. Se o desajustamento é grande, a variância de ruído estimada é grande e a incerteza associada com as amplitudes dos harmônicos também é grande. Mencionou-se na seção II-3 que o ruído inclui tanto uma parte “aleatória” devido ao ruído de banda limitada na saída do IADC e uma parte sistemática devido ao truncamento da série de Fourier. É importante notar que tudo que a teoria de probabilidade não pode ajustar ao modelo é considerado como ruído. Adicionando-se mais harmônicos à série de Fourier, pode-se decrescer a parte sistemática do ruído (e portanto a variância de ruído) até o ponto onde se está realmente *ajustando a parte “aleatória” do ruído*.

O número de funções harmônicas que melhor representa os dados depende de quais parâmetros de harmônicos se deseja estimar: amplitudes absolutas V_j (em volts) ou amplitudes relativas d_j (como uma percentagem da amplitude da fundamental). A contribuição associada com a correção do erro de ganho do DVM somente está incluída em (II-7-1-2b). Como vimos, à medida que m aumenta, esta contribuição aumenta enquanto que a variância de ruído diminui. Há, portanto, um número específico de harmônicos que minimizará $u(V_{je})$. O valor ótimo de m depende da distorção harmônica do sinal, da variância do ruído e das especificações do erro de ganho do IADC. (Este mínimo é claramente definido para $j = 1$, uma vez que em geral a variância de ruído domina (II-7-1-2b) para $j = 2, \dots, m$). Em contraste, como a variância de ruído é em

geral dominante em (II-7-1-3), $u(d_{je})$ pode ser decrescida arbitrariamente (até o ponto em que se está *ajustando a parte “aleatória” do ruído*) adicionando-se mais harmônicos ao modelo. Neste trabalho, o número de harmônicos que minimiza a incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude absoluta (em volts) da fundamental foi escolhido como o que melhor representa os dados.

O IADC tem duas entradas: uma entrada de baixa velocidade e uma de alta velocidade (SWERLEIN, 2002). O tempo de abertura é usado para selecioná-las. O limiar de decisão é $t_{\text{aper}} = 100 \mu\text{s}$ e é alcançado em $mf_0 = 1/0,00026 \text{ Hz}$ (esta fórmula foi obtida substituindo-se $t_{\text{aper}} = 100 \mu\text{s}$ e $\tau = 30 \mu\text{s}$ em $t_{\text{aper}} = 1/2mf_0 - \tau$). A entrada de baixa velocidade tem maior exatidão e deve preferencialmente ser usada. Para um sinal de 60 Hz, isto significa escolher $m \leq 64$. Esta escolha é razoável quando o sinal não apresenta harmônicos de amplitudes significativas para $m > 64$. O algoritmo opera com frequências fundamentais de 2 Hz a 1 kHz. A incerteza associada com a correção da resposta de frequência (II-2-6) é a contribuição dominante nas frequências elevadas. Para um sinal de 1 kHz, o limiar de $100 \mu\text{s}$ é alcançado em $m = 3$. Portanto, quanto maior a frequência fundamental, menos distorcido deve ser o sinal, a fim de que este seja medido em volts com exatidão elevada. Se se está interessado em medir as amplitudes dos harmônicos como percentuais da fundamental, pode-se usar qualquer das entradas do IADC.

O tempo de medição é aproximadamente proporcional a m para $t_{\text{aper}} \geq 100 \mu\text{s}$ e aproximadamente proporcional a m^2 para $t_{\text{aper}} < 100 \mu\text{s}$. Isto reforça a recomendação do uso da entrada de baixa velocidade do IADC.

CAPÍTULO III

RESULTADOS EXPERIMENTAIS

III-1 Medição de sinais senoidais quase puros

Os algoritmos baseados nas estimativas (II-6-5) e (II-6-6), usados em KYRIAZIS (2003), foram extensivamente verificados em comparação com a versão no domínio do tempo de SWERLEIN (1991). Os algoritmos apresentaram uma estabilidade similar àquela reportada para a versão no domínio do tempo. A incerteza associada com a estimativa do valor eficaz depende da estabilidade do sinal, do conteúdo harmônico e da variância do ruído, e é de $2,5 \mu\text{V V}^{-1}$ para sinais de 100 Hz de distorção menor do que 1% na faixa de 10 V. A estimativa do valor eficaz foi obtida substituindo (II-6-5) (ou (II-6-6)) em (II-7-1-2a) e (II-7-1-4) e a incerteza associada foi obtida de (II-7-1-5). Tais algoritmos demoram 22 s para avaliar os parâmetros de seis harmônicos de um sinal de 100 Hz.

Uma fonte de tensão de estabilidade elevada (HEWLETT-PACKARD, 1994b) foi usada para gerar um sinal de 10 V pico-a-pico em 60 Hz de distorção menor do que 0,02% e um DVM de estabilidade e resolução elevadas (HEWLETT-PACKARD, 1994a) foi usado para digitalizar o sinal de forma assíncrona. Seis harmônicos ($m = 6$) foram especificados (não há *aliasing* até o sexto harmônico). A frequência fundamental na base de tempo não calibrada do DVM foi medida por um comando interno do DVM como sendo de 59,99894 Hz (a frequência corrigida para a calibração da base de tempo foi de 59,99996 Hz). Os algoritmos selecionaram $n = 24$ (ou seja, $4m$) trens de $N = 572$ amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0.001049$ s (com tempo de abertura $t_{\text{aper}} = 0.001019$ s). Assim, Nt_{samp} se aproxima de um número inteiro de períodos do sinal. As estimativas (II-6-5) e (II-6-6) foram avaliadas e substituídas em (II-7-1-2a). Nenhuma diferença pôde ser detectada entre estas estimativas, já que as diferenças observadas estavam dentro da estabilidade de curto prazo do conjunto gerador-voltímetro (de uma parte em 10^6). A THD medida pelo algoritmo foi de 0,0156%. As matrizes de covariância (II-6-7) e (II-6-8) diferiram de menos de uma parte em 10^6 , mas os elementos diagonais de (II-6-7) eram aproximadamente duas vezes maiores do que os correspondentes de (II-6-8). O valor eficaz medido foi de 3,536267 V (obtido de (II-7-1-4)). O valor eficaz da

amplitude fundamental (3,536267 V) foi medido com uma incerteza de $2,4 \mu\text{V V}^{-1}$ (obtida de (II-7-1-2b)). As amplitudes dos harmônicos relativas à fundamental foram medidas com uma incerteza de $1,6 \times 10^{-6}$ (obtida de (II-7-1-3)).

A escolha do número de harmônicos que melhor representa o conjunto de dados foi feita com base nos resultados experimentais ilustrados nos gráficos da Fig. III-1. Escolheu-se $m = 6$, pois, como se constata da Fig. III-1(a), um maior número de harmônicos não minimiza significativamente a incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude da fundamental (obtida de (II-7-1-2b)), elevando o tempo de medição desnecessariamente. A contribuição de incerteza associada ao ruído (obtido de (II-6-7)) não é reduzida apreciavelmente com o aumento do número de harmônicos (Fig. III-1(b)). Isto sugere que a parte sistemática do ruído foi ajustada pelo modelo com $m = 6$. A incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC (obtida de (II-2-9)) cresce de forma monotônica com o número de harmônicos (Fig. III-1(c)). Isto se deve à redução do tempo de abertura do IADC, à medida em que aumenta o número de harmônicos (como visto na seção II-10).

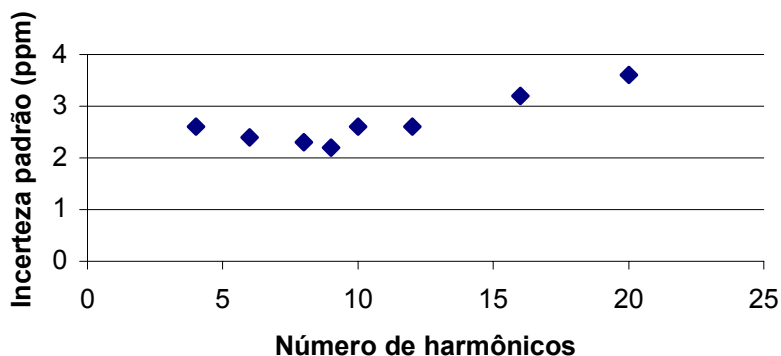


Fig. III-1(a). Incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude da fundamental em função do número de harmônicos.

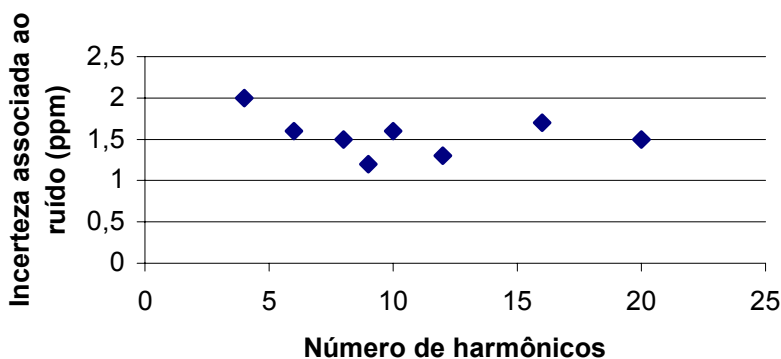


Fig. III-1(b). Incerteza associada ao ruído em função do número de harmônicos.

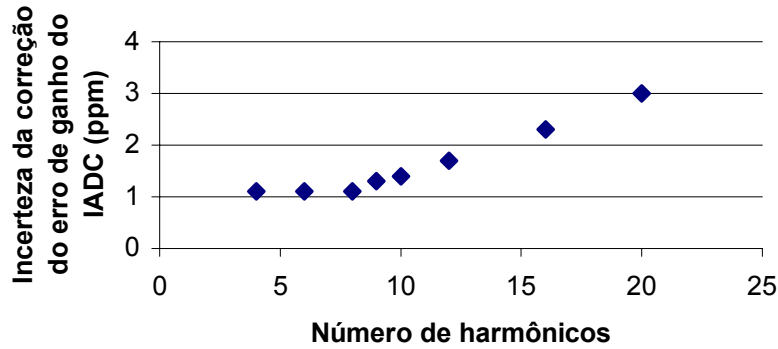


Fig. III-1(c). Incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC em função do número de harmônicos.

As estimativas (e as incertezas padrão associadas obtidas de (II-7-1-3)) das amplitudes dos 6 (seis) harmônicos da forma de onda relativas à fundamental (obtidas de (II-7-1-2a)), corrigidas para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, são mostradas na Tabela III-1. Valores numéricos de cada contribuição de incerteza estão listados em KYRIAZIS, SWERLEIN (2002) para várias faixas de tensão e frequência.

Gráficos da forma de onda amostrada (obtida plotando o vetor de dados y_k para $k = 1$), da forma de onda reconstruída (obtida substituindo a estimativa (II-6-5) em (II-3-2)), e da análise harmônica (obtida de (II-7-1-2a)) são mostrados na Fig. III-2. Somente o componente fundamental está plotado pois o gráfico só mostra os harmônicos de amplitude igual ou maior que 0,5%. Deve-se observar que as ordenadas de todos os gráficos das formas de onda amostrada e reconstruída deste capítulo não foram corrigidas para os efeitos sistemáticos.

Tabela III-1. Valores medidos para um sinal senoidal quase puro (< 0,02% THD).

| Nº Harm. | Amplitude (%) | $u(d_j)$ (10^{-6}) |
|----------|---------------|------------------------|
| 1 | 100,000 | - |
| 2 | 0,01504 | 1,6 |
| 3 | 0,00406 | 1,6 |
| 4 | 0,00075 | 1,6 |
| 5 | 0,00029 | 1,6 |
| 6 | 0,00009 | 1,6 |

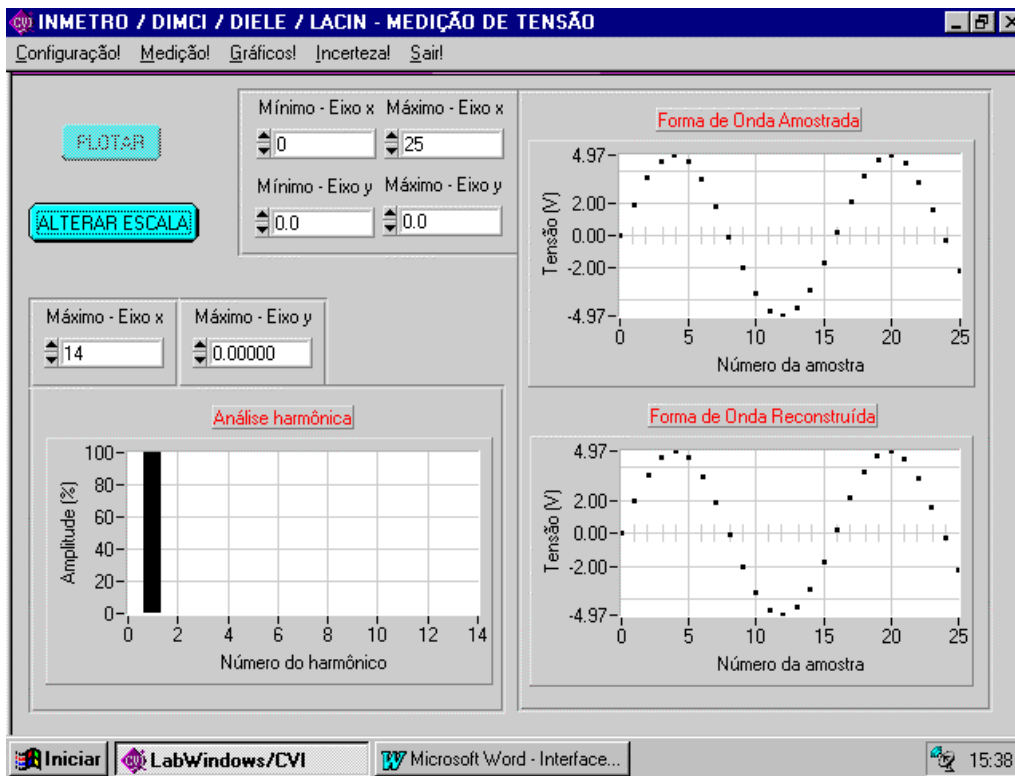


Fig. III-2. Gráficos da forma de onda amostrada e reconstruída (valores não corrigidos para os efeitos sistemáticos) e da análise harmônica para um sinal senoidal quase puro gerado pelo gerador HP 3245A.

É interessante usar o algoritmo para estimar as amplitudes dos harmônicos na saída de um oscilador de formas de onda senoidais quase puras (KROHN-HITE, 1995). O fabricante especifica que as amplitudes dos harmônicos não excedem 0,00050%. Escolheu-se $m = 25$ com o intuito de verificar esta especificação em uma ampla faixa de frequência. A THD medida pelo algoritmo foi de 0,00035%. A frequência fundamental na base de tempo do DVM foi medida por um comando interno do DVM como sendo de 60,007282 Hz (frequência calibrada de 60,00830 Hz). O ajuste fino da frequência é feito no gerador por meio de um potenciômetro. Isto explica a pouca exatidão da frequência. O algoritmo selecionou $n = 100$ trens de $N = 199$ amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,000335$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,000305$ s). O valor eficaz medido foi de 3,474328 V (obtido de (II-7-1-4)). O valor eficaz da amplitude fundamental (3,474328 V) foi medido com uma incerteza de $4,1 \mu\text{V V}^{-1}$ (obtida de (II-7-1-2b)). As amplitudes dos harmônicos relativas à fundamental foram medidas com uma incerteza de $1,6 \times 10^{-6}$ (obtida de (II-7-1-3)). Os valores medidos (obtidos de (II-7-1-2a)) estão listados na Tabela III-2. Os valores medidos confirmam a especificação de distorção harmônica do gerador.

Gráficos da forma de onda amostrada (obtida plotando o vetor de dados y_k para $k = 1$), da forma de onda reconstruída (obtida substituindo a estimativa (II-6-5) em (II-3-2)), e da análise harmônica (obtida de (II-7-1-2a)) são mostrados na Fig. III-3.

Tabela III-2. Valores medidos para um sinal senoidal quase puro ($<0,0005\%$ THD).

| Nº Harm. | Amplitude (%) | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Nº Harm. | Amplitude (%) | $u(d_j)$ (10^{-6}) |
|----------|---------------|------------------------|----------|---------------|------------------------|
| 1 | 100,000 | - | 14 | 0,00000 | 1,6 |
| 2 | 0,00018 | 1,6 | 15 | 0,00002 | 1,6 |
| 3 | 0,00030 | 1,6 | 16 | 0,00000 | 1,6 |
| 4 | 0,00001 | 1,6 | 17 | 0,00002 | 1,6 |
| 5 | 0,00000 | 1,6 | 18 | 0,00001 | 1,6 |
| 6 | 0,00000 | 1,6 | 19 | 0,00001 | 1,6 |
| 7 | 0,00002 | 1,6 | 20 | 0,00001 | 1,6 |
| 8 | 0,00001 | 1,6 | 21 | 0,00003 | 1,6 |
| 9 | 0,00000 | 1,6 | 22 | 0,00002 | 1,6 |
| 10 | 0,00000 | 1,6 | 23 | 0,00000 | 1,6 |
| 11 | 0,00001 | 1,6 | 24 | 0,00002 | 1,6 |
| 12 | 0,00001 | 1,6 | 25 | 0,00003 | 1,6 |
| 13 | 0,00001 | 1,6 | | | |

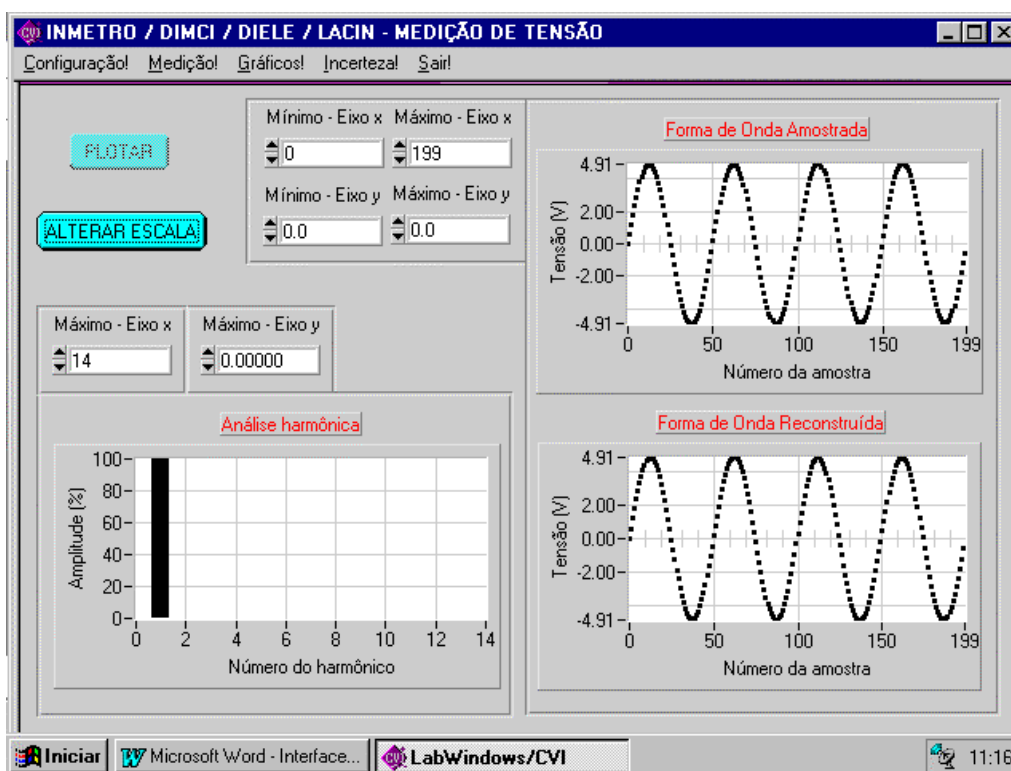


Fig. III-3. Gráficos da forma de onda amostrada e reconstruída (valores não corrigidos para os efeitos sistemáticos) e da análise harmônica para um sinal senoidal quase puro gerado pelo gerador KH 4402 B.

III-2 Medição de amplitude de harmônicos de sinais não senoidais

O algoritmo baseado na estimativa (II-6-6) utiliza operações matriciais que tomam muito tempo e espaço de memória de computador. Isto praticamente inviabiliza seu uso na estimação de parâmetros de sinais muito distorcidos. Como é importante minimizar o tempo de medição, opta-se pela adoção do algoritmo baseado na estimativa (II-6-5) neste caso. Observou-se que o tempo de medição dos parâmetros de 42 harmônicos de um sinal de 60 Hz usando a estimativa (II-6-6) é cerca de uma ordem de grandeza maior do que o correspondente usando a estimativa (II-6-5).

Geradores de harmônicos calibrados têm sido reportados na literatura (ARSENEAU, FILIPSKI, 1995, POGLIANO, 2002a). Entretanto, a avaliação do algoritmo discutido neste trabalho exige um padrão de distorção harmônica com exatidão e estabilidade ao nível de umas poucas partes em 10^6 . Tanto quanto é do conhecimento do autor, tal padrão não está disponível. Os conversores A/D atuais têm maior exatidão do que os conversores D/A (OLDHAM, 2003). Portanto, é mais viável usar um DVM de alta resolução e estabilidade para calibrar um gerador de sinais do que o inverso. Neste trabalho, em vez de se avaliar o algoritmo, um DVM de estabilidade e resolução elevadas (controlado pelo algoritmo) foi usado para medir as amplitudes dos harmônicos de sinais periódicos não senoidais gerados por um gerador estável de sinais arbitrários, sintetizados de forma digital (HEWLETT-PACKARD, 1994b).

A técnica de síntese de sinais digitais mais comumente usada está mostrada na Fig. III-4, onde amostras da forma de onda de interesse estão armazenadas na memória. O *clock* e o contador programáveis fornecem à memória os endereços seqüenciais que são atualizados na frequência do *clock*. O endereço de memória pode ser considerado um deslocamento angular, enquanto que o dado correspondente a cada endereço representa a amplitude da função em pontos amostrais igualmente espaçados. Os dados são aplicados a um conversor D/A que gera um degrau de tensão proporcional ao código digital. Cada degrau é mantido por um período de *clock*, em cujo ponto um novo dado digital é aplicado ao conversor D/A. A forma de onda resultante é uma aproximação em degrau da “forma de onda amostrada”, reconstruída de dados armazenados (o termo “forma de onda amostrada” é usado neste texto para identificar a forma de onda ideal a partir da qual os dados digitais foram obtidos). O processo de amostragem e retenção pode ser descrito matematicamente por um polinômio de ordem zero; o processo de reconstrução é freqüentemente referenciado como uma “retenção de ordem zero”.

O gerador usado sintetiza os sinais em uma aproximação de degraus ou de amostragem-retenção. Os valores armazenados na memória são amostras igualmente espaçadas destes sinais com 2048 degraus discretos por período do sinal com resolução de amplitude de 12 bits. A forma de onda de cada sinal é especificada matematicamente (HEWLETT-PACKARD, 1994b).

Cinco sinais não senoidais de 60 Hz de 6 V de pico-a-pico foram sintetizados usando-se este gerador: (a) um sinal senoidal (versão em degraus), (b) um sinal parabólico alternado, (c) um sinal retificado em meia onda (com componente C.C. adequada para fornecer o necessário cruzamento pelo nulo do sinal¹⁴), (d) um sinal de triac, e (e) um sinal trapezoidal. Os coeficientes de Fourier relativos à fundamental foram avaliados numericamente para cada sinal.

O cálculo dos coeficientes de Fourier exponenciais complexos para formas de onda lineares por partes é bem conhecido¹⁵ (PAUL, 1992) e está descrito no Apêndice VI. A técnica é derivar a função até a primeira ocorrência de funções de impulso. Os coeficientes de Fourier do trem de impulsos resultante são determinados e o resultado é dividido por $2\pi n f_0 \sqrt{-1}$ para retornar aos coeficientes de Fourier da função original. Deve-se tomar cuidado em incluir todas as transições entre platôs dos degraus (até mesmo a transição entre o último platô de um período e o platô inicial do próximo) da forma de onda quando da computação dos coeficientes de Fourier.

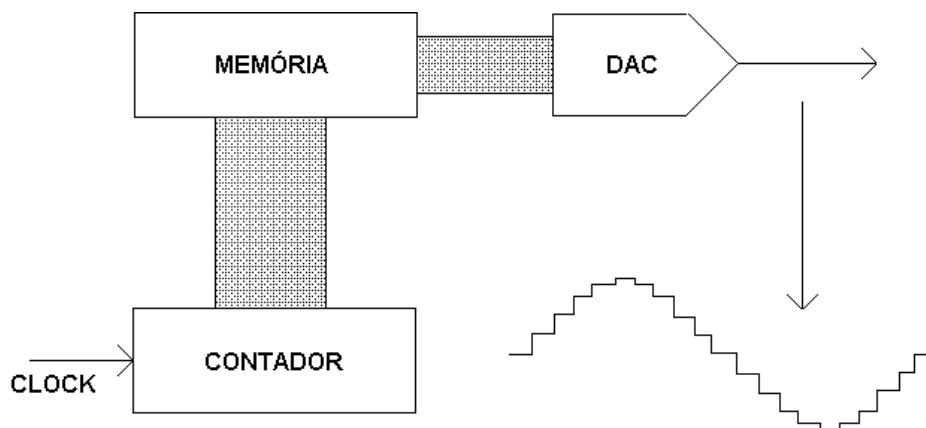


Fig. III-4. Diagrama de blocos de um gerador de sinais digital.

¹⁴ O algoritmo media a frequência fundamental do sinal somente por técnicas de cruzamento pelo nulo. Recentemente, o algoritmo foi alterado para medir a frequência fundamental por técnicas de cruzamento de níveis C.C. arbitrários selecionados pelo usuário.

O algoritmo apresentou estabilidade similar àquela reportada para a versão original no domínio do tempo (SWERLEIN, 1991). O número de harmônicos que minimiza a incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude da fundamental foi selecionado (vide seção II-10). Detalhes da geração dos sinais e do cálculo dos coeficientes de Fourier constam do Apêndice VI.

As formas de onda em degraus e os resultados obtidos são descritos nas seções que se seguem. Parte dos resultados foi publicada em KYRIAZIS (2004a, 2004b) e KYRIAZIS, CAMPOS (2004c, 2005). Antes de apresentá-los, fazemos uma digressão para mostrar como varia o tempo de medição em função do número de harmônicos.

III-2-1 Número de harmônicos medidos e tempo de medição

O algoritmo usado pode medir os parâmetros de sinais de tensão com frequência fundamental de 2 Hz a 1 kHz. O algoritmo pode medir um máximo de 269 harmônicos de um sinal de 60 Hz. Esta limitação é imposta pelo tempo de abertura mínimo dos conversores A/D integradores usados em voltímetros digitais comerciais atuais. À medida que aumenta o número de harmônicos, o intervalo entre amostras deve diminuir de modo a atender o teorema da amostragem. O tempo de abertura deve ser reduzido correspondentemente de forma a evitar erros de disparador muito rápido. O tempo de abertura mínimo é de 1 μ s. O número máximo de harmônicos varia de acordo com o valor da frequência fundamental, mas um valor aproximado pode ser obtido tendo-se em conta que o harmônico de maior frequência medido para um sinal de 60 Hz é de 16140 Hz.

A Tabela III-3 e a Fig. III-5 mostram como varia o tempo total de medição em função do número de harmônicos para um sinal de 60 Hz. As características do computador usado constam do Apêndice IV. A figura mostra que o tempo de medição pode ser reduzido com computadores mais velozes. O tempo de medição foi reduzido à metade quando dobramos a velocidade de processamento do computador. A maior parte do tempo de medição é dispendida em cálculos. Uma parte é devida à aquisição de dados cuja velocidade depende do DVM usado. O tempo de medição aumenta aproximadamente proporcional a m para tempos de abertura maiores do que 100 μ s e aproximadamente proporcional a m^2 para tempos de abertura abaixo deste limiar.

¹⁵ Foi também usado pelo autor na avaliação da emissão eletromagnética conduzida de fontes de alimentação chaveadas (KYRIAZIS, 1994, 1995a, 1995b, 1995c, 1997).

Tabela III-3. Tempo de medição em função do número de harmônicos.

| Nº harm. (m) | Tempo de abertura (ms) | Duração (Pentium 75 MHz) | Duração (Pentium 166 MHz) |
|--------------|------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 6 | 1,0190 | 22 s | 21 s |
| 13 | 0,6149 | 30 s | 21 s |
| 32 | 0,2318 | 55 s | 31 s |
| 42 | 0,1696 | 1 min 10 s | 40 s |
| 64 | 0,1003 | 1 min 52 s | 1 min 01 s |
| 80 | 0,0743 | 2 min 45 s | 1 min 27 s |
| 100 | 0,0534 | 4 min 25 s | 2 min 12 s |
| 152 | 0,0249 | 13 min 20 s | 5 min 28 s |
| 269 | 0,0001 | 55 min | 24 min 52s |

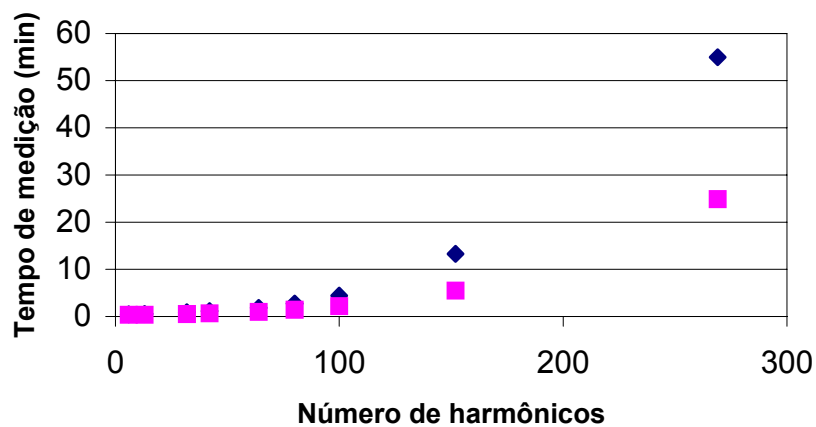


Fig. III-5. Tempo de medição em função do número de harmônicos, usando computador Pentium 75 MHz (losango) e computador Pentium 166 MHz (quadrado).

III-2-2 Sinal senoidal (versão em degraus)

A forma de onda é

$$f(i) = \text{sen}\left(\frac{2pi}{2047}\right), \quad i = 0, \dots, 2047 \quad (\text{III-2-2-1})$$

onde $p = 3.1415$.

O algoritmo demorou aproximadamente 25 s para avaliar as amplitudes dos primeiros 8 (oito) harmônicos. A THD medida foi de 0,0846%. A frequência fundamental foi medida por um comando interno do DVM como sendo de 59,99857 Hz (frequência calibrada de 59,99959 Hz). O algoritmo selecionou $n = 32$ trens de $N = 429$

amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,001049$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,001019$ s). O valor eficaz medido foi de 2,121340 V (obtido de (II-7-1-4)). O valor eficaz da amplitude fundamental (2,121339 V) foi medido com uma incerteza de $2,9 \mu\text{V V}^{-1}$ (obtida de (II-7-1-2b)). As amplitudes dos harmônicos relativas à fundamental foram medidas com uma incerteza de $2,4 \times 10^{-6}$ (obtida de (II-7-1-3)). As diferenças entre os valores calculados (Apêndice VI) e medidos foram menores do que $3,8 \times 10^{-5}$ relativo à fundamental (Tabela III-4).

Tabela III-4. Valores calculados e medidos para um sinal senoidal (versão em degraus).

| Nº Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) |
|----------|---------------|----------------|---------------------------|-----------------------|
| | Calc. | Med. (d_j) | | |
| 1 | 100,000 | 100,000 | - | - |
| 2 | 0,06123 | 0,06165 | 2,4 | 4 |
| 3 | 0,03443 | 0,03060 | 2,4 | -38 |
| 4 | 0,02449 | 0,02497 | 2,4 | 5 |
| 5 | 0,01913 | 0,02023 | 2,4 | 11 |
| 6 | 0,01574 | 0,01554 | 2,4 | -2 |
| 7 | 0,01339 | 0,01494 | 2,4 | 15 |
| 8 | 0,01166 | 0,01088 | 2,4 | -8 |

A escolha do número de harmônicos que melhor representa o conjunto de dados foi feita com base nos resultados experimentais ilustrados nos gráficos da Fig. III-6. Escolheu-se $m = 8$, pois, como se constata da Fig. III-6(a), este número de harmônicos minimiza a incerteza associada com a amplitude da fundamental (obtida de (II-7-1-2b)), e, por outro lado, não eleva o tempo de medição desnecessariamente. A contribuição de incerteza associada ao ruído (obtida de (II-6-7)) não é reduzida apreciavelmente para $m > 10$ (Fig. III-6(b)). Isto sugere que a parte sistemática do ruído foi ajustada pelo modelo com $m = 10$. A incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC (obtida de (II-2-9)) cresce de forma monotônica para $m > 8$ (Fig. III-6(c)). O mínimo da curva da Fig. III-5(a) é gerado pela composição das curvas das Figs. III-6(b) e III-6(c).

Gráficos da forma de onda amostrada (obtida plotando o vetor de dados y_k para $k = 1$), da forma de onda reconstruída (obtida substituindo as estimativas (II-6-5) em (II-3-2)), e da análise harmônica (obtida de (II-7-1-2a)) são mostrados na Fig. III-7. Os harmônicos acima da fundamental não aparecem devido à escala das ordenadas.

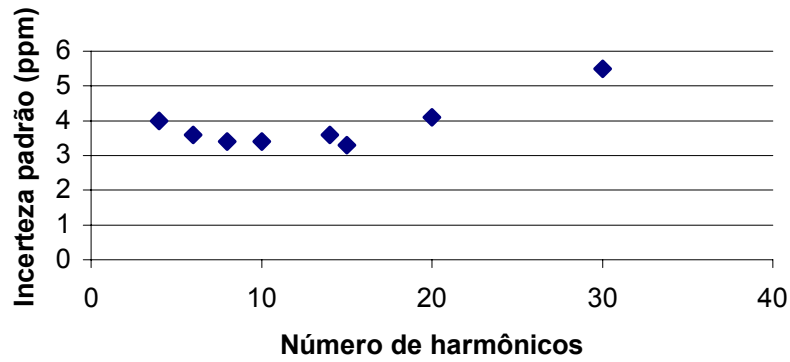


Fig. III-6(a). Incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude da fundamental em função do número de harmônicos.

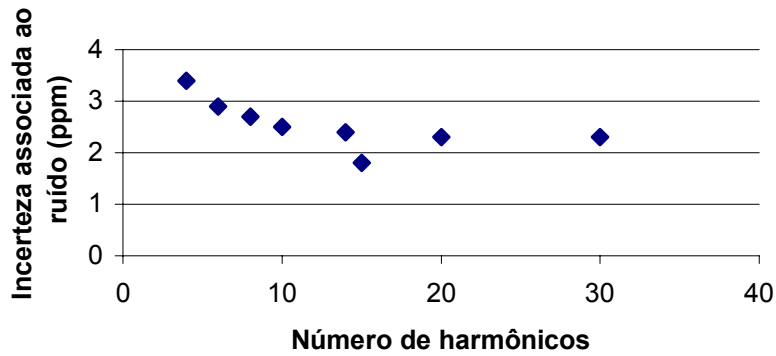


Fig. III-6(b). Incerteza associada ao ruído em função do número de harmônicos.

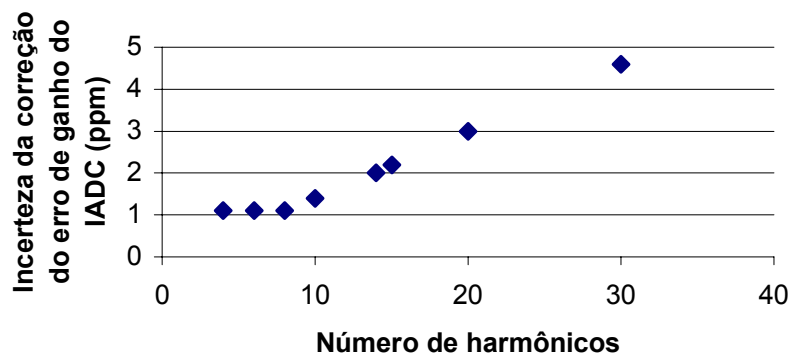


Fig. III-6(c). Incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC em função do número de harmônicos.

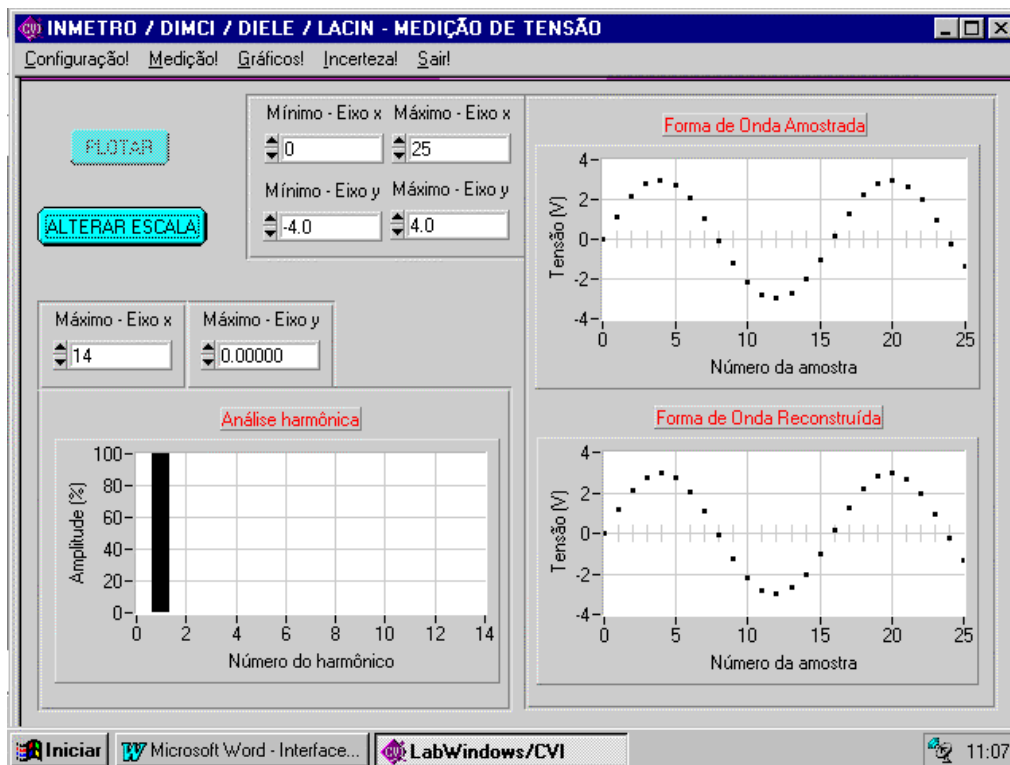


Fig. III-7. Gráficos da forma de onda amostrada e reconstruída (valores não corrigidos) e análise harmônica de um sinal senoidal (versão em degraus).

III-2-3 Sinal parabólico alternado

A forma de onda é

$$f(i) = \begin{cases} 8 \cdot [(i - 1023)/2047] \cdot [1 + 2(i - 1023)/2047], & i = 0, \dots, 1023 \\ 8 \cdot [(i - 1024)/2047] \cdot [1 - 2(i - 1024)/2047], & i = 1024, \dots, 2047 \end{cases} \quad (\text{III-2-3-1})$$

O algoritmo demorou aproximadamente 30 s para avaliar as amplitudes dos primeiros 13 harmônicos. A THD medida foi de 3,7658%. A frequência fundamental na base de tempo do DVM foi medida por um comando interno do DVM como sendo de 59,99890 Hz (frequência calibrada de 59,99992 Hz). O algoritmo selecionou $n = 52$ trens de $N = 336$ amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,0006449$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,0006149$ s). O valor eficaz medido foi de 2,190913 V (obtido de (II-7-1-4)). O valor eficaz da amplitude fundamental (2,189362 V) foi medido com uma incerteza de $2,7 \mu\text{V V}^{-1}$ (obtida de (II-7-1-2b)). As amplitudes dos harmônicos relativas à fundamental foram medidas com uma incerteza de $1,6 \times 10^{-6}$ (obtida de (II-7-1-3)). As diferenças entre os

valores calculados (Apêndice VI) e medidos foram menores do que $3,1 \times 10^{-5}$ relativo à fundamental (Tabela III-5).

Tabela III-5. Valores calculados e medidos para um sinal parabólico alternado.

| N ^o Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) |
|-------------------------|---------------|---------------|---------------------------|-----------------------|
| | Calc. | Med.(d_j) | | |
| 1 | 100,000 | 100,000 | - | - |
| 2 | 0,06031 | 0,06009 | 1,6 | -3 |
| 3 | 3,66795 | 3,67116 | 1,6 | 31 |
| 4 | 0,03016 | 0,02957 | 1,6 | -6 |
| 5 | 0,77683 | 0,77588 | 1,6 | -9 |
| 6 | 0,02010 | 0,02028 | 1,6 | 2 |
| 7 | 0,27466 | 0,27328 | 1,6 | -14 |
| 8 | 0,01508 | 0,01493 | 1,6 | -2 |
| 9 | 0,12393 | 0,12514 | 1,6 | 12 |
| 10 | 0,01206 | 0,01277 | 1,6 | 7 |
| 11 | 0,06425 | 0,06615 | 1,6 | 19 |
| 12 | 0,01005 | 0,00966 | 1,6 | -4 |
| 13 | 0,03629 | 0,03889 | 1,6 | 26 |

A escolha do número de harmônicos que melhor representa o conjunto de dados foi feita com base nos resultados experimentais ilustrados nos gráficos da Fig. III-8. Escolheu-se $m = 13$, pois a incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude da fundamental (obtida de (II-7-1-2b)) é minimizada com esta escolha (Fig. III-8(a)).

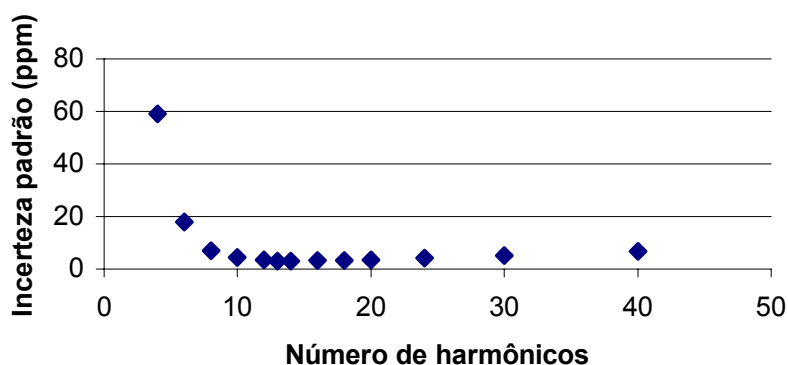


Fig. III-8(a). Incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude da fundamental em função do número de harmônicos.

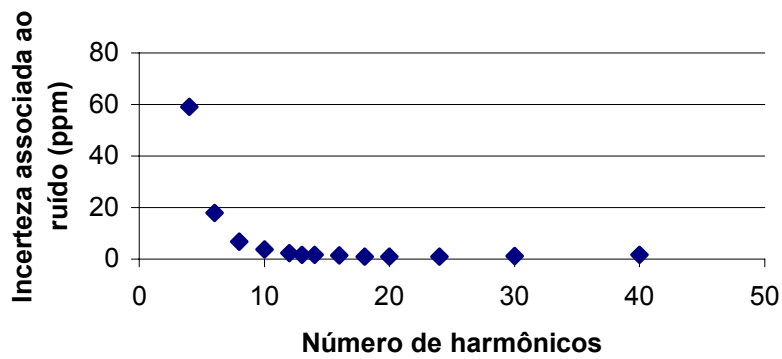


Fig. III-8(b). Incerteza associada ao ruído em função do número de harmônicos.

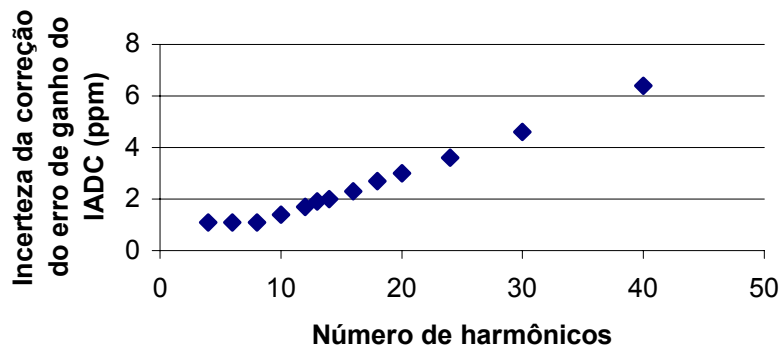


Fig. III-8(c). Incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC em função do número de harmônicos.

A contribuição de incerteza associada ao ruído (obtida de (II-6-7)) sofre uma queda considerável à medida que aumenta o número de harmônicos, mas não é reduzida apreciavelmente para $m > 13$ (Fig. III-8(b)). Isto sugere que a parte sistemática do ruído foi ajustada pelo modelo com $m = 13$. A incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC (obtida de (II-2-9)) cresce de forma monotônica para $m > 8$ (Fig. III-8(c)). Isto se deve à redução do tempo de abertura do IADC, à medida em que aumenta o número de harmônicos (como visto na seção II-10). O mínimo da curva da Fig. III-8(a) é gerado pela composição das curvas das Figs. III-8(b) e III-8(c).

Gráficos da forma de onda amostrada (obtida plotando o vetor de dados y_k para $k = 1$), da forma de onda reconstruída (obtida substituindo as estimativas (II-6-5) em (II-3-2)), e da análise harmônica (obtida de (II-7-1-2a)) são mostrados na Fig. III-9.

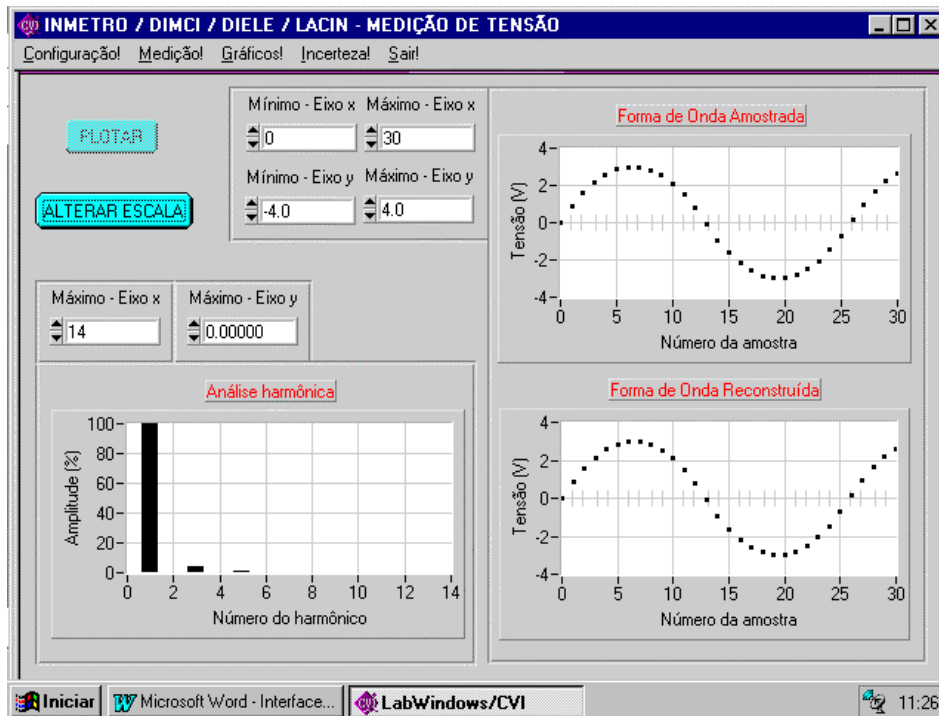


Fig. III-9. Gráficos da forma de onda amostrada e reconstruída (valores não corrigidos para os efeitos sistemáticos) e da análise harmônica para um sinal parabólico alternado.

O autor tem sido questionado quanto a possibilidade de se reduzir, por exemplo, pela metade o número de trens de amostras recomendado ($n = 4m$). Isto resultaria em um menor tempo de medição. O experimento que se segue teve por fim investigar as conseqüências desta redução para o exemplo específico de um sinal de baixa distorção de 100 Hz com a mesma forma de onda descrita em (1). Escolheu-se $m = 11$, pois a incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude da fundamental é minimizada com esta escolha. (A propósito, convém ressaltar que o valor ótimo de m também depende do valor da freqüência fundamental. À medida que esta última aumenta, o tempo de abertura diminui, aumentando a contribuição do erro de ganho do IADC e reduzindo o número de harmônicos que minimiza a incerteza associada com a amplitude da fundamental.). Primeiramente, mediu-se as amplitudes dos 11 harmônicos com 44 trens de amostras. E então, repetiu-se a medição com 22 trens de amostras. A diferença entre os resultados consta da Tabela III-6. A diferença excede a incerteza de medição para o sétimo, nono e décimo primeiro harmônicos. Esta diferença ocorre devido ao *aliasing* nos harmônicos superiores. Com a escolha de 22 trens de amostras, o algoritmo só está protegido contra erros de *aliasing* até $m = 22/4 = 5$, ou seja, até o quinto harmônico. Quanto mais distorcido o sinal, mais críticos são os erros de *aliasing*.

Tabela III-6. Valores medidos com 44 e 22 trens de amostras.

| N ^o Harm. | N ^o trens de amostras | | $u(d_j)$ (10 ⁻⁶) | Erro (10 ⁻⁶) |
|-------------------------|----------------------------------|---------|---------------------------------|-----------------------------|
| | 44 | 22 | | |
| 1 | 100,000 | 100,000 | - | - |
| 2 | 0,06013 | 0,06010 | 2,3 | -0,3 |
| 3 | 3,67110 | 3,67111 | 2,3 | 0,1 |
| 4 | 0,02963 | 0,02959 | 2,3 | -0,4 |
| 5 | 0,77600 | 0,77584 | 2,3 | -1,6 |
| 6 | 0,02021 | 0,02016 | 2,3 | -0,5 |
| 7 | 0,27345 | 0,27319 | 2,3 | -2,6 |
| 8 | 0,01491 | 0,01480 | 2,3 | -1,1 |
| 9 | 0,12515 | 0,12466 | 2,3 | -4,9 |
| 10 | 0,01270 | 0,01255 | 2,3 | -1,5 |
| 11 | 0,06610 | 0,06499 | 2,3 | -11 |

III-2-4 Sinal retificado em meia onda

A forma de onda é¹⁶

$$f(i) = \begin{cases} -0,1 + \sin(2\pi i/2047), & i = 0, \dots, 1022 \\ -0,1, & i = 1023, \dots, 2047 \end{cases} \quad (\text{II-2-4-1})$$

O algoritmo demorou aproximadamente 1 min 10 s para avaliar as amplitudes dos primeiros 42 harmônicos. A THD medida foi de 43,5642%. A frequência fundamental na base de tempo do DVM foi medida como sendo de 59,99888 Hz (frequência calibrada de 59,99990 Hz). O algoritmo selecionou $n = 168$ trens de $N = 167$ amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,0001996$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,0001696$ s). O valor eficaz medido foi de 1,157247 V (obtido de (II-7-1-4)). O valor eficaz da amplitude fundamental (1,060943 V) foi medido com uma incerteza de $9,2 \mu\text{V V}^{-1}$ (obtida de (II-7-1-2b)). As amplitudes dos harmônicos relativas à fundamental foram medidas com uma incerteza menor do que $6,7 \times 10^{-6}$ (obtida de (II-7-1-3)). As diferenças entre os valores calculados (Apêndice VI) e medidos foram menores do que $5,9 \times 10^{-5}$ relativo à fundamental (Tabela III-7).

¹⁶ A forma de onda do sinal foi sintetizada de modo a apresentar um cruzamento pelo nulo. O algoritmo mede a frequência fundamental do sinal por meio de técnicas de cruzamento pelo nulo. Recentemente,

Tabela III-7. Valores calculados e medidos para um sinal retificado em meia onda.

| N ^o Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10 ⁻⁶) | Erro (10 ⁻⁶) | N ^o Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10 ⁻⁶) | Erro (10 ⁻⁶) |
|-------------------------|---------------|---------------|---------------------------------|-----------------------------|-------------------------|---------------|---------------|---------------------------------|-----------------------------|
| | Calc. | Med.(d_j) | | | | Calc. | Med.(d_j) | | |
| 1 | 100,000 | 100,000 | - | - | 22 | 0,26405 | 0,26722 | 6,1 | 32 |
| 2 | 42,4838 | 42,4783 | 6,6 | -55 | 23 | 0,00402 | 0,00575 | 6,1 | 17 |
| 3 | 0,03444 | 0,02854 | 6,1 | -59 | 24 | 0,22185 | 0,22284 | 6,1 | 10 |
| 4 | 8,49489 | 8,49682 | 6,1 | 19 | 25 | 0,00371 | 0,00538 | 6,1 | 17 |
| 5 | 0,01914 | 0,01923 | 6,1 | 1 | 26 | 0,18902 | 0,18889 | 6,1 | -1 |
| 6 | 3,64069 | 3,63896 | 6,1 | -17 | 27 | 0,00343 | 0,00433 | 6,1 | 9 |
| 7 | 0,01340 | 0,01165 | 6,1 | -17 | 28 | 0,16298 | 0,16281 | 6,1 | -2 |
| 8 | 2,02270 | 2,02141 | 6,1 | -13 | 29 | 0,00320 | 0,00392 | 6,1 | 7 |
| 9 | 0,01034 | 0,00767 | 6,1 | -27 | 30 | 0,14199 | 0,14165 | 6,1 | -3 |
| 10 | 1,28726 | 1,28723 | 6,1 | -5 | 31 | 0,00300 | 0,00364 | 6,1 | 6 |
| 11 | 0,00843 | 0,00532 | 6,1 | -31 | 32 | 0,12481 | 0,12425 | 6,1 | -6 |
| 12 | 0,89126 | 0,89390 | 6,1 | 26 | 33 | 0,00282 | 0,00322 | 6,1 | 4 |
| 13 | 0,00712 | 0,00765 | 6,1 | 5 | 34 | 0,11057 | 0,10983 | 6,1 | -7 |
| 14 | 0,65366 | 0,65351 | 6,1 | -1 | 35 | 0,00266 | 0,00283 | 6,1 | 2 |
| 15 | 0,00616 | 0,00543 | 6,1 | -7 | 36 | 0,09865 | 0,09776 | 6,1 | -9 |
| 16 | 0,49992 | 0,49960 | 6,1 | -3 | 37 | 0,00252 | 0,00223 | 6,1 | -3 |
| 17 | 0,00544 | 0,00348 | 6,1 | -20 | 38 | 0,08856 | 0,08753 | 6,1 | -10 |
| 18 | 0,39472 | 0,39643 | 6,1 | 17 | 39 | 0,00240 | 0,00131 | 6,1 | -11 |
| 19 | 0,00487 | 0,00445 | 6,1 | -4 | 40 | 0,07994 | 0,08026 | 6,1 | 3 |
| 20 | 0,31959 | 0,32030 | 6,1 | 7 | 41 | 0,00228 | 0,00200 | 6,1 | -3 |
| 21 | 0,00440 | 0,00279 | 6,1 | -16 | 42 | 0,07253 | 0,07246 | 6,1 | -1 |

A escolha do número de harmônicos que melhor representa o conjunto de dados foi feita com base nos resultados experimentais ilustrados nos gráficos da Fig. III-9. Escolheu-se $m = 42$, pois a incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude da fundamental (obtida de (II-7-1-2b)) é minimizada com esta escolha (Fig. III-10(a)). A contribuição de incerteza associada ao ruído (obtida de (II-6-7)) sofre uma queda considerável à medida que aumenta o número de harmônicos, mas não é reduzida apreciavelmente para $m > 50$ (Fig. III-10(b)). Isto sugere que a parte sistemática do ruído foi ajustada pelo modelo com $m = 50$. A incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC (obtida de (II-2-9)) cresce de forma monotônica (Fig. III-10(c)). Isto se deve à redução do tempo de abertura do IADC, à medida que aumenta o número de harmônicos (como visto na seção II-10). O mínimo da curva da Fig. III-10(a) é gerado pela composição das curvas das Figs. III-10(b) e III-10(c).

uma alteração foi feita no algoritmo de modo que a frequência fundamental do sinal pode ser medida por técnicas de cruzamento de um nível C.C. arbitrário selecionado pelo usuário.

Gráficos da forma de onda amostrada (obtida plotando o vetor de dados y_k para $k = 1$), da forma de onda reconstruída (obtida substituindo as estimativas (II-6-5) em (II-3-2)), e da análise harmônica (obtida de (II-7-1-2a)) são mostrados na Fig. III-11.

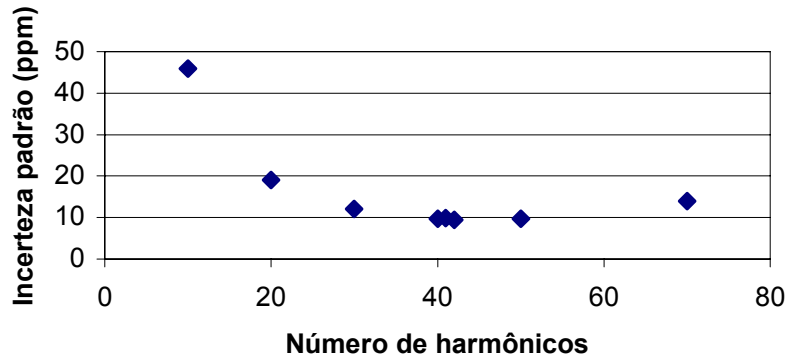


Fig. III-10(a). Incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude da fundamental em função do número de harmônicos.

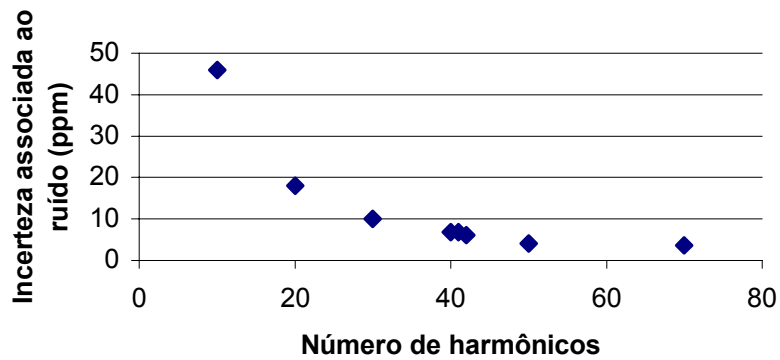


Fig. III-10(b). Incerteza associada ao ruído em função do número de harmônicos.

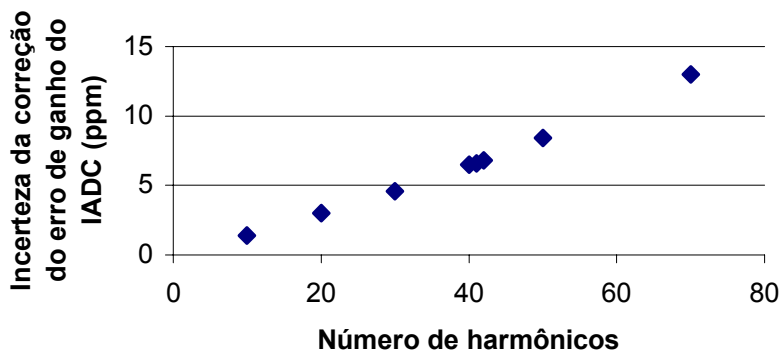


Fig. III-10(c). Incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC em função do número de harmônicos.

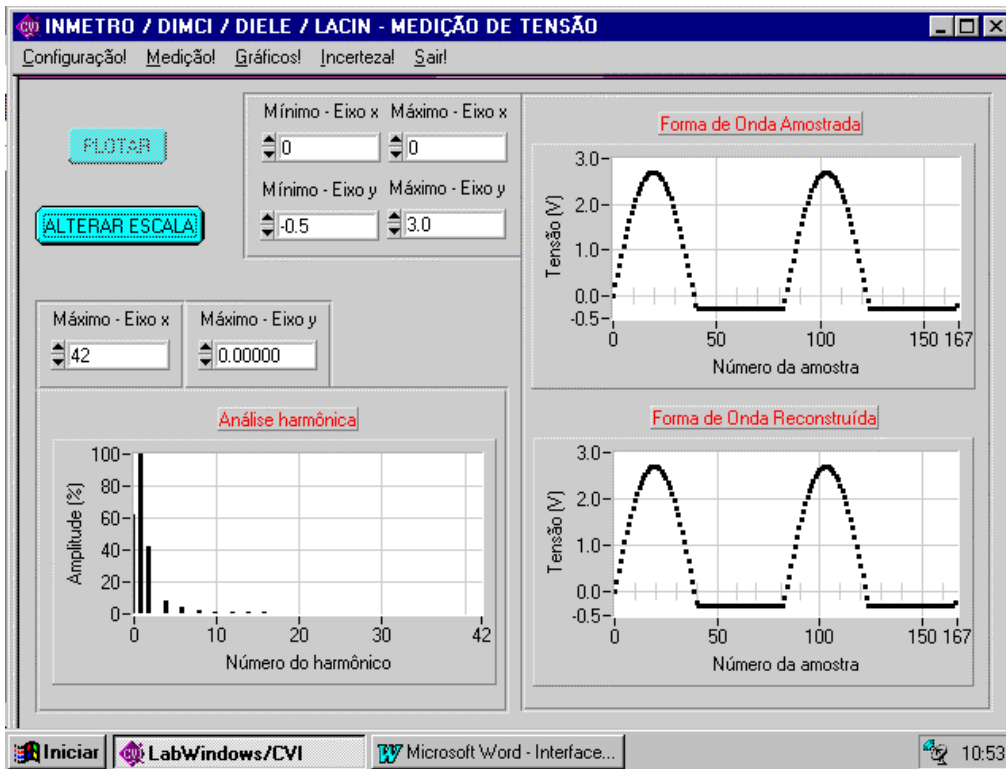


Fig. III-11. Gráficos da forma de onda amostrada e reconstruída (valores não corrigidos para os efeitos sistemáticos) e da análise harmônica para um sinal retificado em meia onda (com componente C.C.) ($m = 42$).

É interessante examinar como ficam os valores numéricos quando se escolhe $m = 64$. O algoritmo demorou aproximadamente 1 min 52 s para avaliar as amplitudes dos primeiros 64 harmônicos. A THD medida foi de 43,5645%. A frequência fundamental na base de tempo do DVM foi de 59,998909 Hz (frequência calibrada de 59,99993 Hz). O algoritmo selecionou $n = 256$ trens de $N = 168$ amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,0001303$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,0001003$ s). Observe que o tempo de abertura ainda está um pouco acima do limiar de utilização do conversor A/D de baixa velocidade (vide seção II-10). Este limiar é ultrapassado para $m > 64$, passando então a atuar o conversor A/D de alta velocidade (de menor exatidão). O valor eficaz medido foi de 1,157250 V (obtido de (II-7-1-4)). O valor eficaz da amplitude fundamental (1,060944 V) foi medido com uma incerteza de $13 \mu\text{V V}^{-1}$ (obtida de (II-7-1-2b)). As amplitudes dos harmônicos relativas à fundamental foram medidas com uma incerteza de $5,4 \times 10^{-6}$ (obtida de (II-7-1-3)). As diferenças entre os valores calculados e medidos foram menores que $6,0 \times 10^{-5}$ relativo à fundamental (Tabela III-8).

Gráficos da forma de onda amostrada (obtida plotando o vetor de dados y_k para $k = 1$), da forma de onda reconstruída (obtida substituindo as estimativas (II-6-5) em (II-3-2)), e da análise harmônica (obtida de (II-7-1-2a)) são mostrados na Fig. III-12. O aumento do número de harmônicos reduziu a imperfeição das formas de onda mostrada na Fig. III-11.

Tabela III-8. Valores calculados e medidos para um sinal retificado em meia onda.

| Nº Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) | Nº Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) |
|----------|---------------|---------------|---------------------------|-----------------------|----------|---------------|---------------|---------------------------|-----------------------|
| | Calc. | Med.(d_j) | | | | Calc. | Med.(d_j) | | |
| 1 | 100,000 | 100,000 | - | - | 33 | 0,00282 | 0,00314 | 5,4 | 3 |
| 2 | 42,4838 | 42,4782 | 5,9 | -56 | 34 | 0,11057 | 0,11013 | 5,4 | -4 |
| 3 | 0,03444 | 0,02846 | 5,4 | -60 | 35 | 0,00266 | 0,00292 | 5,4 | 3 |
| 4 | 8,49489 | 8,49689 | 5,4 | 20 | 36 | 0,09865 | 0,09816 | 5,4 | -5 |
| 5 | 0,01914 | 0,01927 | 5,4 | 13 | 37 | 0,00252 | 0,00264 | 5,4 | 1 |
| 6 | 3,64069 | 3,63908 | 5,4 | -16 | 38 | 0,08856 | 0,08755 | 5,4 | -10 |
| 7 | 0,01340 | 0,01168 | 5,4 | -17 | 39 | 0,00240 | 0,00129 | 5,4 | -11 |
| 8 | 2,02270 | 2,02127 | 5,4 | -14 | 40 | 0,07994 | 0,08037 | 5,4 | 4 |
| 9 | 0,01034 | 0,00746 | 5,4 | -29 | 41 | 0,00228 | 0,00222 | 5,4 | -1 |
| 10 | 1,28726 | 1,28748 | 5,4 | 2 | 42 | 0,07253 | 0,07250 | 5,4 | 0 |
| 11 | 0,00843 | 0,00526 | 5,4 | -32 | 43 | 0,00218 | 0,00180 | 5,4 | -4 |
| 12 | 0,89126 | 0,89422 | 5,4 | 30 | 44 | 0,06610 | 0,06714 | 5,4 | 10 |
| 13 | 0,00712 | 0,00795 | 5,4 | 8 | 45 | 0,00209 | 0,00208 | 5,4 | 0 |
| 14 | 0,65366 | 0,65330 | 5,4 | -4 | 46 | 0,06050 | 0,06171 | 5,4 | 12 |
| 15 | 0,00616 | 0,00522 | 5,4 | -9 | 47 | 0,00200 | 0,00327 | 5,4 | 13 |
| 16 | 0,49992 | 0,49963 | 5,4 | -3 | 48 | 0,05558 | 0,05571 | 5,4 | 1 |
| 17 | 0,00544 | 0,00334 | 5,4 | -21 | 49 | 0,00192 | 0,00317 | 5,4 | 13 |
| 18 | 0,39472 | 0,39656 | 5,4 | 18 | 50 | 0,05124 | 0,05017 | 5,4 | -11 |
| 19 | 0,00487 | 0,00429 | 5,4 | 6 | 51 | 0,00185 | 0,00180 | 5,4 | -1 |
| 20 | 0,31959 | 0,32059 | 5,4 | 10 | 52 | 0,04739 | 0,04703 | 5,4 | -4 |
| 21 | 0,00440 | 0,00289 | 5,4 | -15 | 53 | 0,00179 | 0,00172 | 5,4 | -1 |
| 22 | 0,26405 | 0,26739 | 5,4 | 33 | 54 | 0,04397 | 0,04460 | 5,4 | 6 |
| 23 | 0,00402 | 0,00592 | 5,4 | 19 | 55 | 0,00173 | 0,00384 | 5,4 | 21 |
| 24 | 0,22185 | 0,22297 | 5,4 | 11 | 56 | 0,04090 | 0,03797 | 5,4 | -29 |
| 25 | 0,00371 | 0,00557 | 5,4 | 19 | 57 | 0,00167 | 0,00067 | 5,4 | -10 |
| 26 | 0,18902 | 0,18892 | 5,4 | -1 | 58 | 0,03814 | 0,03845 | 5,4 | 3 |
| 27 | 0,00343 | 0,00421 | 5,4 | 8 | 59 | 0,00162 | 0,00111 | 5,4 | -5 |
| 28 | 0,16298 | 0,16295 | 5,4 | 0 | 60 | 0,03566 | 0,03573 | 5,4 | 1 |
| 29 | 0,00320 | 0,00385 | 5,4 | 7 | 61 | 0,00157 | 0,00094 | 5,4 | -6 |
| 30 | 0,14199 | 0,14217 | 5,4 | 2 | 62 | 0,03341 | 0,03368 | 5,4 | 3 |
| 31 | 0,00300 | 0,00398 | 5,4 | 10 | 63 | 0,00152 | 0,00103 | 5,4 | -5 |
| 32 | 0,12481 | 0,12417 | 5,4 | -6 | 64 | 0,03137 | 0,03219 | 5,4 | 8 |

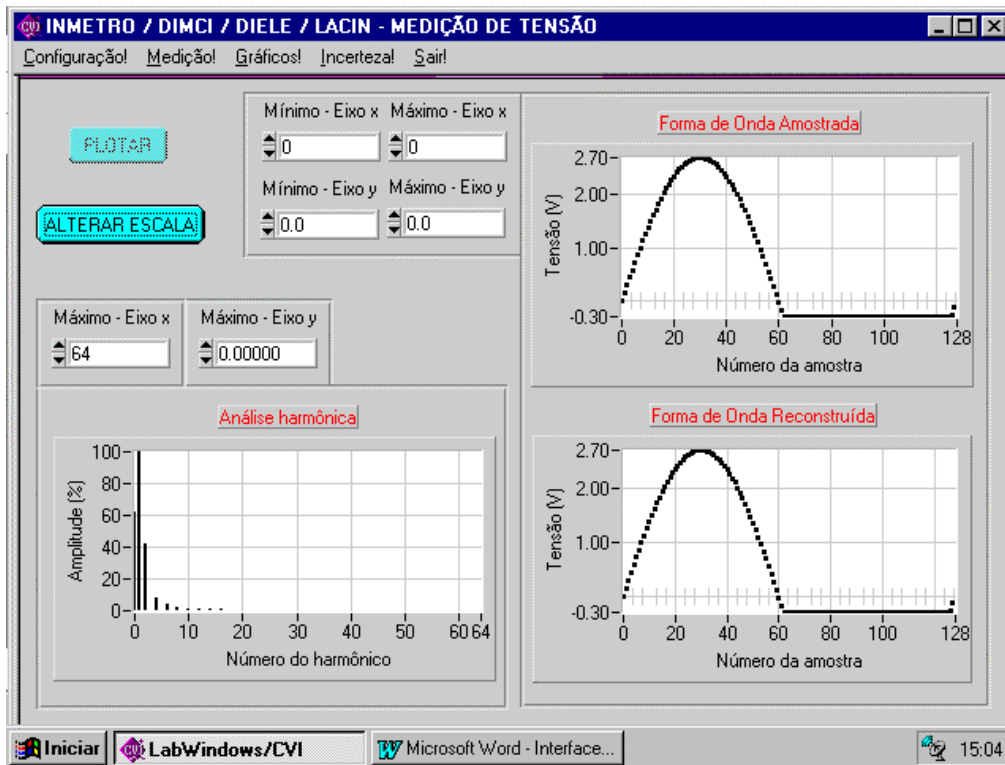


Fig. III-12. Gráficos da forma de onda amostrada e reconstruída (valores não corrigidos para os efeitos sistemáticos) e da análise harmônica para um sinal retificado em meia onda (com componente C.C.) ($m = 64$).

III-2-5 Sinal de triac

A forma de onda é

$$f(i) = \begin{cases} 0 & i = 0, \dots, 491 \\ 0,05 + 0,05 \cdot (i - 492) & i = 492, \dots, 510 \\ \sin(2\pi i / 2047) & i = 511, \dots, 1023 \\ 0 & i = 1024, \dots, 1515 \\ -0,05 - 0,05 \cdot (i - 1516) & i = 1516, \dots, 1535 \\ \sin(2\pi i / 2047) & i = 1536, \dots, 2047 \end{cases} \quad (\text{III-2-5-1})$$

O algoritmo demorou aproximadamente 4 min 25 s para avaliar as amplitudes dos primeiros 100 harmônicos. A THD medida foi de 61,8093%. A frequência fundamental na base de tempo do DVM foi de 59,99887 Hz (frequência calibrada de 59,99989 Hz). O algoritmo selecionou $n = 400$ trens de $N = 200$ amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,0000834$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,0000534$ s). Observe que o tempo de abertura está abaixo do limiar de 100 μs . O conversor A/D de alta velocidade (que possui menor

exatidão) foi usado neste caso. O valor eficaz medido foi de 1,520130 V (obtido de (II-7-1-4)). O valor eficaz da amplitude fundamental (1,293065 V) foi medido com uma incerteza de $37 \mu\text{V V}^{-1}$ (obtida de (II-7-1-2b)). As amplitudes dos harmônicos relativas à fundamental foram medidas com uma incerteza menor do que $2,6 \times 10^{-5}$ (obtida de (II-7-1-3)). As diferenças entre os valores calculados (Apêndice VI) e medidos foram menores do que $5,8 \times 10^{-5}$ relativo à fundamental (Tabela III-9).

A escolha do número de harmônicos que melhor representa o conjunto de dados foi feita com base nos resultados experimentais ilustrados nos gráficos da Fig. III-13. Escolheu-se $m = 100$, pois a incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude da fundamental (obtida de (II-7-1-2b)) é minimizada com esta escolha (Fig. III-13(a)). A contribuição de incerteza associada ao ruído (obtida de II-6-7)) sofre uma queda considerável à medida que aumenta o número de harmônicos, mas não é reduzida apreciavelmente para $m > 100$ (Fig. III-13(b)). Isto sugere que a parte sistemática do ruído foi ajustada pelo modelo com $m = 100$. A incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC (obtida de (II-2-9)) cresce de forma monotônica (Fig. III-13(c)). Isto se deve à redução do tempo de abertura do IADC, à medida que aumenta o número de harmônicos (como visto na seção II-10). O mínimo da Fig. III-13(a) é gerado pela composição das Figs. III-13(b) e III-13(c).

Gráficos da forma de onda amostrada (obtida plotando o vetor de dados \mathbf{y}_k para $k = 1$), da forma de onda reconstruída (obtida substituindo as estimativas (II-6-5) em (II-3-2)), e da análise harmônica (obtida de (II-7-1-2a)) são mostrados na Fig. III-14.

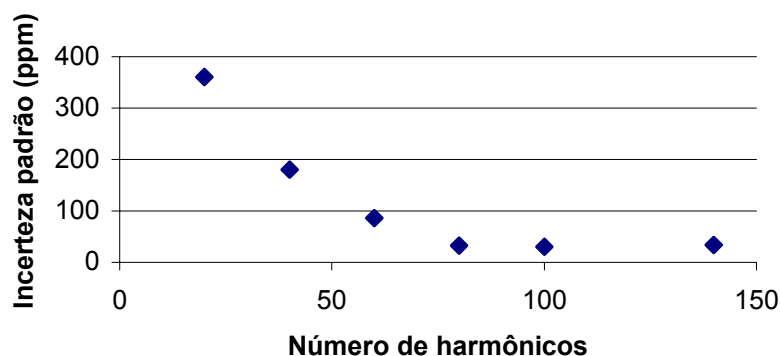


Fig. III-13(a). Incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude da fundamental em função do número de harmônicos.

Tabela III-9. Valores calculados e medidos para um sinal de triac.

| Nº Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) | Nº Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) |
|----------|---------------|---------------|---------------------------|-----------------------|----------|---------------|---------------|---------------------------|-----------------------|
| | Calc. | Med.(d_j) | | | | Calc. | Med.(d_j) | | |
| 1 | 100,000 | 100,000 | - | - | 51 | 1,30876 | 1,3046 | 21 | -42 |
| 2 | 0,05612 | 0,0601 | 21 | 39 | 52 | 0,00145 | 0,0014 | 21 | 0 |
| 3 | 52,1168 | 52,1157 | 26 | -12 | 53 | 1,21534 | 1,2103 | 21 | -50 |
| 4 | 0,02069 | 0,0165 | 21 | -42 | 54 | 0,00139 | 0,0015 | 21 | 1 |
| 5 | 17,3707 | 17,3677 | 21 | -30 | 55 | 1,11135 | 1,1089 | 21 | -24 |
| 6 | 0,01308 | 0,0142 | 21 | 12 | 56 | 0,00135 | 0,0011 | 21 | -3 |
| 7 | 17,2371 | 17,2335 | 21 | -36 | 57 | 1,03988 | 1,0356 | 21 | -42 |
| 8 | 0,00964 | 0,0062 | 21 | -34 | 58 | 0,00130 | 0,0017 | 21 | 4 |
| 9 | 10,3458 | 10,3470 | 21 | 12 | 59 | 0,94277 | 0,9379 | 21 | -49 |
| 10 | 0,00764 | 0,0091 | 21 | 15 | 60 | 0,00126 | 0,0017 | 21 | 4 |
| 11 | 10,2112 | 10,2085 | 21 | -27 | 61 | 0,88484 | 0,8813 | 21 | -35 |
| 12 | 0,00634 | 0,0054 | 21 | -10 | 62 | 0,00121 | 0,0015 | 21 | 2 |
| 13 | 7,29683 | 7,2969 | 21 | -14 | 63 | 0,79265 | 0,7881 | 21 | -45 |
| 14 | 0,00542 | 0,0067 | 21 | 13 | 64 | 0,00118 | 0,0023 | 21 | 12 |
| 15 | 7,16441 | 7,1620 | 21 | -24 | 65 | 0,74718 | 0,7434 | 21 | -38 |
| 16 | 0,00473 | 0,0042 | 21 | -6 | 66 | 0,00114 | 0,0012 | 21 | 1 |
| 17 | 5,57724 | 5,5742 | 21 | -31 | 67 | 0,66006 | 0,6562 | 21 | -38 |
| 18 | 0,00420 | 0,0041 | 21 | -1 | 68 | 0,00111 | 0,0017 | 21 | 6 |
| 19 | 5,44484 | 5,4422 | 21 | -26 | 69 | 0,62458 | 0,6209 | 21 | -37 |
| 20 | 0,00378 | 0,0032 | 21 | -6 | 70 | 0,00108 | 0,0011 | 21 | 1 |
| 21 | 4,45990 | 4,4570 | 21 | -29 | 71 | 0,54265 | 0,5395 | 21 | -32 |
| 22 | 0,00432 | 0,0045 | 21 | 1 | 72 | 0,00105 | 0,0010 | 21 | -1 |
| 23 | 4,32295 | 4,3255 | 21 | 26 | 73 | 0,51521 | 0,5124 | 21 | -28 |
| 24 | 0,00315 | 0,0029 | 21 | -3 | 74 | 0,00102 | 0,0006 | 21 | -4 |
| 25 | 3,66841 | 3,6645 | 21 | -39 | 75 | 0,43854 | 0,4355 | 21 | -31 |
| 26 | 0,00290 | 0,0025 | 21 | -5 | 76 | 0,00099 | 0,0009 | 21 | -1 |
| 27 | 3,54037 | 3,5369 | 21 | -34 | 77 | 0,41762 | 0,4139 | 21 | -38 |
| 28 | 0,00269 | 0,0028 | 21 | 1 | 78 | 0,00097 | 0,0012 | 21 | 2 |
| 29 | 3,07325 | 3,0676 | 21 | -57 | 79 | 0,34626 | 0,3442 | 21 | -21 |
| 30 | 0,00251 | 0,0024 | 21 | -1 | 80 | 0,00094 | 0,0023 | 21 | 14 |
| 31 | 2,94798 | 2,9435 | 21 | -45 | 81 | 0,33062 | 0,3281 | 21 | -25 |
| 32 | 0,00236 | 0,0026 | 21 | 3 | 82 | 0,00092 | 0,0021 | 21 | 11 |
| 33 | 2,60594 | 2,6020 | 21 | -40 | 83 | 0,26457 | 0,2621 | 21 | -25 |
| 34 | 0,00222 | 0,0019 | 21 | -4 | 84 | 0,00090 | 0,0008 | 21 | -1 |
| 35 | 2,48382 | 2,4791 | 21 | -47 | 85 | 0,25321 | 0,2503 | 21 | -29 |
| 36 | 0,00209 | 0,0023 | 21 | 2 | 86 | 0,00088 | 0,0010 | 21 | 1 |
| 37 | 2,22270 | 2,2227 | 21 | 0 | 87 | 0,19247 | 0,1897 | 21 | -27 |
| 38 | 0,00198 | 0,0024 | 21 | 4 | 88 | 0,00086 | 0,0006 | 21 | -3 |
| 39 | 2,10832 | 2,1027 | 21 | -56 | 89 | 0,18456 | 0,1830 | 21 | -15 |
| 40 | 0,00188 | 0,0029 | 21 | 10 | 90 | 0,00084 | 0,0012 | 21 | 4 |
| 41 | 1,91188 | 1,9071 | 21 | -48 | 91 | 0,12909 | 0,1275 | 21 | -15 |
| 42 | 0,00179 | 0,0030 | 21 | 12 | 92 | 0,00082 | 0,0006 | 21 | -2 |
| 43 | 1,79703 | 1,7928 | 21 | -42 | 93 | 0,12396 | 0,1222 | 21 | -17 |
| 44 | 0,00171 | 0,0018 | 21 | -5 | 94 | 0,00080 | 0,0003 | 21 | -5 |
| 45 | 1,64487 | 1,6401 | 21 | -48 | 95 | 0,07368 | 0,0714 | 21 | -23 |
| 46 | 0,00164 | 0,0024 | 21 | 7 | 96 | 0,00078 | 0,0006 | 21 | -2 |
| 47 | 1,53410 | 1,5288 | 21 | -53 | 97 | 0,07077 | 0,0695 | 21 | -13 |
| 48 | 0,00157 | 0,0004 | 21 | -12 | 98 | 0,00077 | 0,0016 | 21 | 9 |
| 49 | 1,41515 | 1,4093 | 21 | -58 | 99 | 0,02559 | 0,0236 | 21 | -20 |
| 50 | 0,00151 | 0,0023 | 21 | 8 | 100 | 0,00075 | 0,0017 | 21 | 9 |

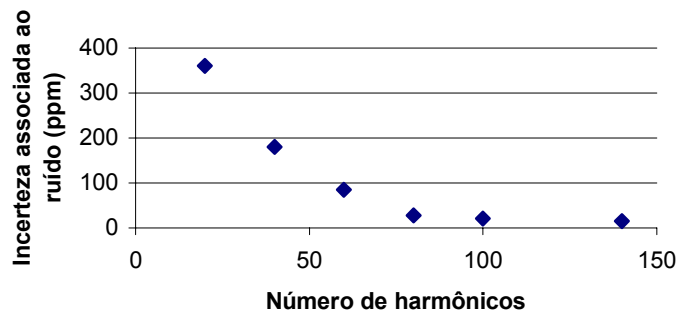


Fig. III-13(b). Incerteza associada ao ruído em função do número de harmônicos.

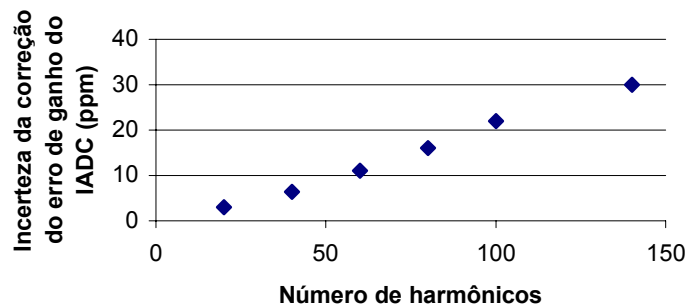


Fig. III-13(c). Incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC em função do número de harmônicos.

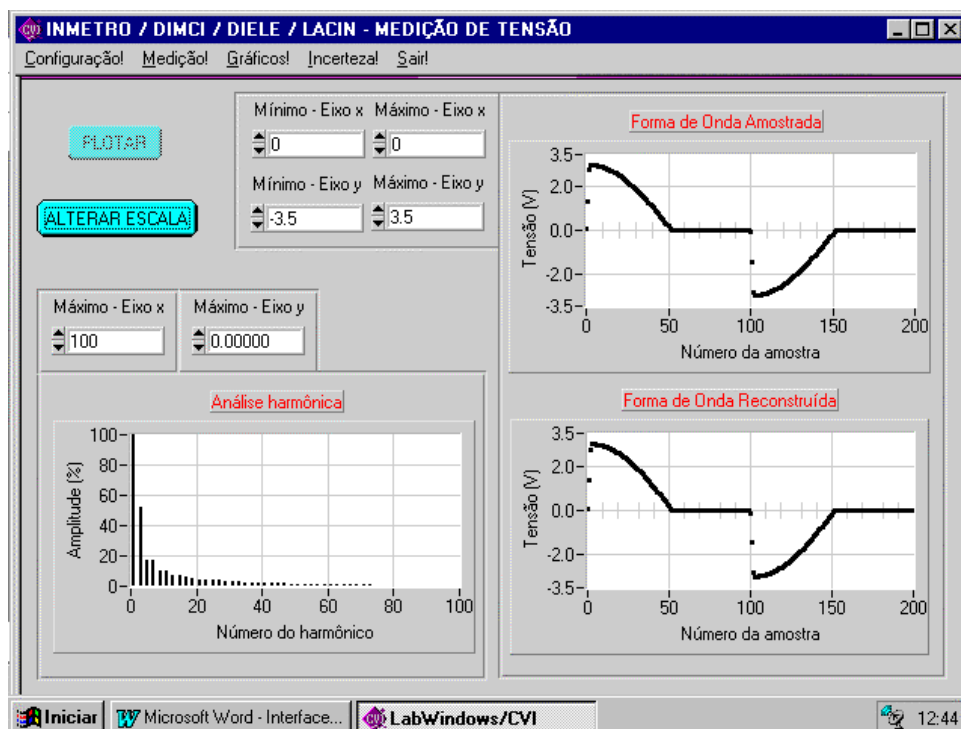


Fig. III-14. Gráficos da forma de onda amostrada e reconstruída (valores não corrigidos para os efeitos sistemáticos) e da análise harmônica para um sinal de triac.

III-2-6 Sinal trapezoidal

A forma de onda é

$$f(i) = \begin{cases} 0,05 i & i = 0, \dots, 19 \\ 1,0 & i = 20, \dots, 2003 \\ 1,0 - 0,05 \cdot (i - 1004) & i = 1004, \dots, 1023 \\ -0,05 \cdot (i - 1024) & i = 1024, \dots, 1043 \\ -1,0 & i = 1044, \dots, 2028 \\ -1,0 + 0,05 \cdot (i - 2028) & i = 2029, \dots, 2047 \end{cases} \quad (\text{III-2-6-1})$$

O algoritmo demorou aproximadamente 2 min 45 s para avaliar as amplitudes dos primeiros 80 harmônicos. A THD medida foi de 45,0567%. A frequência fundamental na base de tempo do DVM foi de 59,99885 Hz (frequência calibrada de 59,99987 Hz). O algoritmo selecionou $n = 320$ trens de $N = 160$ amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,0001043$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,0000743$ s). Observe que o tempo de abertura está abaixo do limiar de 100 μs . O conversor A/D de alta velocidade (que possui menor exatidão) foi usado neste caso. O valor eficaz medido foi de 2,961312 V (obtido de (II-7-1-4)). O valor eficaz da amplitude fundamental (2,699911 V) foi medido com uma incerteza de 26 $\mu\text{V V}^{-1}$ (obtida de (II-7-1-2b)). As amplitudes dos harmônicos relativas à fundamental foram medidas com uma incerteza menor do que $2,2 \times 10^{-5}$ (obtida de (II-7-1-3)). As diferenças entre os valores calculados (Apêndice VI) e medidos foram menores do que $3,3 \times 10^{-5}$ relativo à fundamental (Tabela III-10). Esta forma de onda tem ciclo de trabalho de 50% e, portanto, harmônicos pares teoricamente nulos.

A escolha do número de harmônicos que melhor representa o conjunto de dados foi feita com base nos resultados experimentais ilustrados nos gráficos da Fig. III-15. Escolheu-se $m = 80$, pois a incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude da fundamental (obtida de (II-7-1-2b)) é minimizada com esta escolha (Fig. III-15(a)). A contribuição de incerteza associada ao ruído (obtida de II-6-7)) sofre uma queda considerável à medida que aumenta o número de harmônicos, mas não é reduzida apreciavelmente para $m > 80$ (Fig. III-15(b)). Isto sugere que a parte sistemática do ruído foi aproximadamente ajustada pelo modelo com $m = 80$. A incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC (obtida de (II-2-9)) cresce de forma monotônica (Fig. III-15(c)). Isto se deve à redução do tempo de abertura do IADC, à

medida que aumenta o número de harmônicos (como visto na seção II-10). O mínimo da Fig. III-15(a) é gerado pela composição das Figs. III-15(b) e III-15(c).

Tabela III-10. Valores calculados e medidos para um sinal trapezoidal.

| Nº Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) | Nº Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) |
|----------|---------------|---------------|---------------------------|-----------------------|----------|---------------|---------------|---------------------------|-----------------------|
| | Calc. | Med.(d_j) | | | | Calc. | Med.(d_j) | | |
| 1 | 100,000 | 100,000 | - | - | 41 | 0,56867 | 0,5664 | 20 | -22 |
| 2 | 0,00000 | 0,0009 | 20 | 9 | 42 | 0,00000 | 0,0003 | 20 | 3 |
| 3 | 33,1663 | 33,1660 | 21 | -3 | 43 | 0,42558 | 0,4237 | 20 | -19 |
| 4 | 0,00000 | 0,0006 | 20 | 6 | 44 | 0,00000 | 0,0002 | 20 | 2 |
| 5 | 19,7003 | 19,6997 | 21 | -6 | 45 | 0,29927 | 0,2977 | 20 | -16 |
| 6 | 0,00000 | 0,0006 | 20 | 6 | 46 | 0,00000 | 0,0002 | 20 | 2 |
| 7 | 13,8595 | 13,8585 | 21 | -10 | 47 | 0,18831 | 0,1871 | 20 | -12 |
| 8 | 0,00000 | 0,0005 | 20 | 5 | 48 | 0,00000 | 0,0002 | 20 | 2 |
| 9 | 10,5619 | 10,5606 | 21 | -13 | 49 | 0,09149 | 0,0907 | 20 | -8 |
| 10 | 0,00000 | 0,0005 | 20 | 5 | 50 | 0,00000 | 0,0002 | 20 | 2 |
| 11 | 8,42190 | 8,4202 | 20 | -17 | 51 | 0,00770 | 0,0073 | 20 | -4 |
| 12 | 0,00000 | 0,0005 | 20 | 5 | 52 | 0,00000 | 0,0002 | 20 | 2 |
| 13 | 6,90692 | 6,9049 | 20 | -20 | 53 | 0,06406 | 0,0641 | 20 | 1 |
| 14 | 0,00000 | 0,0005 | 20 | 5 | 54 | 0,00000 | 0,0001 | 20 | 1 |
| 15 | 5,76863 | 5,7663 | 20 | -23 | 55 | 0,12471 | 0,1244 | 20 | -3 |
| 16 | 0,00000 | 0,0005 | 20 | 5 | 56 | 0,00000 | 0,0001 | 20 | 1 |
| 17 | 4,87578 | 4,8732 | 20 | -26 | 57 | 0,17510 | 0,1744 | 20 | -7 |
| 18 | 0,00000 | 0,0005 | 20 | 5 | 58 | 0,00000 | 0,0001 | 20 | 1 |
| 19 | 4,15256 | 4,1497 | 20 | -29 | 59 | 0,21605 | 0,2150 | 20 | -11 |
| 20 | 0,00000 | 0,0005 | 20 | 5 | 60 | 0,00000 | 0,0001 | 20 | 1 |
| 21 | 3,55218 | 3,5491 | 20 | -31 | 61 | 0,24830 | 0,2469 | 20 | -14 |
| 22 | 0,00000 | 0,0005 | 20 | 5 | 62 | 0,00000 | 0,0001 | 20 | 1 |
| 23 | 3,04422 | 3,0410 | 20 | -32 | 63 | 0,27259 | 0,2709 | 20 | -17 |
| 24 | 0,00000 | 0,0004 | 20 | 4 | 64 | 0,00000 | 0,0001 | 20 | 1 |
| 25 | 2,60810 | 2,6048 | 20 | -33 | 65 | 0,28963 | 0,2876 | 20 | -20 |
| 26 | 0,00000 | 0,0004 | 20 | 4 | 66 | 0,00000 | 0,0001 | 20 | 1 |
| 27 | 2,22938 | 2,2261 | 20 | -33 | 67 | 0,30009 | 0,2979 | 20 | -22 |
| 28 | 0,00000 | 0,0004 | 20 | 4 | 68 | 0,00000 | 0,0001 | 20 | 1 |
| 29 | 1,89766 | 1,8944 | 20 | -33 | 69 | 0,30461 | 0,3022 | 20 | -24 |
| 30 | 0,00000 | 0,0004 | 20 | 4 | 70 | 0,00000 | 0,0000 | 20 | 0 |
| 31 | 1,60525 | 1,6020 | 20 | -33 | 71 | 0,30383 | 0,3013 | 20 | -25 |
| 32 | 0,00000 | 0,0004 | 20 | 4 | 72 | 0,00000 | 0,0000 | 20 | 0 |
| 33 | 1,34633 | 1,3432 | 20 | -31 | 73 | 0,29836 | 0,2958 | 20 | -26 |
| 34 | 0,00000 | 0,0004 | 20 | 4 | 74 | 0,00000 | 0,0001 | 20 | 1 |
| 35 | 1,11641 | 1,1135 | 20 | -29 | 75 | 0,28878 | 0,2862 | 20 | -26 |
| 36 | 0,00000 | 0,0003 | 20 | 3 | 76 | 0,00000 | 0,0001 | 20 | 1 |
| 37 | 0,91197 | 0,9092 | 20 | -28 | 77 | 0,27567 | 0,2731 | 20 | -25 |
| 38 | 0,00000 | 0,0003 | 20 | 3 | 78 | 0,00000 | 0,0001 | 20 | 1 |
| 39 | 0,73015 | 0,7276 | 20 | -24 | 79 | 0,25956 | 0,2571 | 20 | -24 |
| 40 | 0,00000 | 0,0003 | 20 | 3 | 80 | 0,00000 | 0,0001 | 20 | 1 |

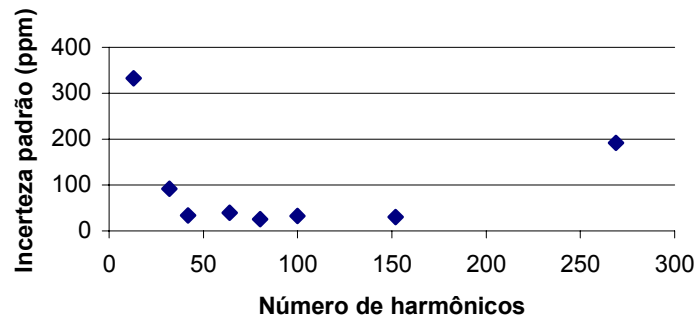


Fig. III-15(a). Incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude da fundamental em função do número de harmônicos.

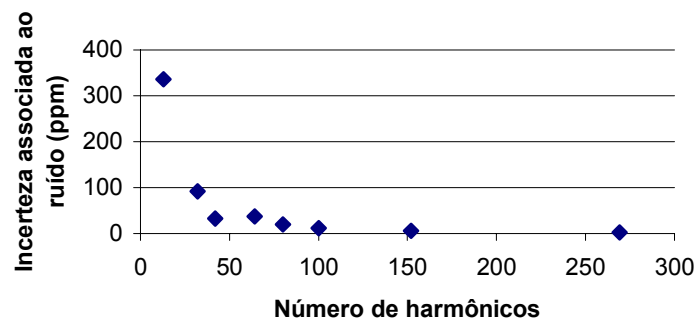


Fig. III-15(b). Incerteza associada ao ruído em função do número de harmônicos.

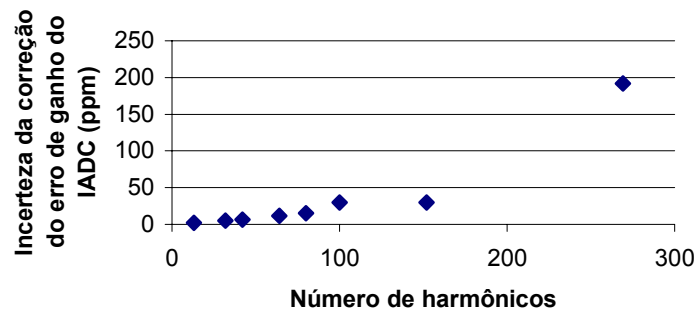


Fig. III-15(c). Incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC em função do número de harmônicos.

Gráficos da forma de onda amostrada (obtida plotando o vetor de dados y_k para $k = 1$), da forma de onda reconstruída (obtida substituindo as estimativas (II-6-5) em (II-3-2)), e da análise harmônica (obtida de (II-7-1-2a)) são mostrados na Fig. III-16. Observe o fenômeno de Gibbs (decaimento oscilatório amortecido) nas bordas do sinal.

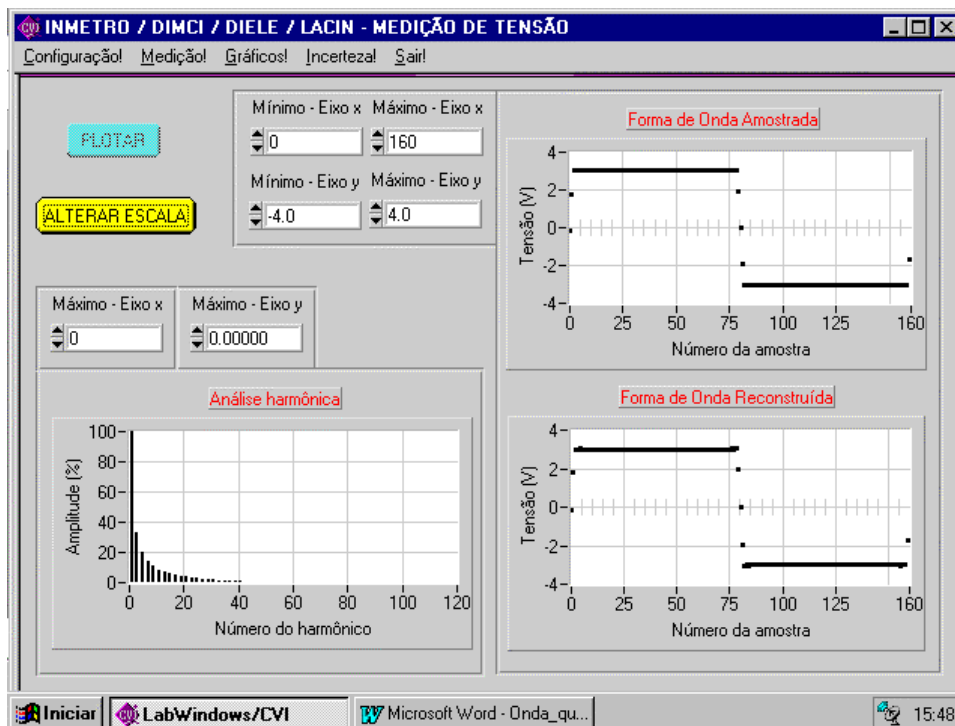


Fig. III-16. Gráficos da forma de onda amostrada e reconstruída (valores não corrigidos para os efeitos sistemáticos) e da análise harmônica para um sinal trapezoidal ($m = 80$).

É interessante examinar como ficam os valores numéricos quando se escolhe o máximo número de harmônicos permissível para um sinal de 60 Hz, isto é, $m = 269$. Como vimos na seção III-2-1, esta limitação é imposta pelo tempo de abertura mínimo dos conversores A/D integradores usados em voltímetros digitais comerciais atuais. O algoritmo demorou aproximadamente 55 min para avaliar as amplitudes dos primeiros 269 harmônicos. A THD medida foi de 45,0661%. A frequência fundamental na base de tempo do DVM foi de 59,99883 Hz (frequência calibrada de 59,99985 Hz). O algoritmo selecionou $n = 1076$ trens de $N = 536$ amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,0000311$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,0000011$ s). Observe que o tempo de abertura está um pouco acima do limite mínimo de 1 μs . O conversor A/D de alta velocidade (que possui menor exatidão) foi usado neste caso. O valor eficaz medido foi de 2,961323 V (obtido de (II-7-1-4)). O valor eficaz da amplitude fundamental (2,699826 V) foi medido com uma incerteza de 90 $\mu\text{V V}^{-1}$ (obtida de (II-7-1-2b)). As amplitudes dos harmônicos relativas à fundamental foram medidas com uma incerteza menor do que $3,1 \times 10^{-6}$ (obtida de (II-7-1-3)). As diferenças entre os valores calculados (Apêndice VI) e medidos foram menores do que $1,4 \times 10^{-5}$ relativo à fundamental (Tabela III-11).

Tabela III-11. Valores calculados e medidos para um sinal trapezoidal.

| Nº Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) | Nº Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) |
|----------|---------------|----------------|---------------------------|-----------------------|----------|---------------|----------------|---------------------------|-----------------------|
| | Calc. | Med. (d_j) | | | | Calc. | Med. (d_j) | | |
| 1 | 100,000 | 100,000 | - | - | 51 | 0,00770 | 0,00771 | 3,1 | 0 |
| 2 | 0,00000 | 0,00099 | 2,8 | 10 | 52 | 0,00000 | 0,00014 | 2,8 | 1 |
| 3 | 33,1663 | 33,1666 | 3 | 3 | 53 | 0,06406 | 0,06398 | 3,1 | -1 |
| 4 | 0,00000 | 0,00073 | 2,8 | 7 | 54 | 0,00000 | 0,00018 | 2,8 | 2 |
| 5 | 19,7003 | 19,7007 | 3 | 4 | 55 | 0,12471 | 0,12457 | 3,1 | -1 |
| 6 | 0,00000 | 0,00065 | 2,8 | 7 | 56 | 0,00000 | 0,00014 | 2,8 | 1 |
| 7 | 13,8595 | 13,8598 | 3 | 3 | 57 | 0,17510 | 0,17496 | 3,1 | -1 |
| 8 | 0,00000 | 0,00066 | 2,8 | 7 | 58 | 0,00000 | 0,00014 | 2,8 | 1 |
| 9 | 10,5619 | 10,5622 | 3 | 3 | 59 | 0,21605 | 0,21586 | 3,1 | -2 |
| 10 | 0,00000 | 0,00062 | 2,8 | 6 | 60 | 0,00000 | 0,00007 | 2,8 | 1 |
| 11 | 8,42190 | 8,42217 | 2,9 | 3 | 61 | 0,24830 | 0,24809 | 3,1 | -2 |
| 12 | 0,00000 | 0,00064 | 2,8 | 6 | 62 | 0,00000 | 0,00008 | 2,8 | 1 |
| 13 | 6,90692 | 6,90711 | 3,0 | 3 | 63 | 0,27259 | 0,27230 | 3,1 | -3 |
| 14 | 0,00000 | 0,00064 | 2,8 | 6 | 64 | 0,00000 | 0,00006 | 2,8 | 1 |
| 15 | 5,76863 | 5,76877 | 3,0 | 2 | 65 | 0,28963 | 0,28922 | 3,1 | -4 |
| 16 | 0,00000 | 0,00061 | 2,8 | 6 | 66 | 0,00000 | 0,00004 | 2,8 | 0 |
| 17 | 4,87578 | 4,87593 | 3,0 | 1 | 67 | 0,30009 | 0,29965 | 3,1 | -4 |
| 18 | 0,00000 | 0,00054 | 2,8 | 5 | 68 | 0,00000 | 0,00005 | 2,8 | 1 |
| 19 | 4,15256 | 4,15266 | 3,0 | 1 | 69 | 0,30461 | 0,30411 | 3,1 | -5 |
| 20 | 0,00000 | 0,00057 | 2,8 | 6 | 70 | 0,00000 | 0,00003 | 2,8 | 0 |
| 21 | 3,55218 | 3,55222 | 3,1 | 0 | 71 | 0,30383 | 0,30328 | 3,1 | -5 |
| 22 | 0,00000 | 0,00055 | 2,8 | 6 | 72 | 0,00000 | 0,00006 | 2,8 | 1 |
| 23 | 3,04422 | 3,04421 | 3,1 | 0 | 73 | 0,29836 | 0,29769 | 3,1 | -7 |
| 24 | 0,00000 | 0,00049 | 2,8 | 5 | 74 | 0,00000 | 0,00009 | 2,8 | 1 |
| 25 | 2,60810 | 2,60813 | 3,1 | 0 | 75 | 0,28878 | 0,28813 | 3,1 | -7 |
| 26 | 0,00000 | 0,00049 | 2,8 | 5 | 76 | 0,00000 | 0,00005 | 2,8 | 1 |
| 27 | 2,22938 | 2,22937 | 3,1 | 0 | 77 | 0,27567 | 0,27486 | 3,1 | -8 |
| 28 | 0,00000 | 0,00045 | 2,8 | 5 | 78 | 0,00000 | 0,00014 | 2,8 | 1 |
| 29 | 1,89766 | 1,89759 | 3,1 | -1 | 79 | 0,25956 | 0,25875 | 3,1 | -8 |
| 30 | 0,00000 | 0,00043 | 2,8 | 4 | 80 | 0,00000 | 0,00009 | 2,8 | 1 |
| 31 | 1,60525 | 1,60523 | 3,1 | 0 | 81 | 0,24097 | 0,24011 | 3,1 | -9 |
| 32 | 0,00000 | 0,00045 | 2,8 | 5 | 82 | 0,00000 | 0,00009 | 2,8 | 1 |
| 33 | 1,34633 | 1,34620 | 3,1 | -1 | 83 | 0,22039 | 0,21943 | 3,1 | -9 |
| 34 | 0,00000 | 0,00047 | 2,8 | 5 | 84 | 0,00000 | 0,00008 | 2,8 | 1 |
| 35 | 1,11641 | 1,11633 | 3,1 | -1 | 85 | 0,19830 | 0,19725 | 3,1 | -10 |
| 36 | 0,00000 | 0,00038 | 2,8 | 4 | 86 | 0,00000 | 0,00009 | 2,8 | 1 |
| 37 | 0,91197 | 0,91193 | 3,1 | 0 | 87 | 0,17514 | 0,17409 | 3,1 | -10 |
| 38 | 0,00000 | 0,00042 | 2,8 | 4 | 88 | 0,00000 | 0,00006 | 2,8 | 1 |
| 39 | 0,73015 | 0,73013 | 3,1 | 0 | 89 | 0,15131 | 0,15017 | 3,1 | -11 |
| 40 | 0,00000 | 0,00032 | 2,8 | 3 | 90 | 0,00000 | 0,00005 | 2,8 | 1 |
| 41 | 0,56867 | 0,56863 | 3,1 | 0 | 91 | 0,12720 | 0,12597 | 3,1 | -12 |
| 42 | 0,00000 | 0,00036 | 2,8 | 4 | 92 | 0,00000 | 0,00009 | 2,8 | 1 |
| 43 | 0,42558 | 0,42558 | 3,1 | 0 | 93 | 0,10317 | 0,10198 | 3,1 | -12 |
| 44 | 0,00000 | 0,00029 | 2,8 | 3 | 94 | 0,00000 | 0,00009 | 2,8 | 1 |
| 45 | 0,29927 | 0,29926 | 3,1 | 0 | 95 | 0,07954 | 0,07822 | 3,1 | -13 |
| 46 | 0,00000 | 0,00024 | 2,8 | 2 | 96 | 0,00000 | 0,00006 | 2,8 | 1 |
| 47 | 0,18831 | 0,18829 | 3,1 | 0 | 97 | 0,05659 | 0,05528 | 3,1 | -13 |
| 48 | 0,00000 | 0,00024 | 2,8 | 2 | 98 | 0,00000 | 0,00001 | 2,8 | 0 |
| 49 | 0,09149 | 0,09152 | 3,1 | 0 | 99 | 0,03459 | 0,03325 | 3,1 | -13 |
| 50 | 0,00000 | 0,00016 | 2,8 | 2 | 100 | 0,00000 | 0,00003 | 2,8 | 0 |

Tabela III-11. Valores calculados e medidos para um sinal trapezoidal (cont.)

| Nº Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) | Nº Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) |
|-------------|---------------|----------------|---------------------------|-----------------------|-------------|---------------|----------------|---------------------------|-----------------------|
| | Calc. | Med. (d_j) | | | | Calc. | Med. (d_j) | | |
| 101 | 0,01377 | 0,01239 | 3,1 | -13 | 151 | 0,01146 | 0,01150 | 3,1 | 0 |
| 102 | 0,00000 | 0,00004 | 2,8 | 0 | 152 | 0,00000 | 0,00019 | 2,8 | 2 |
| 103 | 0,00568 | 0,00708 | 3,1 | 14 | 153 | 0,00259 | 0,00253 | 3,1 | -1 |
| 104 | 0,00000 | 0,00007 | 2,8 | 1 | 154 | 0,00000 | 0,00012 | 2,8 | 1 |
| 105 | 0,02360 | 0,02502 | 3,1 | 14 | 155 | 0,00588 | 0,00603 | 3,1 | 1 |
| 106 | 0,00000 | 0,00005 | 2,8 | 1 | 156 | 0,00000 | 0,00012 | 2,8 | 1 |
| 107 | 0,03985 | 0,04129 | 3,1 | 14 | 157 | 0,01384 | 0,01403 | 3,1 | 2 |
| 108 | 0,00000 | 0,00009 | 2,8 | 1 | 158 | 0,00000 | 0,00008 | 2,8 | 1 |
| 109 | 0,05433 | 0,05573 | 3,1 | 14 | 159 | 0,02119 | 0,02151 | 3,1 | 3 |
| 110 | 0,00000 | 0,00007 | 2,8 | 1 | 160 | 0,00000 | 0,00007 | 2,8 | 1 |
| 111 | 0,06697 | 0,06840 | 3,1 | 14 | 161 | 0,02788 | 0,02822 | 3,1 | 3 |
| 112 | 0,00000 | 0,00012 | 2,8 | 1 | 162 | 0,00000 | 0,00008 | 2,8 | 1 |
| 113 | 0,07772 | 0,07915 | 3,1 | 14 | 163 | 0,03382 | 0,03430 | 3,1 | 5 |
| 114 | 0,00000 | 0,00012 | 2,8 | 1 | 164 | 0,00000 | 0,00004 | 2,8 | 0 |
| 115 | 0,08657 | 0,08797 | 3,1 | 14 | 165 | 0,03898 | 0,03949 | 3,1 | 5 |
| 116 | 0,00000 | 0,00011 | 2,8 | 1 | 166 | 0,00000 | 0,00002 | 2,8 | 0 |
| 117 | 0,09351 | 0,09490 | 3,1 | 14 | 167 | 0,04331 | 0,04388 | 3,1 | 6 |
| 118 | 0,00000 | 0,00014 | 2,8 | 1 | 168 | 0,00000 | 0,00007 | 2,8 | 1 |
| 119 | 0,09859 | 0,09993 | 3,1 | 13 | 169 | 0,04680 | 0,04740 | 3,1 | 6 |
| 120 | 0,00000 | 0,00012 | 2,8 | 1 | 170 | 0,00000 | 0,00006 | 2,8 | 1 |
| 121 | 0,10185 | 0,10314 | 3,1 | 13 | 171 | 0,04942 | 0,05003 | 3,1 | 6 |
| 122 | 0,00000 | 0,00012 | 2,8 | 1 | 172 | 0,00000 | 0,00006 | 2,8 | 1 |
| 123 | 0,10337 | 0,10456 | 3,1 | 12 | 173 | 0,05119 | 0,05193 | 3,1 | 7 |
| 124 | 0,00000 | 0,00013 | 2,8 | 1 | 174 | 0,00000 | 0,00008 | 2,8 | 1 |
| 125 | 0,10324 | 0,10441 | 3,1 | 12 | 175 | 0,05211 | 0,05270 | 3,1 | 6 |
| 126 | 0,00000 | 0,00012 | 2,8 | 1 | 176 | 0,00000 | 0,00007 | 2,8 | 1 |
| 127 | 0,10156 | 0,10263 | 3,1 | 11 | 177 | 0,05222 | 0,05290 | 3,1 | 7 |
| 128 | 0,00000 | 0,00016 | 2,8 | 2 | 178 | 0,00000 | 0,00002 | 2,8 | 0 |
| 129 | 0,09845 | 0,09953 | 3,1 | 10 | 179 | 0,05154 | 0,05225 | 3,1 | 7 |
| 130 | 0,00000 | 0,00008 | 2,8 | 1 | 180 | 0,00000 | 0,00001 | 2,8 | 0 |
| 131 | 0,09405 | 0,09500 | 3,1 | 10 | 181 | 0,05012 | 0,05083 | 3,1 | 7 |
| 132 | 0,00000 | 0,00019 | 2,8 | 2 | 182 | 0,00000 | 0,00007 | 2,8 | 1 |
| 133 | 0,08850 | 0,08944 | 3,1 | 9 | 183 | 0,04801 | 0,04871 | 3,1 | 7 |
| 134 | 0,00000 | 0,00020 | 2,8 | 2 | 184 | 0,00000 | 0,00005 | 2,8 | 1 |
| 135 | 0,08194 | 0,08269 | 3,1 | 8 | 185 | 0,04527 | 0,04593 | 3,1 | 7 |
| 136 | 0,00000 | 0,00019 | 2,8 | 2 | 186 | 0,00000 | 0,00006 | 2,8 | 1 |
| 137 | 0,07452 | 0,07520 | 3,1 | 7 | 187 | 0,04200 | 0,04262 | 3,1 | 6 |
| 138 | 0,00000 | 0,00017 | 2,8 | 2 | 188 | 0,00000 | 0,00006 | 2,8 | 1 |
| 139 | 0,06640 | 0,06697 | 3,1 | 6 | 189 | 0,03818 | 0,03885 | 3,1 | 7 |
| 140 | 0,00000 | 0,00016 | 2,8 | 2 | 190 | 0,00000 | 0,00004 | 2,8 | 0 |
| 141 | 0,05773 | 0,05826 | 3,1 | 5 | 191 | 0,03397 | 0,03460 | 3,1 | 6 |
| 142 | 0,00000 | 0,00015 | 2,8 | 2 | 192 | 0,00000 | 0,00009 | 2,8 | 1 |
| 143 | 0,04868 | 0,04911 | 3,1 | 3 | 193 | 0,02943 | 0,03000 | 3,1 | 6 |
| 144 | 0,00000 | 0,00017 | 2,8 | 2 | 194 | 0,00000 | 0,00002 | 2,8 | 0 |
| 145 | 0,03938 | 0,03970 | 3,1 | 3 | 195 | 0,02463 | 0,02517 | 3,1 | 6 |
| 146 | 0,00000 | 0,00015 | 2,8 | 2 | 196 | 0,00000 | 0,00005 | 2,8 | 1 |
| 147 | 0,02999 | 0,03016 | 3,1 | 2 | 197 | 0,01965 | 0,02015 | 3,1 | 5 |
| 148 | 0,00000 | 0,00013 | 2,8 | 1 | 198 | 0,00000 | 0,00005 | 2,8 | 1 |
| 149 | 0,02064 | 0,02072 | 3,1 | 1 | 199 | 0,01457 | 0,01507 | 3,1 | 5 |
| 150 | 0,00000 | 0,00013 | 2,8 | 1 | 200 | 0,00000 | 0,00007 | 2,8 | 1 |

Tabela III-11. Valores calculados e medidos para um sinal trapezoidal (cont.)

| Nº Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) | Nº Harm. | Amplitude (%) | | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) |
|----------|---------------|----------------|---------------------------|-----------------------|----------|---------------|----------------|---------------------------|-----------------------|
| | Calc. | Med. (d_j) | | | | Calc. | Med. (d_j) | | |
| 201 | 0,00948 | 0,00984 | 3,1 | 4 | 236 | 0,00000 | 0,00010 | 3,1 | 1 |
| 202 | 0,00000 | 0,00007 | 2,8 | 1 | 237 | 0,02728 | 0,02751 | 2,8 | 2 |
| 203 | 0,00443 | 0,00479 | 3,1 | 4 | 238 | 0,00000 | 0,00006 | 3,1 | 1 |
| 204 | 0,00000 | 0,00005 | 2,8 | 1 | 239 | 0,02523 | 0,02538 | 2,8 | 2 |
| 205 | 0,00048 | 0,00023 | 3,1 | -3 | 240 | 0,00000 | 0,00015 | 3,1 | 2 |
| 206 | 0,00000 | 0,00007 | 2,8 | 1 | 241 | 0,02286 | 0,02308 | 2,8 | 2 |
| 207 | 0,00521 | 0,00495 | 3,1 | -3 | 242 | 0,00000 | 0,00007 | 3,1 | 1 |
| 208 | 0,00000 | 0,00001 | 2,8 | 0 | 243 | 0,02023 | 0,02043 | 2,8 | 2 |
| 209 | 0,00968 | 0,00949 | 3,1 | -2 | 244 | 0,00000 | 0,00015 | 3,1 | 2 |
| 210 | 0,00000 | 0,00009 | 2,8 | 1 | 245 | 0,01738 | 0,01755 | 2,8 | 2 |
| 211 | 0,01384 | 0,01370 | 3,1 | -2 | 246 | 0,00000 | 0,00009 | 3,1 | 1 |
| 212 | 0,00000 | 0,00006 | 2,8 | 1 | 247 | 0,01436 | 0,01445 | 2,8 | 1 |
| 213 | 0,01764 | 0,01755 | 3,1 | -1 | 248 | 0,00000 | 0,00004 | 3,1 | 0 |
| 214 | 0,00000 | 0,00009 | 2,8 | 1 | 249 | 0,01122 | 0,01133 | 2,8 | 1 |
| 215 | 0,02105 | 0,02099 | 3,1 | -1 | 250 | 0,00000 | 0,00012 | 3,1 | 1 |
| 216 | 0,00000 | 0,00003 | 2,8 | 0 | 251 | 0,00801 | 0,00807 | 2,8 | 1 |
| 217 | 0,02401 | 0,02404 | 3,1 | 0 | 252 | 0,00000 | 0,00008 | 3,1 | 1 |
| 218 | 0,00000 | 0,00007 | 2,8 | 1 | 253 | 0,00478 | 0,00490 | 2,8 | 1 |
| 219 | 0,02651 | 0,02653 | 3,1 | 0 | 254 | 0,00000 | 0,00014 | 3,1 | 1 |
| 220 | 0,00000 | 0,00004 | 2,8 | 0 | 255 | 0,00158 | 0,00164 | 2,8 | 1 |
| 221 | 0,02853 | 0,02865 | 3,1 | 1 | 256 | 0,00000 | 0,00016 | 3,1 | 2 |
| 222 | 0,00000 | 0,00007 | 2,8 | 1 | 257 | 0,00155 | 0,00152 | 2,8 | 0 |
| 223 | 0,03005 | 0,03016 | 3,1 | 1 | 258 | 0,00000 | 0,00014 | 3,1 | 1 |
| 224 | 0,00000 | 0,00011 | 2,8 | 1 | 259 | 0,00457 | 0,00456 | 2,8 | 0 |
| 225 | 0,03107 | 0,03123 | 3,1 | 2 | 260 | 0,00000 | 0,00013 | 3,1 | 1 |
| 226 | 0,00000 | 0,00012 | 2,8 | 1 | 261 | 0,00743 | 0,00743 | 2,8 | 0 |
| 227 | 0,03160 | 0,03178 | 3,1 | 2 | 262 | 0,00000 | 0,00007 | 3,1 | 1 |
| 228 | 0,00000 | 0,00013 | 2,8 | 1 | 263 | 0,01009 | 0,01014 | 2,8 | 1 |
| 229 | 0,03163 | 0,03179 | 3,1 | 2 | 264 | 0,00000 | 0,00003 | 3,1 | 0 |
| 230 | 0,00000 | 0,00007 | 2,8 | 1 | 265 | 0,01252 | 0,01259 | 2,8 | 1 |
| 231 | 0,03119 | 0,03136 | 3,1 | 2 | 266 | 0,00000 | 0,00011 | 3,1 | 1 |
| 232 | 0,00000 | 0,00006 | 2,8 | 1 | 267 | 0,01470 | 0,01475 | 2,8 | 1 |
| 233 | 0,03030 | 0,03057 | 3,1 | 3 | 268 | 0,00000 | 0,00009 | 3,1 | 1 |
| 234 | 0,00000 | 0,00013 | 2,8 | 1 | 269 | 0,01660 | 0,01666 | 2,8 | 1 |
| 235 | 0,02898 | 0,02917 | 3,1 | 2 | - | - | - | - | - |

Selecionou-se desta vez o maior número de harmônicos permitido pelo valor mínimo do tempo de abertura (1 μ s) do DVM.

Gráficos da forma de onda amostrada (obtida plotando o vetor de dados y_k para $k = 1$), da forma de onda reconstruída (obtida substituindo as estimativas (II-6-5) em (II-3-2)), e da análise harmônica (obtida de (II-7-1-2a)) são mostrados na Fig. III-17. Observe que o fenômeno de Gibbs foi atenuado de forma considerável.

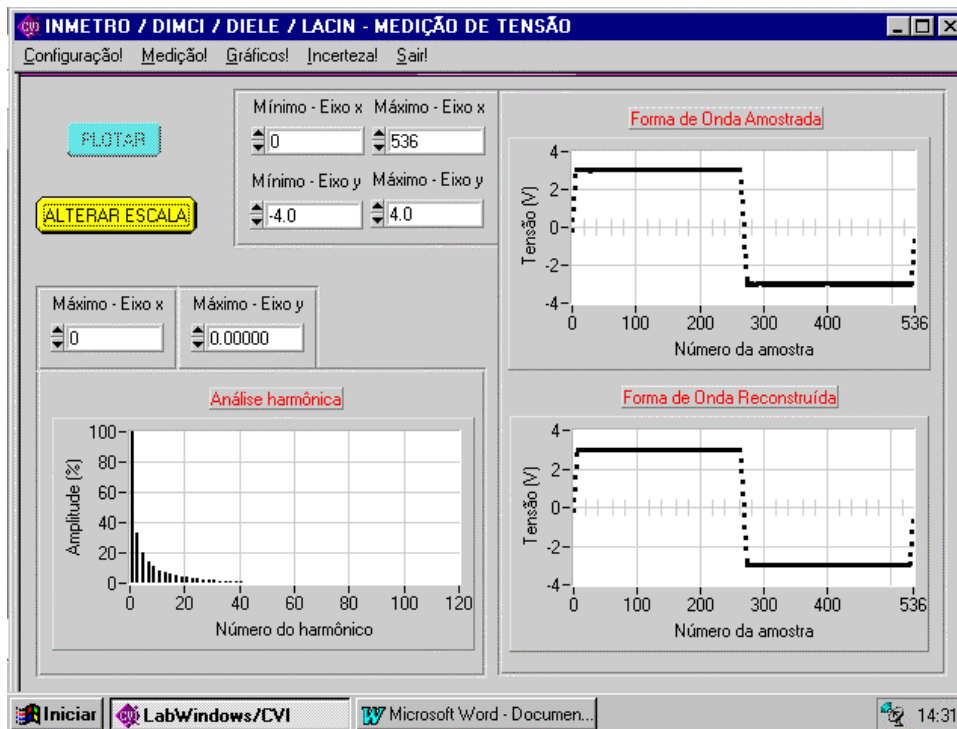


Fig. III-17. Gráficos da forma de onda amostrada e reconstruída (valores não corrigidos para os efeitos sistemáticos) e da análise harmônica para um sinal trapezoidal ($m = 269$).

III-3 Medição de ângulos de fase de harmônicos de sinais não senoidais

Cinco sinais não senoidais de 60 Hz, de 6 V de pico-a-pico, gerados por um gerador de sinais arbitrários de estabilidade elevada, sintetizado de forma digital (também usado na seções III-1 e III-2), foram medidos: (a) um sinal senoidal (versão em degraus), (b) um sinal parabólico alternado, (c) um sinal retificado em meia onda, (d) um sinal de triac, e (e) um sinal trapezoidal. A estimativa do ângulo de fase (γ_e)_{*j*} do *j*-ésimo harmônico relativo à fundamental e a incerteza $u((\gamma_e)_j)$ associada com a estimativa foram obtidas de (II-8-8). Escolheu-se um ângulo de fase de referência arbitrário $\theta_R = 90^\circ$ para todos os trens de amostras. Os valores calculados dos ângulos de fase foram obtidos como um subproduto do cálculo dos coeficientes de Fourier exponenciais complexos para formas de onda lineares por partes (Apêndice VI). As tabelas a seguir comparam as estimativas dos ângulos de fase com os valores calculados até no máximo o 25^o harmônico do sinal de 60 Hz. Supõe-se que os estágios de entrada do DVM possam ser modelados como um filtro de fase linear até esta frequência

harmônica. O aumento da incerteza com j crescente reflete a redução das amplitudes dos harmônicos (veja seção III-2).

As diferenças entre os valores calculados e medidos dos ângulos de fase dos harmônicos do sinal senoidal (versão em degraus) (seção III-2-2) estão mostradas na Tabela III-12. Um total de 8 (oito) harmônicos foi selecionado. Com exceção do segundo harmônico que apresenta uma discrepância considerável, as diferenças estão dentro de $\pm u((\gamma_e)_j)$.

As diferenças entre os valores calculados e medidos dos ângulos de fase dos harmônicos do sinal parabólico alternado (seção II-2-3) estão mostradas na Tabela III-13. Um total de 13 harmônicos foi selecionado. Somente harmônicos ímpares estão mostrados pois as amplitudes dos harmônicos pares são pequenas comparadas com a fundamental (veja Tabela III-5). Pode-se ver que as diferenças estão dentro de $\pm u((\gamma_e)_j)$.

As diferenças entre os valores calculados e medidos dos ângulos de fase dos harmônicos do sinal retificado em meia onda (seção III-2-4) estão dentro de $\pm 2u((\gamma_e)_j)$ (Tabela III-14). Apesar de um total de 64 harmônicos ter sido selecionado, somente os primeiros 25 harmônicos estão mostrados. Somente harmônicos pares estão mostrados pois as amplitudes dos harmônicos ímpares são pequenas comparadas com a fundamental (veja Tabela III-7).

Exceto por 3 (três) harmônicos, as diferenças entre os valores calculados e medidos dos ângulos de fase dos harmônicos do sinal de triac (seção III-2-5) estão dentro de $\pm 2u((\gamma_e)_j)$ (Tabela III-15). Apesar de um total de 152 harmônicos ter sido selecionado, somente os primeiros 25 harmônicos estão mostrados. Somente harmônicos ímpares estão mostrados pois as amplitudes dos harmônicos pares são pequenas comparadas com a fundamental (veja Tabela III-9).

As diferenças entre os valores calculados e medidos dos ângulos de fase dos harmônicos do sinal trapezoidal (seção III-2-6) estão todas dentro de $\pm u((\gamma_e)_j)$ (Tabela III-16). Apesar de um total de 269 harmônicos ter sido selecionado, somente os primeiros 25 harmônicos estão mostrados. Somente harmônicos ímpares estão mostrados pois as amplitudes dos harmônicos pares são pequenas comparadas com a fundamental (veja Tabela III-10).

Tabela III-12. Valores calculados e medidos para um sinal senoidal (versão em degraus).

| N ^o Harm. | Ângulo de fase (grau) | | $u((\gamma_e)_j)$ (grau) | Erro (grau) |
|-------------------------|-----------------------|----------------------------------|-----------------------------|----------------|
| | Calc. | Med. (γ_e) _j | | |
| 1 | -90,0000 | -90,00 | - | - |
| 2 | 90,0080 | 96,98 | 0,21 | 6,97 |
| 3 | 90,0142 | 89,97 | 0,44 | -0,04 |
| 4 | 90,0199 | 89,83 | 0,53 | -0,19 |
| 5 | 90,0255 | 90,09 | 0,65 | 0,06 |
| 6 | 90,0310 | 89,79 | 0,85 | -0,24 |
| 7 | 90,0364 | 90,03 | 0,89 | -0,01 |
| 8 | 90,0418 | 90,2 | 1,2 | 0,16 |

Tabela III-13. Valores calculados e medidos para um sinal parabólico alternado.

| N ^o Harm. | Ângulo de fase (grau) | | $u((\gamma_e)_j)$ (grau) | Erro (grau) |
|-------------------------|-----------------------|----------------------------------|-----------------------------|----------------|
| | Calc. | Med. (γ_e) _j | | |
| 1 | -90,0000 | -90,0000 | - | - |
| 3 | -90,0000 | -89,9995 | 0,0024 | 0,0005 |
| 5 | -90,0000 | -90,005 | 0,012 | 0,005 |
| 7 | -90,0000 | -90,007 | 0,033 | 0,007 |
| 9 | -90,0000 | -90,031 | 0,072 | 0,031 |
| 11 | -90,0000 | -90,01 | 0,14 | 0,01 |
| 13 | -90,0000 | -90,05 | 0,23 | 0,05 |

Tabela III-14. Valores calculados e medidos para um sinal retificado em meia onda.

| N ^o Harm. | Ângulo de fase (grau) | | $u((\gamma_e)_j)$ (grau) | Erro (grau) |
|-------------------------|-----------------------|----------------------------------|-----------------------------|----------------|
| | Calc. | Med. (γ_e) _j | | |
| 1 | -90,0000 | -90,0000 | - | - |
| 2 | -180,0003 | -180,0002 | 0,0008 | 0,0001 |
| 4 | -180,0005 | -180,0005 | 0,0041 | 0,0000 |
| 6 | -180,0008 | -180,0001 | 0,0095 | 0,0007 |
| 8 | -180,0010 | -179,977 | 0,017 | 0,024 |
| 10 | -180,0011 | -180,044 | 0,027 | -0,043 |
| 12 | -180,0011 | -180,000 | 0,039 | 0,001 |
| 14 | -180,0011 | -180,074 | 0,053 | -0,073 |
| 16 | -180,0010 | -180,120 | 0,069 | -0,119 |
| 18 | -180,0007 | -179,959 | 0,088 | 0,042 |
| 20 | -180,0003 | -180,12 | 0,11 | -0,12 |
| 22 | -179,9998 | -180,19 | 0,13 | -0,19 |
| 24 | -179,9991 | -180,01 | 0,16 | -0,01 |

Tabela III-15. Valores calculados e medidos para um sinal de triac.

| N ^o Harm. | Ângulo de fase (grau) | | $u((\gamma_{\epsilon})_j)$ (grau) | Erro (grau) |
|-------------------------|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------------|----------------|
| | Calc. | Med. ($\gamma_{\epsilon j}$) | | |
| 1 | -90,0000 | -90,0000 | - | - |
| 3 | 97,9176 | 97,9182 | 0,0013 | 0,0006 |
| 5 | -11,9711 | -11,9678 | 0,0039 | 0,0033 |
| 7 | 230,9072 | 230,9218 | 0,0040 | 0,0146 |
| 9 | 121,0167 | 121,0320 | 0,0066 | 0,0153 |
| 11 | 3,8940 | 3,8975 | 0,0067 | 0,0035 |
| 13 | 254,0004 | 254,0222 | 0,0094 | 0,0218 |
| 15 | 136,8850 | 136,8805 | 0,0095 | 0,0045 |
| 17 | 27,0053 | 26,983 | 0,012 | 0,022 |
| 19 | 269,8859 | 269,867 | 0,013 | 0,019 |
| 21 | 159,9837 | 159,964 | 0,015 | 0,020 |
| 23 | 42,8666 | 42,854 | 0,016 | 0,013 |
| 25 | 292,9774 | 292,944 | 0,019 | 0,033 |

Tabela III-16. Valores calculados e medidos para um sinal trapezoidal.

| N ^o Harm. | Ângulo de fase (grau) | | $u((\gamma_{\epsilon})_j)$ (grau) | Erro (grau) |
|-------------------------|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------------|----------------|
| | Calc. | Med. ($\gamma_{\epsilon j}$) | | |
| 1 | -90,0000 | -90,0000 | - | - |
| 3 | -90,0000 | -89,9988 | 0,0005 | 0,0012 |
| 5 | -90,0000 | -89,9984 | 0,0008 | 0,0016 |
| 7 | -90,0000 | -89,9982 | 0,0012 | 0,0018 |
| 9 | -90,0000 | -89,9980 | 0,0015 | 0,0020 |
| 11 | -90,0000 | -89,9976 | 0,0019 | 0,0024 |
| 13 | -90,0000 | -89,9985 | 0,0023 | 0,0015 |
| 15 | -90,0000 | -89,9985 | 0,0028 | 0,0016 |
| 17 | -90,0000 | -89,9985 | 0,0033 | 0,0016 |
| 19 | -90,0000 | -89,9984 | 0,0039 | 0,0016 |
| 21 | -90,0000 | -89,9981 | 0,0045 | 0,0019 |
| 23 | -90,0000 | -89,9975 | 0,0053 | -0,0025 |
| 25 | -90,0000 | -90,0004 | 0,0062 | -0,0004 |

III-4 Medição de deslocamento de fase entre harmônicos de sinais não senoidais

Parte desta seção foi publicada em KYRIAZIS, CAMPOS (2004c, 2005).

É possível medir o deslocamento de fase entre harmônicos correspondentes de dois sinais arbitrários. Os sinais são independentemente medidos por dois DVMS

integradores de alta resolução em uma configuração mestre-escravo (POGLIANO, 2001). Os parâmetros de amostragem do DVM 1 (MESTRE) são avaliados como em SWERLEIN (1991). O DVM 1 tem como função estabelecer a temporização para todo o processo de amostragem. O DVM 2 (ESCRAVO) é configurado para disparo externo; ele amostra o sinal em sua entrada somente quando o DVM 1 envia (através de um conector de saída do instrumento) um sinal digital para a entrada de disparador do DVM 2 indicando quando uma leitura está sendo feita. Deste modo, os circuitos digitais dos dois conversores estão ligados através de um retardo de tempo fixo.

O DVM 1 amostra o sinal em sua entrada de acordo com o projeto de experimentos da seção II-6. O disparador externo do DVM 1 é usado para iniciar os trens de amostras correspondentes do DVM 2 retardados de kt_D+d de um cruzamento pelo nulo¹⁷ do sinal, onde d é o retardo entre as duas séries temporais devido à latência do disparador externo e às respostas de fase dos DVMs.

A fim de calibrar o sistema, dois DVMs estáveis, de alta resolução, foram alimentados em paralelo por um único sinal parabólico alternado (forma de onda descrita na seção III-2-3) de 60 Hz na faixa de 10 V. O deslocamento de fase $\Delta(\gamma)_j$ entre os j -ésimos harmônicos dos sinais aplicados nos DVMs e a incerteza $u(\Delta(\gamma)_j)$ associada com a estimativa foram obtidas de (II-9-13). O número de harmônicos foi selecionado como descrito na seção II-10.

O algoritmo selecionou $n = 52$ trens de $N = 336$ amostras. O fabricante especifica que o desvio padrão D do retardo do disparador externo (*rms external trigger jitter*) é menor do que 50 ns (isto também foi verificado por POGLIANO (2001)). Quando os dois DVMs são alimentados em paralelo por um único sinal na mesma faixa de 10 V, e antes de se inserir a correção para o retardo d (e a correção para o erro do modo de tensão C.C. de cada DVM), há uma diferença de fase $\Delta(\theta)_j (= j\theta_D)$ entre as j -ésimas estimativas dos harmônicos correspondentes para cada DVM (e também uma diferença de amplitude). A diferença de fase é devida aos erros de fase nos estágios de entrada e nos IADCs de ambos os DVMs, e ao retardo do disparador externo. O valor medido de θ_D ficou bem de acordo com o retardo reportado por POGLIANO (2001), a saber: $d \cong 500$ ns. Portanto, a contribuição de incerteza associada com o retardo d para o j -ésimo harmônico (obtida de (II-9-11)) é menor do que $0,15j$ μ rad. Esta contribuição

¹⁷ Recentemente, uma alteração foi feita no algoritmo de modo a retardar os trens de amostras de kt_D+d de um cruzamento de um nível C.C. arbitrário selecionado pelo usuário.

pode ser desprezada para $j > 1$ se as amplitudes dos harmônicos decrescem de forma considerável com j crescente, em cujo caso a contribuição do ruído se torna dominante.

Os deslocamentos de fase entre harmônicos correspondentes dos sinais aplicados aos dois DVMs (obtidos de (II-9-13a)), quando ambas as entradas são alimentadas por um único sinal parabólico alternado, após a correção dos erros de amplitude e fase, estão listados na Tabela III-17. A tabela também mostra as incertezas associadas com as j -ésimas estimativas obtida de (II-9-13b). O algoritmo demorou aproximadamente 50 s para avaliar as amplitudes e os ângulos de fase dos primeiros 13 harmônicos de dois sinais. O tempo de medição pode ser reduzido àquele reportado na seção III-2-3, se soubermos de antemão que a variância de ruído é a mesma para ambos os sinais (neste caso, o cálculo da variância do ruído só é executado uma vez). As amplitudes dos harmônicos correspondentes para cada DVM diferiram de menos de uma parte em 10^7 . O experimento foi repetido 11 vezes para avaliar a estabilidade da saída. O desvio padrão da média para o deslocamento de fase $\Delta(\gamma)_1$ entre as fundamentais dos dois sinais foi de 0,007 miligradu (0,12 μ rad). A incerteza associada com a estimativa de $\Delta(\gamma)_1$ é 0,13 miligradu (2,3 μ rad). O desvio padrão da média para cada $\Delta(\gamma)_j$ foi sempre menor do que a incerteza correspondente. Verificou-se também que, para sinais senoidais quase puros ($< 0,02\%$ THD), a incerteza de $\Delta(\gamma)_1$ é menor do que 0,06 miligradu (1 μ rad).

Tabela III-17. Deslocamentos de fase entre harmônicos, quando os DVMs são alimentados em paralelo por um único sinal parabólico alternado.

| N ^o Harm. | $\Delta V_j/V_j$ ⁽¹⁾ (10^{-6}) | $\Delta(\gamma)_j$ ⁽²⁾ (grau) | $u(\Delta(\gamma)_j)$ (grau) | $s(\Delta(\gamma)_j)$ ⁽³⁾ (grau) |
|-------------------------|--|---|---------------------------------|--|
| 1 | -0,07 | -0,00000 | 0,00013 | 0,000007 |
| 3 | -0,03 | 0,0000 | 0,0035 | 0,0002 |
| 5 | -0,05 | -0,000 | 0,017 | 0,001 |
| 7 | -0,03 | -0,000 | 0,047 | 0,001 |
| 9 | 0,05 | -0,00 | 0,10 | 0,003 |
| 11 | -0,05 | -0,00 | 0,19 | 0,07 |
| 13 | 0,01 | -0,00 | 0,30 | 0,01 |

⁽¹⁾ Diferença de amplitude do harmônico relativa ao DVM 1.

⁽²⁾ Resultados avaliados da média de 11 estimativas.

⁽³⁾ Desvio padrão da média para $\Delta(\gamma)_j$.

III-5 Comentários sobre os resultados experimentais

Os resultados experimentais deste capítulo supõem que a frequência real da forma de onda amostrada seja estável e conhecida (a exatidão da base de tempo não é importante). A sensibilidade das estimativas com relação a erros de frequência foi avaliada pela inserção numérica de erros no algoritmo e pela verificação de qualquer variação na saída do algoritmo. A diferença nas estimativas de amplitude em volts foi menor do que uma parte em 10^6 quando os erros de frequência estavam dentro de $\pm 10^{-5}$. A sensibilidade decresce de forma considerável quando se está interessado em estimar os parâmetros dos harmônicos como percentuais da fundamental. A diferença nas estimativas de amplitude foi menor do que uma parte em 10^6 quando os erros de frequência estavam dentro de $\pm 10^{-4}$. Uma incerteza dentro destes limites é facilmente obtida por técnicas de cruzamento pelo nulo¹⁸. De qualquer modo, a incerteza associada com a estimativa se torna maior à medida que o erro de frequência aumenta, protegendo portanto o usuário.

A sensibilidade das estimativas de ângulo de fase com relação a erros de frequência depende das amplitudes dos harmônicos. A diferença nas estimativas de ângulo de fase para harmônicos de amplitude maior do que 1% da fundamental foi menor do que aproximadamente $2 \mu\text{rad}$ quando os erros de frequência estavam dentro de $\pm 10^{-5}$.

O experimento foi repetido um número de vezes para avaliar a estabilidade das estimativas. As estimativas das amplitudes obtidas de dois experimentos separados entre si de um ano diferiram de menos de duas partes em 10^6 . A estabilidade de curto prazo é de umas poucas partes em 10^7 . O desvio padrão das estimativas de amplitude e de ângulo de fase foi sempre menor do que as correspondentes incertezas associadas com estas estimativas.

A discrepância observada entre os valores calculados e medidos para as amplitudes e ângulos de fase dos harmônicos pode ser atribuída à exatidão do gerador de sinais. O gerador de sinais arbitrários usado tem uma resolução de 12 bits. Portanto, tem um erro de bit menos significativo (LSB) de aproximadamente 0,0244% (bem acima da discrepância observada para as amplitudes dos harmônicos). Valeria a pena verificar o método com um gerador de sinais de resolução mais elevada. De qualquer

¹⁸ Ou por técnicas de cruzamento de um nível C.C. arbitrário selecionado pelo usuário.

modo, conversores A/D estão se tornando cada vez de maior exatidão em comparação com conversores D/A (OLDHAM, 2003).

As suposições adotadas neste trabalho merecem alguns comentários. O modelo supôs que os erros de linearidade integral e diferencial do DVM são desprezíveis. Comparações foram realizadas entre o DVM usado neste trabalho e redes de junções de Josephson que atestam que o erro integral é menor do que uma parte em 10^7 do fundo de escala e que o erro de linearidade diferencial é menor do que duas partes em 10^8 da leitura (GOECKE, W., SWERLEIN, R. *et al.*, 1989). Entretanto, o que interessa em última instância aqui é a especificação para os erros de linearidade dinâmicos do IADC. A fim de investigar ainda mais este último ponto, medimos as amplitudes dos harmônicos de um oscilador senoidal ultra puro comercial que de acordo com a especificação do fabricante (KROHN-HITE, 1995) tem uma distorção harmônica menor do que 0,0005%. Os valores medidos foram reportados na Tabela III-2. Eles concordam muito bem com a especificação. Embora até 152 harmônicos tenham sido medidos, somente os resultados para os primeiros 25 harmônicos estão mostrados devido à falta de espaço. As amplitudes dos outros harmônicos são todas abaixo de 0,00003%. Inferimos destes resultados que os erros de linearidade dinâmicos do IADC são desprezíveis.

O modelo supôs que a contribuição de incerteza associada com a resolução do IADC possa ser desprezada. Um avaliação de incerteza de medição mais pormenorizada deveria levar em conta a resolução do conversor A/D (ELSTER, 2000).

O algoritmo para o cálculo dos parâmetros de amostragem em SWERLEIN (1991), KYRIAZIS (2003) está estruturado para garantir imunidade contra *aliasing* somente para o número mínimo de harmônicos m especificado pelo usuário. O período de amostragem máximo não deve violar o teorema de amostragem, i.e., $t_{\text{samp}} < 1/2mf_0$. Se isto ocorre, o algoritmo aumenta a frequência de amostragem de modo a assegurar a ocorrência de *alias* exatamente em mf_0 . O algoritmo leva isto em conta e estima o tempo de abertura como $t_{\text{aper}} = t_{\text{samp}} - \tau$, onde τ ($= 30 \mu\text{s}$) é um retardo pequeno especificado pelo fabricante (SWERLEIN, 1991) para impedir erros de disparador muito rápido. Devido ao requisito de largura de banda acima, o tempo de abertura real é mantido quase constante em torno de 0,001 s até $m = 1/0,002f_0$ onde ele começa a decrescer com a frequência do sinal como $t_{\text{aper}} = 1/2mf_0 - \tau$. Uma resolução de voltímetro de $6\frac{1}{2}$ dígitos pode ser obtida com um tempo de abertura em torno de 0,001 s. Se m é muito grande, o

tempo de abertura será muito pequeno, e isto causará uma degradação da resolução do voltímetro (CZENKUSCH, 1989). O tempo de abertura é tal que o argumento da função seno integral em (II-2-7) é sempre mantido dentro do lóbulo principal da função para todos os m harmônicos escolhidos.

O IADC tem duas entradas: uma entrada de baixa velocidade e uma entrada de alta velocidade (GOECKE, 1989). O tempo de abertura é usado para selecionar entre os dois. O limiar é $100 \mu\text{s}$ e é alcançado para $mf_0 = 1/0,00026 \text{ Hz}$. Quando da realização de medição de exatidão elevada, a tensão de entrada é aplicada à entrada de baixa velocidade. Para um sinal de 60 Hz, isto significa escolher $m \leq 64$. Esta escolha é razoável se o sinal não apresenta amplitudes de harmônicos significativas para $m > 64$. Para tempos de abertura menores do que $100 \mu\text{s}$, a tensão de entrada é chaveada para a entrada de alta velocidade (CZENKUSCH, 1989). O algoritmo pode operar com frequências fundamentais de 2 Hz a 1 kHz. Para um sinal de 1 kHz, o limiar de $100 \mu\text{s}$ é alcançado em $m = 3$. Quanto maior a frequência fundamental, menos distorcido deve ser o sinal a fim de ser medido com exatidão.

Quando estamos interessados na estimação destas amplitudes em percentuais da fundamental, quaisquer das duas entradas do IADC poderá ser usada. A incerteza de medição neste caso será menor à medida em que aumentamos o número de harmônicos. Deve-se, entretanto, notar que o tempo de medição aumenta aproximadamente proporcional a m para tempos de abertura maiores do que $100 \mu\text{s}$ e aproximadamente proporcional a m^2 para tempos de abertura abaixo deste limiar.

Como $n = 4m$ e N atende o teorema de amostragem, o algoritmo sempre mantém elevado o número de graus de liberdade $nN - 2m$ qualquer que seja o m selecionado. Isto assegura a validade das aproximações assintóticas (II-3-15), (II-4-17) e (II-5-9).

III-6 Comparação internacional

Uma versão em inglês do algoritmo para medir os parâmetros dos harmônicos de sinais de tensão periódicos arbitrários usando um único DVM foi enviada ao PTB, em setembro de 2004, na forma de um programa executável gravado em dois disquetes comuns.

O objetivo foi comparar o algoritmo descrito neste trabalho com o sistema de sintetização e amostragem síncrona do PTB (RAMM, G., MOSER *et al.*, 1999,

KÜRTEH IHLENFELD, W., MOHNS, E. *et al.*, 2003)¹⁹. Esta seção foi elaborada com base nos relatórios enviados por KÜRTEH-IHLENFELD (2004, 2005).

III-6-1 Programa instalado no sistema síncrono

As primeiras tentativas de avaliar o algoritmo foram realizadas com um único sistema: o sistema síncrono do PTB, com o programa enviado rodando no mesmo computador e com o mesmo amostrador (DVM HP3458A) utilizado pelo sistema síncrono. Em outras palavras, o sistema síncrono do PTB foi seqüencialmente controlado pelo programa do PTB e pelo programa enviado pelo autor desta tese.

O sinal que se deseja gerar é aproximado por degraus de igual duração de tempo (tempo de amostragem do DAC). O usuário seleciona o número de degraus (máximo de 4096) e o computador escreve em cada um dos 4096 endereços de uma memória RAM um código de 16 bits para gerar qualquer sinal corresponde à amplitude. Programada a memória, o contador de uma base de tempo (de 10 MHz) é liberado para gerar uma freqüência de, por exemplo, $62,5 \text{ Hz} \times 4096 = 256000 \text{ Hz}$. O sinal sintetizado pode passar por um filtro de 2ª ordem anti-aliasing de freqüência de corte de 2300 Hz, que pode ser desabilitado. Assim componentes de alta freqüência podem ser eliminadas. O gerador tem uma estabilidade de 2×10^{-7} por hora.

Um sinal retificado em meia onda (com componente C.C. adequada para fornecer o necessário cruzamento pelo nulo do sinal²⁰) de freqüência fundamental 62,5 Hz contendo 18 harmônicos foi sintetizado pelo gerador do sistema síncrono do PTB.

O sistema síncrono do PTB demorou aproximadamente 2 s para avaliar as amplitudes de 20 harmônicos. O programa usa transformada de Fourier discreta para determinar os parâmetros dos harmônicos, mas possui uma rotina de FFT que é usada quando o número de amostras é uma potência de 2. A THD medida foi de 43,47838%. O algoritmo foi ajustado com 10 períodos de 40 amostras (cada um) espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,000400 \text{ s}$ (com $t_{\text{aper}} = 0,000375 \text{ s}$). O valor eficaz medido foi de 5,5276151 V. O valor eficaz medido da amplitude fundamental foi de 5,0692048 V.

¹⁹ A grandeza potência elétrica é derivada neste sistema de uma relação entre as amplitudes e ângulos de fase de dois sinais, canal 2 / canal 1, onde canal 2 – corrente e canal 1 – tensão. No caso da presente comparação, canal 2 = canal 1 e algum desvio se deve simplesmente ao fato de que estas tensões não são amostradas exatamente no mesmo tempo. Os valores do canal 2, de onde o programa de controle do sistema começa a calcular os resultados, foram usados na comparação.

²⁰ Recentemente, uma alteração foi feita no algoritmo de modo que a freqüência fundamental do sinal pode ser medida por técnicas de cruzamento de um nível C.C. arbitrário selecionado pelo usuário.

O programa enviado ao PTB (cujo algoritmo é estudado neste trabalho) demorou 23 s para avaliar as amplitudes de 20 harmônicos. A THD medida foi de 43,4783%. A frequência fundamental na base de tempo do DVM foi medida por um comando interno do DVM como sendo de 62,499985 Hz (frequência calibrada de 62,49963 Hz). O algoritmo selecionou $n = 80$ trens de $N = 239$ amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,0004184$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,0003884$ s). O valor eficaz medido foi de 5,527618 V (obtido de (II-7-1-4)). O valor eficaz da amplitude fundamental (5,069212 V) foi medido com uma incerteza de $3,4 \mu\text{V V}^{-1}$ (obtida de (II-7-1-2b)). As amplitudes dos harmônicos relativas à fundamental foram medidas com uma incerteza menor do que $1,1 \times 10^{-6}$ (obtida de (II-7-1-3)).

Portanto, a diferença relativa entre os valores eficazes medidos pelos dois métodos é de $0,52 \mu\text{V V}^{-1}$. A diferença relativa entre os valores eficazes da amplitude fundamental medidos pelos dois métodos é de $1,4 \mu\text{V V}^{-1}$ (portanto dentro da incerteza de medição do programa enviado ao PTB).

Os resultados obtidos para as amplitudes relativas à fundamental de 19 harmônicos estão listados na Tabela III-18. Na coluna “Inmetro” estão listados os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB controlado pelo programa enviado ao PTB. A coluna a seguir lista as incertezas combinadas associadas com os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB controlado pelo programa enviado ao PTB. Na coluna “PTB” estão listados os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB controlado com o programa normalmente usado pelo PTB. A coluna a seguir lista as incertezas combinadas associadas com os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB controlado pelo programa normalmente usado pelo PTB. As diferenças entre os valores medidos pelos dois métodos estão listadas na coluna “Erro”.

A tabela mostra que a diferença entre os resultados de amplitude é menor do que a incerteza padrão de medição do programa enviado ao PTB para um total de 11 harmônicos. A diferença é menor do que duas vezes a incerteza padrão de medição para 16 harmônicos. A diferença para os três últimos harmônicos é menor do que três vezes a incerteza padrão de medição. A discrepância entre os resultados dos dois métodos é menor do que $2,4 \times 10^{-6}$.

Tabela III-18. Comparação entre as amplitudes dos harmônicos medidas com o sistema síncrono do PTB controlado seqüencialmente pelo programa enviado ao PTB e pelo programa do PTB ($m = 20$).

| No. Harm. | Inmetro (%) | $u(d_j)$ (10^{-6}) | PTB (%) | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) |
|-----------|-------------|------------------------|-----------|------------------------|--------------------|
| 1 | 100,00000 | - | 100,00000 | - | - |
| 2 | 42,39902 | 1,1 | 42,39912 | 0,4 | -1,0 |
| 3 | 0,00020 | 1,0 | 0,00021 | 0,8 | -0,1 |
| 4 | 8,48981 | 1,0 | 8,48973 | 0,6 | 0,8 |
| 5 | 0,00034 | 1,0 | 0,00039 | 0,6 | -0,5 |
| 6 | 3,63949 | 1,0 | 3,63954 | 0,9 | -0,5 |
| 7 | 0,00040 | 1,0 | 0,00050 | 0,9 | -1,0 |
| 8 | 2,01997 | 1,0 | 2,02010 | 1,2 | -1,3 |
| 9 | 0,00029 | 1,0 | 0,00021 | 0,8 | 0,8 |
| 10 | 1,29018 | 1,0 | 1,28999 | 0,5 | 1,9 |
| 11 | 0,00029 | 1,0 | 0,00043 | 0,4 | -1,4 |
| 12 | 0,88988 | 1,0 | 0,88977 | 0,4 | 1,1 |
| 13 | 0,00017 | 1,0 | 0,00021 | 0,5 | -0,4 |
| 14 | 0,65047 | 1,0 | 0,65048 | 0,4 | -0,1 |
| 15 | 0,00031 | 1,0 | 0,00043 | 0,4 | -1,2 |
| 16 | 0,49986 | 1,0 | 0,49987 | 0,5 | -0,1 |
| 17 | 0,00047 | 1,0 | 0,00071 | 0,4 | -2,4 |
| 18 | 0,39001 | 1,0 | 0,38977 | 0,7 | 2,4 |
| 19 | 0,00049 | 1,0 | 0,00072 | 0,5 | -2,3 |

Os resultados para os ângulos de fase relativos à fundamental estão listados na Tabela III-19. Na coluna “Inmetro” estão listados os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB controlado pelo programa enviado ao PTB. A coluna a seguir lista as incertezas combinadas associadas com os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB controlado pelo programa enviado ao PTB. Na coluna “PTB” estão listados os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB controlado pelo programa normalmente usado pelo PTB. A coluna a seguir lista as incertezas combinadas associadas com os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB controlado pelo programa normalmente usado pelo PTB. As diferenças entre os valores medidos pelos dois métodos estão listadas na coluna “Erro”.

A estimativa do ângulo de fase $(\gamma_e)_j$ do j -ésimo harmônico relativo à fundamental e a incerteza $u((\gamma_e)_j)$ associada com a estimativa foram obtidas de (II-8-8). Escolheu-se um ângulo de fase de referência arbitrário $\theta_R = 90^\circ$ para a fundamental. Supõe-se que os estágios de entrada do DVM possam ser modelados como um filtro de

fase linear até o 19^o harmônico. O aumento da incerteza com j crescente reflete a redução das amplitudes dos harmônicos (veja Tabela III-18).

A Tabela III-19 mostra que a diferença entre os resultados de ângulo de fase é menor ou igual à incerteza padrão de medição do programa enviado ao PTB para um total de 10 harmônicos. A diferença é menor do que duas vezes a incerteza padrão de medição para todos os harmônicos.

Tabela III-19. Comparação entre os ângulos de fase dos harmônicos medidos com o sistema síncrono do PTB controlado seqüencialmente pelo programa enviado ao PTB e pelo programa do PTB ($m = 20$).

| No. Harm. | Inmetro (grau) | $u((\gamma \epsilon)_j)$ (grau) | PTB (grau) | $u((\gamma \epsilon)_j)$ (grau) | Erro (grau) |
|-----------|----------------|---------------------------------|------------|---------------------------------|-------------|
| 1 | -90,0000 | - | -90,0000 | - | - |
| 2 | -179,9999 | 0,0001 | -180,000 | 0,010 | 0,0001 |
| 3 | -14 | 28 | -49 | 23 | 34,5 |
| 4 | -179,9978 | 0,0007 | -179,998 | 0,021 | 0,0002 |
| 5 | -6 | 16 | -1,5 | 7,1 | 4,5 |
| 6 | -180,0012 | 0,0015 | -180,002 | 0,031 | 0,0008 |
| 7 | -70 | 14 | -97 | 15 | 27,4 |
| 8 | -179,9954 | 0,0028 | -179,994 | 0,042 | -0,0014 |
| 9 | -27 | 20 | -49 | 22 | 21,6 |
| 10 | -180,0051 | 0,0043 | -180,010 | 0,052 | 0,0049 |
| 11 | -89 | 19 | -56,9 | 8,3 | -32,1 |
| 12 | 180,0036 | 0,0063 | -179,999 | 0,062 | 0,0046 |
| 13 | -187 | 34 | -132 | 17 | -54,6 |
| 14 | -179,9888 | 0,0086 | -179,996 | 0,074 | 0,0072 |
| 15 | -91 | 18 | -113,1 | 8,7 | 22,1 |
| 16 | -179,974 | 0,011 | -179,975 | 0,083 | 0,001 |
| 17 | -158 | 12 | -169,7 | 5,1 | 11,7 |
| 18 | -179,953 | 0,014 | -179,967 | 0,093 | 0,014 |
| 19 | -351 | 11 | -4,4 | 4,6 | 13,4 |

Uma outra experiência foi realizada cujos resultados são relatados a seguir. Novamente, a comparação entre os algoritmos foi realizada com um único sistema: o sistema síncrono do PTB, com o programa enviado rodando no mesmo computador e com o mesmo amostrador (DVM HP3458A) utilizado pelo sistema síncrono. Em outras palavras, o sistema síncrono do PTB foi seqüencialmente controlado pelo programa do PTB e pelo programa enviado ao PTB.

Mas desta vez, outras formas de onda foram usadas: (a) um sinal senoidal quase puro (THD < 0,0001%) e (b) um sinal senoidal com 3^o harmônico (de amplitude de 33% da fundamental). Somente o valor eficaz medido foi relatado.

Para (a), o valor eficaz medido pelo sistema síncrono controlado pelo programa do PTB foi de 5,5283912 V com uma incerteza padrão de 0,0000011 V. O valor eficaz medido pelo sistema síncrono controlado pelo programa enviado ao PTB foi de 5,528386 V com uma incerteza padrão de 0,000013 V. O algoritmo selecionou $n = 24$ trens de $N = 572$ amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,001049$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,001019$ s). A diferença entre os resultados de medição de valor eficaz está bem dentro da incerteza de medição do programa enviado ao PTB (embora seja de quase cinco vezes a incerteza associada ao resultado fornecido pelo sistema síncrono quando controlado pelo programa do PTB). Esta medição foi repetida alguns dias depois e a diferença obtida entre os resultados de medição foi menor do que 3 partes em 10^7 .

Para (b), o valor eficaz medido pelo sistema síncrono controlado pelo programa do PTB foi de 5,5275771 V (a incerteza padrão não foi relatada). O valor eficaz medido pelo sistema síncrono controlado pelo programa enviado ao PTB foi de 5,527585 V com uma incerteza padrão de 0,000013 V. Novamente, o algoritmo selecionou $n = 24$ trens de $N = 572$ amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,001049$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,001019$ s). A diferença entre os resultados está dentro da incerteza de medição do programa enviado ao PTB.

Este resultado confirma a validade da avaliação da incerteza de medição realizada nesta tese. Os resultados da comparação apresentados nesta seção foram muito bons, ainda mais porque o programa enviado ao PTB (cujo algoritmo é estudado neste trabalho) não sabe se o sistema está operando sincronamente ou não.

III-6-2 Programa instalado em um sistema independente

Nesta seção, relatamos os resultados obtidos quando dois sistemas independentes foram usados para medir o sinal gerado: um síncrono e um assíncrono. Novamente, um sinal retificado em meia onda (com componente C.C. adequada para fornecer o necessário cruzamento pelo nulo do sinal²¹) contendo 18 harmônicos foi sintetizado pelo gerador do sistema síncrono do PTB. Desta vez, entretanto, o sinal é

²¹ Recentemente, uma alteração foi feita no algoritmo de modo que a frequência fundamental do sinal pode ser medida por técnicas de cruzamento de um nível C.C. arbitrário selecionado pelo usuário.

amostrado tanto pelo DVM (HP 3458A) do sistema síncrono do PTB quanto por um sistema independente composto de um DVM (HP 3458A calibrado com a mesma referência de 10 V C.C. usada no sistema síncrono) controlado por um outro computador. O sistema síncrono roda o programa de controle normalmente usado pelo PTB. O outro sistema roda o programa enviado ao PTB (cujo algoritmo é estudado neste trabalho).

Os ajustes foram selecionados, tanto no programa enviado ao PTB quanto no programa de controle do sistema síncrono do PTB, de forma que se obtivessem tempos de integração e intervalos de amostragem praticamente similares. Tanto o programa enviado ao PTB quanto o programa de controle do sistema síncrono do PTB foram ajustados para medir 25 e 40 harmônicos de um sinal retificado em meia onda contendo 18 harmônicos.

O sistema síncrono do PTB demorou aproximadamente 2 s para avaliar as amplitudes de 25 harmônicos. A frequência fundamental medida foi de 55,555556 Hz. A THD medida foi de 43,42876%. O algoritmo foi ajustado com 10 períodos de 50 amostras (cada um) espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,000360$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,000335$ s). O valor eficaz medido foi de 5,5234665 V. O valor eficaz medido da amplitude fundamental foi de 5,0663223 V.

O sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB (cujo algoritmo é estudado neste trabalho) demorou 25 s para avaliar as amplitudes de 25 harmônicos. A THD medida foi de 43,42880%. O algoritmo selecionou $n = 100$ trens de $N = 199$ amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,000335$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,000305$ s). A frequência fundamental na base de tempo do DVM foi medida por um comando interno do DVM como sendo de 55,554955 Hz (frequência calibrada de 55,55537 Hz). O valor eficaz medido foi de 5,523453 V (obtido de (II-7-1-4)). O valor eficaz da amplitude fundamental (5,066309 V) foi medido com uma incerteza de $3,7 \mu\text{V V}^{-1}$ (obtida de (II-7-1-2b)). As amplitudes dos harmônicos relativas à fundamental foram medidas com uma incerteza menor do que 6×10^{-7} (obtida de (II-7-1-3)).

Portanto, a diferença relativa entre os valores eficazes medidos pelos dois métodos é de $2,4 \mu\text{V V}^{-1}$. A diferença relativa entre os valores eficazes da amplitude fundamental medidos pelos dois métodos é de $2,6 \mu\text{V V}^{-1}$ (portanto dentro da incerteza de medição do programa enviado ao PTB). A diferença entre os resultados de medição é ligeiramente maior do que a relatada na seção anterior possivelmente devido à diferença

entre os erros de ganho do IADC dos dois DVMs (no experimento da seção anterior somente o DVM do sistema síncrono do PTB foi usado).

Os resultados obtidos para as amplitudes relativas à fundamental de 25 harmônicos estão listados na Tabela III-20. Na coluna “Inmetro” estão listados os resultados obtidos com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB. A coluna a seguir lista as incertezas combinadas associadas com os resultados obtidos com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB. Na coluna “PTB” estão listados os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB. A coluna a seguir lista as incertezas combinadas associadas com os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB. As diferenças entre os valores medidos pelos dois métodos estão listadas na coluna “Erro”.

Tabela III-20. Comparação entre as amplitudes dos harmônicos medidas com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB e com o sistema síncrono do PTB ($m = 25$).

| No. Harm. | Inmetro (%) | $u(d_j)$ (10^{-6}) | PTB (%) | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) |
|-----------|-------------|------------------------|-------------|------------------------|--------------------|
| 1 | 100,00000 | 0,0 | 100,0000000 | 0,00 | 0,0 |
| 2 | 42,36267 | 0,6 | 42,36264 | 0,4 | 0,3 |
| 3 | 0,00071 | 0,5 | 0,00073 | 0,3 | -0,2 |
| 4 | 8,45477 | 0,5 | 8,45477 | 0,4 | 0,0 |
| 5 | 0,00034 | 0,5 | 0,00038 | 0,3 | -0,4 |
| 6 | 3,60485 | 0,5 | 3,60487 | 0,3 | -0,2 |
| 7 | 0,00037 | 0,5 | 0,00040 | 0,3 | -0,3 |
| 8 | 1,98579 | 0,5 | 1,98576 | 0,4 | 0,3 |
| 9 | 0,00026 | 0,5 | 0,00030 | 0,3 | -0,4 |
| 10 | 1,25647 | 0,5 | 1,25651 | 0,3 | -0,4 |
| 11 | 0,00019 | 0,5 | 0,00026 | 0,4 | -0,7 |
| 12 | 0,85684 | 0,5 | 0,85684 | 0,4 | 0,0 |
| 13 | 0,00016 | 0,5 | 0,00016 | 0,4 | 0,0 |
| 14 | 0,61829 | 0,5 | 0,61829 | 0,4 | 0,0 |
| 15 | 0,00031 | 0,5 | 0,00029 | 0,4 | 0,2 |
| 16 | 0,46826 | 0,5 | 0,46821 | 0,4 | 0,5 |
| 17 | 0,00043 | 0,5 | 0,00056 | 0,4 | -1,3 |
| 18 | 0,35957 | 0,5 | 0,35952 | 0,5 | 0,5 |
| 19 | 0,00048 | 0,5 | 0,00051 | 0,4 | -0,3 |
| 20 | 0,00063 | 0,5 | 0,00087 | 0,4 | -2,4 |
| 21 | 0,00023 | 0,5 | 0,00024 | 0,4 | -0,1 |
| 22 | 0,00019 | 0,5 | 0,00012 | 0,4 | 0,7 |
| 23 | 0,00027 | 0,5 | 0,00031 | 0,5 | -0,4 |
| 24 | 0,00016 | 0,5 | 0,00014 | 0,5 | 0,2 |
| 25 | 0,00031 | 0,5 | | | |

A tabela mostra que a diferença entre os resultados de amplitude é menor ou igual que a incerteza padrão de medição do sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB para um total de 19 harmônicos. A diferença é menor do que duas vezes a incerteza padrão de medição para 22 harmônicos. A diferença é menor do que três vezes a incerteza padrão de medição para 23 harmônicos. A diferença é muito grande relativamente à incerteza padrão de medição apenas para o 20º harmônico (teoricamente não existente).

A incerteza padrão de medição ($0,6 \times 10^{-6}$) é aproximadamente a metade da incerteza padrão da medição relatada na seção anterior ($1,1 \times 10^{-6}$). O uso de um sistema independente parece ter reduzido a contribuição da incerteza associada ao ruído.

Os resultados para os ângulos de fase relativos à fundamental estão listados na Tabela III-21. Na coluna “Inmetro” estão listados os resultados obtidos com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB. A coluna a seguir lista as incertezas combinadas associadas com os resultados obtidos com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB. Na coluna “PTB” estão listados os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB. A coluna a seguir lista as incertezas combinadas associadas com os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB. As diferenças entre os valores medidos pelos dois métodos estão listadas na coluna “Erro”.

A estimativa do ângulo de fase ($\gamma_{\epsilon j}$) do j -ésimo harmônico relativo à fundamental e a incerteza $u((\gamma_{\epsilon j}))$ associada com a estimativa foram obtidas de (II-8-8). Escolheu-se um ângulo de fase de referência arbitrário $\theta_R = 90^\circ$ para a fundamental. Supõe-se que os estágios de entrada do DVM possam ser modelados como um filtro de fase linear até o 25º harmônico. O aumento da incerteza com j crescente reflete a redução das amplitudes dos harmônicos (veja Tabela III-20).

A Tabela III-21 mostra que a diferença entre os resultados de ângulo de fase é menor do que a incerteza padrão de medição do sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB para um total de 13 harmônicos. A diferença é menor do que duas vezes a incerteza padrão de medição para 17 harmônicos. A diferença é menor do que três vezes a incerteza padrão de medição para 18 harmônicos. A diferença é muito grande relativamente à incerteza de medição para os harmônicos acima do 18º harmônico (teoricamente não existentes).

Tabela III-21. Comparação entre os ângulos de fase dos harmônicos medidos com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB e com o sistema síncrono do PTB ($m = 25$).

| No. Harm. | Inmetro (grau) | $u((\gamma_\epsilon)_j)$ (grau) | PTB (grau) | $u((\gamma_\epsilon)_j)$ (grau) | Erro (grau) |
|-----------|----------------|---------------------------------|------------|---------------------------------|-------------|
| 1 | -90,0000 | - | -90,0000 | - | - |
| 2 | -179,9971 | 0,0001 | -179,997 | 0,010 | 0,0001 |
| 3 | -78,4 | 4,1 | -78,6 | 2,4 | 0,2 |
| 4 | -179,9775 | 0,0004 | -179,978 | 0,021 | 0,0005 |
| 5 | -20,3 | 8,6 | -25,4 | 6,6 | 5,1 |
| 6 | -179,9383 | 0,0008 | -179,939 | 0,031 | 0,0007 |
| 7 | -66,5 | 8,0 | -63,6 | 4,7 | -2,9 |
| 8 | -179,8542 | 0,0015 | -179,854 | 0,041 | -0,0002 |
| 9 | -23 | 11 | -27,6 | 8,2 | 4,6 |
| 10 | -179,7402 | 0,0023 | -179,741 | 0,052 | 0,0008 |
| 11 | -89 | 16 | -84,9 | 7,6 | -4,1 |
| 12 | -179,5624 | 0,0034 | -179,564 | 0,062 | 0,0016 |
| 13 | -189 | 18 | -162 | 12 | -27,4 |
| 14 | -179,3095 | 0,0047 | -179,312 | 0,074 | 0,0025 |
| 15 | -91,6 | 9,3 | -93,2 | 8,9 | 1,6 |
| 16 | -178,9915 | 0,0062 | -179,007 | 0,083 | 0,0155 |
| 17 | -159,5 | 6,7 | -145,8 | 4,3 | -13,7 |
| 18 | -178,5956 | 0,0081 | -178,588 | 0,093 | -0,0076 |
| 19 | -339,7 | 6,1 | -400 | 144 | 60,7 |
| 20 | -268,6 | 4,6 | -251,3 | 2,4 | -17,3 |
| 21 | -200 | 13 | -256 | 10 | 55,8 |
| 22 | -178 | 15 | -64 | 23 | -114 |
| 23 | -288 | 11 | -345,7 | 9,5 | 57,7 |
| 24 | -270 | 19 | -394 | 12 | 124 |
| 25 | -332,3 | 9,4 | | | |

O sistema síncrono do PTB demorou aproximadamente 2 s para avaliar as amplitudes de 40 harmônicos. A frequência fundamental medida foi de 55,55555556 Hz. A THD medida foi de 43,42887%. O algoritmo foi ajustado com 10 períodos de 80 amostras (cada um) espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,000225$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,000200$ s). O valor eficaz medido foi de 5,5234871 V. O valor eficaz medido da amplitude fundamental foi de 5,0663392 V.

O sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB (cujo algoritmo é estudado neste trabalho) demorou 39 s para avaliar as amplitudes de 40 harmônicos. A THD medida foi de 43,42875%. O algoritmo selecionou $n = 160$ trens de $N = 159$ amostras espaçadas de $t_{\text{samp}} = 0,0002096$ s (com $t_{\text{aper}} = 0,0001796$ s). A

freqüência fundamental na base de tempo do DVM foi medida por um comando interno do DVM como sendo de 55,554935 Hz (freqüência calibrada de 55,55535 Hz). O valor eficaz medido foi de 5,523468 V (obtido de (II-7-1-4)). O valor eficaz da amplitude fundamental (5,066324 V) foi medido com uma incerteza de $6,0 \mu\text{V V}^{-1}$ (obtida de (II-7-1-2b)). As amplitudes dos harmônicos relativas à fundamental foram medidas com uma incerteza menor do que 7×10^{-7} (obtida de (II-7-1-3)).

Portanto, a diferença relativa entre os valores eficazes medidos pelos dois métodos é de $3,5 \mu\text{V V}^{-1}$. A diferença relativa entre os valores eficazes da amplitude fundamental medidos pelos dois métodos é de $3,0 \mu\text{V V}^{-1}$ (portanto dentro da incerteza de medição do programa enviado ao PTB). A diferença entre os resultados de medição é ligeiramente maior do que a relatada na seção anterior possivelmente devido a diferença entre os erros de ganho do IADC dos dois DVMs (no experimento da seção anterior somente o DVM do sistema síncrono do PTB foi usado).

Os resultados obtidos para as amplitudes relativas à fundamental de 25 harmônicos estão listados na Tabela III-22. As amplitudes dos harmônicos acima do 25º harmônico são desprezíveis e portanto não foram listadas.

Na coluna “Inmetro” estão listados os resultados obtidos com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB. A coluna a seguir lista as incertezas combinadas associadas com os resultados obtidos com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB. Na coluna “PTB” estão listados os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB. A coluna a seguir lista as incertezas combinadas associadas com os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB. As diferenças entre os valores medidos pelos dois métodos estão listadas na coluna “Erro”.

A tabela mostra que a diferença entre os resultados de amplitude é menor ou igual que a incerteza padrão de medição do sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB para um total de 19 harmônicos. A diferença é menor do que duas vezes a incerteza padrão de medição para 22 harmônicos. A diferença é menor do que três vezes a incerteza padrão de medição para 23 harmônicos. A diferença é muito grande relativamente à incerteza padrão de medição apenas para o 20º harmônico (teoricamente não existente).

Tabela III-22. Comparação entre as amplitudes de 25 harmônicos medidas com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB e com o sistema síncrono do PTB ($m = 40$).

| No. Harm. | Inmetro (%) | $u(d_j)$ (10^{-6}) | PTB (%) | $u(d_j)$ (10^{-6}) | Erro (10^{-6}) |
|-----------|-------------|------------------------|-----------|------------------------|--------------------|
| 1 | 100,00000 | 0,0 | 100,00000 | 0,0 | 0,0 |
| 2 | 42,36262 | 0,7 | 42,36274 | 0,5 | -1,2 |
| 3 | 0,00075 | 0,7 | 0,00070 | 0,4 | 0,5 |
| 4 | 8,45477 | 0,7 | 8,45481 | 0,5 | -0,4 |
| 5 | 0,00035 | 0,7 | 0,00043 | 0,5 | -0,8 |
| 6 | 3,60485 | 0,7 | 3,60488 | 0,5 | -0,3 |
| 7 | 0,00038 | 0,7 | 0,00038 | 0,5 | 0,0 |
| 8 | 1,98577 | 0,7 | 1,98576 | 0,5 | 0,1 |
| 9 | 0,00028 | 0,7 | 0,00028 | 0,6 | 0,0 |
| 10 | 1,25647 | 0,7 | 1,25641 | 0,5 | 0,6 |
| 11 | 0,00019 | 0,7 | 0,00017 | 0,5 | 0,2 |
| 12 | 0,85683 | 0,7 | 0,85688 | 0,4 | -0,5 |
| 13 | 0,00016 | 0,7 | 0,00018 | 0,5 | -0,2 |
| 14 | 0,61829 | 0,7 | 0,61837 | 0,5 | -0,8 |
| 15 | 0,00032 | 0,7 | 0,00034 | 0,5 | -0,2 |
| 16 | 0,46825 | 0,7 | 0,46819 | 0,5 | 0,6 |
| 17 | 0,00043 | 0,7 | 0,00038 | 0,5 | 0,5 |
| 18 | 0,35957 | 0,7 | 0,35964 | 0,5 | -0,7 |
| 19 | 0,00048 | 0,7 | 0,00043 | 0,5 | 0,5 |
| 20 | 0,00063 | 0,7 | 0,00059 | 0,5 | 0,4 |
| 21 | 0,00024 | 0,7 | 0,00021 | 0,5 | -0,3 |
| 22 | 0,00018 | 0,7 | 0,00014 | 0,5 | 0,4 |
| 23 | 0,00026 | 0,7 | 0,00040 | 0,5 | -1,4 |
| 24 | 0,00016 | 0,7 | 0,00027 | 0,5 | -1,1 |
| 25 | 0,00030 | 0,7 | 0,00041 | 0,5 | -1,1 |

Deve-se observar que o sinal é o mesmo que foi usado para obter os resultados da Tabela III-20. Apenas os parâmetros de amostragem foram modificados para atender o teorema da amostragem para o número de harmônicos diferente escolhido. O leitor deve comparar os resultados das Tabelas III-20 e III-22. Comparando as tabelas pode-se constatar que a repetitividade dos resultados obtidos com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB é menor do que 5 partes em 10^7 , e a repetitividade dos resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB é menor do que 1 parte em 10^6 . Isto provavelmente se deve ao fato do algoritmo estudado neste trabalho usar um número maior de amostras do que o exigido pelo sistema síncrono do PTB. A

discrepância observada para o 20^o harmônico, referida no parágrafo anterior, pode ser explicada pela repetitividade do sistema síncrono do PTB.

Os resultados para os ângulos de fase relativos à fundamental estão listados na Tabela III-23. Na coluna “Inmetro” estão listados os resultados obtidos com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB. A coluna a seguir lista as incertezas combinadas associadas com os resultados obtidos com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB. Na coluna “PTB” estão listados os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB. A coluna a seguir lista as incertezas combinadas associadas com os resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB. As diferenças entre os valores medidos pelos dois métodos estão listadas na coluna “Erro”.

Tabela III-23. Comparação entre os ângulos de fase de 25 harmônicos medidos com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB e com o sistema síncrono do PTB ($m = 40$).

| No. Harm. | Inmetro (grau) | $u((\gamma_e)_j)$ (grau) | PTB (grau) | $u((\gamma_e)_j)$ (grau) | Erro (grau) |
|-----------|----------------|--------------------------|------------|--------------------------|-------------|
| 1 | -90,0000 | - | -90,0000 | - | - |
| 2 | -179,9972 | 0,0001 | -179,997 | 0,010 | 0,0000 |
| 3 | -80,3 | 5,0 | -74,3 | 4,0 | -6,0 |
| 4 | -179,9776 | 0,0004 | -180,001 | 0,021 | 0,0234 |
| 5 | -25 | 11 | -13,0 | 5,8 | -12,0 |
| 6 | -179,9386 | 0,0010 | -179,938 | 0,031 | -0,0006 |
| 7 | -69,5 | 9,9 | -66,8 | 6,3 | -2,7 |
| 8 | -179,8548 | 0,0019 | -179,855 | 0,041 | 0,0002 |
| 9 | -26 | 14 | -22 | 11 | -4,4 |
| 10 | -179,7405 | 0,0030 | -179,742 | 0,052 | 0,0015 |
| 11 | -90 | 20 | -91 | 19 | 1 |
| 12 | -179,5628 | 0,0044 | -179,564 | 0,062 | 0,0012 |
| 13 | -184 | 23 | -177 | 12 | -7 |
| 14 | -179,3099 | 0,0061 | -179,313 | 0,074 | 0,0031 |
| 15 | -92 | 12 | -85,4 | 7,5 | -6,6 |
| 16 | -178,9927 | 0,0080 | -178,993 | 0,083 | -0,0003 |
| 17 | -158,5 | 8,6 | -151,5 | 7,0 | -7,0 |
| 18 | -178,598 | 0,010 | -178,607 | 0,095 | 0,009 |
| 19 | -341,2 | 7,7 | -344,8 | 6,2 | 3,6 |
| 20 | -268,0 | 6,0 | -272,9 | 4,8 | 4,9 |
| 21 | -201 | 16 | -180 | 13 | -21 |
| 22 | -180 | 21 | 120 | 23 | 60 |
| 23 | -291 | 14 | -287,2 | 7,6 | -3,8 |
| 24 | -274 | 23 | -270,1 | 9,5 | -3,9 |
| 25 | -332 | 13 | -363,1 | 6,5 | 31,1 |

A estimativa do ângulo de fase $(\gamma_e)_j$ do j -ésimo harmônico relativo à fundamental e a incerteza $u((\gamma_e)_j)$ associada com a estimativa foram obtidas de (II-8-8). Escolheu-se um ângulo de fase de referência arbitrário $\theta_R = 90^\circ$ para a fundamental. Supõe-se que os estágios de entrada do DVM possam ser modelados como um filtro de fase linear até o 25º harmônico. O aumento da incerteza com j crescente reflete a redução das amplitudes dos harmônicos (veja Tabela III-22).

A Tabela III-23 mostra que a diferença entre os resultados de ângulo de fase é menor do que a incerteza padrão de medição do sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB para um total de 19 harmônicos. A diferença é menor do que duas vezes a incerteza padrão de medição para 22 harmônicos. A diferença é menor do que três vezes a incerteza padrão de medição para 24 harmônicos. A diferença é muito grande relativamente à incerteza de medição para o 4º harmônico.

Deve-se observar que o sinal é o mesmo que foi usado para obter os resultados da Tabela III-21. Apenas os parâmetros de amostragem foram modificados para atender o teorema da amostragem para o número de harmônicos diferente escolhido. O leitor deve comparar os resultados das Tabelas III-21 e III-23. Comparando as tabelas, pode-se constatar que a repetitividade dos resultados obtidos com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB é menor do que 0,0024 grau para os primeiros 18 harmônicos pares, e a repetitividade dos resultados obtidos com o sistema síncrono do PTB é menor do que 0,019 grau para os primeiros 18 harmônicos pares. Isto provavelmente se deve ao fato do algoritmo estudado neste trabalho usar um número maior de amostras do que o exigido pelo sistema síncrono do PTB. A discrepância observada para o 4º harmônico na Tabela III-23 e as discrepâncias observadas para os harmônicos acima do 18º harmônico na Tabela III-21 podem ser explicadas pela repetitividade do sistema síncrono do PTB.

III-6-3 Comparação com conversores térmicos

Um conversor térmico atua como um sensor em que a tensão C.C. de saída é proporcional à energia do sinal. Intimamente em contato com o elemento aquecedor (*heater*) está uma série de elementos térmicos com uma série de junções mantidas à temperatura ambiente. Assim, a tensão de saída dos elementos térmicos produz uma tensão C.C. proporcional à temperatura atingida pelo elemento aquecedor. As

características C.A. do elemento aquecedor são dimensionadas de forma que os erros de conversão C.A.-C.C. sejam minimizados. LAIZ (1999) aperfeiçoou os conversores térmicos de multijunção planares do PTB para medir o valor eficaz de tensão C.A. a baixas frequências.

Fato é que os conversores térmicos são calibrados contra padrões (conversores térmicos calculáveis ou otimizados) somente com sinais senoidais. São elementos de alta banda passante e obedecem à lei de Joule. Assim, a tensão C.C. de saída de um conversor térmico é proporcional à energia (raiz quadrada da soma quadrática das amplitudes dos harmônicos) de sinais distorcidos cujo espectro de frequência esteja bem dentro da banda passante. Uma componente de 0,1% da fundamental irá contribuir com somente uma parte em 10^6 de informação, isto é, dilui-se. Estes dispositivos analógicos serão sempre superiores a sistemas de amostragem digital tanto no que diz respeito à medição do valor eficaz de sinais senoidais em altas frequências quanto à medição do valor eficaz total de sinais distorcidos de baixa frequência.

Nesta seção, descrevemos a comparação entre um sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB (cujo algoritmo é estudado neste trabalho) e o sistema síncrono do PTB que agora opera com um conversor térmico multijunção planar com incerteza padrão de 5×10^{-7} (incerteza expandida de 10^{-6}) para a determinação do valor eficaz. O método usado na comparação está descrito em MOHNS, KÜRTEH-IHLENFELD (2005) e KÜRTEH-IHLENFELD, MOHNS, (2005b).

Um sinal senoidal quase puro (THD < 0,01%) foi sintetizado pelo gerador do sistema síncrono do PTB e medido pelos dois sistemas. Novamente, o sinal é amostrado tanto pelo DVM (HP 3458A) do sistema síncrono do PTB quanto por um sistema independente composto de um DVM (HP 3458A calibrado com a mesma referência de 10 V C.C. usada no sistema síncrono) controlado por um outro computador. O sistema síncrono roda o programa de controle normalmente usado pelo PTB. O outro sistema roda o programa enviado ao PTB (cujo algoritmo é estudado neste trabalho).

Os resultados obtidos para o valor eficaz da tensão estão listados na Tabela III-24. Na primeira coluna estão listados os ajustes do número de harmônicos (m) do programa enviado ao PTB. Na coluna “Inmetro (leitura)” estão listados os valores eficazes determinados pelo sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB. Na coluna “Inmetro (média)” estão listados os valores médios correspondentes. Na coluna “PTB” estão listados os valores eficazes medidos com o sistema síncrono do

PTB com conversores térmicos. As diferenças entre os valores medidos pelos dois métodos estão listadas na coluna “Erro”. A última coluna lista o desvio padrão (s) destas diferenças. O sistema síncrono do PTB permanece dentro de 2 partes em 10^7 por quase 30 minutos.

Tabela III-24. Comparação entre os valores eficazes da tensão medidos com o sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB e com o sistema síncrono do PTB operando com conversores térmicos.

| Nº harm. (m) | Inmetro (leituras) (V) | Inmetro (média) (V) | PTB (V) | Erro (10^{-6}) | s (10^{-6}) |
|------------------|------------------------|---------------------|-----------|--------------------|-------------------|
| 5 | 6,027532 | 6,0275388 | 6,0275218 | 2,8 | 1,6 |
| | 6,027543 | | | | |
| | 6,027537 | | | | |
| | 6,027555 | | | | |
| | 6,027527 | | | | |
| | 6,027539 | | | | |
| 10 | 6,027555 | 6,0275495 | 6,0275255 | 4,0 | 1,2 |
| | 6,027554 | | | | |
| | 6,027550 | | | | |
| | 6,027548 | | | | |
| | 6,027536 | | | | |
| | 6,027554 | | | | |
| 20 | 6,027555 | 6,0275568 | 6,0275241 | 5,4 | 1,6 |
| | 6,027569 | | | | |
| | 6,027558 | | | | |
| | 6,027544 | | | | |
| | 6,027566 | | | | |
| | 6,027549 | | | | |
| 40 | 6,027597 | 6,0275892 | 6,0275239 | 10,8 | 1,5 |
| | 6,027590 | | | | |
| | 6,027589 | | | | |
| | 6,027599 | | | | |
| | 6,027587 | | | | |
| | 6,027573 | | | | |
| 80 | 6,027534 | 6,0275363 | 6,0275234 | 2,1 | 0,6 |
| | 6,027539 | | | | |
| | 6,027534 | | | | |
| | 6,027542 | | | | |
| | 6,027534 | | | | |
| | 6,027535 | | | | |

A diferença maior para um maior número de harmônicos escolhidos pelo usuário se deve ao fato do tempo de abertura (integração) diminuir e por conseguinte os erros de ganho do DVM aumentarem. Estes erros de ganho não podem ser determinados quando o programa enviado ao PTB é instalado no sistema síncrono do PTB (como descrito na seção III-6-1). Na comparação usando conversores térmicos, os valores eficazes podem ser determinados sem o efeito de erro de ganho do DVM do sistema síncrono do PTB. O programa enviado ao PTB (cujo algoritmo é estudado neste trabalho) controla um outro DVM por meio de um outro computador. O sistema síncrono do PTB está agora isento de erros de ganho, uma vez que o valor eficaz é obtido através de conversores térmicos. Assim sendo, as diferenças listadas na Tabela III-24 são devidas a erros de ganho do DVM controlado pelo programa enviado ao PTB.

Deve-se comparar as diferenças listadas na Tabela III-24 com a contribuição de incerteza associada com a correção (suposta unitária) do erro de ganho do IADC plotada em função do número de harmônicos nos gráficos das Figs. III-1(c), III-6(c), III-8(c), III-10(c), III-13(c), e III-15(c). As diferenças listadas na Tabela III-24 mostram portanto que a contribuição de incerteza associada com a correção (suposta unitária) do erro de ganho do IADC está sub-estimada naqueles gráficos.

Os erros na medição do valor eficaz causados pelos erros de ganho do DVM ocorrem tanto no sistema síncrono do PTB quando no sistema independente controlado pelo programa enviado ao PTB (cujo algoritmo é estudado neste trabalho). KÜRTEH-IHLENFELD, MOHNS *et al.* (2005a) caracterizaram o IADC de um DVM com uma fonte Josephson C.A. para determinar o erro de ganho do DVM com exatidão. O processo é muito laborioso. Eles constataram que os erros de ganho, além de variarem com a amplitude, são dependentes da temperatura e qualquer esforço de correção exige um enorme trabalho. Existe ainda o efeito de intermodulação e outros efeitos espúrios. Por isso, o PTB abandonou a medição de amplitudes de harmônicos em volts (valores eficazes) usando amostragem digital e passou a fazer tal medição usando conversores térmicos (KÜRTEH-IHLENFELD, 2005).

Pode-se corrigir o erro de ganho do DVM da seguinte maneira (KÜRTEH-IHLENFELD, 2005): Amostre um sinal C.C. conhecido (por exemplo, uma referência de tensão C.C. Fluke 732 ou outra similar) com os mesmos ajustes de intervalo de amostragem e tempo de abertura (integração) que um sinal C.A. será amostrado. Calcule a diferença entre a tensão C.C. medida por meio de amostragem e o valor da tensão C.C. medida por meio de um sistema rastreado ao efeito Josephson, e expresse o

desvio em partes em 10^6 . Supondo-se o DVM linear (pelo menos na faixa de 10 V), pode-se corrigir cada amostra pelo ganho $(1 + \text{desvio} * 10^{-6})$. Isto corrige os erros de ganho de primeira ordem. Isto é feito no PTB. Isto permite conhecer quando a referência interna do DVM variou e, se variou, de quanto variou. A contribuição de incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC em função do número de harmônicos, descrita nos gráficos das Figs. III-1(c), III-6(c), III-8(c), III-10(c), III-13(c), e III-15(c), poderia ser usada então com confiabilidade.

A partir de 2005, um conversor térmico será usado sempre para determinar as amplitudes em volts dos harmônicos de sinais arbitrários. A seguinte seqüência será adotada (KÜRTEEN-IHLENFELD, 2005):

- a) Amostrar uma tensão C.C., determinar o erro de ganho global e corrigir cada amostra (usando o procedimento descrito acima);
- b) Aplicar a transformada de Fourier discreta (ou FFT) aos dados amostrados corrigidos;
- c) Calcular o valor eficaz (soma quadrática das componentes harmônicas) da tensão do sinal: V_{rmsFFT} ;
- d) Paralelamente efetuar transferência C.A.-C.C. rápida síncrona com termoconversores, como descrito por KÜRTEEN-IHLENFELD, MOHNS (2004), e obter o valor eficaz com maior exatidão: V_{rms} ;
- e) Corrigir cada uma das amplitudes dos harmônicos $V(f)$ em cada frequência f conforme relação: $V_{\text{corr}}(f) = V(f) * V_{\text{rms}}/V_{\text{rmsFFT}}$;

CAPÍTULO IV

CONCLUSÃO

A estatística Bayesiana foi aplicada ao problema comum do ajuste de uma série de Fourier truncada a uma série temporal criada pelas leituras de um voltímetro digital de alta resolução usado para amostrar um sinal de baixa frequência. O problema é estimar os parâmetros de ajuste e avaliar a incerteza associada com as estimativas. Este problema de inferência tem muitas aplicações em ciência e tecnologia da medição. Para simplificar a abordagem, somente modelos de ajuste que são lineares nos parâmetros foram considerados.

Estimativas dos parâmetros de ajuste, não corrigidas para os efeitos sistemáticos, foram derivadas diretamente das regras da teoria da probabilidade tanto para sinais estacionários quanto não estacionários (o ajuste de uma série de Fourier truncada de três parâmetros fornece a melhor estimativa para sinais não estacionários). Estas estimativas são ótimas se a série temporal contém um sinal periódico de frequência única com ruído branco aditivo. Entretanto, tais estimativas apresentam as seguintes desvantagens: as operações matriciais tomam muito espaço de memória e tempo de computador, os elementos do vetor de parâmetros de ajuste são geralmente correlacionados e as estimativas são muito sensíveis à exatidão da frequência.

Dois projetos de experimentos ortogonais, que fornecem estimativas que não apresentam estas desvantagens, foram também analisados. Um deles é tomar as leituras do voltímetro digital com uma taxa de amostragem sincronizada com a frequência fundamental do sinal a ser analisado. Mostrou-se que, sob esta condição, as melhores estimativas, tanto para sinais estacionários quanto não estacionários, coincidem com a transformada de Fourier discreta. Um projeto de experimentos ortogonal para se obter estimativas de exatidão elevada dos parâmetros de ajuste usando amostragem assíncrona foi também apresentado. Ele fornece estimativas que se aproximam da transformada de Fourier discreta avaliada usando amostragem síncrona (isto também foi confirmado experimentalmente por meio de uma comparação internacional). Este projeto de experimentos é vantajoso em comparação com o anterior, pois dispensa o uso dos circuitos de sincronização entre o gerador e o voltímetro digital (embora tenha a desvantagem de ser mais lento por exigir um número maior de amostras).

Estimativas para as amplitudes e os deslocamentos de fase dos harmônicos da série de Fourier truncada, corrigidas para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, foram derivadas supondo que estes projetos de experimentos sejam usados. As incertezas associadas com as amplitudes e ângulos de fase dos harmônicos da série de Fourier truncada foram avaliadas. A avaliação de incerteza levou em conta os efeitos sistemáticos introduzidos por voltímetros digitais comerciais.

O projeto de experimentos para amostragem assíncrona foi estudado em detalhes neste trabalho. Muitos resultados experimentais foram apresentados. O algoritmo opera com frequências fundamentais de 2 Hz a 1 kHz. Pode estimar com exatidão elevada e tempo de medição otimizado as amplitudes *em volts* de até 64 harmônicos de um sinal de 60 Hz ou de até 3 (três) harmônicos de um sinal de 1 kHz. Quanto maior a frequência fundamental, menos distorcido deve ser o sinal, a fim de que este seja medido *em volts* com exatidão elevada. O algoritmo também pode estimar com exatidão elevada as amplitudes *em percentuais da fundamental* de até 269 harmônicos de um sinal de 60 Hz. O número máximo de harmônicos varia de acordo com o valor da frequência fundamental, mas um valor aproximado pode ser obtido tendo-se em conta que o harmônico de maior frequência medido para um sinal de 60 Hz é de 16140 Hz.

As estimativas dos parâmetros de ajuste fornecidas pelo algoritmo são ótimas se as condições suficientes seguintes são satisfeitas: (a) o sinal contém uma única frequência f_0 , (b) a frequência do sinal é estacionária, (c) o ruído adicionado ao sinal é branco, (d) o sinal tem cruzamentos pelo nulo²² de tensão, (e) o nível de ruído é suficientemente baixo de modo que a frequência fundamental pode ser conhecida do número de cruzamentos pelo nulo²² do sinal, (f) um número mínimo de $4m$ trens de amostras é usado, onde m é o número de harmônicos do sinal, (g) cada k -ésimo trem de amostras é tomado retardado de $k/4mf_0$ de um cruzamento pelo nulo²² do sinal, (h) a duração de cada trem de amostras é aproximadamente igual a um número inteiro de períodos do sinal, (i) o ruído de amostragem do voltímetro digital é desprezível em comparação com o ruído adicionado ao sinal, (j) a variância do ruído na saída do conversor analógico-digital integrador é a mesma em todos os trens de amostras, (k) a incerteza associada com as grandezas temporais pode ser desprezada, (l) o conversor tem uma resolução de amplitude elevada, (m) não há nenhuma informação anterior

²² O algoritmo foi alterado recentemente de modo a usar cruzamentos de um nível C.C. arbitrário selecionado pelo usuário.

sobre os valores dos parâmetros de ajuste e da variância de ruído, e (n) a função de perda é quadrática.

Mostrou-se que é possível medir as amplitudes em volts de 64 harmônicos de sinais periódicos arbitrários de 60 Hz na faixa de 10 V, com baixo ruído e distorção harmônica total da ordem de 45% com uma incerteza de $13 \mu\text{V V}^{-1}$ relativa à fundamental, usando geradores de sinais estáveis e voltímetros digitais de resolução elevada comerciais. Incertezas ainda menores podem ser obtidas para sinais de distorção menor do que 1%. As incertezas associadas com as estimativas dependem da estabilidade do sinal, do conteúdo harmônico, da variância do ruído e das especificações do voltímetro digital. Mostrou-se também que é possível medir as amplitudes em percentuais da fundamental de 269 harmônicos de sinais periódicos arbitrários de 60 Hz na faixa de 10 V, com baixo ruído e distorção harmônica total da ordem de 45% com uma incerteza relativa à fundamental de $3,1 \times 10^{-6}$.

O algoritmo foi aplicado à medição da amplitude dos harmônicos de sinais periódicos arbitrários gerados por uma fonte comercial. Cinco sinais não senoidais de 60 Hz foram sintetizados e separadamente aplicados à entrada do voltímetro digital: um sinal senoidal (versão em degraus), um sinal parabólico alternado, um sinal retificado em meia onda, um sinal de triac, e um sinal trapezoidal. Os coeficientes de Fourier relativos à fundamental foram avaliados numericamente para cada sinal e comparados com a saída do algoritmo. As diferenças entre os valores computados e medidos sugerem que geradores de sinais estáveis, sintetizados de forma digital, podem ser usados como padrões calculáveis de distorção harmônica com uma exatidão menor do que 6 partes em 10^5 relativa à fundamental.

Mostrou-se também que é possível medir o deslocamento de fase entre as componentes fundamentais de dois sinais periódicos arbitrários de 60 Hz na faixa de 10 V, com baixo ruído e distorção harmônica total da ordem de 4%, com uma incerteza de $2,3 \mu\text{rad}$, usando geradores de sinais estáveis e dois voltímetros digitais de alta resolução em configuração mestre-escravo. Incertezas ainda menores podem ser obtidas para sinais de distorção menor do que 1%. As incertezas associadas aos deslocamentos de fase entre harmônicos dependem da estabilidade, do conteúdo harmônico, e da variância de ruído de cada sinal e são inversamente proporcionais às amplitudes dos harmônicos.

Uma comparação internacional foi feita entre o sistema de medição discutido neste trabalho e o sistema de sintetização e amostragem digital síncrona do PTB. Os

resultados da comparação confirmaram experimentalmente que as estimativas obtidas pelo algoritmo de amostragem assíncrona descrito neste trabalho se aproximam da transformada de Fourier discreta avaliada usando amostragem síncrona.

A sensibilidade do algoritmo com respeito a exatidão da frequência foi avaliada inserindo erros numericamente na entrada dos algoritmos e verificando a saída dos mesmos com relação a qualquer variação. Nenhuma diferença foi detectada na estimativa para o valor eficaz da amplitude *em volts* do harmônico de um sinal estacionário, corrigido para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, quando os erros de medição de frequência estavam dentro de $\pm 10^{-5}$. Além disso, nenhuma diferença foi detectada na estimativa para a amplitude do harmônico *em percentuais da fundamental* quando os erros estavam dentro de $\pm 10^{-4}$. Uma incerteza dentro destes limites é facilmente obtida para frequências fundamentais acima de 10 Hz, quando a frequência é medida do número de cruzamentos pelo nulo²³ do sinal. De qualquer modo, a variância de ruído aumenta com o aumento do erro da frequência, fornecendo estimativas de incerteza mais conservadoras.

Um problema básico é determinar o número de funções harmônicas que melhor representa os dados. Constatou-se neste trabalho que a inclusão da exatidão do instrumento de medição na análise permite que se obtenha uma possível solução para este problema. O número de funções harmônicas que melhor representa os dados depende de quais parâmetros de harmônicos se deseja estimar: amplitudes absolutas (em volts) ou amplitudes relativas (como uma percentagem da amplitude da fundamental). Há um número específico de harmônicos que minimizará as incertezas associadas com as amplitudes absolutas dos harmônicos. O número ótimo depende da distorção harmônica do sinal, da variância do ruído e das especificações do erro de ganho do conversor analógico-digital integrador. Neste trabalho, o número de harmônicos que minimiza a incerteza associada com a melhor estimativa da amplitude absoluta da fundamental foi escolhido como o que melhor representa os dados.

Talvez a principal conclusão deste trabalho seja que a teoria das probabilidades nos conduz necessariamente às respostas corretas, uma vez que decidamos de forma não ambígua a questão para a qual desejamos resposta. Isto era conhecido desde Laplace. Suas maiores contribuições para a astronomia foram obtidas por este método. O método Bayesiano de abordagem de problemas foi abandonado durante grande parte do século

²³ Ou do número de cruzamentos de um nível C.C. arbitrário selecionado pelo usuário.

passado por influência de filósofos e matemáticos que insistiam em uma definição “objetiva” do conceito de probabilidade e numa separação entre teoria das probabilidades e inferência estatística (separação ainda presente no currículo dos departamentos de estatística das universidades).

O uso de modelos lineares e integração para remover parâmetros irrelevantes não é novo. Embora o cálculo apresentado no Capítulo 2 tenha sido usado por todo Bayesiano desde meados do século passado, tanto quanto é do conhecimento do autor, os conceitos de sinal estacionário e não estacionário foram pela primeira vez introduzidos neste trabalho. O que é realmente novo neste trabalho é a aplicação das técnicas de inferência Bayesiana na estimação de parâmetros de funções harmônicas lineares com base em dados de voltímetros digitais integradores. As incertezas de medição obtidas com geradores e voltímetros digitais comerciais são quase surpreendentes. Outra contribuição original é a constatação de que o algoritmo descrito neste trabalho é um projeto de experimentos ortogonal que permite estimar com exatidão os parâmetros dos harmônicos de sinais periódicos arbitrários. Até então, julgava-se que o único projeto de experimentos ortogonal aplicável fosse a sincronização entre o gerador e o voltímetro digital. A conclusão de que geradores de sinais estáveis, sintetizados de forma digital, podem ser usados como padrões calculáveis de distorção harmônica com uma exatidão menor do que 6 partes em 10^5 relativa à fundamental pode representar um avanço nos métodos de calibração de analisadores de harmônicos. O algoritmo descrito neste trabalho, que dispensa o uso de circuitos de sincronização entre o gerador e o voltímetro digital, foi originalmente desenvolvido no Inmetro pelo autor deste trabalho, com base no algoritmo para medição de valor eficaz de sinais de tensão desenvolvido mais de uma década antes por R. Swerlein na Hewlett-Packard (atual Agilent Technologies).

O algoritmo descrito neste trabalho pode ser usado vantajosamente em quase qualquer tipo de aplicação de corrente alternada de baixa frequência onde dois (ou mais) sinais de tensão arbitrários medidos por dois (ou mais) voltímetros digitais devem ser comparados com relação à amplitude e ao deslocamento de fase dos harmônicos.

O sistema de medição aqui detalhado encontra aplicações na medição de grandezas de corrente alternada de baixa frequência, tais como: tensão, corrente, resistência, capacitância, indutância, perdas, indutância mútua, potência, energia elétrica, deslocamento de fase, e relações de transformação. Encontra também aplicações na calibração de instrumentos de medição e calibradores destas grandezas.

Pode ser usado na calibração e verificação da especificação de geradores de sinais. Pode também ser usado no levantamento da resposta de amplificadores, filtros, atenuadores, divisores e sistemas em geral. Encontra possíveis aplicações na avaliação da linearidade de conversores analógico-digitais. É de grande utilidade na calibração de analisadores harmônicos. E em diversas outras aplicações na área da qualidade de energia elétrica.

É necessário também desenvolver transdutores, com resposta plana em toda a faixa de frequência de interesse, para as grandezas de tensão e corrente passíveis de serem medidas pelo algoritmo. No caso de medição de potência e energia elétrica, por exemplo, é necessário desenvolver dispositivos que traduzam fielmente, em toda a faixa de frequência dos harmônicos, os níveis elevados de tensão e de corrente para níveis de tensão compatíveis com as entradas de exatidão elevada de voltímetros digitais. Tais dispositivos deverão ser calibrados em toda a faixa de frequência de interesse. Isto implica em conhecer os erros de amplitude e de ângulo de fase destes dispositivos com uma incerteza compatível com a exatidão do algoritmo. Sistemas de calibração destes transdutores deverão ser desenvolvidos no futuro.

O algoritmo apresentado neste trabalho poderá ser facilmente estendido para a medição de potência e energia trifásica. Esta medição, entretanto, exige a definição da grandeza potência trifásica em sistemas não equilibrados com harmônicos. Até o presente momento, não há consenso internacional sobre a definição desta grandeza.

O algoritmo aqui desenvolvido poderá também ser usado no desenvolvimento de sistemas de calibração de relações de transformadores de potencial e de corrente. Pontes baseadas em comparadores de corrente magnéticos têm sido tradicionalmente usadas nesta aplicação. Uma crescente integração entre as técnicas de pontes baseadas em comparadores de corrente e as técnicas de estimação de parâmetros por amostragem digital tem sido verificada.

Pontes coaxiais baseadas em divisores de tensão indutivos têm sido tradicionalmente usadas na medição de exatidão elevada das seguintes grandezas em corrente alternada: (a) resistência, (b) capacitância, (c) indutância, (d) perdas, (e) fator de dissipação, (f) constante de tempo, e (g) relações de transformação. Uma crescente integração entre as técnicas de pontes coaxiais baseadas em divisores de tensão indutivos e as técnicas de estimação de parâmetros por amostragem digital tem sido verificada. Tais aplicações, entretanto, exigem a solução dos problemas de medição causados pela capacitância parasita dos circuitos de entrada dos voltímetros digitais.

Para tanto, é necessário desenvolver *buffers* com erros de amplitude e ângulo de fase mínimos em toda a faixa de frequência de interesse.

O algoritmo aqui descrito não estima com exatidão elevada sinais de frequência infrassônica, da ordem de alguns mHz a 5 Hz. Em parte isto se deve à eliminação da componente C.C. dos dados (qualquer valor médio não nulo foi subtraído dos dados). A estimação de sinais destas frequências é útil em medições de vibrações mecânicas. O algoritmo também não é aplicável para sinais com mais de uma frequência, como por exemplo, sinais que apresentam *flicker*.

O projeto de experimento ortogonal estudado neste trabalho apresenta uma desvantagem em comparação com o correspondente de amostragem síncrona (além da desvantagem de ser mais lento devido ao número maior de amostras usado) quando da medição de deslocamentos de fase entre harmônicos de dois sinais arbitrários. Enquanto a sintetização e amostragem síncrona utiliza apenas um único voltímetro digital, o sistema de medição assíncrono exige o uso de dois voltímetros digitais para amostrar os dois sinais. Um novo algoritmo, baseado em modelos não lineares e amostragem não uniforme, deverá ser desenvolvido no futuro, a fim de estimar com exatidão parâmetros de sinais arbitrários de baixa frequência, usando um único voltímetro digital para amostrar assincronamente os dois sinais. Este algoritmo não deverá apresentar as limitações apontadas no parágrafo anterior.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M., STEGUN I., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965.
- AFONSO, E., TÓTH, E., BORGHI, G., *et al.*, “Sistema automatizado para calibração de instrumentos multifunção de alta exatidão”. In: *Anais do Metrologia 2000: IV SEMETRO*, São Paulo, Brasil, dezembro, 2000.
- ANDRIA, G., SAVINO, M., TROTTA, A., “Windows and interpolation algorithms to improve electrical measurement accuracy”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 38, no. 4, pp. 856-863, Aug. 1989.
- ARSENEAU, R., FILIPSKI, P., “A calibration system for evaluating the performance of harmonic power analysers”, *IEEE Trans. Power Delivery*, v. 10, no. 3, pp. 1177-82, Jul. 1995.
- ARSENEAU, R., FILIPSKI, P., “Portable and stable source of ac voltage, current and power”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 44, no. 2, pp. 433-435, Apr. 1995.
- ARSENEAU, R., FILIPSKI, P., ZELLE, J., “An improved three phase digital recorder system for calibrating power instrumentation”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 46, no. 2, pp. 399-402, Apr. 1997.
- ARSENEAU, R., FILIPSKI, P., “An efficient test method for harmonic measurement equipment”, *8th ICHQP*, v. 1, pp. 233-237, Athens, Greece, Oct. 14-16, 1998.
- ARSENEAU, R., SUTHERLAND, M., ZELLE, J. *et al.*, “Comparison of nonsinusoidal calibration systems at NRC Canada and SP Sweden”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 50, no. 2, pp. 275-277, Apr. 2001.
- BELL, B., *Digital Methods in Waveform Metrology – Proceedings of a Seminar*, NBS Special Publication 707, Oct. 1985.
- BRIGHAM E., *The Fast Fourier Transform and its applications*, Prentice Hall, 1974.
- BRIGHAM, E., MORROW, R., “The fast Fourier transform”, *Proc. IEEE Spectrum*, v. 4, pp. 63-70, 1967.
- CEELY, G., RUSTICI, D., “Design for high throughput in a system digital multimeter”, *Hewlett-Packard Journal*, v. 40, no. 2, pp. 31-38, Apr. 1989.
- CLARKE, F., STOCKTON, J., “Principles and theory of wattmeters operating on the basis of regularly spaced sample pairs”, *J. Phys. E: Sci. Instrum.*, v. 15, pp. 645-652, 1982.

- COOLEY, J., TUKEY, J., “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series”, *Mathematics of Computation*, v. 19, pp. 297-301, 1965.
- CORNEY, A., PULLMAN R., “Digital sampling laboratory wattmeter”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 36, no. 1, pp. 54-59, Mar. 1987.
- CZENKUSCH, D., “High-resolution digitizing techniques with an integrating digital multimeter”, *Hewlett-Packard Journal*, v. 40, no. 2, pp. 39-49, Apr. 1989.
- ELSTER, C., “Evaluation of measurement uncertainty in the presence of combined random and analogue-to-digital conversion errors”, *Meas. Sci. Technol.*, v. 11, pp. 1359-1363, 2000.
- ESTLER, W., “Measurement as inference: fundamental ideas”, *Ann. CIRP*, v. 48, pp. 611-632, 1999.
- FERRERO, A., OTTOBONI, R., “A new approach to the Fourier analysis of periodic signals for the minimization of the phase errors”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 40, no. 4, pp. 694-698, Aug. 1991.
- FERRERO, A., OTTOBONI, R., “A low-cost frequency multiplier for synchronous sampling of periodic signals”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 41, pp. 203-207, Apr. 1992a.
- FERRERO, A., OTTOBONI, R., “High-accuracy Fourier analysis based on synchronous sampling techniques”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 41, no. 6, pp. 780-785, Dec. 1992b.
- GAMERMAN D., *Markov Chain Monte Carlo: Stochastic Simulation for Bayesian Inference*. London: Chapman & Hall, 1997.
- GENTLEMAN, W., “Matrix multiplication and fast Fourier transformations”, *Bell Syst. Tech. Journal*, v. 17, pp. 1099-1103, 1968.
- GOECKE, W., “An 8½-digit integrating analog-to-digital converter with 16-bit, 100,000-sample-per-second performance”, *Hewlett-Packard Journal*, v. 40, no. 2, pp. 8-15, Apr. 1989.
- GOECKE, W., SWERLEIN, R., VENZKE, S. *et al.*, “Calibration of an 8½-digit multimeter from only two external standards”, *Hewlett-Packard Journal*, v. 40, no. 2, pp. 22-30, Apr. 1989.
- GRANDKE, T., “Interpolation algorithms for discrete Fourier transforms of weighted signals”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 32, no. 2, pp. 350-355, Jun. 1983.
- GRAYBILL F., *Theory and Application of the Linear Model*, Wadsworth & Brooks, Caps. 6 e 8, 1976.

- HARRIS, F., “On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier analysis”, *Proc. IEEE*, v. 66, no. 1, pp. 51-83, Jan. 1978.
- HELSTROM, C., *Elements of Signal Detection and Estimation*, Prentice-Hall, 1995.
- HEWLETT-PACKARD Company, *HP 3458A Multimeter – Operating, Programming, and Configuration Manual*, Edition 3, Feb. 1994a.
- HEWLETT-PACKARD Company, *HP 3245A Universal Source – Automated Test / Adjustment Procedures*, Edition 2, Mar. 1994b.
- IEC Standard 61000-4-7, *Electromagnetic Compatibility (EMC) – Part 4: Testing and measurement techniques – Section 7: General guide on harmonics and interharmonics measurements and instrumentation, for power supply systems and equipment connected thereto*, IEC, Geneva, Switzerland, 1991.
- IEEE Standard 519-1992, *Recommended Practices and Requirements for Harmonic Control in Electrical Power Systems*, IEEE, New York, NY, 1992.
- IEEE Working Group on Nonsinusoidal Situations: Effects on Meter Performance and Definitions of Power, “Practical definitions for powers in systems with nonsinusoidal waveforms and unbalanced loads: A discussion”, *IEEE Trans. Power Delivery.*, v. 11, pp. 79-101, Jan. 1996.
- IEEE Standard 1459-2000, *IEEE Trial-Use Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced or Unbalanced Conditions*, Jan. 2000.
- ISO *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, Geneva: International Organization for Standardization, 1995.
- IUZZOLINO, R., LAIZ, H., *Comunicação particular*, 2005.
- JAYNES, E., “Information theory and statistical mechanics”, *Physical Review*, v. 106, no. 4, pp. 620-630, May, 1957.
- JAYNES, E., “Prior probabilities”, *IEEE Trans. Sys. Sci. And Cyber.*, v. 4, pp. 227-241, 1968.
- JAYNES, E., *Probability Theory – The Logic of Science*, Cambridge, 2003.
- JEFFREYS, H., “On the prior probability in the theory of sampling”, *Proc.Camb.Phil.Soc.*, v. 29, pp. 83-87, 1933.
- JEFFREYS, H., *Theory of Probability*, Third Edition, Oxford, 1961.
- JOHNSTON J., *Métodos Económicos*, Editora Atlas, Cap. 4, 1971.

- KACKER, R., JONES, A., “On use of Bayesian statistics to make the *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement* consistent”, *Metrologia*, v. 40, pp. 235-248, 2003.
- KAMPIK, M., LAIZ, H., KLONZ, M., “Comparison of three accurate methods to measure ac voltage at low frequencies”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 49, n. 2, pp. 429-433, Apr. 2000.
- KROHN-HITE Corporation, *Model 4402B 1Hz to 110 kHz Ultra-Low Distortion RC Oscillator – Operating / Maintenance Manual*, 1995.
- KÜRTE IHLENFELD, W., *Maintenance and Traceability of AC Voltages by Synchronous Digital Synthesis and Sampling*, PTB-E-75, Braunschweig, Aug. 2001a.
- KÜRTE IHLENFELD, W., *Traceability of AC Voltage Ratios and AC Power by Synchronous Digital Synthesis and Sampling*, PTB-E-76, Braunschweig, Oct. 2001b.
- KÜRTE IHLENFELD, W., MOHNS, E., BACHMAIR, H. *et al.*, “Evaluation of the synchronous generation and sampling technique”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 52, no. 2, pp. 371-374, Apr. 2003.
- KÜRTE IHLENFELD, W., MOHNS, E., “Ac-dc transfer measurements of highest accuracy with synchronous analogue-to-digital conversion”, *Metrologia*, v. 41, pp.111-115, 2004.
- KÜRTE IHLENFELD, W., MOHNS, E., BEHR, R. *et al.*, “Characterization of high-resolution analog-to-digital converter with a Josephson ac voltage source”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 54, no. 2, pp. 649-652, Apr. 2005a.
- KÜRTE IHLENFELD, W., MOHNS, E., “Speeding-up ac-dc transfer measurements with thermal converters”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 54, no. 2, pp. 268-272, Apr. 2005b.
- KÜRTE IHLENFELD, W., Comunicação particular, 2004.
- KÜRTE IHLENFELD, W., Comunicação particular, 2005.
- KYRIAZIS, G., “Case study: prediction of conducted emissions in switched-mode power supplies”, *Proceedings of the International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, pp. 198-203, São Paulo, Dec. 05-09, 1994.
- KYRIAZIS, G., “Cálculo da emissão conduzida de conversores chaveados”, *Eletricidade Moderna*, ano XXIII, no. 255, pp. 78-95, junho, 1995a.

- KYRIAZIS, G., “Prediction of conducted emissions in switched-mode power supplies”, *EMC Test & Design*, pp. 10-13, Aug. 1995. A edição de agosto do *EMC Test & Design* foi incluída no *RF Design*, Aug. 1995b.
- KYRIAZIS, G., *Procedimento analítico-experimental de avaliação e controle da emissão conduzida de fontes de alimentação chaveadas*, Dissertação de Mestrado, Centro Federal de Educação Tecnológica, CEFET-RJ, 1995c.
- KYRIAZIS, G., “Analysis of discrepancies between measured and predicted conducted emissions in switched-mode power supplies”, *Proceedings of the IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, pp. 504-506, Austin, Texas, Aug. 18-22, 1997.
- KYRIAZIS, G., *Uma Ponte baseada em um comparador de corrente para a calibração de padrões de potência e energia elétrica em 50/60 Hz*, Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 2001.
- KYRIAZIS, G., “Extension of Swerlein’s algorithm for ac voltage measurement in the frequency domain”, *Conference on Precision Electromagnetic Measurements, CPEM Digest*, Ottawa, pp. 396-397, 16-21 June, 2002.
- KYRIAZIS, G., “Extension of Swerlein’s algorithm for ac voltage measurement in the frequency domain”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 52, no. 2, pp. 367-370, Apr. 2003.
- KYRIAZIS, G., “An algorithm for accurately estimating the harmonic magnitudes of periodic arbitrary signals using asynchronous sampling”, *Conference on Precision Electromagnetic Measurements, CPEM Digest*, pp. , London, Jul. 2004a.
- KYRIAZIS, G., “An algorithm for accurately estimating the harmonic magnitudes of periodic arbitrary signals using asynchronous sampling”, *Simposio de Metrologia*, Santiago de Querétaro, Oct. 2004b.
- KYRIAZIS, G., CAMPOS, M., “Bayesian inference of linear sine-fitting parameters from integrating digital voltmeter data”, *Meas.Sci.Technol.*, v. 15, pp. 337-346, Feb. 2004a.
- KYRIAZIS, G., CAMPOS, M., “Erratum: Bayesian inference of linear sine-fitting parameters from integrating digital voltmeter data”, *Meas. Sci. Technol.*, v. 15, pp. 1947, 2004b.
- KYRIAZIS, G., CAMPOS, M., “An algorithm for accurately estimating the phase shifts between harmonics of two voltage signals using asynchronous sampling”,

- Conference on Precision Electromagnetic Measurements, CPEM Digest*, pp. , London, Jul. 2004c.
- KYRIAZIS, G., CAMPOS, M., “An algorithm for accurately estimating the harmonic magnitudes and phase shifts of periodic signals with asynchronous sampling”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 54, n. 2, pp. 496-499, Apr. 2005.
- KYRIAZIS, G., SWERLEIN, R., “Evaluation of uncertainty in ac voltage measurement using a digital voltmeter and Swerlein’s algorithm”. In: *Conference on Precision Electromagnetic Measurements, CPEM Digest*, pp. 24-25, Ottawa, 16-21 June, 2002. Artigo completo não publicado disponível com os autores.
- KYRIAZIS, G., WÖGER, W., “Estatística Bayesiana e o Guia Internacional para Expressão da Incerteza de Medição”. In: *Anais do III Seminário Internacional de Metrologia Elétrica (III SEMETRO)*, Rio de Janeiro, Brasil, setembro, 1998. Versão em inglês disponível com os autores.
- LAIZ, H., *Low frequency behavior of thin-film multijunction thermal converters*, Ph.D. Dissertation, Braunschweig Technical University, PTB-Report E-63, 1999.
- LAPLACE, P., *A Philosophical Essay on Probabilities*, Dover, New York, tradução do texto de Laplace de 1814 por Truscott e Emory, 1951.
- LAPLACE, P., *Théorie Analytique des Probabilités*, Paris, (2^a edição, 1814; 3^a edição, 1820), 1812.
- LAPUH, R., ARNSEK, A., VISOCNIK, I. *et al.*, “Evaluation of low frequency ac voltage measurement using integrating sampling technique”, *Instrum. and Meas. Technol. Conf., IMTC Digest*, v. 3, pp. 1842-1845, 24-26 May, 1999.
- LEE, P., *Bayesian Statistics: an Introduction*, London: Edward Arnold, 1989.
- LIRA, I., *Evaluating the Uncertainty of Measurement: Fundamentals and Practical Guidance* (Bristol: Institute of Physics Publishing), 2002.
- LIRA, I., KYRIAZIS, G., “Bayesian inference from measurement information”, *Metrologia*, v. 36, pp. 163-169, 1999.
- LIRA, I., WÖGER, W., “Bayesian evaluation of the standard uncertainty and coverage probability in a simple measurement model”, *Meas. Sci. Technol.*, v. 12, pp. 1172-1179, 2001.
- MIGON, H., GAMERMAN, D., *Statistical Inference: an Integrated Approach*, London: Arnold, 1999.
- MITRA, S., *Digital Signal Processing – A Computer-based Approach*, McGraw-Hill, 1998.

- MOHNS, E., KÜRTEH-IHLENFELD, “Fast synchronous ac-dc transfer with thermal converters”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 54, n. 2, pp. 791-794, Apr. 2005.
- OLDHAM, N., NELSON, T., BERGEEST, R., *et al.*, “An International Comparison of 50/60 Hz Power (1996-1999)”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 50, n. 2, pp.356-360, Apr. 2001.
- OLDHAM, N., Comunicação particular, 2003.
- PAPOULIS, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 3^a edição, pp. 309, 1991.
- PAUL, C., *Introduction to Electromagnetic Compatibility*, Wiley, pp. 352-359, 1992.
- PEEBLES, P., *Probability, Random Variables, and Signal Principles*, McGraw-Hill, 3^a edição, pp.252-253, 1993.
- POGLIANO, U., DALLORTO, C., “Evaluation of the corrective terms in an integrating ADC used for high precision measurement of low frequency AC voltage”, *Dig. 1st International Workshop on ADC Modelling*, pp. 205-210, Smolenice, Slovakia, May 1996.
- POGLIANO, U., “High precision measurement of electrical power by means of synchronization of integrative analog to digital converters”, *IMEKO TC-4 - 8th International Symposium on New Measurement and Calibration Methods of Electrical Quantities and Instruments*, pp. 33-36, Budapest, Sep. 16-17, 1996.
- POGLIANO, U., “Precision measurement of ac voltage below 20 Hz at IEN,” *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 46, no. 2, pp. 369-372, Apr. 1997.
- POGLIANO, U., LA PAGLIA, G., “Characterization of the measurement system used at IEN as primary power standard”, *8th Congrès International de Métrologie*, pp. 449-453, Besançon, France, Oct. 1997.
- POGLIANO, U., “Use of integrative analog-to-digital converters for high-precision measurement of electrical power”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 50, no. 5, pp. 1315-1318, Oct. 2001.
- POGLIANO, U., “Tracking generator of calibrated harmonics”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 51, no. 4, pp. 636-639, Aug. 2002a.
- POGLIANO, U., Comunicação particular, 2002b.
- RAMM, G., MOSER, H., BRAUN, A., “A new scheme for generating and measuring active, reactive, and apparent power at power frequencies with uncertainties of 2.5×10^{-6} ”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 48, n. 2, pp. 422-426, Apr., 1999.

- ROCHA G., KYRIAZIS G., “A software for the evaluation of the stability of measuring standards using Bayesian statistics”, *13th International Symposium on Measurements for Research and Industry Applications*, IMEKO TC4, pp. 386-391, Athens, 2004.
- SCHOUKENS, J., PINTELON, R., RENNEBOOG, J., “A maximum likelihood estimator for linear and nonlinear systems – a practical application of estimation techniques in measurement problems”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 37, no. 1, pp. 10-17, Mar. 1988.
- SHANNON, C., WEAVER, *The Mathematical Theory of Communication*, Urbana: University of Illinois Press, 1949.
- SHANNON, C., “A mathematical theory of communication”, *Bell Syst. Tech. Journal*, v. XXVII, pp. 379-423, pp. 623-656, Jul. 1948.
- SO, E., ARSENEAU, R., BENNETT, D., “NRC-NIST intercomparison of calibration systems for current transducers with a voltage output at power frequencies”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 52, no. 2, pp. 424-428, Apr. 2003.
- SO, E., ANGELO, D., TSUCHIYAMA, T. *et al.*, “Intercomparison of calibration systems for ac current shunts up to audio frequencies”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 54, no. 2, pp. 507-511, Apr. 2005.
- SPIEGEL, M., *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, Coleção Schaum, Mc Graw-Hill do Brasil, 1973.
- STENBAKKEN, G., “A wideband sampling wattmeter”, *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, v. 103, no. 10, pp. 2919-26, Oct. 1995.
- STEVER, S., “An 8½-digit digital multimeter capable of 100,000 readings per second and two-source calibration”, *Hewlett-Packard Journal*, v. 40, no. 2, pp. 6-7, Apr. 1989.
- SVENSSON, S., RYDLER, K., “A measuring system for the calibration of power analyzers”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 44, no. 2, pp. 316-317, Apr. 1995.
- SVENSSON, S., “Verification of a calibration system for power quality instruments”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 47, pp. 1391-1394, Oct. 1998.
- SVENSSON, S., “A wattmeter standard for audio frequency range”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 48, no. 2, pp. 431-433, Apr. 1999.
- SWERLEIN, R., “A 10 ppm accurate digital ac measurement algorithm”. In: *Proc. NCSL Workshop and Symposium*, pp. 17-36, Albuquerque, USA, Aug. 1991.

- SWERLEIN, R., “Precision ac voltage measurements using digital sampling techniques”, *Hewlett-Packard Journal*, v. 40, no. 2, pp.15-21, Apr. 1989.
- SWERLEIN, R., Comunicação particular, 1997.
- SWERLEIN, R., Comunicação particular, 2000.
- SWERLEIN, R., Comunicação particular, 2002.
- TÓTH, E., FRANCO, A., DEBATIN, R., “Power and energy reference system, applying dual-channel sampling”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 54, no. 1, pp. 404-408, Feb. 2005.
- TURGEL, R.S., “Digital wattmeter using a sampling method”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 23, no. 4, pp. 337-341, Dec. 1974.
- VAN DEN BOS, A., “Estimation of Fourier coefficients,” *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 38, no. 5, pp. 1005-1007, Oct. 1989.
- WEISE, K., WÖGER, W., “A Bayesian theory of measurement uncertainty”, *Meas. Sci. Technol.*, v. 4, pp. 1-11, 1993.
- WHALEN, A., *Detection of Signals in Noise*, Academic Press, Cap. 4, 1971.
- WÖGER, W., “Bayesian statistics and the international guidelines for expressing uncertainty in measurement”, in *Advanced School of Metrology: Evaluation of Uncertainty in Measurement*, Angra dos Reis, Brazil, Mar. 1997.
- WÖGER, W., “Probability assignment to systematic deviations by the Principle of Maximum Entropy”, *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 36, no. 2, pp. 655-658, Jun. 1987.
- ZELLNER, A., *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, Wiley Classics Library, Reprint of 1971 edition, New York: Wiley, 1996.

APÊNDICE I

ALGORITMO PARA A MEDIÇÃO DO VALOR EFICAZ DE SINAIS SENOIDAIS DE BAIXA FREQUÊNCIA

A-I-1 Algoritmo de Swerlein

Quase quinze anos se passaram desde a introdução do algoritmo de Swerlein. Este algoritmo foi desenvolvido para a medição com exatidão elevada do valor eficaz da tensão alternada em baixas frequências usando o DVM da Hewlett-Packard modelo HP3458A (SWERLEIN, 1989). A versão original do programa foi publicada em linguagem *Basic* (SWERLEIN, 1991). O programa foi elaborado para rodar em uma plataforma da Hewlett-Packard com sistema operacional *Basic*. Uma versão em *LabWindows CVI* foi elaborada pelo autor desta tese para rodar em qualquer plataforma com sistema operacional *Windows 98* que contenha interface IEEE 488.2 da National Instruments (vide seção A-I-4 mais adiante).

O algoritmo foi testado exaustivamente. Diferenças de menos do que $1,2 \times 10^{-6}$ entre ele e um conversor térmico de junção múltipla foram relatados para tensões na faixa de 10 V e frequências na faixa de 10-100 Hz (LAIZ, 1999, KAMPIK, LAIZ *et al.*, 2000). Diferenças de menos do que uma parte em 10^{-7} foram também relatadas para tensões na faixa de 0,2-20 V e frequências de até 1 kHz (LAPUH, ARNSEK *et al.*, 1999). Resultados da comparação do algoritmo com o padrão calculável sintetizado digital do NIST são relatados em SWERLEIN (1991). O algoritmo tem sido usado extensivamente como um padrão na indústria²⁴.

Uma avaliação da incerteza de medição deste algoritmo baseada no ISO (1995) foi publicada por KYRIAZIS, SWERLEIN (2002). A incerteza padrão é menor do que $2,5 \mu\text{V V}^{-1}$ na faixa de 10 V e na faixa de 1-100 Hz.

A-I-1-1 Modelo

O algoritmo amostra um membro da *ensemble* de um processo aleatório $V(t)$ nos instantes de tempo t_i , $i = 1, 2, \dots, nN$. Considerando as amostras como variáveis

aleatórias $V_i = V(t_i)$, estimativas para a esperança, a variância e a potência no processo são, respectivamente,²⁵

$$\bar{V} = \frac{1}{nN} \cdot \sum_{i=1}^{nN} V_i, \quad (\text{A-I-1-1-1})$$

$$S^2 = \frac{1}{nN} \cdot \sum_{i=1}^{nN} (V_i - \bar{V})^2 \quad (\text{A-I-1-1-2})$$

$$\hat{P} = S^2 + \bar{V}^2. \quad (\text{A-I-1-1-3})$$

Uma estimativa da componente C.C. é obtida da média das amostras. Uma estimativa do valor eficaz (sem a componente C.C.) é avaliada do momento central de ordem 2 das amostras. O valor eficaz resulta da estimativa da raiz quadrada da potência do processo aleatório.

O modelo usado para a medição do valor eficaz (sem componente C.C.) é

$$V_{\text{ACRMS}} = \sqrt{\frac{1}{nN} \cdot \sum_{i=1}^{nN} (V_i - \bar{V})^2} + R \quad (\text{A-I-1-1-4})$$

onde V_i é a amostra corrigida para todos os efeitos sistemáticos conhecidos e R é equivalente à diferença entre a indicação que seria obtida com um conversor A/D ideal (não limitado por resolução) e a indicação de um conversor A/D integrador (IADC) real.

Após ser aplicado aos terminais de entrada do DVM, o sinal é conduzido a um condicionador de sinal passivo. Nas faixas de 100 mV, 1 V, e 10 V, o condicionador é um filtro passa-baixa de dois pólos de ganho unitário cuja resposta decai a 20 dB/década a partir de 120 kHz. A impedância de saída deste filtro é de 10 k Ω . A finalidade do filtro é manter a operação linear do amplificador, de modo que o DVM realmente meça o valor médio da tensão de entrada. Após passar através deste atenuador passivo, o sinal é aplicado a um amplificador ativo. Na faixa de 100 mV, o ganho do amplificador é 100 e a largura de banda de 3 dB é de aproximadamente de 200 kHz. Mas nas baixas frequências, sua resposta é adequadamente modelada com um termo que aumenta a 20 dB/década a partir de 82 kHz. Nas faixas de 1 V e 10 V, o ganho do amplificador é 10 e 1, respectivamente, e sua largura de banda é maior do que 1 MHz (SWERLEIN, 1991).

²⁴ Este algoritmo foi usado pelo autor em KYRIAZIS (2001).

²⁵ O algoritmo utiliza basicamente o método dos momentos descrito em MIGON, GAMERMAN (1999).

Se o DVM é configurado para as faixas de 100 V e 1000 V, o condicionador de sinal passivo (atenuador de alta tensão) é um divisor resistivo de relação 100:1 composto de um resistor de 10 MΩ e um resistor de 100 kΩ (um amplificador ativo não é usado neste caso). Capacitâncias parasitas e fator de dissipação de placas de circuito impresso dificultam a avaliação da resposta de frequência acima de 1 kHz. Para baixas frequências, a resposta de frequência pode ser modelada como um termo que decai a 20 dB/década a partir de 36 kHz. O fator de dissipação da placa de circuito impresso do atenuador de alta tensão forma um divisor resistivo com o resistor de 100 kΩ, causando um erro de medição adicional (SWERLEIN, 1991). Tem-se verificado que alguns DVMs apresentam erros nas faixas de 100 V e 1000 V que excedem as correções especificadas. Acredita-se que isto se deva a um fator de dissipação de placa de circuito impresso maior do que o suposto nos cálculos (SWERLEIN, 2000). Como estamos interessados na obtenção da maior exatidão possível, o uso das faixas de tensão de 100 V e 1000 V não é discutido neste trabalho.

Finalmente, o sinal é aplicado ao IADC (um circuito de amostragem-retenção é retirado do percurso do sinal quando o modo DCV é escolhido). No domínio do tempo, a resposta é uma média do sinal de entrada sobre um intervalo de tempo equivalente ao tempo de abertura especificado pelo usuário. Este valor médio é geralmente diferente do valor da forma de onda na metade do intervalo de tempo de abertura. A relação entre o valor do sinal no tempo t_i e o valor não corrigido da amostra V'_i é

$$V_i = \kappa k_{bw} k_{int} V'_i \quad (\text{A-I-1-1-5})$$

onde k_{bw} é a correção da resposta de frequência (largura de banda finita) do conjunto do condicionador de sinal passivo e do amplificador ativo, k_{int} é a correção da resposta de frequência do IADC (tempo de abertura finito), e κ é a correção do erro do modo de tensão contínua. Substituindo (5) em (4), a estimativa do valor eficaz em função das estimativas das grandezas de entrada é

$$V_{ACRMS\ e} = \kappa_e k_{bw\ e} k_{int\ e} S' + R_e \quad (\text{A-I-1-1-6})$$

onde,

$$S' = \sqrt{\frac{1}{nN} \cdot \sum_{i=1}^{nN} (V'_i - \bar{V}')^2}$$

$$\bar{V}' = \frac{1}{nN} \cdot \sum_{i=1}^{nN} V'_i$$

Supondo grandezas independentes, o quadrado da incerteza padrão relativa associada com a estimativa do valor eficaz do sinal de entrada pode ser aproximado por

$$u^2(V_{\text{ACRMS } e})/V_{\text{ACRMS } e}^2 \approx u^2(k_{\text{bwe}}) + u^2(k_{\text{int } e}) + u^2(\kappa_e) + u^2(V'_{ie})/nNV_{\text{ACRMS } e}^2 + u^2(R_e)/V_{\text{ACRMS } e}^2 \quad (\text{A-I-1-1-7})$$

Valores numéricos para a incerteza padrão relativa em várias frequências e faixas de tensão estão listados em KYRIAZIS, SWERLEIN (2002). As contribuições de incerteza associadas com as estimativas das grandezas de entrada em (6), i.e., são discutidas nas seções seguintes.

A-I-1-2 Correção da resposta de frequência dos estágios de entrada

Baseado nas especificações do condicionador de sinal passivo e do amplificador ativo descritas na seção anterior, esta correção é

$$k_{\text{bw}} = \sqrt{1 + (f_0/bw)^2} \quad (\text{A-I-1-2-1})$$

onde f_0 é a frequência do sinal e bw é a largura de banda dos estágios de entrada cuja melhor estimativa bw_e (120 kHz nas faixas de 1 V/ 10 V) e incerteza $u(bw_e)$ (= 30% bw_e) são fornecidas pelo fabricante (SWERLEIN, 1991). A melhor estimativa de k_{bw} é

$$k_{\text{bwe}} = \left(1 + (f_0/bw_e)^2\right)^{1/2} \quad (\text{A-I-1-2-2})$$

Expandindo (1) em uma série de Taylor,

$$k_{\text{bwe}} \approx 1 + \delta V/V = 1 + (f_0/bw_e)^2 / 2 \quad (\text{A-I-1-2-3})$$

O quadrado da incerteza padrão associada com a estimativa da correção é

$$u^2(k_{\text{bwe}}) = u^2(\delta V/V) = (\delta V/V)^2 u^2(\delta V/V)/(\delta V/V)^2 \quad (\text{A-I-1-2-4})$$

onde, desprezando a incerteza padrão relativa associada com a base de tempo (0,01%),

$$u^2 (\delta V / V) / (\delta V / V)^2 = 4u^2 (bw_e) / bw_e^2 \quad (\text{A-I-1-2-5})$$

A-I-1-3 Resolução de amplitude e de base de tempo do IADC

A resolução do IADC é equivalente à diferença relativa entre a indicação que seria obtida por um conversor A/D ideal, não limitado pela resolução de amplitude R_A e pela resolução da base de tempo Δ , e a indicação do IADC real. Pode ser modelado como $R = R_A + \Delta$.

A diferença relativa entre a indicação do algoritmo resultante de um trem de amostras do IADC real, i.e.,

$$V_{ACRMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N A^2 \text{sen}^2(2\pi f_0 t_i)} \quad (\text{A-I-1-3-1})$$

e a indicação $(A/\sqrt{2})$ de um conversor A/D ideal, não limitado por resolução, pode ser aproximada para N grande por (vide Apêndice II)

$$\Delta \approx \frac{\text{sen}(2\pi f_0 \cdot N \cdot t_{\text{samp}})}{4\pi f_0 \cdot N \cdot t_{\text{samp}}} \cdot \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi) \quad (\text{A-I-1-3-2})$$

A fim de reduzir o tempo de medição, o algoritmo tenta tomar um trem de N amostras espaçadas de t_{samp} , onde $N \cdot t_{\text{samp}}$ é um número inteiro de períodos do sinal, de modo que o numerador de (2) se anule. Na prática, entretanto, devido à quantização da base de tempo de 100 ns do DVM (HEWLETT-PACKARD, 1994a), para um dado número de amostras, o tempo de amostragem total pode diferir de até $100N$ ns de um número inteiro de períodos do sinal. Esta diferença alcança um máximo quando $10^{-7}N = t_{\text{samp}}$, já que é sempre possível escolher N de modo que a diferença entre o tempo de amostragem total e um número inteiro de períodos seja menor do que t_{samp} . Assim, como t_{samp} é pequeno, a equação (2) pode ser escrita como

$$\Delta \leq \frac{10^{-7}}{2t_{\text{samp}}} \cdot \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi) \quad , \quad 10^{-7}N < t_{\text{samp}} \quad (\text{A-I-1-3-3})$$

$$\Delta \leq \frac{1}{2N} \cdot \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi) \quad , \quad 10^{-7}N \geq t_{\text{samp}} \quad (\text{A-I-1-3-4})$$

Deve-se notar de (3) que o período de amostragem deve ser tão grande quando permitido pela largura de banda exigida, que pode ser definida como $m \cdot f_0$, where m é o número mínimo de harmônicos do sinal que serão ser amostrados sem *aliasing* (tipicamente $m = 6$). O período de amostragem máximo deve atender ao teorema de amostragem, i.e., $t_{\text{samp}} < 1/2mf_0$. Se não, o algoritmo aumenta a frequência de amostragem a fim de garantir a ocorrência do *alias* exatamente em $m \cdot f_0$. O fabricante especifica o tempo de abertura máximo para um dado período de amostragem a fim de impedir erros de disparador muito rápido (HEWLETT-PACKARD, 1994a). O algoritmo considera este fato e calcula tempo de abertura como $t_{\text{aper}} = t_{\text{samp}} - \tau$, onde $\tau = 30 \mu\text{s}$.

A resolução de amplitude do IADC decresce com a diminuição do tempo de abertura. A fim de preservar uma resolução de amplitude mínima de $6\frac{1}{2}$ dígitos (21 bits), o tempo de abertura selecionado deve ficar entre $100 \mu\text{s}$ e 10 ms (HEWLETT-PACKARD, 1994a). Uma meta de tempo de abertura de $0,001 \text{ s}$ é tipicamente selecionada. Devido à exigência de largura de banda descrita acima, o tempo de abertura real é mantido quase constante até $f_0 = 1/2mt_{\text{samp}}$ onde começa a decrescer com a frequência do sinal como $t_{\text{aper}} = 1/2mf_0 - 3 \times 10^{-5} \text{ s}$. Eventualmente, o tempo de abertura real se torna menor do que $100 \mu\text{s}$ de modo que uma resolução de amplitude de $5\frac{1}{2}$ dígitos (18 bits) é observada na faixa de frequência elevada.

O algoritmo também minimiza a ondulação que depende do tempo de amostragem inicial t em (2). Um circuito de disparador de nível (interno ao DVM) é usado para estabelecer uma referência temporal (o cruzamento pelo nulo). Um circuito de temporização, ou base de tempo, é usado para selecionar retardos a partir deste ponto de referência. O circuito de temporização espera por um cruzamento pelo nulo (com inclinação positiva) do sinal e toma um trem de N amostras (cobrindo um número de períodos do sinal). Este é o trem de amostras de número zero. Após terminar o processamento deste trem de amostras, a base de tempo é configurada para esperar um intervalo de tempo t_D próximo de $1/nf_0$ a partir de um cruzamento pelo nulo com inclinação positiva e então iniciar a amostragem. Este é o trem de amostras de número um. Após terminar o processamento do k -ésimo trem de amostras, a base de tempo é configurada para esperar um intervalo de tempo kt_D a partir de um cruzamento pelo nulo com inclinação positiva e então iniciar a amostragem. E assim sucessivamente até o trem de amostras de número $n-1$.

A diferença entre as indicações dos conversores ideal e real é assim “congelada” no tempo no k -ésimo trem de amostras em um valor

$$\Delta \approx \text{Min}\left(\frac{10^{-7}}{2t_{\text{samp}}}, \frac{1}{2N}\right) \cdot \text{sen}(4\pi f_0 k t_D + \Phi) \quad (\text{A-I-1-3-5})$$

Se a média dos n resultados é avaliada, os limites “congelados” (para cada valor de $k t_D$) serão cancelados. O termo “ondulação congelada” veio à mente de Swerlein porque ele estava pensando em termos de um conversor térmico que exhibe um erro de “ondulação” variante no tempo em baixas frequências. Um sinal cuja amostragem é disparada de um cruzamento pelo nulo pode “congelar” esta ondulação (SWERLEIN, 1997). Supondo um limite conservador de $\Delta/20$ para este cancelamento,

$$\Delta \approx \text{Min}\left(10^{-8}/4t_{\text{samp}}, 1/40N\right) \quad (\text{A-I-1-3-6})$$

A frequência da ondulação em (5) é $2f_0$. O teorema de amostragem implica um valor máximo para t_D de $1/4f_0$, i.e., um número mínimo de 4 (quatro) trens de amostras, se a forma de onda deve ser amostrada sobre um período. Se o sinal de entrada tem harmônicos, então a ondulação terá componentes de frequência mais elevada, e isto exigirá retardos menores, i.e., um maior número de trens de amostras. Pode-se mostrar (vide Apêndice II) que a distorção introduzida por um terceiro harmônico produz componentes adicionais de ondulação de frequências $2f_0$ e $4f_0$ e que as amplitudes destas componentes, para uma distorção harmônica total (THD) de 1%, são muito menores do que a ondulação principal (SWERLEIN, 1991). Como o algoritmo supõe que o sinal tem uma forma de onda senoidal pura, não há necessidade de trabalhar com mais do que 6 (seis) trens de amostras.

A-I-1-4 Correção da resposta de frequência do IADC

No domínio do tempo, a resposta é uma média do sinal de entrada em um intervalo de tempo equivalente ao tempo de abertura especificado t_{aper} . A leitura do IADC é a saída de um sistema cuja resposta ao impulso é um pulso retangular de duração t_{aper} . A correção da resposta de frequência do IADC é, portanto,

$$k_{\text{int}} = \left(\frac{\text{sen } \pi f_0 t_{\text{aper}}}{\pi f_0 t_{\text{aper}}} \right)^{-1} \quad (\text{A-I-1-4-1})$$

A melhor estimativa de $k_{\text{int}}(jf_0)$ é

$$k_{\text{int e}} = \left(\frac{\text{sen } \pi f_0 t_{\text{apere}}}{\pi f_0 t_{\text{apere}}} \right)^{-1} \quad (\text{A-I-1-4-2})$$

Diferentemente de outras correções, esta é significativa, i.e., para um tempo de abertura de 1 ms e uma frequência fundamental de 100 Hz, a estimativa da correção $k_{\text{int e}}$ é aproximadamente 2%. Entretanto, a incerteza associada com esta estimativa é pequena.

Expandindo (1) em uma série de Taylor,

$$k_{\text{int e}} \approx 1 + \delta V / V = 1 + (\pi f_0 t_{\text{apere}})^2 / 3! \quad (\text{A-I-1-4-3})$$

O quadrado da incerteza padrão associada com a estimativa $k_{\text{int e}}$ é dado por uma expressão similar a (I-1-2-4). Como o *clock* usado para a temporização das amostras é também usado para estabelecer o tempo na medição de frequência, é suficiente considerar a incerteza padrão relativa associada com o tempo de abertura, i.e.,

$$u_{\delta V / V}^2 / (\delta V / V)^2 = 4u^2(t_{\text{apere}}) / t_{\text{apere}}^2 \quad (\text{A-I-1-4-4})$$

onde, a incerteza padrão relativa associada com a estimativa t_{apere} é avaliada da resolução do tempo de abertura (100 ns or 0,01% · t_{apere}).

A-I-1-5 Correção do modo de tensão contínua

O IADC usa uma referência interna de tensão contínua que tem de ser periodicamente calibrada com um padrão de referência de tensão contínua externo. Esta referência é calibrada no Inmetro com uma incerteza padrão de $1 \mu\text{V V}^{-1}$, por meio de um potenciômetro de exatidão elevada rastreável a um sistema de reprodução do Volt baseado no efeito Josephson (AFONSO, TÓTH *et al.*, 2000). Os valores do certificado de calibração são usados na correção do resultado do algoritmo. A correção do erro do modo de tensão contínua do DVM pode ser modelada como $\kappa = k_{\text{dc}} k_L k_G$, onde k_{dc} é a correção do erro listado em um certificado de calibração (a estimativa da correção k_{dce} é

obtida do certificado com uma incerteza $u(k_{dce})$, k_G é a correção do erro de ganho do IADC para tempos de abertura menores do que 1 s e k_L é a correção da linearidade do instrumento (estes erros estão definidos em MITRA (1998)). O fabricante estabelece os limites de erro de linearidade $[-c, +c]$ para cada faixa de tensão e período de calibração. A exatidão básica de 24 h é escolhida neste trabalho. Esta exatidão é baseada em um tempo de abertura equivalente ou maior do que 1 s e é degradada para tempos de abertura menores. Os limites de erro de ganho $[-d, +d]$ são também fornecidos pelo fabricante. A melhor estimativa de κ e a incerteza associada são

$$\kappa_e = k_{dce} \quad (\text{A-I-1-5-1a})$$

$$u(\kappa_e) = \left[u^2(k_{dce}) + k_{dce}^2 (c^2 + d^2) / 3 \right]^{1/2} \quad (\text{A-I-1-5-1b})$$

A-I-1-6 Ruído

A incerteza padrão associada com cada amostra não corrigida pode ser avaliada da informação sobre o ruído nas amostras individuais. O valor eficaz do ruído interno ao DVM é fornecido pelo fabricante (HEWLETT-PACKARD, 1994a).

A-I-2 Especificações do programa

A versão original do programa foi publicada em linguagem *Basic* (SWERLEIN, 1991). O programa foi elaborado para rodar em uma plataforma da Hewlett-Packard com sistema operacional *Basic*. Uma versão em *LabWindows CVI* foi feita pelo autor desta tese para rodar em qualquer plataforma com sistema operacional *Windows 98* que contenha interface IEEE 488.2 da National Instruments.

A versão apresentada aqui pode ser usada na medição do valor eficaz de formas de onda senoidais com frequências de 1 Hz até 1 kHz e com tensões de 1 mV até 700 V. O programa se destina apenas a formas de onda senoidais com menos de 1% de distorção.

Deve-se notar que, diferentemente das funções de tensão alternada da maioria dos voltímetros, que apresentam uma impedância de entrada de 1 M Ω , este programa implementa uma função com a mesma impedância de entrada da função de tensão contínua do DVM HP3458A. Portanto, a impedância de entrada é essencialmente

infinita nas faixas de 0,1 V; 1,0 V; e 10 V e de 10 M Ω nas faixas de alta tensão (de fato, a impedância é menor devido à capacitância de entrada não desprezível). A impedância de entrada do DVM e a impedância de saída (ou regulação de carga) do gerador de sinais são detalhes do sistema de medição que precisam ser conhecidos quando da medição de tensão alternada com exatidão elevada.

A largura de banda de medição desta técnica de medição é menor do que a maioria dos outros métodos. Por exemplo, se uma forma de onda senoidal de 1 mV / 40 Hz superposta em um ruído branco de 200 nV/ $\sqrt{\text{Hz}}$ for medida com um voltímetro de tensão alternada, um valor de 1,1832 mV será lido por este último. Por outro lado, um valor de 1 mV será obtido quando a forma de onda for medida por este programa (com sua largura de banda de uns poucos kHz). Deve-se notar que este efeito é desprezível para tensões de 100 mV ou maiores.

A-I-3 Descrição do programa

O painel de medição do programa está mostrado na Fig. A-I-1. O programa é iniciado apertando-se o botão *INICIAR*. Os parâmetros de entrada comumente modificados são a *Tensão RMS esperada (V)* e o *Tempo de Medição (s)*. A faixa do DVM deve ser escolhida de modo que o valor de pico do sinal de entrada não sobrecarregue o DVM. De acordo com a especificação do DVM, a faixa de 10 V é capaz de medir tensões alternadas de 1 V a 7 V, a faixa de 1000 V é capaz de medir tensões de 100 V a 700 V, e assim por diante para todas as faixas. Tempos de medição maiores reduzem as contribuições de incerteza associadas ao valor V_i' amostrado e armazenado na memória do DVM e ao limite para a correção do erro do valor eficaz medido, pois resultam em um número de amostras *Num* maior. Geralmente, um tempo de medição de 35 s é escolhido.

O algoritmo pressupõe uma calibração trimestral da função de tensão contínua do DVM com relação a padrão de tensão contínua externo. O campo *Correção DCV (ppm)* é reservado para a introdução de uma constante de correção obtida do certificado de calibração da função de tensão contínua do DVM.

Quando o programa é rodado, o usuário é solicitado a aplicar o sinal de entrada, aguardar até que o mesmo se estabilize e então pressionar o botão *MEDIR*. A seguir, o programa reporta a frequência do sinal, um conjunto de parâmetros de amostragem, e a

incerteza associada à estimativa do valor eficaz. Então, os resultados intermediários e finais são reportados. Pressionando-se *CONTINUAR* pode-se fazer uma nova medição, mantendo-se a mesma configuração do DVM e os mesmos parâmetros de amostragem. Isto é útil para observar a repetitividade da medição. Se um sinal com uma frequência diferente deve ser medido, o programa deve ser rodado novamente, pressionando-se *MEDIR*.

É recomendável, entretanto, efetuar repetições da medição rodando o programa várias vezes. O comando *RESET* é usado na configuração do DVM. Quando este comando é enviado, o DVM HP3458A é ajustado na faixa de 10 V. Se mais do que 12 V são aplicados, o comando *AUTORANGE* é habilitado e o DVM é ajustado em uma faixa mais elevada. Se o DVM não recebe um disparo, ele pode permanecer na faixa de 10 V até que uma sobretensão mais elevada seja aplicada. Neste momento, mesmo na ausência de um comando de software, o circuito de detecção de sobrecarga destrutiva do DVM entra em ação e abre os terminais de entrada. Portanto, se o gerador de sinais é sensível a alterações de impedância, o comando *RESET* pode disparar uma resposta transitória. Um meio de resolver este problema é especificar um retardo para permitir que o gerador se estabilize.

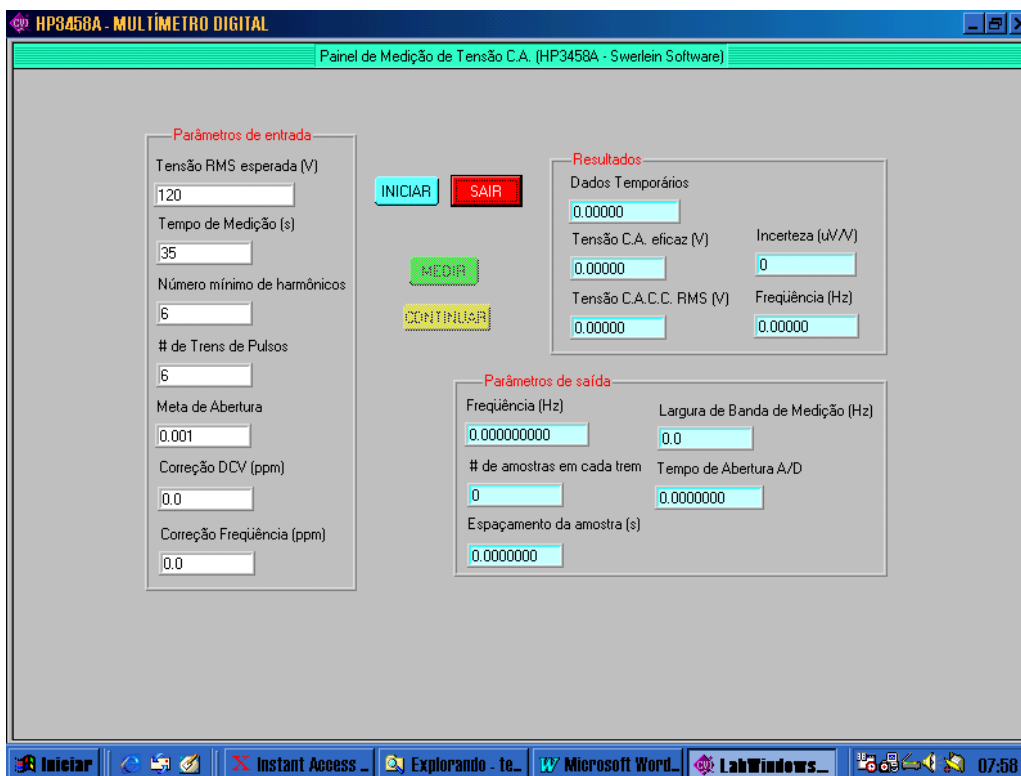


Fig. A-I-1. Painel de medição.

As funções *SetRange* e *SetupDVM* configuram o DVM para a medição. A frequência do sinal de entrada é medida pelo DVM (função *FNFreq*) e usada como uma variável de entrada em um algoritmo que calcula o intervalo de amostragem t_{samp} e o número de amostras N em um trem de amostras (função *Samp_parm*). A incerteza associada à medição de frequência é de 0,01%. Entretanto, como o mesmo *clock* usado para a temporização das amostras é também usado para estabelecer o tempo na medição de frequência, esta incerteza é invisível. Para que isto se verifique na prática, certas precauções devem ser tomadas. Quando o DVM é calibrado na fábrica, a função de medição de frequência do DVM é comparada com um padrão de frequência externo. Uma constante de correção é armazenada na memória permanente e usada para corrigir as medições de frequência. Entretanto, a temporização da amostra não é corrigida da mesma forma. Portanto, a medição de frequência não estará sincronizada com a temporização das amostras, a não ser que haja alguma forma de “descalibrar” o DVM. Isto é feito pelo algoritmo dividindo-se o valor medido de frequência pela constante de correção. Os valores de frequência, calibrado e “descalibrado”, medidos pelo algoritmo são registrados nos campos *Resultados – Frequência (Hz)* e *Parâmetros de Saída – Frequência (Hz)*, respectivamente. O campo *Correção Frequência (ppm)* é reservado para a introdução de uma constante de correção associada a uma calibração recente da função de frequência do DVM com relação a um padrão de frequência externo.

O principal objetivo do algoritmo é definir Nt_{samp} tão próximo quanto possível de um múltiplo inteiro do período do sinal de entrada e fazê-lo levando em consideração o teorema da amostragem. Este objetivo é alcançado pela função *Samp_parm*. O intervalo de amostragem t_{samp} é primeiramente calculado do tempo de abertura t_{aper} , especificado pelo usuário no campo *Meta de Abertura*, considerando as limitações de máximo número de leituras por segundo do DVM (HEWLETT-PACKARD, 1994a). Estas limitações são atendidas adicionando-se 30 μs ao tempo de abertura. O resultado é truncado para 100 ns, já que o intervalo de amostragem do DVM é quantizado em 100 ns. A duração de cada trem de amostras é então calculada do número de trens de amostras n , especificado pelo usuário no campo *# de Trens de Pulsos*, e do tempo necessário para calcular o desvio padrão das leituras de cada trem de amostras (estimado em 1,5 ms). Um número de amostras N aproximado é obtido da duração calculada do trem de amostras e do intervalo de amostragem. O número correspondente de períodos N_{cycle} do sinal de entrada equivalente à duração do trem de amostras é calculado desta última e da frequência do sinal *Freq* medida pelo programa, cujo valor é

registrado no campo *Frequência (Hz)*. Em geral, o número de períodos será maior do que zero. A função procede então às verificações necessárias ao atendimento do teorema da amostragem.

O usuário especifica o número mínimo de harmônicos (no campo homônimo) que serão amostrados sem *aliasing*, sem que o programa precise aumentar a frequência de amostragem. Com base no valor calculado do intervalo de amostragem e no valor medido da frequência do sinal, o número de harmônicos efetivos m sem *aliasing* é calculado do critério de Nyquist. Se este número é menor do que o número mínimo especificado pelo usuário, o programa assume este último como o número de harmônicos efetivos e recalcula um intervalo de amostragem temporário pelo critério de Nyquist (pelo menos $2m$ amostras estão presentes em cada período do sinal de entrada). Em outras palavras, o programa aumenta a frequência de amostragem de forma a garantir a ocorrência do *alias* exatamente em mf_0 . A duração do trem de amostras é então recalculada do número de trens de amostras, e do tempo necessário para calcular o desvio padrão das leituras de cada trem de amostras (estimado em 1,5 ms). O número de períodos do sinal de entrada equivalente à duração do trem de amostras é novamente calculado desta última e da frequência do sinal medida pelo programa. Do ponto de vista de exatidão, a única consideração é que a forma de onda seja amostrada em um número inteiro de períodos. A única desvantagem de amostrar mais períodos do que o necessário é um tempo de medição aumentado. De posse do novo número de períodos e do intervalo de amostragem temporário, o número de amostras N é recalculado considerando a frequência medida pelo programa. Um teste é feito para verificar se o tempo de abertura resultante está dentro das especificações do DVM ($1 \times 10^{-6} \text{ s} < t_{\text{aper}} < 1 \text{ s}$). Se o tempo de abertura estiver abaixo das especificações, o programa emite um aviso de que valores menores deverão ser especificados nos campos *Meta de Abertura* e *Número mínimo de harmônicos*.

Se o número mínimo de harmônicos especificados pelo usuário for muito elevado, para frequências de sinal elevadas, o tempo de abertura será muito pequeno, o que implicará numa degradação da exatidão básica do DVM. Se, por outro lado, o número mínimo de harmônicos especificados for muito pequeno, uma pequena distorção harmônica do sinal de entrada poderá gerar erros de *aliasing* que resultarão em erros de medição. Um número mínimo de 6 (seis) harmônicos é uma boa escolha (para sinais com distorção harmônica menor do que 1%).

A variável K é uma tentativa para melhorar a rejeição ao *aliasing* do algoritmo. Sem esta variável, é possível que um intervalo de amostragem pudesse ser escolhido que causasse um *aliasing* exatamente em $(m+1)f_0$. A rigor, isto não é um problema, pois o algoritmo é estruturado de modo a garantir imunidade contra *aliasing* somente para o número mínimo de harmônicos m especificado pelo usuário. Entretanto, se isto ocorre, a variável K implica em um intervalo de amostragem ligeiramente diferente, de modo a evitar um *aliasing* no harmônico de número $m+1$. O próprio autor deste algoritmo não tem certeza de quão necessário é este artifício, mas o mesmo pode ser útil para formas de onda muito específicas (SWERLEIN, 2001)..

Os valores calculados do número de amostras em cada trem, do intervalo de amostragem e do tempo de abertura são registrados, respectivamente, nos campos *# de amostras em cada trem*, *Espaçamento da amostra (s)* e *Tempo de Abertura A/D*.

Para cada trem de amostras, a função *Stat* calcula a média das amostras e o desvio padrão das mesmas. Todo o cálculo é feito internamente ao DVM, isto é, sem a necessidade de transferir os dados para o computador (pela interface IEEE 488.2). Valores temporários do valor eficaz do sinal de entrada são apresentados, para cada trem de amostras, no campo *Dados Temporários*. Estes valores são então corrigidos com relação ao erro devido à largura de banda (função *FNVmeter_bw*) e ao tempo de abertura finito. Cada k -ésimo trem de N amostras é retardado de k/nf_0 do cruzamento pelo nulo de tensão do sinal de entrada, onde k varia de 0 a $n-1$. Qualquer número de trens de amostras n maior ou igual a 6 (seis) pode ser usado. A seguir, uma estimativa da componente C.C. da forma de onda é obtida da média de todos os trens de amostras. Uma estimativa da potência no processo aleatório é também calculada. O valor eficaz da forma de onda (sem a componente C.C.) é estimado do desvio padrão de todos os trens de amostras. O valor eficaz do sinal (com a componente C.C.) é também calculado. Os valores calculados são corrigidos para o erro da função de tensão contínua e para o erro devido ao atenuador de alta tensão. As estimativas finais do valor eficaz do sinal, sem e com a componente C.C., são apresentadas nos campos *Tensão C.A. eficaz (V)* e *Tensão C.A.C.C. RMS (V)*, respectivamente. A incerteza associada à estimativa do valor eficaz é calculada pela função *Err_est* e apresentada no campo *Incerteza ($\mu V/V$)*.

A-I-4 Listagem do programa-fonte

A listagem do programa-fonte em LabWindows CVI é apresentada a seguir.

```

/* ESTE PROGRAMA MEDE O VALOR EFICAZ DE TENSÕES DE BAIXA FREQUÊNCIA (<1 kHz)
FOI ELABORADO POR GREGORY KYRIAZIS (INMETRO) EM 17/05/99, TENDO POR BASE O
ALGORITMO ELABORADO POR RONALD SWERLEIN (HP) EM 27/04/91.

PODE TER UMA EXATIDÃO MAIOR QUE 0,001% SE O TEMPO DE MEDIÇÃO > 30 s

NOTAS:

1. SENÓIDES DISTORCIDAS TÊM HARMÔNICOS DE FREQUÊNCIA MAIS ELEVADOS QUE PODEM
   NÃO SER MEDIDOS SE A LARGURA DE BANDA É MUITO BAIXA.
   A INCERTEZA COMPUTADA PARA ATÉ 1% DE DISTORÇÃO HARMÔNICA ESTÁ INCLUÍDA.
   ESTA INCERTEZA PODE SER REDUZIDA PELO USO DE ABERTURAS ALVO MENORES.

2. ESPECIALMENTE EM BAIXOS NÍVEIS DE SINAL, DOIS VOLTÍMETROS C.A. COM EXATIDÃO
   "PERFEITA" PODEM LER DIFERENTEMENTE SE ELAS TÊM LARGURAS DE BANDA DE RUIDO
   DIFERENTES. ISTO É VERDADE SOMENTE SE O SINAL MEDIDO CONTÉM RUIDO APRECIÁVEL
   DE ALTA FREQUÊNCIA OU SINAIS ESPÚRIOS. ESTE PROGRAMA MOSTRA A LARGURA DE BANDA
   DE MEDIÇÃO QUANDO RODADO. ESTA LARGURA DE BANDA VARIA DEPENDENDO DA FREQUÊNCIA.
   ELA É APROXIMADAMENTE 0,5 DIVIDIDO PELA ABERTURA ALVO.
   TAMBÉM AUMENTANDO O NÚMERO DE HARMÔNICOS PODE-SE AUMENTAR A LARGURA DE BANDA, MAS
   PODE-SE PREJUDICAR A EXATIDÃO BÁSICA POR FORÇAR PEQUENAS ABERTURAS A/D.

```

```

*/
#include <cvirte.h> /* Needed if linking in external compiler; harmless otherwise */
#include <userint.h>
#include <gpib.h>
#include <utility.h>
#include <ansi_c.h>
#include <formatio.h>
#include <swerlein1.h>

#define TRUE 1
#define FALSE 0
#define PI 3.141592
#define hp3458a 23

void Medir_tensao (float, float, int, int, float, float, float);
void Continuar_medir_tensao (float, int, int, float, float);
float SetRange (float);
void SetupDVM (float, float, int, float);
void Stat(float *, float *, int);

```

```

float FNFreq(float);
float FNVmeter_bw(float, float);
void Samp_parm(float *, float *, int *, float, float, float, int, int);
void Err_est (float *, float *, float, int, float, float);

int sis_painel;
int swerlein_painel;

short endereco[2];
int novo, item, objeto;
int Nharm, Num, Nbursts;
float   Meas_time, Freq, Aper_targ, Metcorr, Df_corr, Range, Tsamp, Aper, Sinc, Rsource, Cload, Df,
        Bw_corr, Delay1, Sum, Sumsq, Err, Dist, Mean, Sdev, Acrms, Dcrms, Dc, Tempdata;

main ( ) {
    int controle;
    float Expect, Freqcorr;

    sis_painel = LoadPanel (0, "swerlein1.uir", SYSPANEL);
    DisplayPanel (sis_painel);
    swerlein_painel = LoadPanel (sis_painel, "swerlein1.uir", PANEL);
    DisplayPanel (swerlein_painel);
    endereco[1] = -1;
    endereco[0] = hp3458a;
    SendIFC (0);
    SetRWLS (0, endereco);
    while (TRUE) {
        GetUserEvent (1, &objeto, &item);
        if (objeto == swerlein_painel) {
            switch (item) {
                case PANEL_INICIAR:
                    MessagePopup ("NOTA",
                                   "O ALGORITMO SUPÔE (ACAL DCV) REALIZADO A 24 h");
                    Send (0, hp3458a, "CLEAR", 5, 2);
                    Send (0, hp3458a, "RESET;DCV 1000", 14, 2);
                    Send (0, hp3458a, "TONE", 4, 2);
                    MessagePopup ("ATENÇÃO",
                                   "APLIQUE O SINAL DE ENTRADA, DEIXE ESTABILIZAR E APERTE OK");
                    SetCtrlAttribute (swerlein_painel, PANEL_MEDIR, ATTR_DIMMED, 0);
            }
        }
    }
}

```

```

break;
case PANEL_MEDIR:
    SetCtrlAttribute (swerlein_painel, PANEL_CONTINUAR, ATTR_DIMMED, 0);
    /* VALOR EFICAZ ESPERADO DO SINAL A SER MEDIDO +/- 10%.
       A MENOR TENSÃO MENSURÁVEL É 1 mV, A MAIOR É 700 V.*/
    GetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_VOLTAGE, &Expect);
    GetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_MEAS_TIME, &Meas_time); /*
TEMPO DE MEDIÇÃO (s) */
    GetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_METER_CORRECTION, &Metcorr); /*
CORREÇÃO DO MULTÍMETRO DIGITAL (INMETRO) */
    GetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_FREQ_CORRECTION, &Freqcorr); /*
CORREÇÃO DE FREQUÊNCIA DO MULTÍMETRO DIGITAL (INMETRO) */
    /* NÃO NECESSÁRIO P/ O ALGORITMO DE SWERLEIN (NECESSÁRIO P/ POTÊNCIA REATIVA) */
    GetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_NHARM, &Nharm); /* # MÍNIMO DE
HARMÔNICOS AMOSTRADOS ANTES DE OCORRER ALIAS*/
    GetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_APER_TARG, &Aper_targ); /* ALVO DE
ABERTURA A/D (s) */
    GetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_NBURSTS, &Nbursts); /* # DE TRENS
DE PULSOS USADOS PARA CADA MEDIÇÃO*/
    Medir_tensao (Expect, Meas_time, Nharm, Nbursts, Aper_targ, Metcorr,
Freqcorr);
break;
case PANEL_CONTINUAR:
    Continuar_medir_tensao (Meas_time, Nharm, Nbursts, Aper_targ, Metcorr);
break;
case PANEL_SAIR:
    endereco[1] = -1;
    endereco[0] = hp3458a;
    SendIFC (0);
    SetRWLS (0, endereco);
    Send (0, hp3458a, "CLEAR", 5, 2);
    Send (0, hp3458a, "RESET", 5, 2);
    EnableLocal (0, endereco);
    exit (1);
break;
}
}
}
}

```

```

//*****MEDIÇÃO DA TENSÃO*****
//*****
void Medir_tensao (float Expect, float Meas_time,
                  int Nbursts, float Aper_targ, float Metcorr, float Freqcorr)
{
    int i, novo, conta;
    float Freqcal, Cal;
    int Storage;
    float Meas_bw;
    double X;
    char comando[50], *string, buffer1[18];

    Range = SetRange (Expect); /* AJUSTE A FAIXA DO MULTÍMETRO */
    Freq=FNFreq(Expect); /* OBTENHA A FREQUÊNCIA DO SINAL DE ENTRADA*/
    if (Freq==0) {
        novo = FALSE;
        return;
    }
    Samp_parm(&Tsamp, &Aper, &Num, Freq, Meas_time, Aper_targ, Nharm, Nbursts); /* OBTENHA OS PARÂMETROS DE
AMOSTRAGEM */
    SetupDVM (Range, Aper, Num, Tsamp); /* CONFIGURAÇÃO DO HP3458A */
    Delay (0.1);

    /* CÁLCULOS PRELIMINARES */

    X = PI*Aper*Freq;
    Sinc = sin (X)/X; /* USADO PARA CORRIGIR COM RELAÇÃO AO ERRO DE ABERTURA A/D */
    Bw_corr = FNVmeter_bw(Freq, Range); /* USADO PARA CORRIGIR COM RELAÇÃO À LARGURA DE BANDA DO VOLTÍMETRO*/
    Send (0, hp3458a, "CAL? 245", 8, 2); // (NÃO NECESSÁRIO
    Receive (0, hp3458a, buffer1, 17, 256); // P/ O ALGORITMO
    Scan (buffer1, "%s>%f[b4]", &Cal); // DE SWERLEIN)
    Freqcal = Freq*Cal; // (RESULTADO
    Freqcal = Freqcal*(1+Freqcorr/1.E+06); // NECESSÁRIO P/
    SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_FREQCAL, Freqcal); // MEDIÇÃO CALIBRADA DA FREQUÊNCIA)
    SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_FREQUENCY, Freq);
    SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_SAMPLENUM, Num);
    SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_SAMPLE_SPACING, Tsamp);
    SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_APERTURE, Aper);
    Meas_bw = TruncateRealNumber ((5/Aper)/10);

```



```

SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_MEAS_Bw, Meas_bw);
Send (0, hp3458a, "DISP OFF,*TENSÃO_C.A.*", 22, 2);
Sum = 0;
Sumsq = 0;
for (i=0; i<Nbursts; i++) {
    Delay1 = i/(Nbursts*Freq)+1.E-6;
    Fmt (comando, "%s<DELAY %f[p7]", Delay1);
    conta = StringLength (comando);
    Send (0, hp3458a, comando, conta, 2);
    Fmt (comando, "%s<TIMER %f[p7]", Tsamp);
    conta = StringLength (comando);
    Send (0, hp3458a, comando, conta, 2);
    Stat (&Mean, &Sdev, Num);
    Sumsq = Sumsq+Sdev*Sdev+Mean*Mean;
    Sum = Sum+Mean;
    Tempdata = Sdev*Bw_corr/Sinc; /* CORRIGE A ABERTURA A/D E A LARGURA DE BANDA DO VOLTÍMETRO */
    Tempdata = Range/1.E+7*TruncateRealNumber (Tempdata*1.E+7/Range); /* TRUNCAMENTO DE 6 DÍGITOS */
    SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_TEMPDATA, Tempdata);
}
Dcrms = sqrt (Sumsq/Nbursts);
Dc = Sum/Nbursts;
Acrms = Dcrms*Dcrms- Dc*Dc;
if (Acrms<0) {
    Acrms = 0; /* PROTEÇÃO PARA RAIZ QUADRADA DE UM NÚMERO NEGATIVO */
}
Acrms = sqrt (Acrms);
Acrms = Acrms*Bw_corr/Sinc; /* CORRIGE A ABERTURA A/D E A LARGURA DE BANDA DO VOLTÍMETRO */
Dcrms = sqrt (Acrms*Acrms+Dc*Dc);
Acrms = Range/1.E+7*TruncateRealNumber (Acrms*1.E+7/Range+.5); /* TRUNCAMENTO DE 6 DÍGITOS */
Dcrms = Range/1.E+7*TruncateRealNumber (Dcrms*1.E+7/Range+.5); /* TRUNCAMENTO DE 6 DÍGITOS */
Acrms = Acrms*(1+Metcorr/1.E+6);
Dcrms = Dcrms*(1+Metcorr/1.E+6);
if (Range <= 12) {
    Rsource = 10000;
    Cload = 1.35E-10;
    Df = 4.E-4; //0.04%
} else {
    Rsource = 1E5;
    Cload = 5E-11;
    Df = 1.2E-3; //0.12%
}

```

```

}
Df_corr = 2*PI*Rsource*Clload*Df*Freq;
Df_corr = TruncateRealNumber (1.E6*Df_corr); /* CORREÇÃO DEVIDO À ABSORÇÃO DIELETRICA
DA PLACA DE CIRCUITO IMPRESSO DO ATENUADOR DE ENTRADA */

Acrms = Acrms*(1+Df_corr/1.E+6);
Dcrms = Dcrms*(1+Df_corr/1.E+6);
Fmt (comando, "%s<DISP OFF, ' %f[p5] V'", Acrms);
conta = StringLength (comando);
Send (0, hp3458a, comando, conta, 2);
Send (0, hp3458a, "TONE", 4, 2);
Err_est (&Err, &Dist, Freq, Range, Num, Aper, Nbursts);
SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_ACRMS, Acrms);
SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_DCRMS, Dcrms);
SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_INCERT, Err);
}

//*****REPETIÇÃO DA MEDIÇÃO DA TENSÃO
*****
void Continuar_medir_tensao (float Meas_time, int Nharm, int Nbursts, float Aper_targ, float Metcorr)
{
int i, conta;
char comando[50];

Send (0, hp3458a, "DISP OFF,*TENSAO_C.A.*", 22, 2);
Sum = 0;
Sumsq = 0;
for (i=0; i<Nbursts; i++) {
Delay1 = i/(Nbursts*Freq)+1.E-6;
Fmt (comando, "%s<DELAY %f[p7]", Delay1);
conta = StringLength (comando);
Send (0, hp3458a, comando, conta, 2);
Fmt (comando, "%s<TIMER %f[p7]", Tsamp);
conta = StringLength (comando);
Send (0, hp3458a, comando, conta, 2);
Stat (&Mean, &Sdev, Num);
Sumsq = Sumsq+Sdev*Sdev+Mean*Mean;
Sum = Sum+Mean;
Tempdata = Sdev*Bw_corr/Sinc; /* CORRIGE A ABERTURA A/D E A LARGURA DE BANDA DO VOLTÍMETRO */
}
}

```

```

Tempdata = Range/1.E+7*TruncateRealNumber (Tempdata*1.E+7/Range); /*TRUNCAMENTO DE 6 DÍGITOS */
SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_TEMPDATA, Tempdata);

}
Dcrms = sqrt (Sumsg/Nbursts);
Dc = Sum/Nbursts;
Acrms = Dcrms*Dcrms- Dc*Dc;
if (Acrms<0) {
    Acrms = 0; /* PROTEÇÃO PARA RAIZ QUADRADA DE UM NÚMERO NEGATIVO */
}
Acrms = sqrt (Acrms);
Acrms = Acrms*Bw_corr/Sinc; /* CORRIGE A ABERTURA A/D E A LARGURA DE BANDA DO VOLTÍMETRO */
Dcrms = sqrt (Acrms*Acrms+Dc*Dc);
Acrms = Range/1.E+7*TruncateRealNumber (Acrms*1.E+7/Range+.5); /* TRUNCAMENTO DE 6 DÍGITOS */
Dcrms = Range/1.E+7*TruncateRealNumber (Dcrms*1.E+7/Range+.5); /* TRUNCAMENTO DE 6 DÍGITOS */
Acrms = Acrms*(1+Metcorr/1.E+6);
Dcrms = Dcrms*(1+Metcorr/1.E+6);
if (Range <= 12) {
    Rsource = 10000;
    Cload = 1.35E-10;
    Df = 4.E-4; //0.04%
} else {
    Rsource = 1E5;
    Cload = 5E-11;
    Df = 1.2E-3; //0.12%
}
Df_corr = 2*PI*Rsource*Cload*Df*Freq;
Df_corr = TruncateRealNumber (1.E6*Df_corr); /* CORREÇÃO DEVIDO À ABSORÇÃO DIELÉTRICA
DA PLACA DE CIRCUITO IMPRESSO DO ATENUADOR DE ENTRADA */
Acrms = Acrms*(1+Df_corr/1.E+6);
Dcrms = Dcrms*(1+Df_corr/1.E+6);
Fmt (comando, "%s<DISP OFF,' %f[p5] V'", Acrms);
conta = StringLength (comando);
Send (0, hp3458a, comando, conta, 2);
Send (0, hp3458a, "TONE", 4, 2);
Err_est (&Err, &Dist, Freq, Range, Num, Aper, Nbursts);
SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_ACRMS, Acrms);
SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_DCRMS, Dcrms);
SetCtrlVal (swerlein_painel, PANEL_INCERT, Err);
}

```

```
/*******FUNÇÕES DO ALGORITMO DE MEDIÇÃO DE TENSÃO*****
```

```
float SetRange (float Expect) {  
  
    float Range;  
  
    Expect *= 1.55; /* VALOR DE PICO * 1.1 */  
    if (Expect < 0.12)  
        Range = 0.1;  
    else  
        if (Expect < 1.2)  
            Range = 1;  
        else  
            if (Expect <12)  
                Range = 10;  
            else  
                if (Expect <120)  
                    Range = 100;  
                else  
                    Range = 1000;  
  
    Send (0, hp3458a, "CLEAR", 5, 2);  
    Send (0, hp3458a, "RESET;DCV 1000", 14, 2);  
    Send (0, hp3458a, "TONE", 4, 2);  
    Send (0, hp3458a, "DISP OFF,*TENSAO_C.A.*", 22, 2);  
    return (Range);  
  
}  
  
void SetupDVM (float Range, float Aper, int Num, float Tsamp) {  
  
    char comando[50], buffer1[18];  
    int novo, conta, Storage;  
  
    Send (0, hp3458a, "TARM HOLD;AZERO OFF", 19, 2);  
    Fmt (comando, "%s<DCV %f[p1]", Range);  
    conta = StringLength (comando);  
    Send (0, hp3458a, comando, conta, 2);  
    Fmt (comando, "%s<APER %f[p7]", Aper);  
    conta = StringLength (comando);  
    Send (0, hp3458a, comando, conta, 2);
```

```

Fmt (comando, "%s<NRDGS %i,TIMER", Num);
conta = StringLength (comando);
Send (0, hp3458a, comando, conta, 2);
Fmt (comando, "%s<TIMER %f[p7]", Tsamp);
conta = StringLength (comando);
Send (0, hp3458a, comando, conta, 2);
Send (0, hp3458a, "TRIG LEVEL;LEVEL 0,DC;DELAY 0;LFILTER ON", 40, 2);
Send (0, hp3458a, "MSIZE?", 6, 2);
Receive (0, hp3458a, buffer1, 8, 256); /*CAPACIDADE DE ARMAZENAMENTO NO VOLTÍMETRO (DADOS DINT) */
Scan (buffer1, "%s>%i", &Storage);
Storage = TruncateRealNumber (Storage/4);
if (Num>Storage) {
    MessagePopup ("ATENÇÃO",
        "NÃO HÁ MEMÓRIA SUFICIENTE PARA AS AMOSTRAS NECESSÁRIAS");
    Send (0, hp3458a, "TONE", 4, 2);
    MessagePopup ("ATENÇÃO",
        "TENENTE UM VALOR MAIOR DE ABERTURA ALVO OU UM NÚMERO MENOR DE AMOSTRAS");
    Send (0, hp3458a, "TONE", 4, 2);
    novo = FALSE;
    return;
}

void Stat(float *Mean, float *Sdev, int Num) {
    char buffer[18];
    Send (0, hp3458a, "MEM FIFO:MFORMAT DINT:TARM SGL", 30, 2);
    Send (0, hp3458a, "MMATH STAT", 10, 2);
    Send (0, hp3458a, "RMATH SDEV", 10, 2);
    Receive (0, hp3458a, buffer, 16, 256);
    Scan (buffer, "%s>%f[b4]", Sdev);
    Send (0, hp3458a, "RMATH MEAN", 10, 2);
    Receive (0, hp3458a, buffer, 16, 256);
    Scan (buffer, "%s>%f[b4]", Mean);
    *Sdev = sqrt (pow(*Sdev,2)*(Num-1)/Num); // CORREÇÃO DA FÓRMULA DO DESVIO PADRÃO
}

```

```

float FNFreq(float Expect) {
float Freq, Cal;
char comando[50], buffer[18];
int conta;

Send (0, hp3458a, "TARM HOLD;LFILTER ON;LEVEL 0,DC;FSOURCE ACDCV", 45, 2);
Fmt (comando, "%s<FREQ %f[p7]", Expect*.9);
conta = StringLength (comando);
Send (0, hp3458a, comando, conta, 2);
Send (0, hp3458a, "CAL? 245", 8, 2);
Receive (0, hp3458a, buffer, 17, 256);
Scan (buffer, "%s>%f[b4]", &Cal);
Send (0, hp3458a, "TARM SGL", 8, 2);
Receive (0, hp3458a, buffer, 17, 256);
Scan (buffer, "%s>%f[b4]", &Freq);
Freq /= Cal;

if (Freq == 0.0) {
Send (0, hp3458a, "TONE", 4, 2);
MessagePopup ("ATENÇÃO",
               "A MEDIÇÃO DE FREQUÊNCIA RESULTOU NUM VALOR NULO");
}
return Freq;
}

float FNVmeter_bw(float Freq, float Range) {
float Bw_corr, Lvfilter, Hvattn, Gain100bw;

Lvfilter = 120000; // LARGURA DE BANDA DO FILTRO DE ENTRADA DE BAIXA TENSÃO
Hvattn = 360000; // LARGURA DE BANDA DO ATENUADOR DE ALTA TENSÃO (NUMERADOR)
Gain100bw = 82000; // LARGURA DE BANDA DO AMPLIFICADOR DE ENTRADA
if (Range<=.12) {
Bw_corr = (1+pow (Freq/Lvfilter, 2))/(1+pow (Gain100bw, 2));
Bw_corr = sqrt (Bw_corr);
}
if (Range>.12 && Range<=12) {
Bw_corr = (1+pow (Freq/Lvfilter, 2));
Bw_corr = sqrt (Bw_corr);
}
}

```

```

if (Range>12) {
    Bw_corr = (1+pow (Freq/Hvattn, 2));
    Bw_corr = sqrt (Bw_corr);
}

return Bw_corr;
}

void Samp_parm(float *Tsamp, float *Aper, int *Num, float Freq, float Meas_time, float Aper_targ, int Nharm_min, int
Nbursts)
{
    int Nharm, Approxnum, Ncycle;
    float Submeas_time, Burst_time, Tsamptemp, K;

    *Aper = Aper_targ;
    *Tsamp = 1.E-7*TruncateRealNumber ((*Aper+3.0E-5)/1.E-7+.5); // ARREDONDAMENTO PARA 100 ns

    Submeas_time = Meas_time/Nbursts; // OBJETIVO DE TEMPO POR TREM DE PULSOS
    Burst_time = Submeas_time * *Tsamp/(0.0015+ *Tsamp); // DEMORA 1,5 ms PARA CADA AMOSTRA (TEMPO
DE COMPUTAÇÃO DE Sdev)
    Approxnum = TruncateRealNumber (Burst_time/ *Tsamp+.5);
    Ncycle = TruncateRealNumber (Burst_time*Freq+.5); // NÚMERO DE 1/Freq PARA AMOSTRAR
    if (Ncycle==0) {
        Ncycle = 1;
        *Tsamp = 1.E-7*TruncateRealNumber (1/(Freq*Approxnum*1.E-7)+.5); // TEMPO ENTRE AMOSTRAS
        Nharm = TruncateRealNumber (1/(*Tsamp*2*Freq)); // NÚMERO DE HARMÔNICOS ANTES QUE OCORRA "ALIAS"
        if (Nharm<Nharm_min) { // PRECISA AUMENTAR A FREQUÊNCIA DE AMOSTRAGEM
            Nharm = Nharm_min;
            *Tsamp = 1.E-7*TruncateRealNumber (1/(2*Nharm*Freq*1.E-7)+.5);
        }
    }
    else {
        Nharm = TruncateRealNumber (1/(*Tsamp*2*Freq)); // NÚMERO DE HARMÔNICOS ANTES QUE OCORRA "ALIAS"
        if (Nharm<Nharm_min) { // PRECISA AUMENTAR A FREQUÊNCIA DE AMOSTRAGEM
            Nharm = Nharm_min;
        }
        Tsamptemp = 1.E-7*TruncateRealNumber (1/(2*Nharm*Freq*1.E-7)+.5); // FORCE A OCORRÊNCIA DO
"ALIAS" EXATAMENTE EM Nharm*Freq !!

```

```

Burst_time = Submeas_time*Tsamptemp/(0.0015+Tsamptemp);
Ncycle = TruncateRealNumber (Burst_time*Freq+1);
*Num = TruncateRealNumber (Ncycle/Freq/Tsamptemp+.5);
if (Ncycle>1) {
    K = TruncateRealNumber (*Num/20/Nharm+1);
}
else {
    K = 0;
}
}
*Tsamp = 1.E-7*TruncateRealNumber (Ncycle/Freq/(*Num-K)/1.E-7+.5); // AGORA O "ALIAS" OCORRE MUITO
MAIS ACIMA DO QUE Nharm*Freq. // K FOI SELECIONADO PARA TENTAR FAZER O "ALIAS"EM APROX. 10*Nharm*Freq.
if (*Tsamp-Tsamptemp<1.E-7) {
    *Tsamp = *Tsamp+1.E-7;
}
*Aper = *Tsamp-3.E-5;
*Num = TruncateRealNumber (Ncycle/Freq/ *Tsamp+.5);
if (*Aper>1) {
    // ABERTURA MÁXIMA DO HP3458A
    *Aper = 1;
}
if (*Aper<1.E-6) {
    Send (0, hp3458a, "TONE", 4, 2);
    MessagePopup ("***ERRO***", "ABERTURA A/D É MUITO PEQUENA.");
    MessagePopup ("",
        "ABAIXE A META DE ABERTURA OU O NÚMERO DE HARMÔNICOS");
}
}

void Err_est (float *Err, float *Dist, float Freq, float Range, int Num,
    float Aper, float Nbursts)
{
    int Base;
    float Noiseraw;
    short VmeterBW, Aper_er, Sincerr, Tim_err, Limit, Df_err, Metcorr_er, Noise;

/* Base É A EXATIDÃO BÁSICA DA FUNÇÃO DCV C/ NFLC = 100. SUPÕE-SE AQUI O USO DE UM
MULTÍMETRO OPÇÃO 002 (ESTABILIDADE ELEVADA) COM CICLOS DE CALIBRAÇÃO DE 24 HORAS*/

```



```

if (Range == 0.1)
    Base = TruncateRealNumber ((2.5*Acrms+3*0.1)/Acrms);
if (Range == 1)
    Base = TruncateRealNumber ((1.5*Acrms+0.3*1)/Acrms);
if (Range == 10)
    Base = TruncateRealNumber ((0.5*Acrms+0.05*10)/Acrms);
if (Range == 100)
    Base = TruncateRealNumber ((2.5*Acrms+0.3*100)/Acrms);
if (Range == 1000)
    Base = TruncateRealNumber ((2.5*Acrms+0.1*1000)/Acrms);
Base = Base/sqrt(3);

/* Aper_er é A INCERTEZA DO ERRO NO GANHO DCV PARA VÁRIAS ABERTURAS A/D;
   ESTA INCERTEZA ESTÁ ESPECIFICADA EM UM GRÁFICO NA PÁGINA A-2 DA ESPECIFICAÇÃO. */

Aper_er = TruncateRealNumber ((1.0*0.002/Aper)/sqrt(3)); /* INCERTEZA DO GANHO - PEQUENA ABERTURA A/D */
if ((Aper_er>30) && (Aper >= 1E-5))
    Aper_er = 30;
if (Aper < 1.E-5)
    Aper_er = TruncateRealNumber ((10 + (.0002/Aper))/sqrt(3));

/* Metcorr_er é A INCERTEZA DO CERTIFICADO DE CALIBRAÇÃO DA FUNÇÃO CONTÍNUA DO HP3458A */
Metcorr_er = 1;

/* Vmeter_bw é A INCERTEZA COM QUE SE CONHECE A RESPOSTA DE ALTA FREQUÊNCIA DA
   FUNÇÃO DCV PARA VÁRIAS FAIXAS E FREQUÊNCIAS. A INCERTEZA É DE 30%. */

VmeterBW = TruncateRealNumber (1.E+6*2*(Bw_corr-1)*0.3); /* INCERTEZA DEVIDO À LARGURA DE BANDA DO MEDIDOR*/

/* Sincerr é A INCERTEZA DEVIDO AO FATO DO TEMPO DE ABERTURA NÃO SER PERFEITAMENTE
   CONHECIDO. ESTA INCERTEZA IMPLICA EM QUE A CORREÇÃO Sinc À FREQUÊNCIA DO SINAL
   NÃO É PERFEITA. AS COMPONENTES DE INCERTEZA SÃO A INCERTEZA DA FREQUÊNCIA DO CLOCK
   (0,01%) E A RESOLUÇÃO DO TEMPO DE ABERTURA (100 ns). */

Sincerr = TruncateRealNumber (1.E+6*2*((1/Sinc)-1)*0.0002);

```

```

/* Dist é A INCERTEZA DEVIDO A ATÉ 1% DE DISTORÇÃO DA FORMA DE ONDA DE ENTRADA.
SE A FORMA DE ONDA DE ENTRADA TEM DISTORÇÃO DE 1%, SUPÕE-SE QUE ESTA ENERGIA É
O TERCEIRO HARMÔNICO. SUPÕE-SE DESPREZÍVEL, UMA VEZ QUE SE USA UMA FONTE COM
DISTORÇÃO HARMÔNICA MENOR DO QUE 0,01%. */

*Dist = 0; /* CORREÇÃO Sinc NECESSÁRIA PARA O TERCEIRO HARMÔNICO */

/* Tim_err é A INCERTEZA DEVIDO À TEMPORIZAÇÃO. PODE SER MOSTRADO QUE
SE UM TREM DE Num AMOSTRAS SÃO USADOS PARA COMPUTAR O VALOR EFICAZ
DE UMA ONDA SENOIDAL E O TAMANHO DESTES TREMS ESTÁ DENTRO DE 50ns*Num
DE UM NÚMERO INTEIRO DE PERÍODOS DO SINAL QUE ESTÁ SENDO MEDIDO,
O TEMPO DE AMOSTRAGEM É CONHECIDO COM UMA INCERTEZA LIMITADA PELO
MENOR DE 50/2/Tsamp E 1/4/Num. ESTA INCERTEZA SE DEVE À LIMITAÇÃO
DA QUANTIZAÇÃO DE 100 ns DA BASE DE TEMPO DO HP3458A.
ESTA INCERTEZA É REDUZIDA AINDA MAIS USANDO-SE O LEVEL TRIGGER PARA
ESPAÇAR Nbursts EM INCREMENTOS TEMPORAIS DE 1/Nbursts/Freq. ESTA
REDUÇÃO ESTÁ MOSTRADA COMO 20*Nbursts, MAS DE FATO É GERALMENTE MUITO
MAIOR. */

Tim_err = TruncateRealNumber (1.E+6*1.E-7/4/(Aper+3.E-5)/(20*sqrt(3))); /* INCERTEZA DEVIDO À TEMPORIZAÇÃO */
Limit = TruncateRealNumber (1.E+6/(4*Num*20*sqrt(3)));

if (Tim_err>Limit)
    Tim_err = Limit;

/* Noise é A INCERTEZA DEVIDO AO FATO DAS AMOSTRAS INDIVIDUAIS TEREM RUIDO.
SUPÕE-SE QUE AS MEDIÇÕES DAS AMOSTRAS SÃO INDEPENDENTES. PORTANTO, A
INCERTEZA É REDUZIDA PELA RAIZ QUADRADA DO NÚMERO DE AMOSTRAS. HÁ
Nbursts*Num AMOSTRAS EM UMA MEDIÇÃO. O RUIDO AMOSTRAL ESTÁ ESPECIFICADO
NO GRÁFICO DA PÁGINA 11 DA ESPECIFICAÇÃO. ESTE GRÁFICO MOSTRA OS VALORES
DA INCERTEZA PADRÃO. A INCERTEZA NA PÁGINA 11 ESTÁ EXPRESSA COMO UM % DA
FAIXA E É MULTIPLICADA POR 10, DE TAL MODO QUE PODE SER USADA COMO % LEITURA
NA ESCALA 1/10. */

Noiseraw = 0.9*sqrt(0.001/Aper);
Noise = Noiseraw/sqrt(Nbursts*Num); /* INCERTEZA DEVIDO AO RUIDO EM ppm DA FAIXA */

```

```

Noise *= 10;
if (Range <= 0.12) {
    Noise *= 7;
    Noiseraw *= 7;
}
Noise = TruncateRealNumber (Noise) + 2; /* INCERTEZA DEVIDO AO RUÍDO AMOSTRAL */

/* Df_err É A INCERTEZA DEVIDO AO FATOR DE DISSIPACÃO DA CAPACITÂNCIA DO CARTÃO DE CIRCUITO
IMPRESSO APÓS A RESISTÊNCIA DE ENTRADA (SEÇÃO IV-2-4). A RESISTÊNCIA DE ENTRADA É 10 QUILOOHMS
PARA AS FAIXAS DE BAIXA TENSÃO E 100 QUILOOHMS PARA AS FAIXAS DE ALTA TENSÃO (O ATENUADOR DE
ENTRADA DE 10 MEGOHMS). ESTA CAPACITÂNCIA TEM UM VALOR DE APROXIMADAMENTE 15pF E UM FATOR DE
DISSIPACÃO TÍPICO DE 0,4%. ESTA CAPACITÂNCIA É COLOCADA EM PARALELO COM 120 pF DE CAPACITÂNCIA DE
BAIXO FATOR DE DISSIPACÃO (CAPACITORES DE POLIPROPILENO) NAS FAIXAS DE BAIXA TENSÃO, DONDE
RESULTA UM FATOR DE DISSIPACÃO EFETIVO DE APROXIMADAMENTE 0.04%. A CAPACITÂNCIA É COLOCADA EM
PARALELO COM 35 pF DE CAPACITÂNCIA DE BAIXO FATOR DE DISSIPACÃO NAS FAIXAS DE ALTA TENSÃO,
DONDE RESULTA UM FATOR DE DISSIPACÃO EFETIVO DE 0.12%. O FATOR DE DISSIPACÃO TENDE SEMPRE A
DIMINUIR O VALOR MEDIDO DA TENSÃO. A INCERTEZA DO FATOR DE DISSIPACÃO É DE 50%.
SUPOE-SE UMA INCERTEZA DE 10% PARA A RESISTÊNCIA DE ENTRADA E DE 20% PARA A CAPACITÂNCIA DECARGA*/

Df_err = TruncateRealNumber (Df_corr*sqrt (0.25 + 0.04 + 0.0025));

/* Err É A INCERTEZA PADRÃO RELATIVA DO RESULTADO DA MEDIÇÃO DO VALOR EFICAZ DA TENSÃO. */

*Err = TruncateRealNumber (sqrt (pow(Base,2) + pow(VmeterBW,2) + pow(Aper_err,2) + pow(Metcorr_err,2) +
pow(Sincerr,2) + pow (Tim_err,2) + pow (Noise,2) + pow (Df_err,2)));
}

```

APÊNDICE II

RESOLUÇÃO DA BASE DE TEMPO DO CONVERSOR A/D

Deseja-se mostrar que a diferença relativa entre a indicação de um trem de amostras do algoritmo real, isto é,

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N A^2 \text{sen}^2(2\pi f_0 t_i)}, \quad (\text{A-II-1})$$

e a indicação $(A/\sqrt{2})$ de um algoritmo ideal não limitado por resolução, para um sinal senoidal puro, pode ser aproximada para N grande por

$$\Delta = \frac{\text{sen}(2\pi f_0 N t_{\text{samp}})}{4\pi f_0 N t_{\text{samp}}} \cdot \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi). \quad (\text{A-II-2})$$

Para N grande, (1) pode ser aproximada por

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T'} \int_{t-T'}^t A^2 \text{sen}^2(2\pi f_0 t) dt} \quad (\text{A-II-3})$$

Usando a identidade trigonométrica $2 \text{sen}^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ e integrando, obtém-se

$$V_{ef} = A \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\text{sen}(4\pi f_0 (t - T')) - \text{sen}(4\pi f_0 t)}{8\pi f_0 T'}} \quad (\text{A-II-4})$$

Usando a identidade trigonométrica $\text{sen}(\theta - \varphi) = \text{sen} \theta \cos \varphi - \cos \theta \text{sen} \varphi$,

$$\begin{aligned} \text{sen}(4\pi f_0 (t - T')) - \text{sen}(4\pi f_0 t) &= (\cos(4\pi f_0 T') - 1) \text{sen}(4\pi f_0 t) - \text{sen}(4\pi f_0 T') \cos(4\pi f_0 t) \\ &= M \cdot \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi) \end{aligned} \quad (\text{A-II-5})$$

onde,

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{(\cos(4\pi f_0 T') - 1)^2 + \text{sen}^2(4\pi f_0 T')} \\ &= 2 \cdot \text{sen}(2\pi f_0 T') \end{aligned} \quad (\text{A-II-6})$$

Substituindo-se as equações acima em (4):

$$V_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\text{sen}(2\pi f_0 T')}{2\pi f_0 T'} \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi)} \quad (\text{A-II-7})$$

Como T' é grande, aproximando-se por série de Taylor a equação acima,

$$V_{ef} = \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \left(1 + \frac{\text{sen}(2\pi f_0 T')}{4\pi f_0 T'} \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi) \right) \quad (\text{A-II-8})$$

A diferença relativa entre o valor obtido por esta equação e a indicação ($A/\sqrt{2}$) de um algoritmo ideal não limitado por resolução é então

$$\Delta = \frac{\text{sen}(2\pi f_0 T')}{4\pi f_0 T'} \cdot \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi) \quad (\text{A-II-9})$$

ou, como o algoritmo tenta tomar um trem de N amostras espaçadas de t_{samp} ,

$$\Delta = \frac{\text{sen}(2\pi f_0 N t_{\text{samp}})}{4\pi f_0 N t_{\text{samp}}} \cdot \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi) \quad (\text{Q.E.D.})$$

Se $T' = N \cdot t_{\text{samp}}$ fosse igual a um número inteiro de períodos do sinal de entrada nT , a diferença acima seria nula. Na prática, entretanto,

$$\Delta = \frac{\text{sen} 2\pi f (nT + \delta T')}{4\pi f T'} \cdot \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi) \quad (\text{A-II-10})$$

onde, devido à quantização de 100 ns da base de tempo do multímetro, para um dado número de amostras, $\delta T' \leq N \cdot 100$ ns. Como $\delta T'$ é pequeno,

$$\Delta \approx \frac{\delta T'}{2T'} \cdot \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi) \quad (\text{A-II-11})$$

Como $T' = N \cdot t_{\text{samp}}$ e $0 \leq \delta T' \leq N \cdot 100$ ns,

$$\Delta \leq \frac{10^{-7}}{2t_{\text{samp}}} \cdot \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi) \quad (N \cdot 100 \text{ ns} < t_{\text{samp}}) \quad (\text{A-II-12})$$

Esta diferença atinge um máximo quando $N \cdot 100 \text{ ns} = t_{\text{samp}}$, pois sempre é possível escolher N de modo que a diferença entre o tempo total de amostragem e um número inteiro de períodos seja menor do que t_{samp} .

Portanto,

$$\Delta \leq \frac{1}{2N} \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi) \quad (N \cdot 100 \text{ ns} \geq t_{\text{samp}}) \quad (\text{A-II-13})$$

Se o sinal de entrada é uma forma de onda senoidal com distorção harmônica total de 1% concentrada no terceiro harmônico ($THD = 0,01$), (3) se torna

$$\begin{aligned} V_{ef} &= \sqrt{\frac{1}{T'} \int_{t-T'}^t A^2 (\text{sen}(2\pi f_0 t) + THD \cdot \text{sen}(6\pi f_0 t))^2 dt} \\ &\approx \sqrt{\frac{A^2}{T'} \int_{t-T'}^t \text{sen}^2(2\pi f_0 t) + 2 \cdot THD \cdot \text{sen}(2\pi f_0 t) \text{sen}(6\pi f_0 t) dt} \end{aligned} \quad (\text{A-II-14})$$

Usando a identidade trigonométrica,

$$\text{sen } \omega_1 t \text{ sen } \omega_2 t = (1/2) \cos(\omega_1 - \omega_2) t - (1/2) \cos(\omega_1 + \omega_2) t$$

(14) se torna,

$$V_{ef} = \sqrt{\frac{A^2}{T'} \int_{t-T'}^t \left(\frac{1 - \cos(4\pi f_0 t)}{2} + THD \cdot \cos(4\pi f_0 t) - THD \cdot \cos(8\pi f_0 t) \right) dt} \quad (\text{A-II-15})$$

Usando o mesmo raciocínio que conduziu a (8),

$$\begin{aligned} V_{ef} &= \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \left(1 + \frac{\text{sen}(2\pi f_0 T')}{4\pi f_0 T'} \text{sen}(4\pi f_0 t + \Phi) - THD \cdot \frac{\text{sen}(2\pi f_0 T')}{2\pi f_0 T'} \text{sen}(4\pi f_0 t + \Theta) \right) + \\ &\quad + \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot \left(THD \cdot \frac{\text{sen}(4\pi f_0 T')}{4\pi f_0 T'} \text{sen}(8\pi f_0 t + \Psi) \right) \end{aligned} \quad (\text{A-II-16})$$

Portanto, a diferença relativa entre (14) e (8) é

$$\Delta = THD \cdot \frac{\text{sen}(2\pi f_0 T')}{2\pi f_0 T'} \text{sen}(4\pi f_0 t + \Theta) - THD \cdot \frac{\text{sen}(4\pi f_0 T')}{4\pi f_0 T'} \text{sen}(8\pi f_0 t + \Psi) \quad (\text{A-II-17})$$

Expressões similares a (12) e (13) podem ser obtidas para a ondulação de frequência $2/T$ em (17):

$$\Delta \leq THD \cdot \frac{10^{-7}}{t_{\text{samp}}} \cdot \text{sen}(4\pi f_0 t + \Theta) \quad (N \cdot 100 \text{ ns} < t_{\text{samp}}) \quad (\text{A-II-18})$$

$$\Delta \leq \frac{THD}{N} \cdot \text{sen}(4\pi f_0 t + \Theta) \quad (N \cdot 100 \text{ ns} \geq t_{\text{samp}}) \quad (\text{A-II-19})$$

A equação (17) mostra que a distorção introduzida por um terceiro harmônico gera componentes de ondulação adicionais de frequência $2/T$ e $4/T$ de amplitude muito menor do que a ondulação principal. De (18), com $THD = 0,01$ e $t_{\text{samp}} = 0,001$ s, a amplitude da ondulação é de 1×10^{-6} . A amplitude da ondulação principal é 50 vezes maior.

APÊNDICE III

APLICAÇÃO DO PRINCÍPIO DE ENTROPIA MÁXIMA

Desde o tempo de LAPLACE (1812, 1814), as aplicações da teoria da probabilidade tem sido impedidas por dificuldades no tratamento da informação anterior. O problema da especificação das probabilidades nos casos onde pouca ou nenhuma informação está disponível é tão antigo quanto a teoria da probabilidade. O “Princípio da Razão Insuficiente” de Laplace foi uma tentativa de fornecer um critério de escolha. Entretanto, exceto nos casos em que há um evidente grau de simetria que claramente conduz à idéia de eventos equiprováveis, esta suposição pode parecer tão arbitrária quanto qualquer outra que possa ser feita. O grande avanço fornecido pela teoria da informação reside na descoberta de que há um critério unívoco e não ambíguo para a “quantidade de incerteza” representada por uma distribuição de probabilidade, que concorda com nossas noções intuitivas de que uma distribuição larga representa mais incerteza do que uma mais estreita, e satisfaz todas as outras condições que a tornam razoável.

O Princípio de Entropia Máxima (PME) afirma que a distribuição de probabilidade a ser atribuída deve ser aquela com entropia máxima consistente com a informação anterior (WÖGER, 1987). Este princípio foi formulado por SHANNON (1948) na teoria da comunicação (SHANNON, WEAVER, 1949) e por JAYNES (1957) na mecânica estatística, mas já tinha sido aplicado por Gibbs.

Encontrar a função de densidade de probabilidade $p(x)$, tal que a entropia de informação seja maximizada e as restrições sejam satisfeitas, é um exercício de cálculo das variações. Vejamos alguns exemplos.

A-III-1 Mensurando em um intervalo

Suponha que se tem a informação de que um mensurando X está contido entre os limites a e b ($a < b$) e que esta seja a única informação disponível.

A função $p(x)$ deve satisfazer as seguintes restrições:

1. É uma função de densidade de probabilidade, isto é, $p(x) \geq 0$, e

$$\int_a^b p(x) dx = 1 \quad (\text{A-III-1-1})$$

2. X está contido entre os limites a e b ($a < b$)

Seguindo procedimentos padrão, forma-se o funcional Lagrangiano

$$\Lambda(p) = -\int_a^b (p \log p + \lambda_1 p) dx \quad (\text{A-III-1-2})$$

onde λ_1 é um multiplicador de Lagrange. A equação de Euler que p deve satisfazer para tornar $\Lambda(p)$ estacionária é obtida derivando em relação a p a expressão sob a integral

$$\log p + 1 + \lambda_1 = 0 \quad (\text{A-III-1-3})$$

Portanto,

$$p(x) = \exp(-1 - \lambda_1) \quad (\text{A-III-1-4})$$

e conseqüentemente, ajustando a constante para satisfazer as restrições, a $p(x)$, que dá uma entropia máxima quando submetida à condição de que $a \leq X \leq b$, é uniforme no intervalo (retangular).

A-III-2 Mensurando positivo e valor esperado dado

Suponha que se tem a informação de que um mensurando X é positivo ($X > 0$) e que o valor esperado da fdp que descreve nossa ignorância sobre o mensurando é μ e que estas sejam as únicas informações disponíveis.

A função $p(x)$ deve satisfazer as seguintes restrições:

1. É uma função de densidade de probabilidade, isto é, $p(x) \geq 0$, e

$$\int_0^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (\text{A-III-2-1})$$

2. Seu valor esperado é especificado, isto é,

$$\int_0^{\infty} x p(x) dx = \mu \quad (\text{A-III-2-2})$$

Seguindo procedimentos padrão, forma-se o funcional Lagrangiano

$$\Lambda(p) = -\int_0^{\infty} (p \log p + \lambda_1 p + \lambda x p) dx \quad (\text{A-III-2-3})$$

onde λ e λ_1 são multiplicadores de Lagrange. A equação de Euler que p deve satisfazer para tornar $\Lambda(p)$ estacionária é obtida derivando em relação a p a expressão sob a integral

$$\log p + 1 + \lambda_1 + \lambda x = 0 \quad (\text{A-III-2-4})$$

Portanto,

$$p(x) = \exp(-1 - \lambda_1 - \lambda x), \quad x > 0 \quad (\text{A-III-2-5})$$

Os valores de λ e λ_1 podem ser determinados substituindo (5) em (1) e (2).

Usando a relação

$$\int_0^{\infty} x \exp(-\lambda u) du = x/\lambda^2 \quad (\text{A-III-2-6})$$

encontramos finalmente que

$$\lambda = \mu, \quad \lambda_1 = \log \mu - 1 \quad (\text{A-III-2-7})$$

Portanto,

$$p(x) = \frac{1}{\mu} \exp(-x/\mu), \quad x > 0 \quad (\text{A-III-2-8})$$

A-III-3 Mensurando positivo e segundo momento dado

Suponha que se tem a informação de que um mensurando X é positivo ($X > 0$) e que o segundo momento da fdp que descreve nossa ignorância sobre o mensurando é $2\delta^2$ e que estas sejam as únicas informações disponíveis.

A função $p(x)$ deve satisfazer as seguintes restrições:

1. É uma função de densidade de probabilidade, isto é, $p(x) \geq 0$, e

$$\int_0^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (\text{A-III-3-1})$$

2. Seu segundo momento é especificado, isto é,

$$\int_0^{\infty} x^2 p(x) dx = 2\delta^2 \quad (\text{A-III-3-2})$$

Seguindo procedimentos padrão, forma-se o funcional Lagrangiano

$$\Lambda(p) = -\int_0^{\infty} (p \log p + \lambda_1 p + \lambda x^2 p) dx \quad (\text{A-III-3-3})$$

onde λ e λ_1 são multiplicadores de Lagrange. A equação de Euler que p deve satisfazer para tornar $\Lambda(p)$ estacionária é obtida derivando em relação a p a expressão sob a integral

$$\log p + 1 + \lambda_1 + \lambda x^2 = 0 \quad (\text{A-III-3-4})$$

Portanto,

$$p(x) = \exp(-1 - \lambda_1 - \lambda x^2), \quad x > 0 \quad (\text{A-III-3-5})$$

Os valores de λ e λ_1 podem ser determinados substituindo (5) em (1) e (2).

Usando as relações

$$\int_0^{\infty} x \exp(-\lambda u^2) du = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \quad (\text{A-III-3-6a})$$

$$\int_0^{\infty} x u^2 \exp(-\lambda u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{4\lambda^{3/2}} \quad (\text{A-III-3-6b})$$

encontramos finalmente que

$$\lambda = 1/4\delta^2, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \log \pi - \log 2 + \log 2\delta - 1 \quad (\text{A-III-3-7})$$

Portanto,

$$p(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} \exp(-x^2/4\delta^2), \quad x > 0 \quad (\text{A-III-3-8})$$

A-III-4 Valor esperado e variância dados

Suponha que se tem a informação do valor esperado μ e da variância σ^2 da fdp que descreve nossa ignorância sobre o mensurando, e que estas sejam as únicas informações disponíveis.

A função $p(x)$ deve satisfazer as seguintes restrições:

1. É uma função de densidade de probabilidade, isto é, $p(x) \geq 0$, e

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (\text{A-III-4-1})$$

2. Seu valor esperado é especificado, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \mu \quad (\text{A-III-4-2}).$$

3. Sua variância é especificada, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx = \sigma^2 \quad (\text{A-III-4-3})$$

Seguindo procedimentos padrão, forma-se o funcional Lagrangiano

$$\Lambda(p) = - \int_{-\infty}^{\infty} \left(p \log p + \lambda_1 p + \lambda_2 x p + \lambda (x - \mu)^2 p \right) dx \quad (\text{A-III-4-4})$$

onde λ , λ_1 e λ_2 são multiplicadores de Lagrange. A equação de Euler que p deve satisfazer para tornar $\Lambda(p)$ estacionária é obtida derivando em relação a p a expressão sob a integral

$$\log p + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda (x - \mu)^2 = 0 \quad (\text{A-III-4-5})$$

Portanto,

$$p(x) = \exp\left(-1 - \lambda_1 - \lambda_2 x - \lambda (x - \mu)^2\right) \quad (\text{A-III-4-6})$$

Os valores de λ , λ_1 e λ_2 podem ser determinados substituindo (6) em (1)-(3).

Usando a relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda u^2) du = (\pi/\lambda)^{1/2} \quad (\text{A-III-4-7})$$

encontramos finalmente que

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \log 2\pi + \log \sigma - 1, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda = 1/2\sigma^2 \quad (\text{A-III-4-8})$$

Portanto,

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (\text{A-III-4-9})$$

Portanto, de acordo com o PME, o estado de conhecimento é dado por uma fdp normal.

Generalizando para n dimensões, é possível provar que no caso em que somente conhecemos o vetor de valores esperados $\boldsymbol{\mu}$ e a matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Omega}$ da fdp conjunta que descreve a ignorância do vetor \mathbf{x} de n mensurandos, a $p(\mathbf{x})$, que dá uma entropia máxima quando submetida a estas condições, é uma normal generalizada de n dimensões, isto é,

$$p(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \boldsymbol{\Omega}}} \exp\left\{-(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\} \quad (\text{A-III-4-10})$$

A-III-5 Mensurando em um intervalo e valor esperado dado

Suponha que se tem a informação de que o valor esperado da fdp que descreve nossa ignorância sobre o mensurando é μ e que o mensurando está entre os limites de $a_- = \mu - b_-$ e $a_+ = \mu + b_+$, e que estas sejam as únicas informações disponíveis.

A função $p(x)$ deve satisfazer as seguintes restrições:

1. É uma função de densidade de probabilidade, isto é, $p(x) \geq 0$, e

$$\int_{a_-}^{a_+} p(x) dx = 1 \quad (\text{A-III-5-1})$$

2. Seu valor esperado é especificado, isto é,

$$\int_{a_-}^{a_+} x p(x) dx = \mu \quad (\text{A-III-5-2})$$

Seguindo procedimentos padrão, forma-se o funcional Lagrangiano

$$\Lambda(p) = - \int_{a_-}^{a_+} (p \log p + \lambda_1 p + \lambda x p) dx \quad (\text{A-III-5-3})$$

onde λ e λ_1 são multiplicadores de Lagrange. A equação de Euler que p deve satisfazer para tornar $\Lambda(p)$ estacionária é obtida derivando em relação a p a expressão sob a integral

$$\log p + 1 + \lambda_1 + \lambda x = 0 \quad (\text{A-III-5-4})$$

Portanto,

$$p(x) = \exp(-1 - \lambda_1 - \lambda x) \quad (\text{A-III-5-5})$$

Os valores de λ e λ_1 podem ser determinados substituindo-se a Eq. (5) nas Eqs. (1) e (2). Substituindo-se na Eq. (1), obtém-se

$$- \exp(-\lambda a_+) + \exp(-\lambda a_-) = \lambda \exp(1 + \lambda_1) \quad (\text{A-III-5-6})$$

Substituindo-se na Eq. (2), obtém-se

$$- \exp(-\lambda a_+) \cdot \left(a_+ + \frac{1}{\lambda} \right) + \exp(-\lambda a_-) \cdot \left(a_- + \frac{1}{\lambda} \right) = \mu \lambda \exp(1 + \lambda_1) \quad (\text{A-III-5-7})$$

Substituindo $a_+ = \mu + b_+$ e $a_- = \mu - b_-$ nas Eqs. (6) e (7),

$$- \exp(-\lambda b_+) + \exp(+\lambda b_-) = \lambda \exp(1 + \lambda_1 + \lambda \mu) \quad (\text{A-III-5-8})$$

$$- \exp(-\lambda b_+) \cdot \left(\mu + b_+ + \frac{1}{\lambda} \right) + \exp(+\lambda b_-) \cdot \left(\mu - b_- + \frac{1}{\lambda} \right) = \mu \lambda \exp(1 + \lambda_1 + \lambda \mu) \quad (\text{A-III-5-9})$$

Substituindo a Eq. (8) na Eq. (9),

$$\exp(-1 - \lambda_1) = A \exp(\lambda \mu) \quad (\text{A-III-5-10a})$$

onde,

$$A = [b_- \exp(\lambda b_-) + b_+ \exp(-\lambda b_+)]^{-1} \quad (\text{A-III-5-10b})$$

Substituindo-se (10) em (5), obtém-se a função de densidade de probabilidade que representa o estado de conhecimento com base na informação disponível, e somente com base nesta informação,

$$p(x) = A \exp[-\lambda(x - \mu)] \quad (\text{A-III-5-11})$$

Selecionando-se esta função, adiciona-se a menor informação possível além do que é legitimamente conhecido (isto é, o valor esperado e os limites do intervalo).

Substituindo-se (10) em (8),

$$\begin{aligned} -\exp(-\lambda b_+) + \exp(\lambda b_-) &= \lambda A^{-1} \\ &= \lambda [b_- \exp(\lambda b_-) + b_+ \exp(-\lambda b_+)] \end{aligned} \quad (\text{A-III-5-12})$$

$$\lambda = \{\exp[\lambda(b_- + b_+)] - 1\} / \{b_- \exp[\lambda(b_- + b_+)] + b_+\} \quad (\text{A-III-5-13})$$

A variância é obtida de

$$u_q^2 = \int_{a_-}^{a_+} (x - \mu)^2 p(x) dx \quad (\text{A-III-5-14})$$

Usando $a_+ = \mu + b_+$, $a_- = \mu - b_-$,

$$u_q^2 = -\frac{A}{\lambda} \left[\exp(-\lambda b_+) \cdot \left(b_+^2 + \frac{2b_+}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} \right) - \exp(\lambda b_-) \cdot \left(b_-^2 - \frac{2b_-}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} \right) \right] \quad (\text{A-III-5-15})$$

Substituindo-se (13),

$$\begin{aligned} u_q^2 &= -\frac{A}{\lambda} b_+ [b_+ \exp(-\lambda b_+) + b_- \exp(\lambda b_-)] + \\ &+ \frac{A}{\lambda} b_- [b_+ \exp(-\lambda b_+) + b_- \exp(\lambda b_-)] - \\ &- \frac{A}{\lambda} b_+ b_- [\exp(-\lambda b_+) - \exp(\lambda b_-)] \end{aligned} \quad (\text{A-III-5-16})$$

De (10b) e (13), a variância é então (ISO, 1995)

$$u_q^2 = b_+ b_- - (b_+ - b_-) / \lambda \quad (\text{A-III-5-17})$$

A probabilidade de que o mensurando esteja entre os limites c_- e c_+ é, usando (11),

$$\begin{aligned} p &= \int_{c_-}^{c_+} p(x) dx \\ &= -\frac{A}{\lambda} \{ \exp[-\lambda(c_+ - \mu)] - \exp[-\lambda(c_- - \mu)] \} \end{aligned} \quad (\text{A-III-5-18})$$

ou, de (10b),

$$p = \frac{\exp[-\lambda(c_+ - \mu)] - \exp[-\lambda(c_- - \mu)]}{-\lambda[b_- \exp(\lambda b_-) + b_+ \exp(-\lambda b_+)]} \quad (\text{A-III-5-19})$$

Como exemplo, considere-se o caso em que se sabe que o fator de dissipação D de uma capacitância de 50 pF está entre os limites de $a_- = \mu - b_- = 0,06\%$ e $a_+ = \mu + b_+ = 3\%$, e que a melhor estimativa do fator de dissipação seja de $0,12\%$. Como neste caso a melhor estimativa não está no centro do intervalo, a densidade de probabilidade não pode ser uniforme no intervalo. De. (11), a função densidade de probabilidade é

$$p(D) = A \exp[-\lambda(D - 0,12)]$$

onde, de (10b),

$$A = [0,06 \cdot \exp(0,06 \cdot \lambda) + 2,88 \cdot \exp(-2,88 \cdot \lambda)]^{-1}$$

Resolvendo-se numericamente (13), obtém-se, $\lambda = 16,6667$. De. (17), portanto, $u_D = 0,06\%$. De (19), a probabilidade de que o valor do mensurando esteja entre os limites $0,06\%$ e $0,3\%$ é de $98,17\%$.

APÊNDICE IV

EXTENSÃO DO ALGORITMO DE SWERLEIN PARA A MEDIÇÃO DE PARÂMETROS DE HARMÔNICOS DE SINAIS ARBITRÁRIOS

A-IV-1 Especificações do programa

O programa foi elaborado em *LabWindows CVI* pelo autor desta tese para rodar em qualquer plataforma com sistema operacional *Windows* que contenha interface IEEE 488.2 da National Instruments.

A versão apresentada aqui pode ser usada na medição das amplitudes e dos ângulos de fase dos harmônicos de formas de onda arbitrárias com frequência fundamental de 2 Hz até 1 kHz e com tensões de 1 mV até 700 V. O algoritmo tem exatidão elevada com frequências fundamentais entre 10 Hz e 100 Hz e na faixa de tensão de 10 V. O algoritmo tem tempo de medição otimizado se o número de harmônicos especificado pelo usuário não excede 64. O ruído e a distorção harmônica do sinal devem ser tais que a frequência fundamental possa ser determinada pelo cruzamento pelo nulo do sinal.

Um computador Pentium 75 MHz (mais tarde um Pentium 166 MHz) contendo uma placa GPIB da National Instruments (AT-GPIB/TNT e software NI777154-01) foi usado. Um gerador de sinais de dois canais HP 3245A e um DVM digital HP3458A com certificado de calibração recente no modo DCV foram usados.

A-IV-2 Descrição do Programa

Quando rodamos o programa, aparece um painel inicial (Fig. A-IV-1) contendo o menu principal: *Configuração*, *Medição*, *Gráficos*, *Incerteza* e *Sair*. Pode-se selecionar indistintamente qualquer um destes campos para ver o que acontece. Cada um dos campos apresentará um novo painel. Com exceção do campo *Sair* que abortará o painel inicial. O usuário pode verificar os painéis de *Configuração*, *Medição*, *Gráficos* ou *Incerteza* pressionando os campos correspondentes no topo do painel. O programa é iniciado pressionando-se o campo *Configuração*. O painel de *Configuração* então se abre (Fig. A-IV-2). Há dois conjuntos de campos: (a) *Parâmetros de entrada* e (b)

Parâmetros de saída. Selecionando-se o endereço do DVM no campo homônimo e ajustando-se a chave na posição *ON*, o DVM é configurado para receber comandos pela interface IEEE 488.2. Estando tudo bem, o LED ficará vermelho e um aviso será emitido alertando o usuário de que este deverá fazer uma autocalibração do DVM (função ACAL DCV). Pressionando-se OK na tela de aviso, retornamos ao painel de *Configuração*. O usuário deve então inserir o número de harmônicos do sinal que serão amostrados sem *aliasing* no campo *Número de harmônicos*.

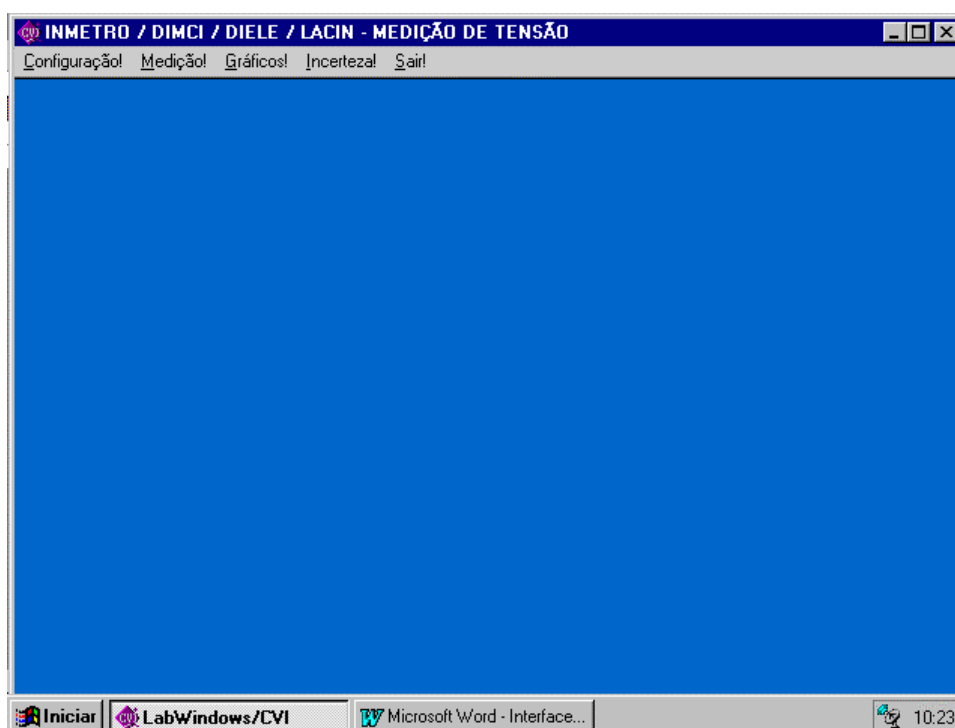


Fig. A-IV-1. Painel inicial

O algoritmo pressupõe uma calibração trimestral da função de tensão contínua do DVM com relação a um padrão de tensão contínua externo. O campo *Correção DCV (ppm)* é reservado para a introdução de uma constante de correção (em partes em 10^6) obtida do certificado de calibração da função de tensão contínua do DVM. O algoritmo também mede a frequência fundamental usando a base de tempo calibrada do DVM. A calibração desta base de tempo não é necessária para a operação do algoritmo. Mas, é necessária se o usuário deseja ter informações sobre o valor da frequência fundamental. Uma calibração semestral da base de tempo pode ser feita com relação a um padrão de frequência externo. O campo *Correção Frequência (ppm)* é reservado para a introdução de uma constante de correção (em partes em 10^6) obtida do certificado de calibração da

base de tempo do DVM. O parâmetro de entrada *Tempo de Medição (s)* é tipicamente fixado em 35 s. O parâmetro *Meta de Abertura (s)* é fixado em 0,001 s.

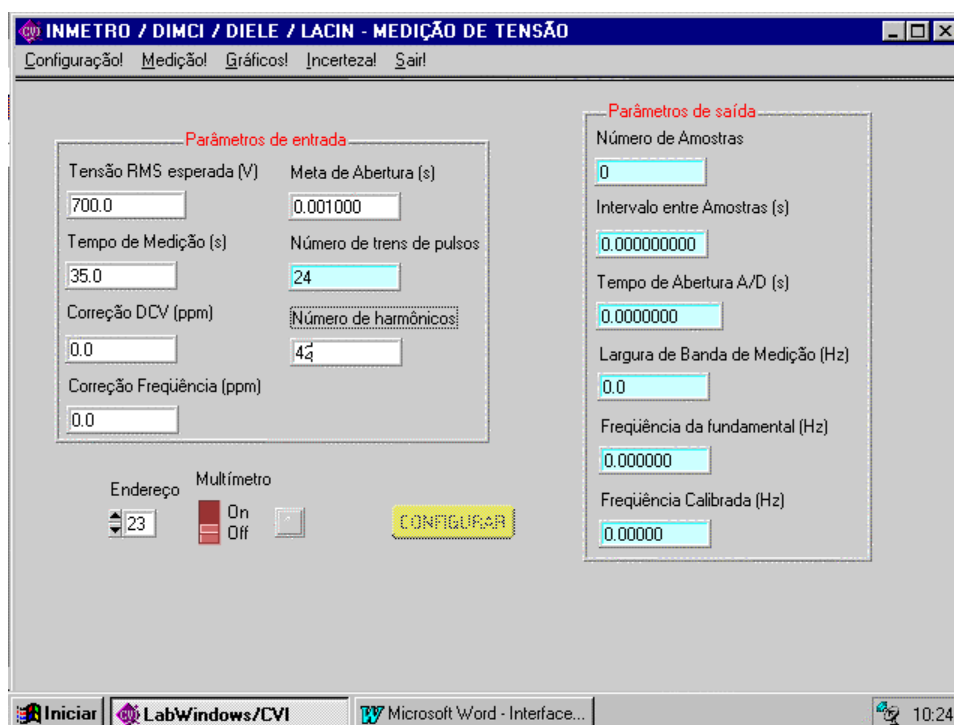


Fig. A-IV-2. Painel de *Configuração* (antes de pressionar o botão *CONFIGURAR*)

O botão *CONFIGURAR* desta vez estará iluminado e o usuário poderá pressioná-lo. Uma vez tendo-o pressionado, uma tela de aviso informará o usuário do momento de aplicar o sinal de entrada ao DVM. Pressionando OK na tela de aviso, a configuração do DVM terá início. Inicialmente, o DVM é configurado no modo ACV e o valor eficaz esperado da tensão é medido e reportado no campo *Tensão RMS esperada (V)*. A faixa de tensão do DVM é selecionada automaticamente de modo que o valor de pico da forma de onda de entrada não sobrecarregue o DVM.

Quando o botão *CONFIGURAR* é pressionado, o usuário é solicitado a aplicar o sinal de entrada e aguardar até que o mesmo se estabilize. O painel informa ao usuário de que a configuração foi bem sucedida e instrui o usuário a iniciar a medição. A seguir, o programa reporta a freqüência fundamental medida e um conjunto de parâmetros de amostragem. A Fig. A-IV-3 mostra um exemplo para uma seleção de 42 harmônicos.

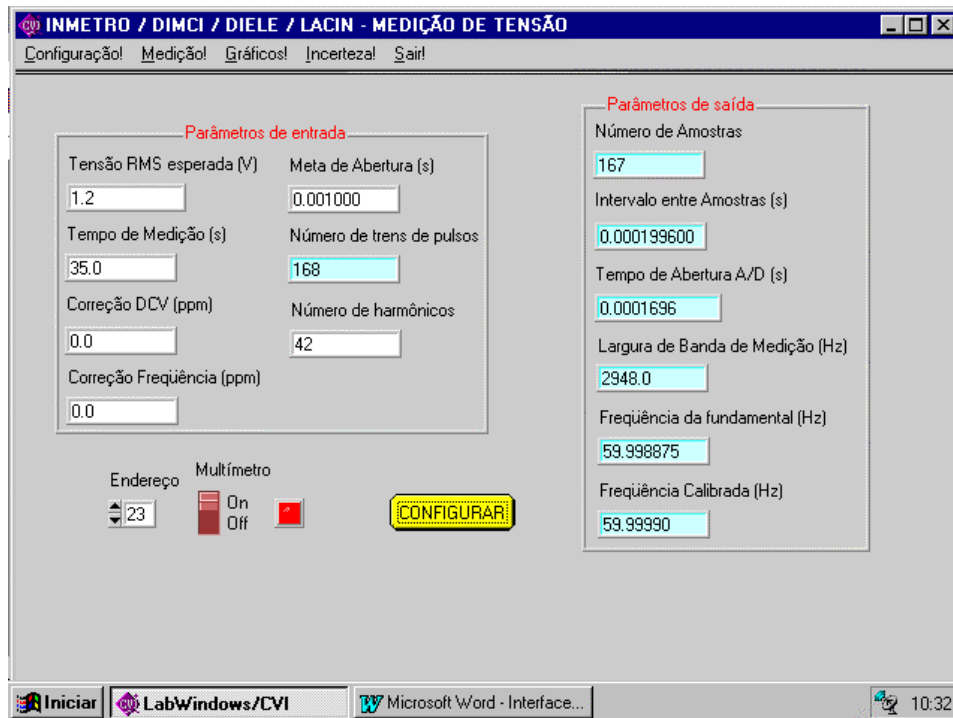


Fig. A-IV-3. Painel de *Configuração* (após pressionar o botão *CONFIGURAR*)

O algoritmo para o cálculo dos parâmetros de amostragem está estruturado para garantir imunidade contra *aliasing* somente para o número mínimo m de harmônicos especificado pelo usuário (SWERLEIN, 1991). O período de amostragem máximo não deve violar o teorema de amostragem, i.e., $t_{\text{samp}} < 1/2mf_0$. Se isso ocorre, o algoritmo aumenta a freqüência de amostragem a fim de assegurar a ocorrência do *alias* exatamente em mf_0 . O algoritmo leva isto em conta e estima o tempo de abertura como $t_{\text{aper}} = t_{\text{samp}} - \tau$, onde τ ($= 30 \mu\text{s}$) é um pequeno retardo especificado pelo fabricante (SWERLEIN, 1991) para impedir erros devido a um disparo muito rápido. Devido aos requisitos de largura de banda expostos acima, o tempo de abertura real é mantido quase constante em torno de 0,001 s até $m = 1/2f_0t_{\text{samp}}$ onde ele começa a decrescer com o aumento da freqüência do sinal de acordo com $t_{\text{aper}} = 1/2mf_0 - \tau$. Se m é muito elevado, o tempo de abertura será muito pequeno, e isso causará uma degradação da exatidão do DVM (a incerteza associada com a correção do erro de ganho do IADC aumenta de forma considerável).

O IADC tem duas entradas: uma entrada de baixa velocidade e uma de alta velocidade. O tempo de abertura é usado para selecionar uma delas. O limiar é $100 \mu\text{s}$ e é alcançado em $mf_0 = 1/0,00026 \text{ Hz}$. A entrada de baixa velocidade tem maior exatidão. Para um sinal de 60 Hz, isto significa escolher $m \leq 64$. Esta escolha é razoável quando o

sinal não apresenta amplitudes significativas de harmônicos para $m > 64$. O algoritmo pode operar com frequências fundamentais de 2 Hz a 1 kHz. A incerteza associada com a correção da resposta de frequência (II-1-6) é a contribuição dominante nas frequências elevadas. Para um sinal de 1 kHz, o limiar de 100 μ s é alcançado em $m = 3$. Quanto maior a frequência fundamental, menos distorcido deve ser o sinal, a fim de que este seja medido com exatidão.

Quando estamos interessados na estimação destas amplitudes em percentuais da fundamental, quaisquer das duas entradas do IADC poderá ser usada. A incerteza de medição neste caso será menor à medida em que aumentamos o número de harmônicos. Deve-se, entretanto, notar que o tempo de medição aumenta aproximadamente proporcional a m para tempos de abertura maiores do que 100 μ s é aproximadamente proporcional a m^2 para tempos de abertura abaixo deste limiar.

Os valores calculados do número de amostras em cada trem, do intervalo de amostragem e do tempo de abertura são registrados, respectivamente, nos campos *Número de amostras*, *Intervalo entre amostras (s)* e *Tempo de Abertura A/D (s)*. O número de trens de amostras usado é reportado no campo homônimo. Como visto na seção II-6, o número de trens de amostras deve ser de no mínimo 4 (quatro) vezes o número de harmônicos escolhidos. O valor da frequência fundamental medido na base de tempo “descalibrada” do DVM é reportado no campo *Frequência da fundamental (Hz)*. O valor de frequência fundamental usando a base de tempo calibrada com relação a um padrão externo é relatada no campo *Frequência Calibrada (Hz)*.

O usuário acessa o painel de *Medição* pressionando o campo homônimo no topo do painel. O painel de *Medição* então se abre (Fig. A-IV-4). O botão *MEDIR* estará iluminado. A medição se inicia ao se pressionar este botão. O campo *Iteração efetuada* será incrementado a cada trem de amostras (um total de $4m$, onde m é o número de harmônicos escolhidos pelo usuário). Para cada trem de amostras, os dados são transferidos para o computador através da interface IEEE 488.2. Todo o processamento é feito no computador. A cada iteração, valores temporários do valor eficaz da amplitude (relativo à fundamental) e do ângulo de fase (supondo um ângulo de referência da fundamental de -90 graus) de cada harmônico do sinal de entrada são apresentados no campo *Harmônicos*. As estimativas finais do valor eficaz da amplitude (relativo à fundamental) e do ângulo de fase de cada harmônico são então apresentados neste mesmo campo. O valor eficaz da fundamental, e o valor eficaz da tensão, sem e

com a componente C.C., são apresentadas nos campos *Fundamental (V)*, *Tensão C.A. eficaz (V)* e *Tensão C.A.C.C. RMS (V)*, respectivamente. A distorção harmônica total é reportada no campo *Dist. Harmônica (%)*. A Fig. A-IV-5(a) mostra como ficou o painel de *Medição* do exemplo após pressionar-se o botão *MEDIR*.

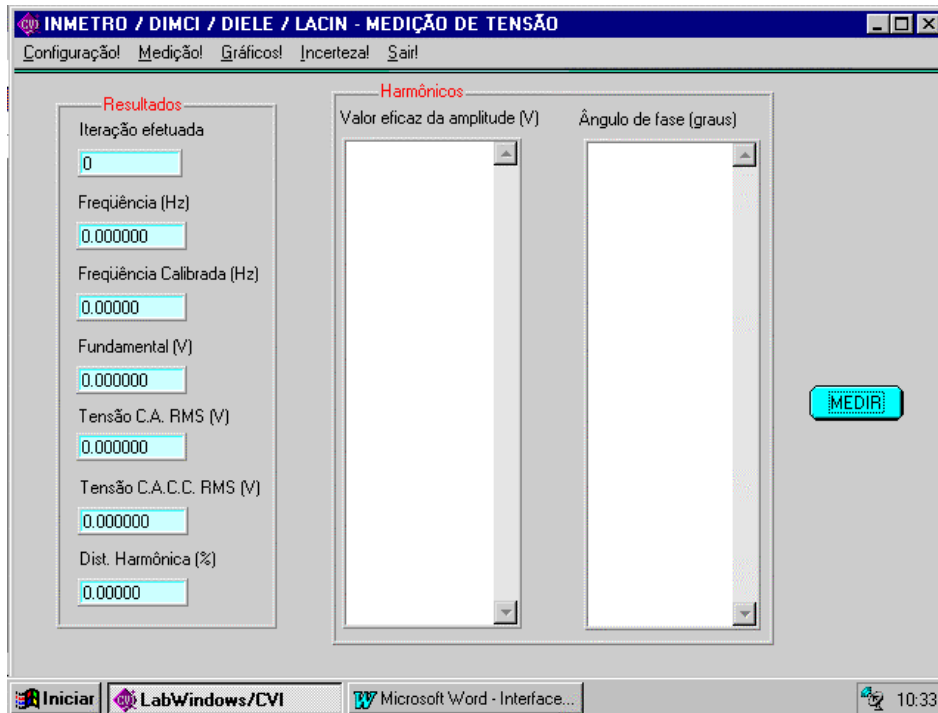


Fig. A-IV-4. Painel de *Medição* (antes de pressionar o botão *MEDIR*).

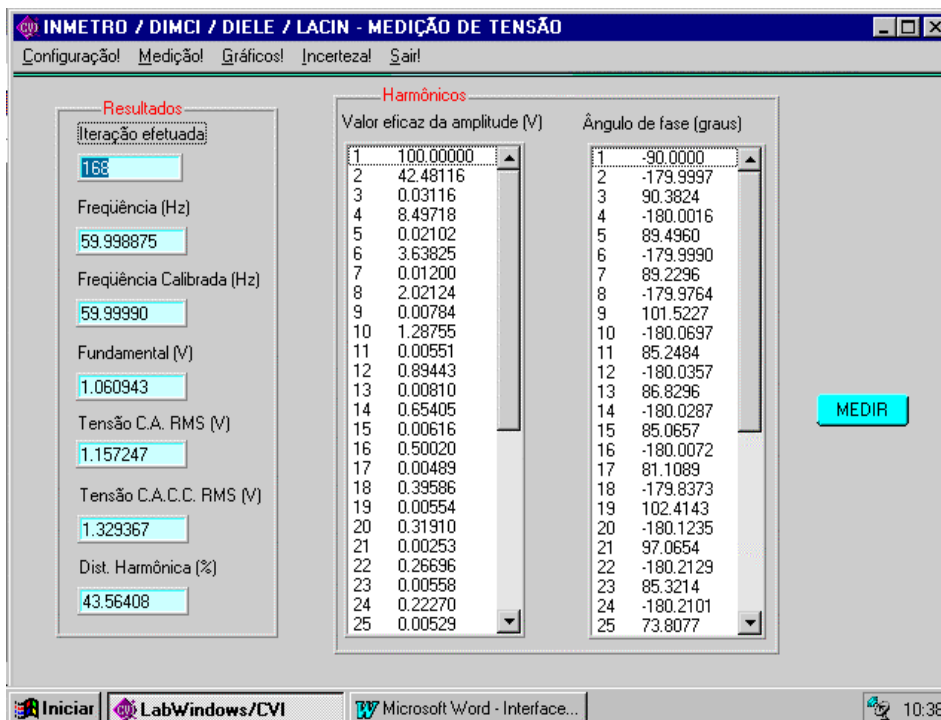


Fig. A-IV-5(a). Painel de *Medição* (após pressionar o botão *MEDIR*).

A Fig. A-IV-5(b) mostra o mesmo painel com os harmônicos superiores que se tornaram visíveis mediante a movimentação dos cursores no campo *Harmônicos*. O usuário, se assim o desejar poderá repetir a medição, bastando para isso pressionar novamente o botão *MEDIR*.

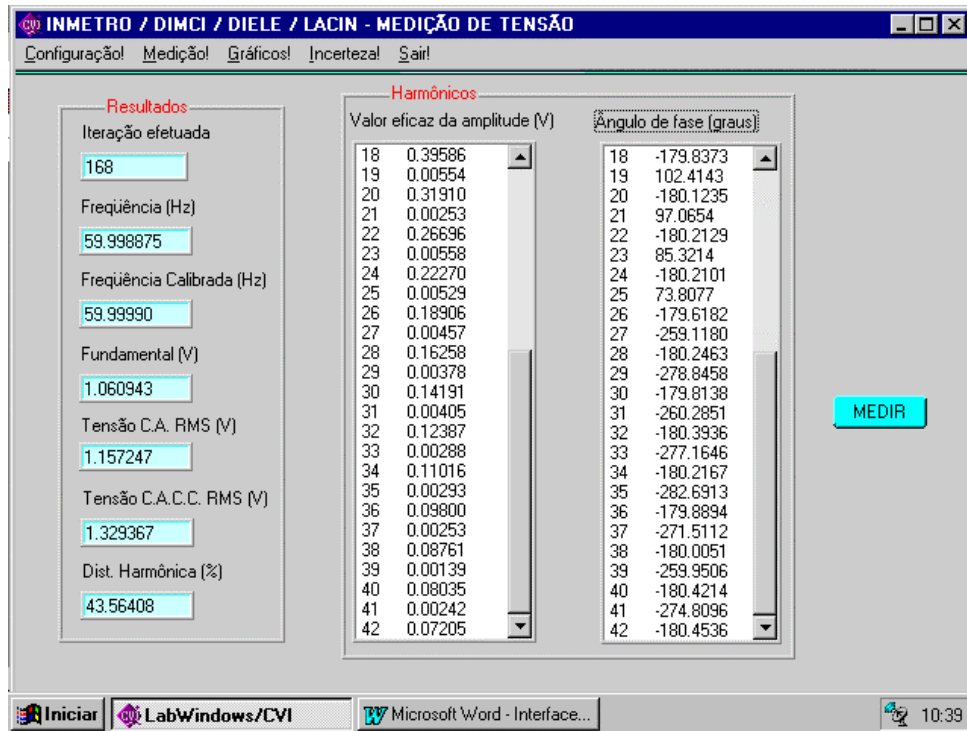
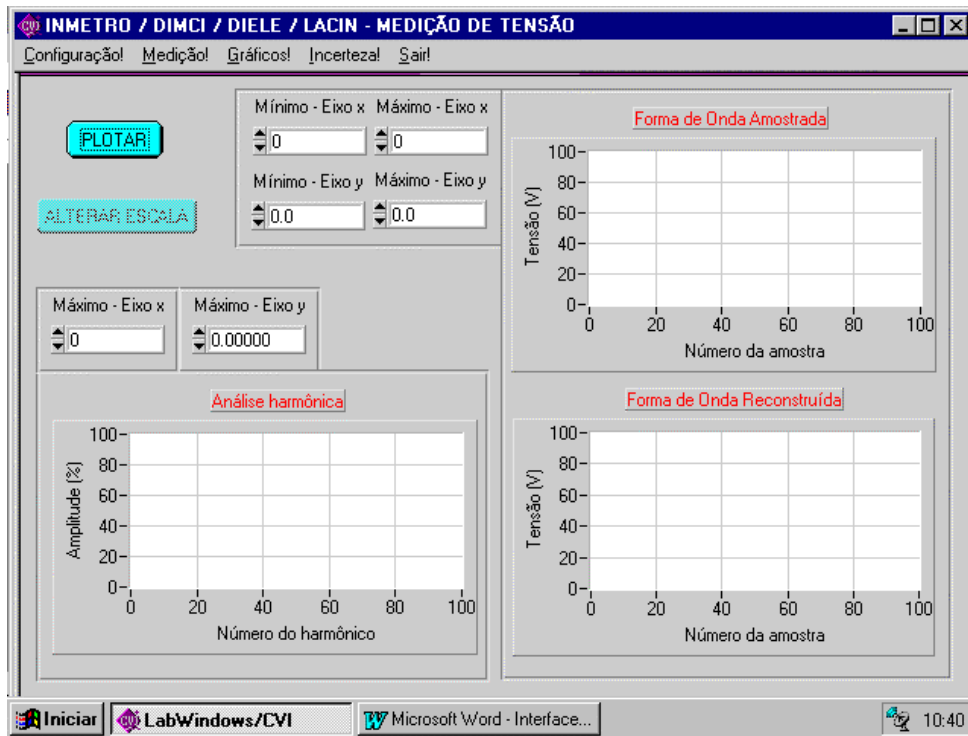


Fig. A-IV-5(b). Painel de *Medição* (após pressionar o botão *MEDIR*).

O usuário acessa o painel de *Gráficos* pressionando o campo homônimo no topo do painel. O painel de *Gráficos* então se abre (Fig. A-IV-6(a)). O botão *PLOTAR* estará iluminado. Os gráficos são plotados ao se pressionar este botão. A forma de onda amostrada (vetor de dados do primeiro trem de amostras não corrigido para os erros sistemáticos) e a forma de onda reconstruída (com base nos parâmetros de ajuste não corrigidos para os erros sistemáticos) são plotados. Os harmônicos são plotados no gráfico de análise harmônica. A seguir, o botão *ALTERAR ESCALA* fica então iluminado. Para alterar as escalas dos gráficos dos sinais amostrado e reconstruído, o usuário deve inserir os limites inferior e superior dos eixos x e y nos campos apropriados. Para alterar a escala do gráfico da análise harmônica, o usuário deve inserir o limite superior dos eixos x e y nos campos apropriados. O usuário deve pressionar o botão *ALTERAR ESCALA* para confirmar a alteração da escala dos gráficos. A Fig. A-IV-6(b) mostra o gráfico do exemplo para uma seleção de 42 harmônicos.



A-IV-6(a). Painel de Gráficos.

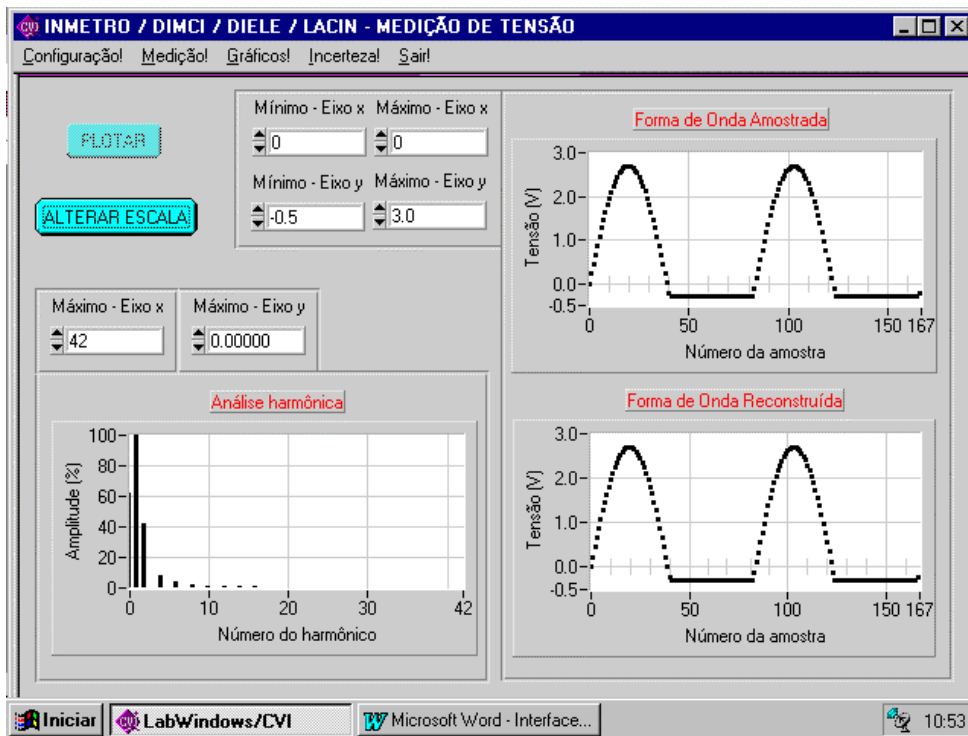


Fig. A-IV-6(b). Painel de Gráficos

Para dar continuidade ao programa, é necessário pressionar o campo *Incerteza* no menu principal. O painel de *Avaliação de incerteza de medição* então se abre. O

conjunto de campos à esquerda reporta as contribuições de incerteza associadas às correções dos erros sistemáticos do DVM e à variância do ruído. O campo $u(Kf)$ (ppm) reporta a incerteza da correção da resposta de frequência (na frequência fundamental) do condicionador passivo e do amplificador ativo de sinal de entrada. O campo $u(Ka)$ (ppm) reporta a incerteza da correção do erro introduzido pelo atenuador de entrada. O campo $u(Kj)$ (ppm) reporta a incerteza do conteúdo harmônico da forma de onda (neste campo somente a contribuição na frequência fundamental é apresentada). O campo $u(Vi')$ (ppm) reporta a incerteza da variância do ruído. O campo $u(Kdc)$ (ppm) reporta a incerteza da correção do erro da função DCV listado no certificado de calibração do DVM. O campo $u(Ra)$ (ppm) reporta a incerteza da resolução de amplitude do IADC. O campo $u(Kl)$ (ppm) reporta a incerteza da correção da linearidade do instrumento. O campo $u(Kg)$ (ppm) reporta a incerteza da correção do erro de ganho do IADC para tempos de integração menores do que 1 s. O campo $u(Delta)$ (ppm) reporta a incerteza associada ao limite de erro R_T devido à resolução da base de tempo do IADC.

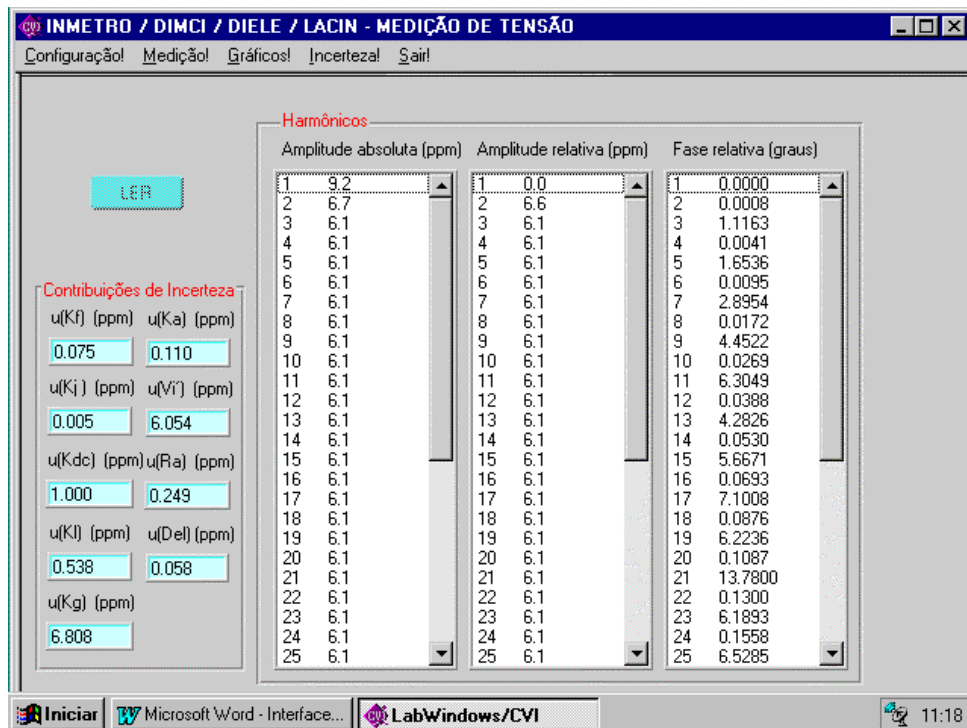


Fig. A-IV-7(a). Painel de *Incerteza*.

As três listas à direita reportam a incerteza absoluta de medição da amplitude de cada harmônico (obtida de II-7-2b) e dividida pelo valor da fundamental para obter o valor em partes em 10^6), a incerteza de medição da amplitude relativa à fundamental

(obtida de (II-7-3)) e a incerteza de medição do ângulo de fase de cada harmônico (obtida de (II-9-8b)). A tecla *LER* desta vez estará iluminada e o usuário poderá pressioná-la. Uma vez tendo-a pressionado, o processo de avaliação de incerteza de medição terá início e os valores calculados serão inseridos nos campos respectivos (Figs. A-IV-7(a) e (b)).

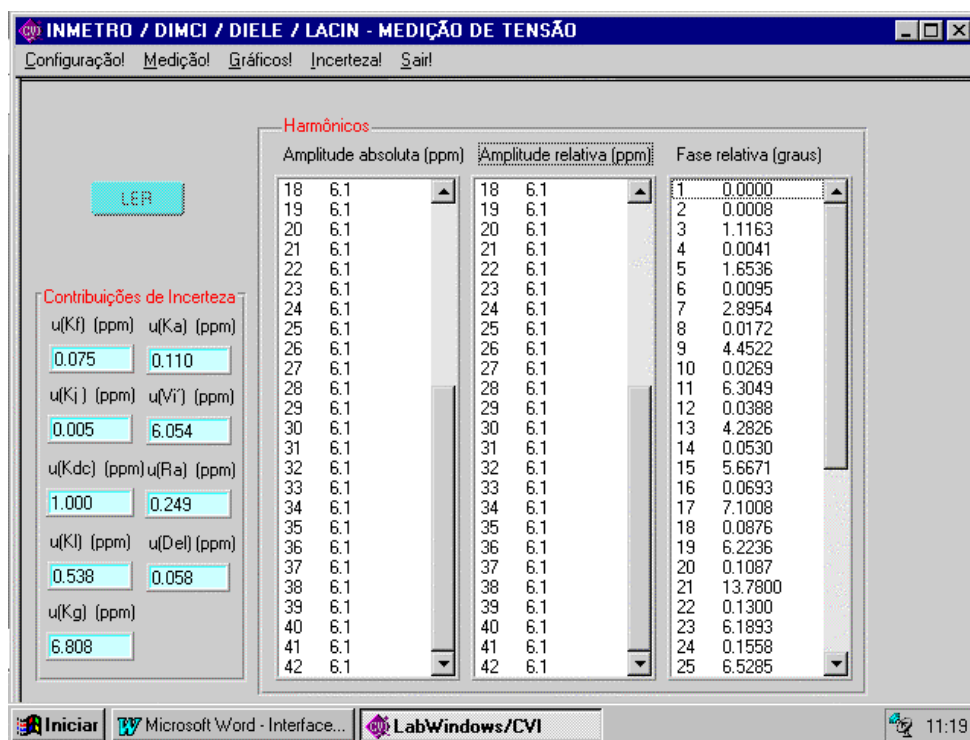


Fig. A-IV-7(b). Painel de *Incerteza*.

Para refazer qualquer parte do programa, basta pressionar o campo desejado no menu principal e repetir o procedimento descrito acima. Se a qualquer momento o usuário desejar sair do programa, basta pressionar o campo *Sair* no menu principal. A tela inicial reaparece (Fig. A-IV-1) e, caso realmente seja do desejo do usuário sair do programa, este deverá pressionar novamente o campo *Sair*.

Obs. O programa emite avisos quando não pode ser rodado. Isto ocorre quando a interface GPIB não está operando (possível ausência do DVM ou interface desconectada), quando a tensão é menor do que 0,00007 V (possível ausência do gerador, gerador desligado ou cabo desconectado), quando não há memória suficiente no DVM para as amostras necessárias, quando a tensão excede 700 V, quando a frequência é nula, e quando o tempo de integração é muito pequeno.

APÊNDICE V

MATRIZ DO PROJETO

Vimos na seção II-6 que a média dos \mathbf{F}_k sobre todos os trens de amostra se aproxima de $(N/2)\mathbf{I}_{2m}$ e portanto a estimativa (II-3-22) se aproxima de (II-5-3). Apresentamos neste apêndice resultados experimentais que ilustram isto. Tais resultados foram colhidos durante a medição de sinais senoidais quase puros (seção III-1) usando a estimativa de mínimos quadrados (II-6-6). Os elementos da matriz $\langle \mathbf{F}_k \rangle$ são mostrados nas Figs. A-V-1, A-V-2, A-V-3, A-V-4, A-V-5 e A-V-6. Por razões de espaço, não mostramos neste trabalho os elementos da matriz $\langle \mathbf{F}_k \rangle$ para um número de harmônicos maior do que 6 (seis). Entretanto, como comentamos na seção II-6 para um sinal de 60 Hz com $m = 42$, verificou-se que todos os elementos da matriz $\langle \mathbf{A}_k \rangle$ eram menores do que 4 (quatro) partes em 10^8 , com a maioria sendo uma ordem de grandeza menor do que isto.

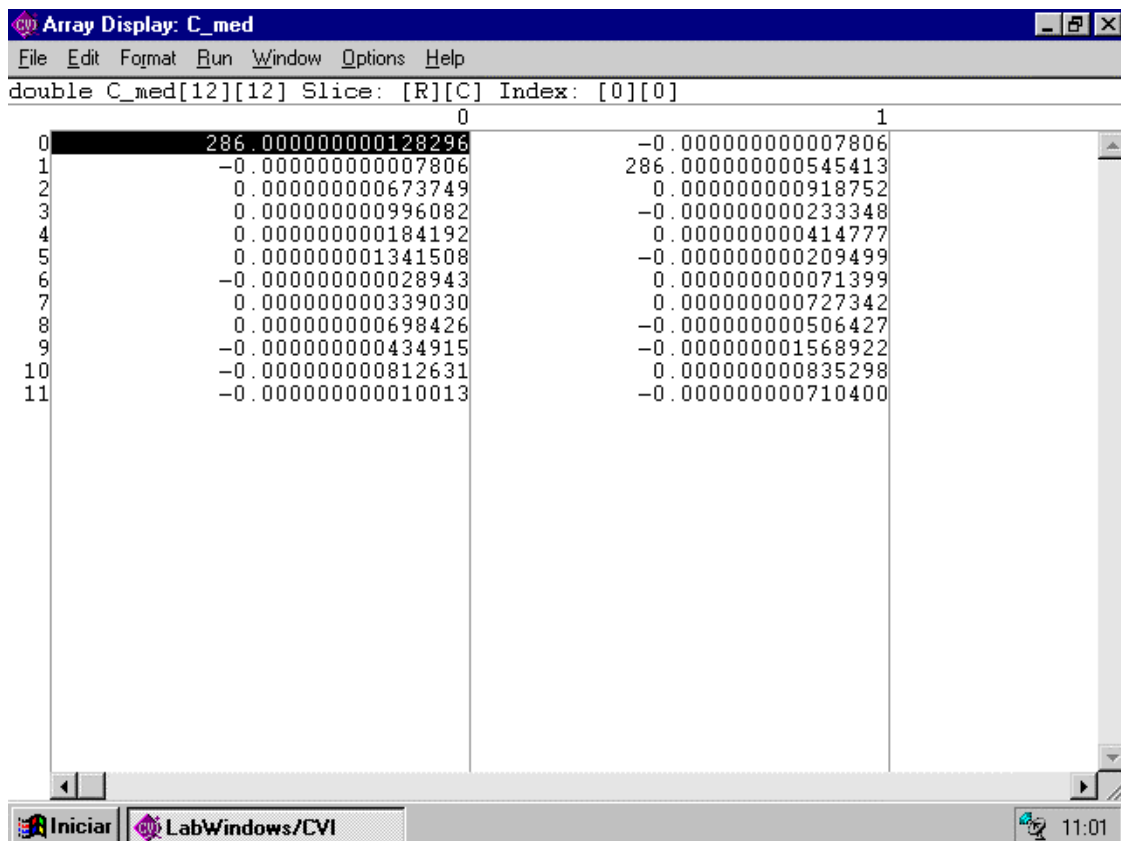


Fig. A-V-1. Primeira e segunda colunas da matriz $\langle \mathbf{F}_k \rangle$.

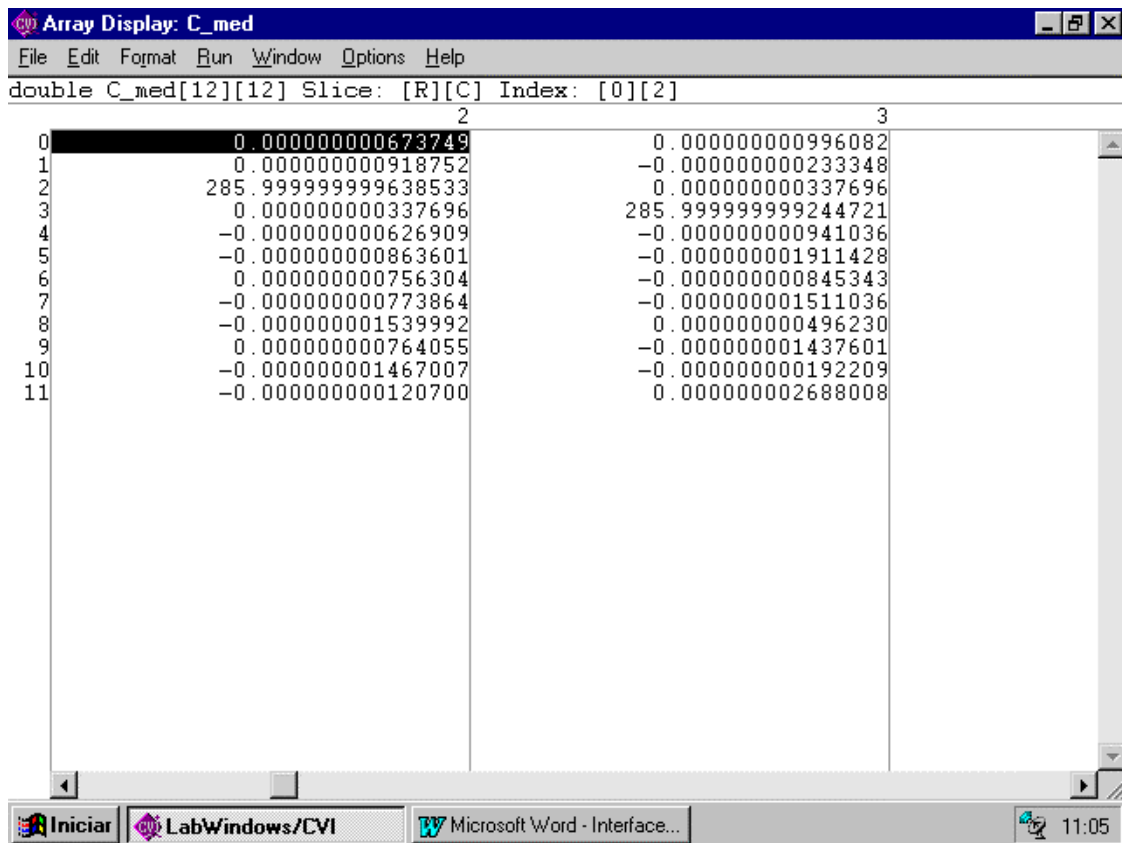


Fig. A-V-2. Terceira e quarta colunas da matriz $\langle F_k \rangle$.

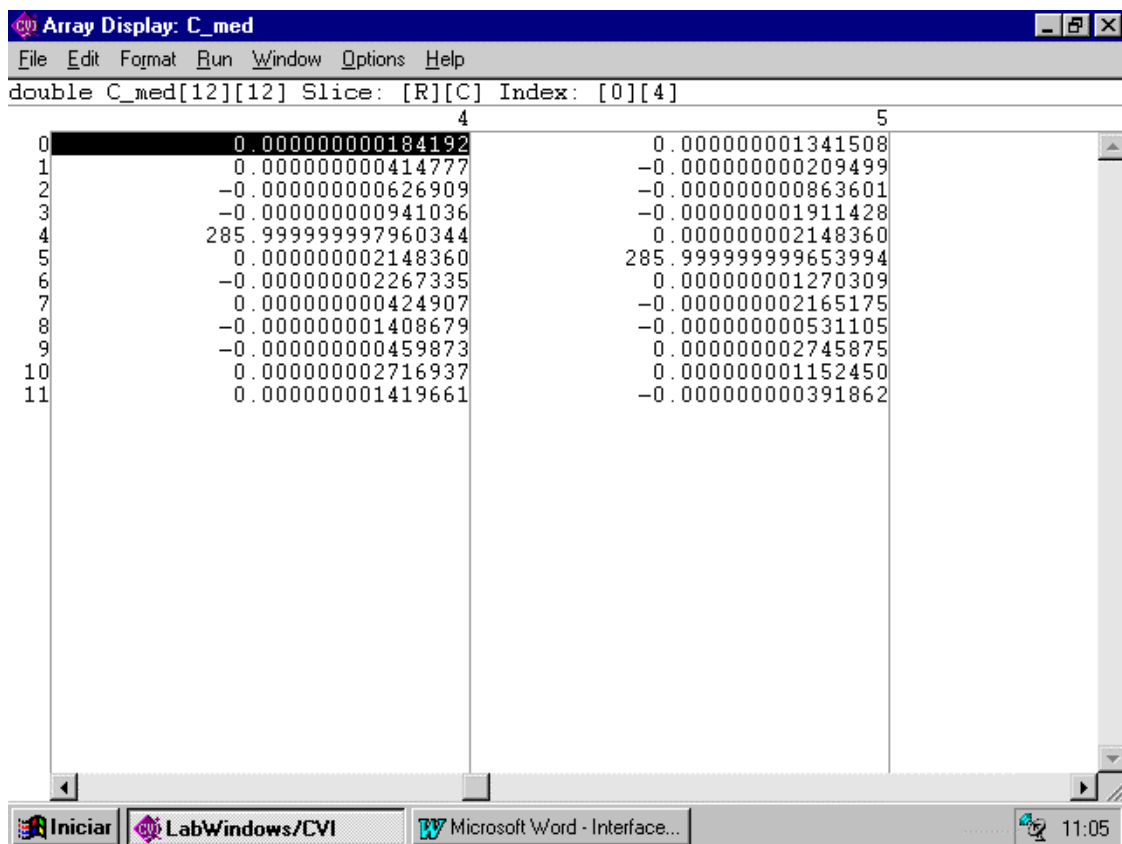


Fig. A-V-3. Quinta e sexta colunas da matriz $\langle F_k \rangle$.

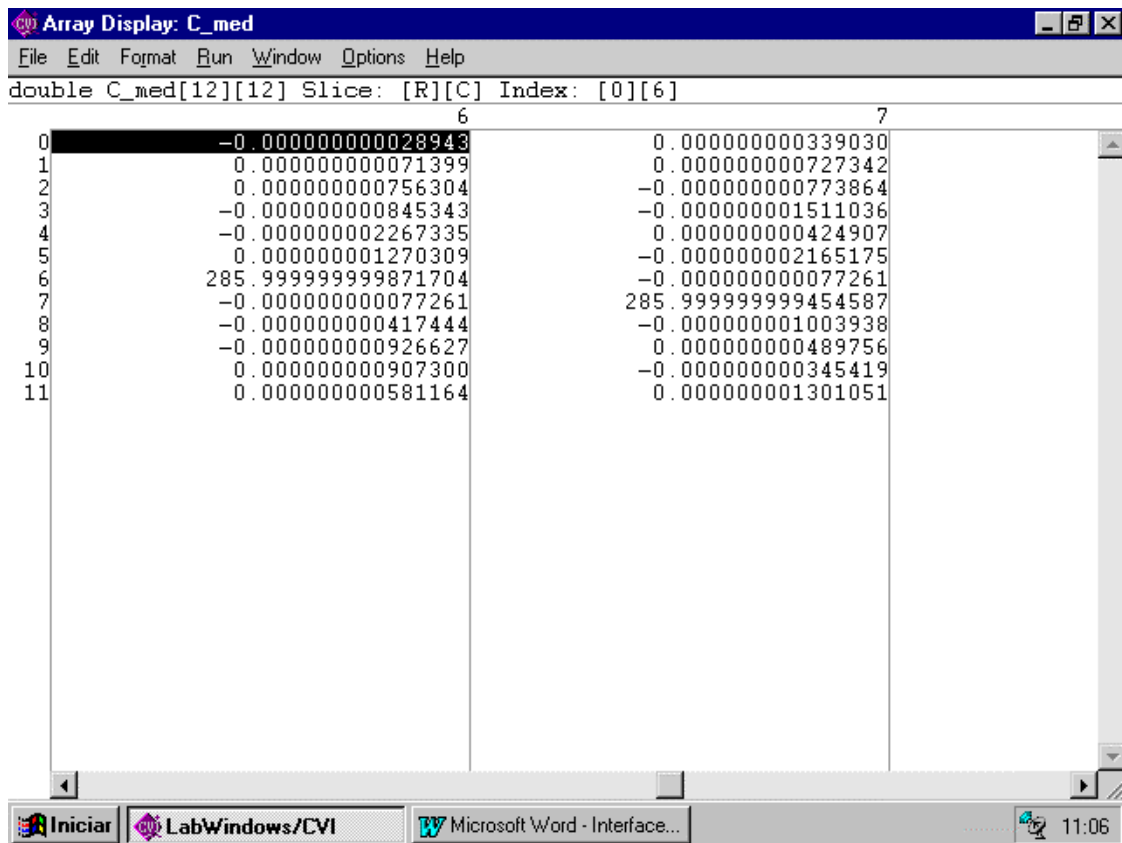


Fig. A-V-4. Sétima e oitava colunas da matriz $\langle F_k \rangle$.

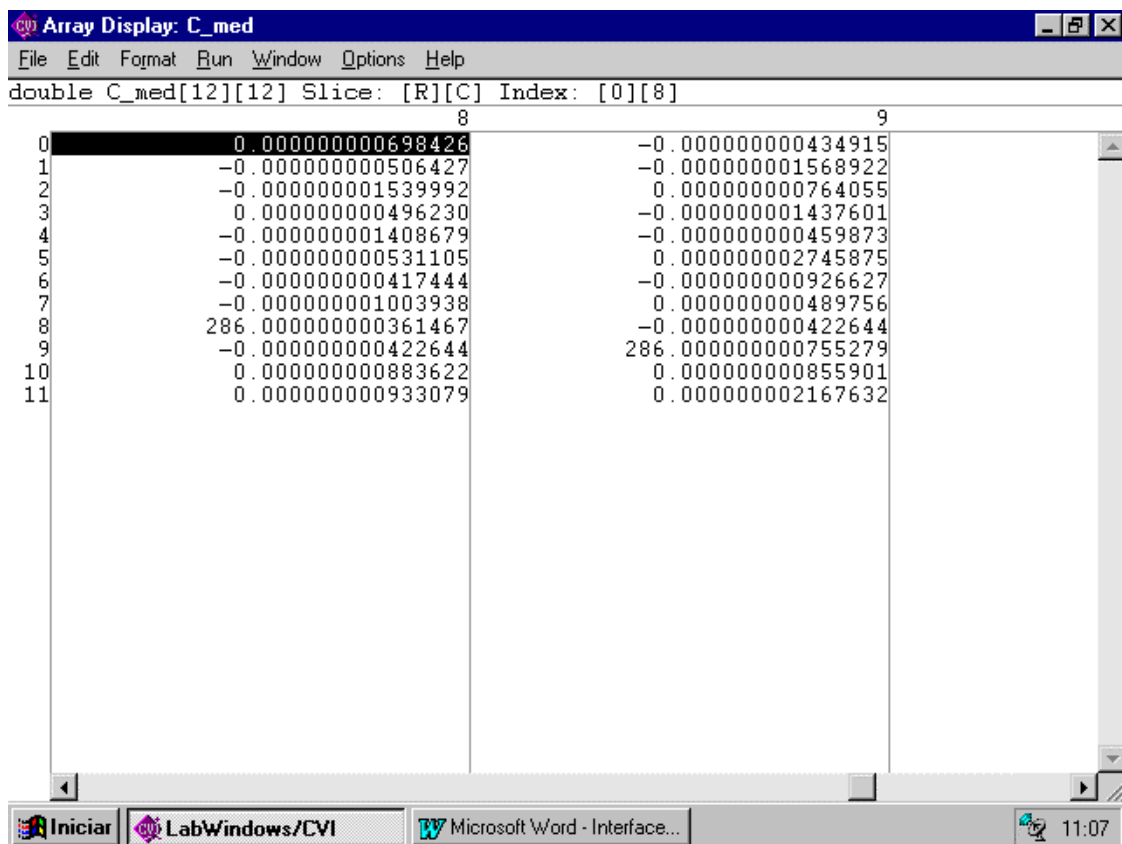


Fig. A-V-5. Nona e décima colunas da matriz $\langle F_k \rangle$.

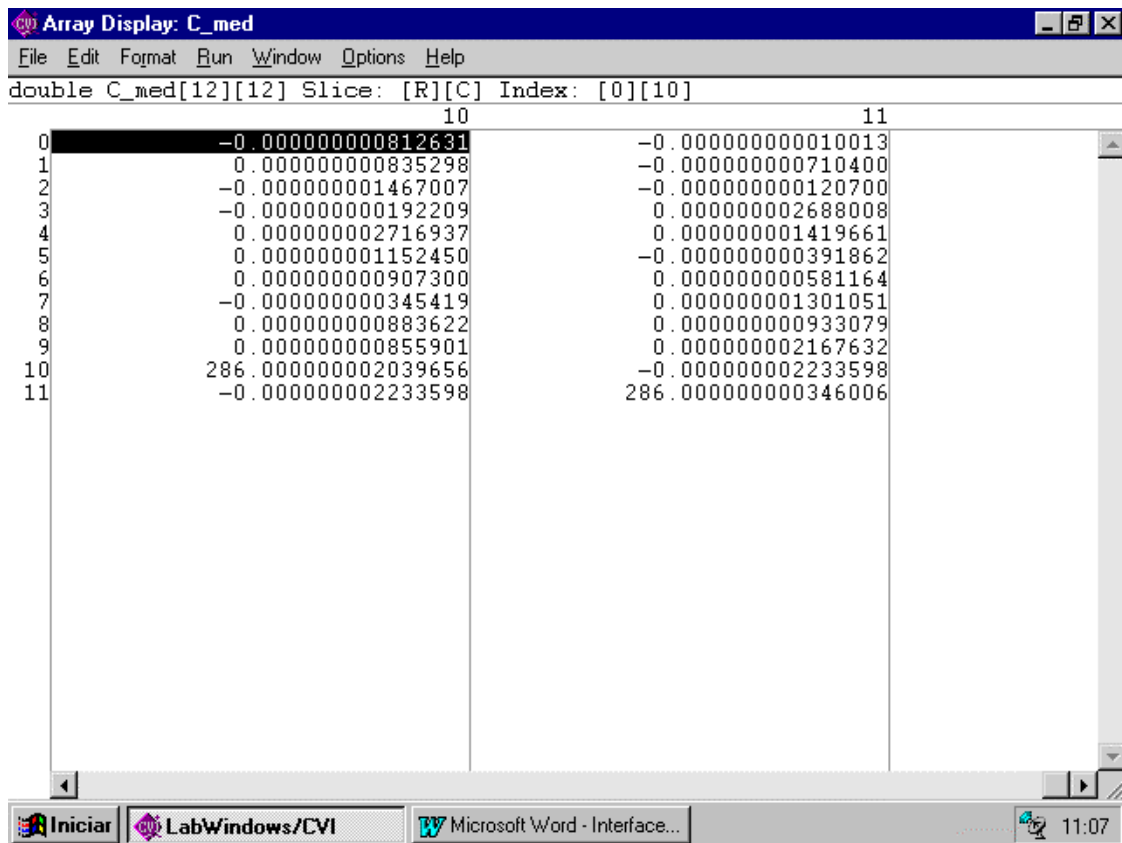


Fig. A-V-6. Décima primeira e décima segunda colunas da matriz $\langle F_k \rangle$.

APÊNDICE VI

CÁLCULO DA TRANSFORMADA DE FOURIER DE SINAIS PERIÓDICOS ARBITRÁRIOS LINEARES POR PARTES

A-VI-1 Transformada de Fourier de sinais periódicos

A transformada de Fourier também pode ser definida para uma função periódica. Por exemplo, suponha uma função periódica expressa como uma série de Fourier exponencial complexa:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{A-VI-1-1})$$

A transformada de Fourier da mesma pode ser obtida, usando-se linearidade, como a soma das transformadas de Fourier de cada termo da série:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}\right\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathfrak{F}\{e^{jn\omega_0 t}\} \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \quad (\text{A-VI-1-2})$$

O resultado (2) resulta de

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{-1}\{\delta(\omega - n\omega_0)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \cdot e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (\text{A-VI-1-3})$$

Se denotamos a forma de onda básica em um período por $f_T(t)$, então

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \mathfrak{F}\{f_T(t)\} \\ &= \frac{1}{T} F_T(jn\omega_0) \end{aligned} \quad (\text{A-VI-1-4})$$

Em outras palavras, se conhecemos a transformada de Fourier de um único pulso $F_T(j\omega)$, pode-se obter diretamente os coeficientes da série de Fourier complexa de um trem periódico de tais pulsos, substituindo-se ω em $F_T(j\omega)$ por $n\omega_0$ e dividindo-se o resultado pelo período T . Substituindo-se (4) em (2),

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} F_T(jn\omega_0) \cdot \delta(\omega - n\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_T(jn\omega_0) \cdot \delta(\omega - n\omega_0) \end{aligned} \quad (\text{A-VI-1-5})$$

Portanto, a transformada de Fourier de um sinal periódico é uma série de impulsos nos harmônicos da taxa de repetição básica e cujas amplitudes são determinadas pela transformada de Fourier da forma de pulso básica em um período.

Suponha, por exemplo, uma forma de onda quadrada periódica de período T e ciclo de trabalho de τ/T . A transformada de Fourier do pulso de largura τ é

$$\begin{aligned} F_T(j\omega) &= \int_0^{\tau} A \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{A}{j\omega} (e^{-j\omega t} - 1) \\ &= -\frac{A}{j\omega} \cdot e^{-j\omega\tau/2} (e^{-j\omega\tau/2} - e^{+j\omega\tau/2}) \\ &= A\tau \cdot \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \cdot e^{-j\omega\tau/2} \end{aligned} \quad (\text{A-VI-1-6})$$

Portanto, a transformada de Fourier da forma de onda quadrada periódica é dada por

$$F(j\omega) = A\omega_0\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} \cdot e^{-jn\omega_0\tau/2} \cdot \delta(\omega - n\omega_0) \quad (\text{A-VI-1-7})$$

A-VI-2 Técnicas computacionais importantes

Esta seção foi extraída de PAUL (1992), sendo reproduzida aqui para maior comodidade do leitor.

Embora a computação direta da transformada de Fourier de sinais periódicos seja possível usando os resultados anteriores, pode se tornar tediosa para algumas formas de onda. A finalidade desta seção é ilustrar quatro propriedades importantes que

podem ser usadas para tornar a computação da transformada de Fourier virtualmente trivial para formas de onda lineares por partes. Formas de onda lineares por partes são aquelas que consistem de segmentos de reta. Um exemplo de uma forma de onda periódica linear por parte está mostrado na Fig. A-VI-1(a).

A primeira e mais importante propriedade é a da *linearidade*. Qualquer forma de onda ou função pode ser escrita como uma *combinação linear* de duas ou mais funções:

$$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t) + A_3(t) + \dots \quad (\text{A-VI-2-1})$$

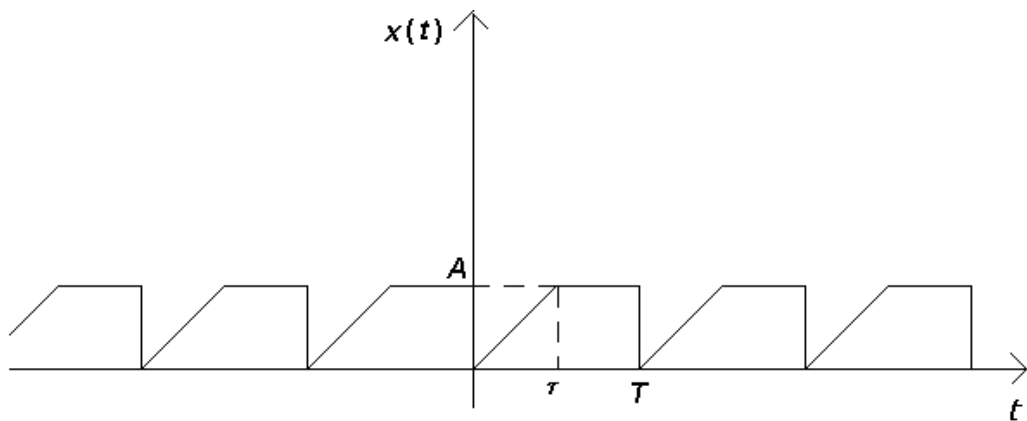
Por exemplo, a forma de onda da Fig. A-VI-1(a) pode ser escrita como a combinação linear de duas outras formas de onda: $x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t)$, onde $x_1(t)$ e $x_2(t)$ estão mostradas na Fig. A-VI-1(b) e $A_1 = A$, $A_2 = A$. Conseqüentemente, a transformada de Fourier de $x(t)$ pode ser escrita como uma combinação linear da representação de transformada de Fourier de $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, ... de acordo com (1). Por exemplo, suponha que as formas exponenciais complexas de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam escritas como

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{1n} \cdot e^{jn\omega_0 t} \\ x_2(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} \cdot e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (\text{A-VI-2-2})$$

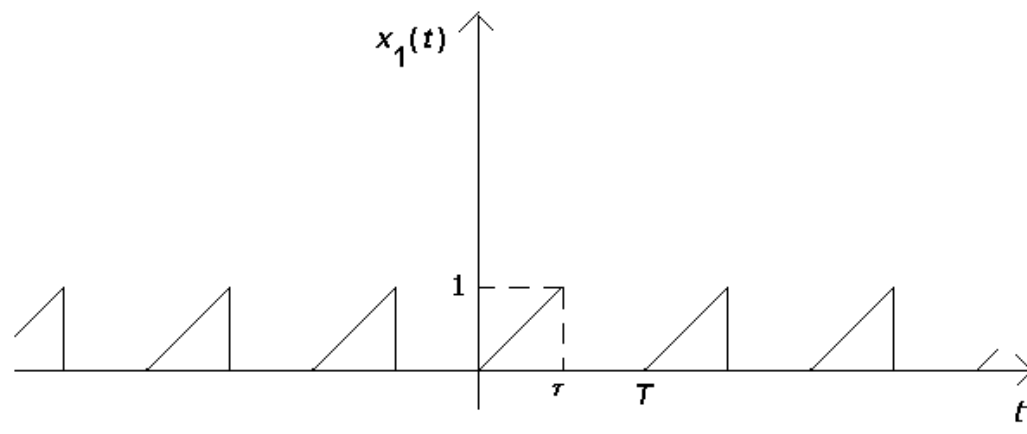
Se $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, então

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_{1n} + c_{2n}) \cdot e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (\text{A-VI-2-3})$$

Portanto, o coeficiente da expansão associado ao n-ésimo harmônico de $x(t)$ é a soma dos coeficientes de expansão daquele harmônico associado com $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Assim, podemos decompor uma função periódica em uma combinação linear de funções mais simples. Se é mais fácil obter os coeficientes de expansão destas funções mais simples, então a tarefa original de se obter os coeficientes de expansão de $x(t)$ será simplificada.



(a)



(b)

Fig. A-VI-1. Ilustração da decomposição linear de um sinal: (a) o sinal; (b) sua decomposição, $x(t) = Ax_1(t) + Ax_2(t)$.

A segunda propriedade importante tem a ver com o *deslocamento no tempo de uma função*. Se $x(t)$ é deslocada para frente no tempo t por uma quantidade α (retardada no tempo de α), é escrita como $x(t-\alpha)$. Um exemplo é mostrado na Fig. A-VI-2(b). Similarmente, $x(t+\alpha)$ é $x(t)$ deslocada para trás no eixo do tempo de α (avançada no tempo). Um exemplo é mostrado na Fig. A-VI-2(c). Neste caso pode-se escrever

$$\begin{aligned} x(t-\alpha) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0(t-\alpha)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-jn\omega_0\alpha} e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (\text{A-VI-2-4})$$

Portanto, multiplicamos os coeficientes da expansão de $x(t)$ por $e^{-jn\omega_0\alpha}$ para obter os coeficientes da expansão de $x(t-\alpha)$.

A terceira propriedade importante que usaremos tem a ver com a *função impulso unitário* $\delta(t)$. Considere um trem periódico de funções de impulso unitário

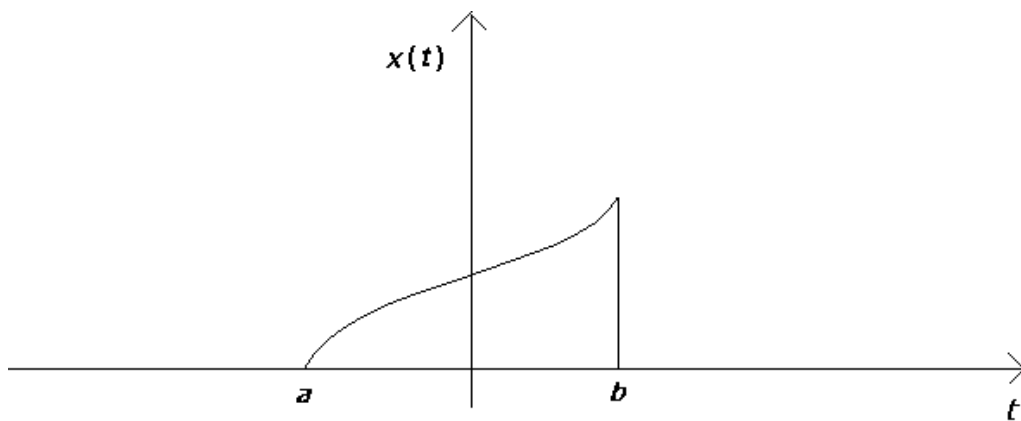
$$x(t) = \delta(t \pm kT), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (\text{A-VI-2-5})$$

Os coeficientes de expansão são

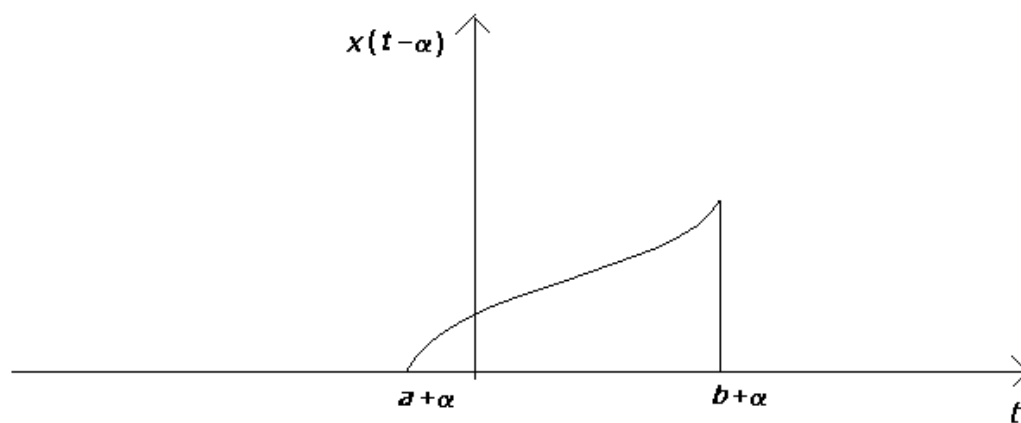
$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T \delta(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) \cdot dt \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (\text{A-VI-2-6})$$

Se o trem de impulsos é deslocado para frente no tempo de α como mostrado na Fig. A-VI-3, então, pela propriedade do deslocamento no tempo, os coeficientes da expansão se tornam

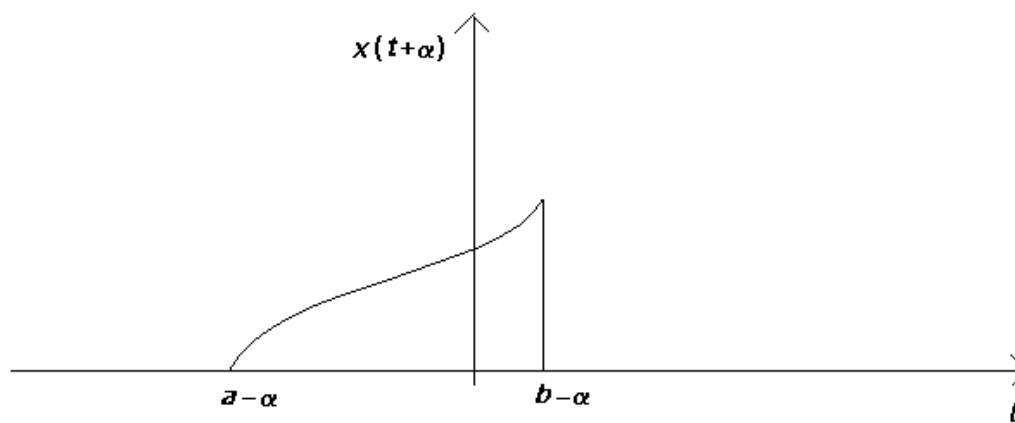
$$c_n = \frac{1}{T} e^{-jn\omega_0\alpha} \quad (\text{A-VI-2-7})$$



(a)



(b)



(c)

Fig. A-VI-2. Ilustração do princípio do deslocamento de tempo: (a) $x(t)$; (b) $x(t-\alpha)$; (c) $x(t+\alpha)$.

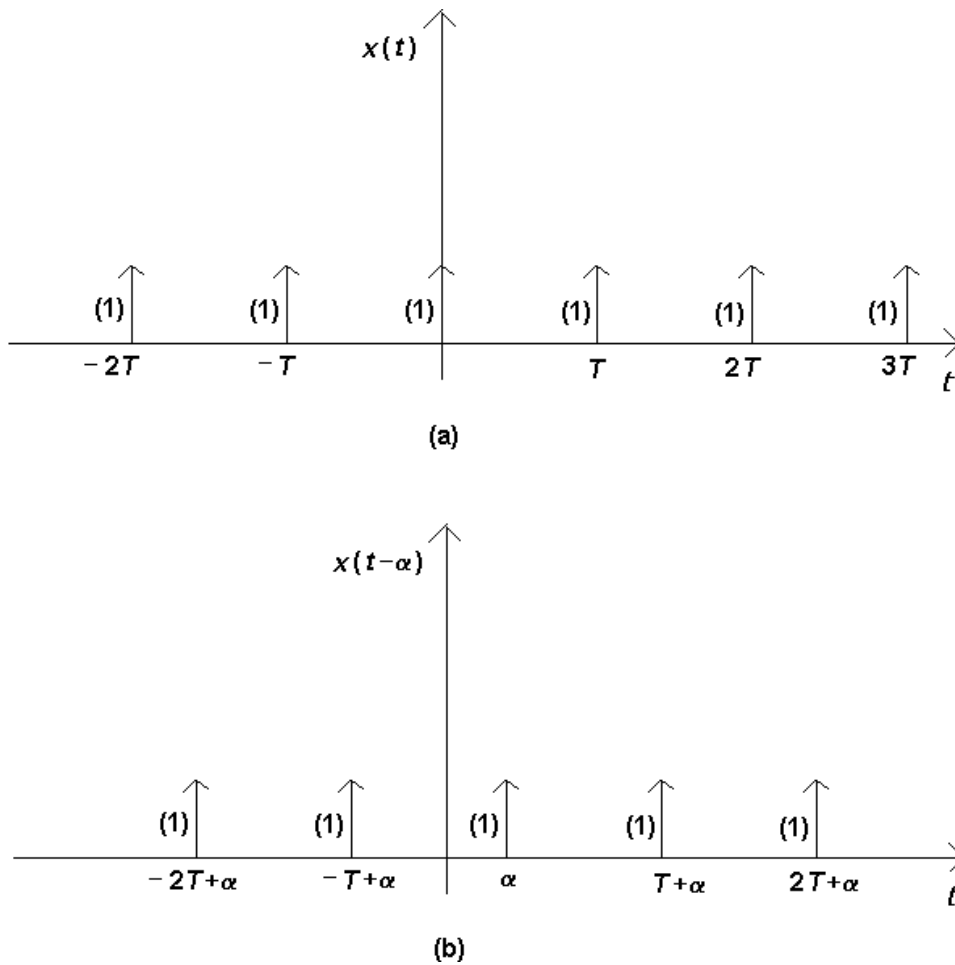


Fig. A-VI-3. Um trem periódico de impulsos unitários (a) e (b) deslocado no tempo.

A quarta e última propriedade tem a ver com a relação entre os coeficientes de expansão de uma função periódica $x(t)$ e os coeficientes de expansão de suas *derivadas*. Se $x(t)$ é representada por uma série de Fourier como

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{A-VI-2-8})$$

e a k -ésima derivada é representada como

$$\frac{dx^k(t)}{dt^k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{A-VI-2-9})$$

Os coeficientes da expansão estão relacionados por

$$c_n = \frac{1}{(jn\omega_0)^k} c_n^{(k)} \quad (\text{A-VI-2-10})$$

Isto é simples de mostrar derivando (8) para obter

$$\begin{aligned} \frac{dx^k(t)}{dt^k} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn\omega_0)^k c_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(k)} e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \quad (\text{A-VI-2-11})$$

Estamos agora preparados para utilizar estas quatro propriedades importantes para simplificar a computação dos coeficientes de expansão de transformadas de Fourier de funções periódicas *lineares por partes*. A técnica é *derivar repetidamente a função até a primeira ocorrência de uma função impulso*. Se a derivada da função não consiste apenas de funções impulso, escreva o resultado como a soma da parte que contém as funções impulso e uma parte que contém o restante. Determine os coeficientes da expansão para a parte que contém as funções impulso usando os resultados acima e continue a derivar a parte que não contém impulsos até que os impulsos ocorram. Repita o processo até a expansão ficar completa. Divida cada parte pela potência de $jn\omega_0$ requerida de acordo com (10) para retornar ao coeficiente de expansão da função original. Por exemplo, considere a função mostrada na Fig. A-VI-4(a). Derivando esta uma vez, obtém-se a função na Fig. A-VI-4(b). Esta pode ser representada como a soma das duas funções mostradas na Fig. A-VI-4(c):

$$\frac{dx(t)}{dt} = x_1(t) + x_2(t) \quad (\text{A-VI-2-12})$$

Os coeficientes de expansão para $x_1(t)$ são facilmente determinados com as propriedades acima mencionadas do trem de impulsos como

$$c_{1n}^{(1)} = -\frac{A}{T} \quad (\text{A-VI-2-13})$$

A função $x_2(t)$ é derivada novamente para fornecer o resultado na Fig. A-VI-4(d). Os coeficientes de expansão para esta são

$$c_{2n}^{(2)} = \frac{A}{\tau} \frac{1}{T} - \frac{A}{\tau} \frac{1}{T} e^{-jn\omega_0 \tau} \quad (\text{A-VI-2-14})$$

Note que neste último resultado usamos as propriedades de linearidade e deslocamento de fase. Os coeficientes de expansão para a função original são então

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{jn\omega_0} c_{1n}^{(1)} + \frac{1}{(jn\omega_0)^2} c_{2n}^{(2)} \\
 &= -\frac{1}{jn\omega_0} \frac{A}{T} + \frac{1}{(jn\omega_0)^2} \left(\frac{A}{\tau} \frac{1}{T} - \frac{A}{\tau} \frac{1}{T} e^{-jn\omega_0\tau} \right) \\
 &= j \frac{A}{n\omega_0 T} \left[1 + j \frac{1}{n\omega_0\tau} (1 - e^{-jn\omega_0\tau}) \right] \\
 &= j \frac{A}{n\omega_0 T} - j \frac{A}{n\omega_0 T} \frac{\text{sen}(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} e^{-jn\omega_0\tau/2}
 \end{aligned} \tag{A-VI-2-15}$$

E finalmente usaremos estas propriedades para obter os coeficientes da transformada de Fourier da forma de onda quadrada. A derivada daquela função dá um trem de impulsos periódico de intensidade A ocorrendo na borda de subida de cada pulso, $A\delta(t \pm nT)$, e um trem de impulsos periódico de intensidade $-A$ ocorrendo na borda de descida de cada pulso, $-A\delta(t - \tau \pm nT)$. Os coeficientes de expansão para cada componente do trem de pulsos:

$$\begin{aligned}
 c_n^{(1)} &= A \frac{1}{T} - \frac{A}{T} e^{-jn\omega_0\tau} \\
 &= \frac{A}{T} (1 - e^{-jn\omega_0\tau}) \\
 &= \frac{A}{T} (e^{jn\omega_0\tau/2} - e^{-jn\omega_0\tau/2}) \cdot e^{-jn\omega_0\tau/2} \\
 &= jn\omega_0 \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} \cdot e^{-jn\omega_0\tau/2}
 \end{aligned} \tag{A-VI-2-16}$$

Os coeficientes de expansão para $x(t)$ são

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{jn\omega_0} c_n^{(1)} \\
 &= \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}(n\omega_0\tau/2)}{n\omega_0\tau/2} \cdot e^{-jn\omega_0\tau/2}
 \end{aligned} \tag{A-VI-2-17}$$

Portanto, de acordo com (7).

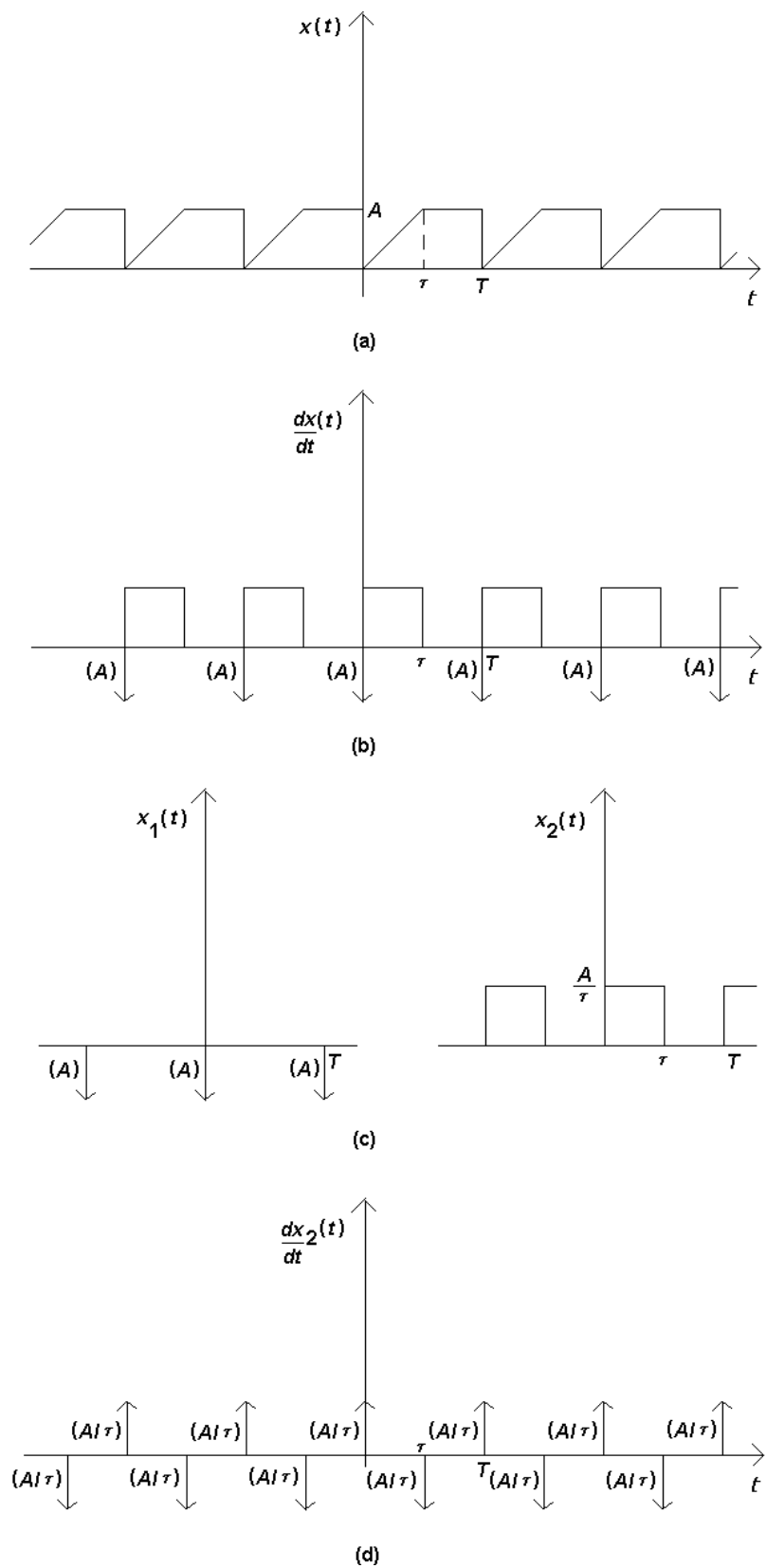


Fig. A-VI-4. Ilustração do uso da derivada para computar os coeficientes de expansão para um sinal periódico linear por partes: (a) o sinal; (b) a primeira derivada; (c) uso de linearidade; (d) derivação repetida de um componente.

A-VI-3 Sinal senoidal (versão em degraus)

O sinal foi gerado por um gerador HP3245A (HEWLETT-PACKARD, 1994b) usando o programa abaixo em LabWindows CVI (comandos do instrumento em linguagem de programação do próprio gerador).

```
#include <formatio.h>
#include <gpib.h>
static char comando[40];
static int num, Ger = 9;
static float TensProg;
static float Angulo = 0;
static short endereco[2];
endereco[0] = Ger;
endereco[1] = -1;
TensProg = 6;
SendIFC (0);
SetRWLS (0, endereco);
Send (0, Ger, "RST",3, 2);
Send (0, Ger, "SCRATCH",7, 2);

Send (0, Ger, "USE 0",5, 2);
Send (0, Ger, "FREQ 60",7, 2);
Fmt (comando, "%s<PANG %f[b4p5]", Angulo); //compensação do defasamento
num = StringLength (comando);
Send (0, Ger, comando, num, 2);
Send (0, Ger, "APPLY ACV 10",12, 2);

Send (0, Ger, "SUB SENO",8, 2);
Send (0, Ger, " REAL REC_SINE (2047)",21, 2);
Send (0, Ger, " PI = 3.1415",12, 2);
Send (0, Ger, " FOR I = 0 TO 2047",18, 2);
Send (0, Ger, " REC_SINE(I) = SIN(2*PI*(I/2047))",34, 2);
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);
Send (0, Ger, "SUBEND",6, 2);
Send (0, Ger, "CALL SENO",9, 2);
Send (0, Ger, "USE 100",7, 2);
Send (0, Ger, "FREQ 60",7, 2);
Fmt (comando, "%s<APPLY WFV %f[b4p5], REC_SINE", TensProg);
num = StringLength (comando);
Send (0, Ger, comando, num, 2);
Send (0, Ger, "PHSYNC",6, 2);
```

A forma de onda amostrada é

$$f(t) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (\text{A-VI-3-1})$$

Obviamente, esta forma de onda só dispõe da fundamental.

A forma de onda sintetizada é

$$f(i) = \text{sen}\left(\frac{2pi}{2047}\right), \quad i = 0, \dots, 2047 \quad (\text{A-VI-3-2})$$

onde $p = 3,1415$. A forma de onda está mostrada na Fig. III-6 (a amplitude não é a mesma de (2), mas isto não importa aqui pois estamos interessados na amplitude dos harmônicos relativa à fundamental). Os harmônicos não aparecem na figura devido à escala escolhida.

Para $i = 0, \dots, 2047$, temos 2048 platôs e 2047 transições. Portanto, os coeficientes de Fourier do trem de impulsos correspondente são

$$c_{1j}^{(i)} = f_0 \sum_{l=1}^{2047} A_l e^{-2\pi j \sqrt{-1}/2048}, \quad (\text{A-VI-3-3})$$

onde $f_0 (= 1/T)$ é a frequência do sinal e A_l é a l -ésima intensidade dos impulsos (em cada transição) dada por

$$\begin{aligned} A_l &= f(l) - f(l-1) \\ &= \text{sen}\left(\frac{2pl}{2047}\right) - \text{sen}\left(\frac{2p(l-1)}{2047}\right) \end{aligned} \quad (\text{A-VI-3-4})$$

De $i = 2047$ a $i = 2048$, temos 2 (dois) platôs e 1 (uma) transição (entre o último platô de um período e o platô inicial do próximo). Portanto, o coeficiente de Fourier do impulso correspondente é

$$c_{2j}^{(i)} = f_0 A_{2048} e^{-2\pi j \sqrt{-1}} \quad (\text{A-VI-3-5})$$

onde A_{2048} é a intensidade do impulso na transição, isto é,

$$\begin{aligned} A_{2048} &= f(0) - f(2047) \\ &= -\text{sen } 2p \end{aligned} \quad (\text{A-VI-3-6})$$

Finalmente, os coeficientes de Fourier da forma de onda original são calculados de

$$c_j = \frac{1}{2\pi f_0 \sqrt{-1}} (c_{1j}^{(1)} + c_{2j}^{(1)}) \quad (\text{A-VI-3-7})$$

Observando-se as equações acima, conclui-se que f_0 se cancela e, portanto, é irrelevante para o cálculo.

Os coeficientes de Fourier desta forma de onda foram calculados usando o programa em MATLAB descrito abaixo. O programa pergunta ao usuário o número total de degraus da forma de onda, a frequência do sinal (o programa pode ser alterado para tornar desnecessária esta pergunta) e o número de harmônicos desejados. O programa considera a forma de onda senoidal (versão em degraus) especificada por (2) com $p = 3,1415$. O programa reporta a amplitude (relativa à fundamental) e o ângulo de fase dos harmônicos da forma de onda. A Tabela III-4 mostra os valores calculados das amplitudes (relativas à fundamental) dos primeiros oito harmônicos do sinal senoidal (versão em degraus).

```
% Programa Onda senoidal
% Calcula os harmônicos de uma onda senoidal (versão em degraus)
%
n = input('Digite o número total de degraus = 2048');
f = input('Digite a frequência = 60');
Num = input('Digite o número de harmônicos = 8');

P = 3.1415;
T = 1/f;

dif1 = n-1;
ii=sqrt(-1);

for i = 1:dif1,
    A(i) = sin(2*P*i/(n-1))-sin(2*P*(i-1)/(n-1));
    for j = 1:Num,
        cn(i,j)=A(i)*f*exp((-j*2*pi*i/n)*ii);
    end
end

dif11 = dif1+1;
A(dif11) = -sin(2*P);
for j = 1:Num,
    cn(dif11,j)=A(dif11)*f*exp((-j*2*pi)*ii);
end

Cn = sum(cn,1);
```

```

for j = 1:Num,
    Cn(j)=Cn(j)/(j*2*pi*f*ii);
end

Cn_mod = abs(Cn);
format long
Cn_mod = (Cn_mod/Cn_mod(1))*100
Cn_fase = 180*angle(Cn)/pi

```

A-VI-4 Sinal parabólico alternado

O sinal foi gerado por um gerador HP3245A usando o programa abaixo em LabWindows CVI (comandos do instrumento em linguagem de programação do próprio gerador).

```

#include <formatio.h>
#include <gpib.h>
static char comando[40];
static int num, Ger = 9;
static float TensProg;
static float Angulo = 0;
static short endereco[2];

endereco[0] = Ger;
endereco[1] = -1;
TensProg = 6;

SendIFC (0);
SetRWLS (0, endereco);
Send (0, Ger, "RST",3, 2);
Send (0, Ger, "SCRATCH",7, 2);

Send (0, Ger, "USE 0",5, 2);
Send (0, Ger, "FREQ 60",7, 2);
Fmt (comando, "%s<PANG %f[b4p5]", Angulo); //compensação do defasamento
num = StringLength (comando);
Send (0, Ger, comando, num, 2);
Send (0, Ger, "APPLY ACV 10",12, 2);

Send (0, Ger, "SUB DIST",8, 2);
Send (0, Ger, " REAL DIST_SINE (2047)",22, 2);
Send (0, Ger, " PI = 3.1415",12, 2);
Send (0, Ger, " FOR I = 0 TO 1023",18, 2);
Send (0, Ger, " DIST_SINE(I) = (4/(PI*PI))*2*PI*((I-1023)/2047)*PI*(1+2*(I-1023)/2047)",72, 2);
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);
Send (0, Ger, " FOR I = 1024 TO 2047",21, 2);

```

```

Send (0, Ger, " DIST_SINE(I) = (4/(PI*PI))*2*PI*((I-1024)/2047)*PI*(1-2*(I-
1024)/2047)",72, 2);
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);
Send (0, Ger, "SUBEND",6, 2);
Send (0, Ger, "CALL DIST",9, 2);
Send (0, Ger, "USE 100",7, 2);
Send (0, Ger, "FREQ 60",7, 2);
Fmt (comando, "%s<APPLY WFV %f[b4p5], DIST_SINE", TensProg);
num = StringLength (comando);
Send (0, Ger, comando, num, 2);
Send (0, Ger, "PHSYNC",6, 2);

```

A forma de onda amostrada é

$$f(t) = \begin{cases} 4t(\pi - t)/\pi^2, & 0 < t < \pi \\ 4t(\pi + t)/\pi^2, & -\pi < t < 0 \end{cases} \quad (\text{A-VI-4-1})$$

A série de Fourier da forma de onda acima é (SPIEGEL, 1973)

$$f(t) = \frac{32}{\pi^3} \left(\frac{\text{sen } t}{1^3} + \frac{\text{sen } 3t}{3^3} + \frac{\text{sen } 5t}{5^3} + \dots \right) \quad (\text{A-VI-4-2})$$

A forma de onda sintetizada é

$$\begin{aligned} f_1(i) &= 8 \cdot [(i - 1023)/2047] \cdot [1 + 2(i - 1023)/2047], & i = 0, \dots, 1023 \\ f_2(i) &= 8 \cdot [(i - 1024)/2047] \cdot [1 - 2(i - 1024)/2047], & i = 1024, \dots, 2047 \end{aligned} \quad (\text{A-VI-4-3})$$

A forma de onda está mostrada na Fig. III-8. Alguns harmônicos não aparecem na figura devido à escala escolhida.

Para $i = 0, \dots, 1023$, temos 1024 platôs e 1023 transições. Portanto, os coeficientes de Fourier do trem de impulsos correspondente são

$$c_{1j}^{(i)} = f_0 \sum_{l=1}^{1023} A_{1l} e^{-2\pi l j \sqrt{-1}/2048} \quad (\text{A-VI-4-4})$$

onde $f_0 (= 1/T)$ é a frequência do sinal e A_{1l} é a l -ésima intensidade dos impulsos (em cada transição) dada por

$$\begin{aligned}
A_{1l} &= f_1(l) - f_1(l-1) \\
&= 8 \left\{ \frac{(l-1023)}{2047} \cdot \left[1 + \frac{2(l-1023)}{2047} \right] - \frac{((l-1)-1023)}{2047} \cdot \left[1 + \frac{2((l-1)-1023)}{2047} \right] \right\} \\
&= 8 \left\{ \frac{1}{2047} + \frac{2}{(2047)^2} \cdot (l-1023)^2 - \frac{2}{(2047)^2} \cdot ((l-1)-1023)^2 \right\} \\
&= \frac{8}{2047} \cdot \left(1 + \frac{4l - 2 - 4 \cdot (1023)}{2047} \right) \\
&= \frac{8}{2047} \cdot \left(1 + \frac{4l - 4094}{2047} \right)
\end{aligned} \tag{A-VI-4-5}$$

De $i = 1023$ a $i = 1024$, não há transição (como pode ser visto substituindo estes valores em (3)). Para $i = 1024, \dots, 2047$, temos 1024 platôs e 1023 transições. Portanto, os coeficientes de Fourier do trem de impulsos correspondente são

$$c_{2j}^{(1)} = f_0 \sum_{l=2}^{1024} A_{2l} e^{-2\pi j \sqrt{-1}(l+1023)/2048} \tag{A-VI-4-6}$$

onde $f_0 (= 1/T)$ é a frequência do sinal e A_{2l} é a l -ésima intensidade dos impulsos (em cada transição) dada por

$$\begin{aligned}
A_{2l} &= f_2(1023+l) - f_2(1023+(l-1)) \\
&= 8 \left\{ \frac{(l-1)}{2047} \cdot \left[1 - \frac{2(l-1)}{2047} \right] - \frac{(l-2)}{2047} \cdot \left[1 - \frac{2(l-2)}{2047} \right] \right\} \\
&= \frac{8(-4l+2053)}{2047^2}
\end{aligned} \tag{A-VI-4-7}$$

De $i = 2047$ a $i = 2048$, temos 2 (dois) platôs e 1 (uma) transição (entre o último platô de um período e o platô inicial do próximo). Portanto, o coeficiente de Fourier do impulso correspondente é

$$c_{3j}^{(1)} = f_0 A_{1025} \cdot e^{-2\pi j \sqrt{-1}} \tag{A-VI-4-8}$$

onde A_{1025} é a intensidade do impulso na transição, isto é,

$$\begin{aligned}
A_{1025} &= f_1(0) - f_2(2047) \\
&= 8 \left\{ \frac{(-1023)}{2047} \cdot \left[1 + \frac{2 \cdot (-1023)}{2047} \right] - \frac{1023}{2047} \cdot \left[1 - \frac{2 \cdot (1023)}{2047} \right] \right\} \\
&= -16 \left[\frac{1023}{2047} \cdot \left(1 - \frac{2046}{2047} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A-VI-4-9}$$

Finalmente, os coeficientes de Fourier da forma de onda original são calculados de

$$c_j = \frac{1}{2\pi f_0 \sqrt{-1}} (c_{1j}^{(1)} + c_{2j}^{(1)} + c_{3j}^{(1)}) \tag{A-VI-4-10}$$

Observando-se as equações acima, conclui-se que f_0 se cancela e, portanto, é irrelevante para o cálculo.

Os coeficientes de Fourier desta forma de onda foram calculados usando o programa em MATLAB descrito abaixo. O programa pergunta ao usuário o número total de degraus da forma de onda, a frequência do sinal (o programa pode ser alterado para tornar desnecessária esta pergunta) e o número de harmônicos desejados. O programa considera a forma de onda parabólica alternada especificada por (3). O programa reporta a amplitude (relativa à fundamental) e o ângulo de fase dos harmônicos da forma de onda. A Tabela III-5 mostra os valores calculados das amplitudes (relativas à fundamental) dos primeiros 13 harmônicos do sinal parabólico alternado. Os valores computados dos ângulos de fase dos harmônicos do sinal estão mostrados na Tabela III-11.

```

% Programa Onda parabólica alternada
% Calcula os harmônicos de uma forma de onda parabólica alternada
%
n1 = input('Digite o número de degraus entre 0 e t1 = 1023');
n = input('Digite o número total de degraus = 2048');
f = input('Digite a frequência = 60');
Num = input('Digite o número de harmônicos = 13');

P = 3.1415;
T = 1/f;

dif1 = n1;
dif2 = n-n1-1;
ii=sqrt(-1);

for i = 1:dif1,
    A_1(i) = (8/(n-1)) * (1+4*i/(n-1)-2/(n-1)-4*n1/(n-1));

```

```

    for j = 1:Num,
        c1n(i,j)=A_1(i)*f*exp((-j*2*pi*i/n)*ii);
    end
end

A_2(1) = 0;
for j = 1: Num,
    c2n(1,j) = 0;
end

for i = 2:dif2,
    A_2(i) = (8/((n-1)*(n-1)))*(-4*i+2053);
    for j = 1:Num,
        c2n(i,j)=A_2(i)*f*exp((-j*2*pi*(n1+i)/n)*ii);
    end
end

A_2(1025) = 8*((-1023/(n-1))*(1+2*(-1023)/(n-1))-(1023/(n-1))*(1-
2*1023/(n-1)));
for j = 1: Num,
    c2n(1025,j) = A_2(1025)*f*exp((-j*2*pi)*ii);
end

C1n = sum(c1n,1);
C2n = sum(c2n,1);
Cn = (C1n+C2n);

for j = 1:Num,
    Cn(j)=Cn(j)/(j*2*pi*f*ii);
end

Cn_mod = abs(Cn);
format long
Cn_mod = (Cn_mod/Cn_mod(1))*100
Cn_fase = 180*angle(Cn)/pi

```

A-VI-5 Sinal retificado em meia onda

O sinal foi gerado por um gerador HP3245A usando o programa abaixo (linguagem de programação do próprio gerador).

```

#include <formatio.h>
#include <gpib.h>
static char comando[40];
static int num, Ger = 9;
static float TensProg;
static float Angulo = 0;
static short endereco[2];

endereco[0] = Ger;
endereco[1] = -1;
TensProg = 6;

```



```

SendIFC (0);
SetRWLS (0, endereco);
Send (0, Ger, "RST",3, 2);
Send (0, Ger, "SCRATCH",7, 2);

Send (0, Ger, "USE 0",5, 2);
Send (0, Ger, "FREQ 60",7, 2);
Fmt (comando, "%s<PANG %f[b4p5]", Angulo); //compensação do defasamento
num = StringLength (comando);
Send (0, Ger, comando, num, 2);
Send (0, Ger, "APPLY ACV 10",12, 2);

Send (0, Ger, "SUB RECTIFY",11, 2);
Send (0, Ger, " REAL REC_SINE (2047)",21, 2);
Send (0, Ger, " PI = 3.1415",12, 2);
Send (0, Ger, " FOR I = 0 TO 2047",18, 2);
Send (0, Ger, " REC_SINE(I) = -0.1+SIN(2*PI*(I/2047))",39, 2);
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);
Send (0, Ger, " FOR I = 1023 TO 2047",21, 2);
Send (0, Ger, " REC_SINE(I) = -0.1",20, 2);
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);
Send (0, Ger, "SUBEND",6, 2);
Send (0, Ger, "CALL RECTIFY",12, 2);
Send (0, Ger, "USE 100",7, 2);
Send (0, Ger, "FREQ 60",7, 2);
Fmt (comando, "%s<APPLY WFV %f[b4p5], REC_SINE", TensProg);
num = StringLength (comando);
Send (0, Ger, comando, num, 2);
Send (0, Ger, "PHSYNC",6, 2);

```

A forma de onda amostrada é

$$f(t) = \begin{cases} -0,1 + \text{sen } t, & 0 < t < \pi \\ -0,1, & \pi < t < 2\pi \end{cases} \quad (\text{A-VI-5-1})$$

A série de Fourier da forma de onda acima é [1]

$$f(t) = -0,1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \text{sen } t - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2t}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4t}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6t}{5 \cdot 7} + \dots \right) \quad (\text{A-VI-5-2})$$

A forma de onda sintetizada é

$$\begin{aligned} f_1(i) &= -0,1 + \text{sen}(2\pi i/2047), & i &= 0, \dots, 1022 \\ f_2(i) &= -0,1, & i &= 1023, \dots, 2047 \end{aligned} \quad (\text{A-VI-5-3})$$

A forma de onda está mostrada na Fig. III-11. Alguns harmônicos não aparecem na figura devido à escala escolhida. Observe a existência de um componente C.C., já que a integral da forma de onda amostrada sobre o período não é nula.

Para $i = 0, \dots, 1022$, temos 1023 platôs e 1022 transições. Portanto, os coeficientes de Fourier do trem de impulsos correspondente são

$$c_{1j}^{(1)} = f_0 \sum_{l=1}^{1022} A_{1l} e^{-2\pi j \sqrt{-1}/2048} \quad (\text{A-VI-5-4})$$

onde $f_0 (= 1/T)$ é a frequência do sinal e A_{1l} é a l -ésima intensidade dos impulsos (em cada transição) dada por

$$\begin{aligned} A_{1l} &= f_1(l) - f_1(l-1) \\ &= \text{sen}\left(\frac{2pl}{2047}\right) - \text{sen}\left(\frac{2p(l-1)}{2047}\right) \end{aligned} \quad (\text{A-VI-5-5})$$

De $i = 1022$ a $i = 1023$, temos 2 (dois) platôs e 1 (uma) transição. Portanto, o coeficiente de Fourier do impulso correspondente é

$$c_{2j}^{(1)} = f_0 A_{1023} \cdot e^{-2\pi j \sqrt{-1}(1023/2048)} \quad (\text{A-VI-5-6})$$

onde A_{1023} é a intensidade do impulso na transição, isto é,

$$\begin{aligned} A_{1023} &= f_2(1023) - f_1(1022) \\ &= -\text{sen} 2p(1022/2047) \end{aligned} \quad (\text{A-VI-5-7})$$

De $i = 2047$ a $i = 2048$, não há transição (entre o último platô de um período e o platô inicial do próximo), como pode ser visto calculando-se a diferença entre $f_2(2047)$ e $f_1(0)$.

Finalmente, os coeficientes de Fourier são calculados de

$$c_j = \frac{1}{2\pi f_0 \sqrt{-1}} (c_{1j}^{(1)} + c_{2j}^{(1)}) \quad (\text{A-VI-5-8})$$

Observando-se as equações acima, conclui-se que f_0 se cancela e, portanto, é irrelevante para o cálculo.

Os coeficientes de Fourier desta forma de onda foram calculados usando o programa em MATLAB descrito abaixo. O programa pergunta ao usuário o número total de degraus da forma de onda, a frequência do sinal (o programa pode ser alterado para tornar desnecessária esta pergunta) e o número de harmônicos desejados. O programa considera a forma de onda retificada de meia onda especificada por (3). O programa reporta a amplitude (relativa à fundamental) e o ângulo de fase dos harmônicos da forma de onda. A Tabela III-8 mostra os valores calculados das amplitudes (relativas à fundamental) dos primeiros 64 harmônicos do sinal retificado de meia onda. Os valores computados dos ângulos de fase dos primeiros 42 harmônicos do sinal retificado de meia onda estão mostrados na Tabela III-12.

```
% Programa Onda retificada
% Calcula os harmônicos de uma onda retificada
%
n1 = input('Digite o número de degraus entre 0 e t1 = 1023');
n = input('Digite o número total de degraus = 2048');
f = input('Digite a frequência = 60');
Num = input('Digite o número de harmônicos = 42');

P = 3.1415;
T = 1/f;

dif1 = n1-1;
ii=sqrt(-1);

for i = 1:dif1,
    A(i) = sin(2*P*i/(n-1))-sin(2*P*(i-1)/(n-1));
    for j = 1:Num,
        cn(i,j)=A(i)*f*exp((-j*2*pi*i/n)*ii);
    end
end
dif11 = dif1+1;
A(dif11) = -sin(2*P*dif1/(n-1));
for j = 1:Num,
    cn(dif11,j)=A(dif11)*f*exp((-j*2*pi*dif11/n)*ii);
end

Cn = sum(cn,1);

for j = 1:Num,
    Cn(j)=Cn(j)/(j*2*pi*f*ii);
end

Cn_mod = abs(Cn);
format long
Cn_mod = (Cn_mod/Cn_mod(1))*100
Cn_fase = 180*angle(Cn)/pi
```

A-VI-6 Sinal de triac

O sinal foi gerado por um gerador HP3245A usando o programa abaixo (linguagem de programação do próprio gerador).

```
#include <formatio.h>
#include <gpib.h>
static char comando[40];
static int num, Ger = 9;
static float TensProg;
static float Angulo = 0;
static short endereco[2];

endereco[0] = Ger;
endereco[1] = -1;
TensProg = 6;

SendIFC (0);
SetRWLS (0, endereco);
Send (0, Ger, "RST",3, 2);
Send (0, Ger, "SCRATCH",7, 2);

Send (0, Ger, "USE 0",5, 2);
Send (0, Ger, "FREQ 60",7, 2);
Fmt (comando, "%s<PANG %f[b4p5]", Angulo); //compensação do defasamento
num = StringLength (comando);
Send (0, Ger, comando, num, 2);
Send (0, Ger, "APPLY ACV 10",12, 2);

Send (0, Ger, "SUB RECTIFY",11, 2);
Send (0, Ger, " REAL REC_SINE (2047)",21, 2);
Send (0, Ger, " PI = 3.1415",12, 2);
Send (0, Ger, " FOR I = 0 TO 491",17, 2);
Send (0, Ger, " REC_SINE(I) = 0",17, 2); /*****/
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);

Send (0, Ger, " FOR I = 492 TO 510",19, 2);
Send (0, Ger, " REC_SINE(I) = 0.05+0.05*(I-492)",33, 2); /*****/
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);

Send (0, Ger, " FOR I = 511 TO 1023",20, 2);
Send (0, Ger, " REC_SINE(I) = SIN(2*PI*(I/2047))",34, 2);
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);

Send (0, Ger, " FOR I = 1024 TO 1515",21, 2);
Send (0, Ger, " REC_SINE(I) = 0",17, 2); /*****/
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);

Send (0, Ger, " FOR I = 1516 TO 1535",21, 2);
```

```

Send (0, Ger, " REC_SINE(I) = -0.05-0.05*(I-1516)",35, 2); /******/
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);

Send (0, Ger, " FOR I = 1536 TO 2047",21, 2);
Send (0, Ger, " REC_SINE(I) = SIN(2*PI*(I/2047))",34, 2);
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);

Send (0, Ger, "SUBEND",6, 2);
Send (0, Ger, "CALL RECTIFY",12, 2);
Send (0, Ger, "USE 100",7, 2);
Send (0, Ger, "FREQ 60",7, 2);
Fmt (comando, "%s<APPLY WFV %f[b4p5],REC_SINE", TensProg);
num = StringLength (comando);
Send (0, Ger, comando, num, 2);
Send (0, Ger, "PHSYNC",6, 2);

```

A forma de onda amostrada é

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < \pi/2 \\ \text{sen}(2\pi t/T) & \pi/2 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 3\pi/2 \\ \text{sen}(2\pi t/T) & 3\pi/2 < t < 2\pi \end{cases} \quad (\text{A-VI-6-1})$$

A forma de onda sintetizada é

$$\begin{aligned} f_1(i) &= 0 & i &= 0, \dots, 491 \\ f_2(i) &= 0,05 + 0,05 \cdot (i - 492) & i &= 492, \dots, 510 \\ f_3(i) &= \text{sen}(2\pi i/2047) & i &= 511, \dots, 1023 \\ f_4(i) &= 0 & i &= 1024, \dots, 1515 \\ f_5(i) &= -0,05 - 0,05 \cdot (i - 1516) & i &= 1516, \dots, 1535 \\ f_6(i) &= \text{sen}(2\pi i/2047) & i &= 1536, \dots, 2047 \end{aligned} \quad (\text{A-VI-6-2})$$

A forma de onda está mostrada na Fig. III-13. Alguns harmônicos não aparecem na figura devido à escala escolhida.

Para $i = 0, \dots, 491$, não há transições. Para $i = 491, \dots, 510$, temos 20 platôs e 19 transições. Portanto, os coeficientes de Fourier do trem de impulsos correspondente são

$$c_{1jA}^{(1)} = 0,05 f_0 \sum_{l=1}^{19} e^{-2\pi j \sqrt{-1} (491+l)/2048} \quad (\text{A-VI-6-3})$$

onde $f_0 (= 1/T)$ é a frequência do sinal.

De $i = 510$ a $i = 511$, temos 2 (dois) platôs e 1 (uma) transição. Portanto, o coeficiente de Fourier do impulso correspondente é

$$c_{1j20}^{(i)} = A_{20} f_0 e^{-2\pi j \sqrt{-1} (511/2048)} \quad (\text{A-VI-6-4})$$

onde A_{20} é a intensidade do impulso na transição, isto é,

$$\begin{aligned} A_{20} &= f_3(511) - f_2(510) \\ &= \text{sen } 2p(511/2047) - 0,95 \\ &= \text{sen} \left(\frac{1022p}{2047} \right) - 0,95 \end{aligned} \quad (\text{A-VI-6-5})$$

Para $i = 511, \dots, 1023$, temos 513 platôs e 512 transições. Portanto, os coeficientes de Fourier do trem de impulsos correspondente são

$$c_{1jB}^{(i)} = f_0 \sum_{l=1}^{512} A_{1l} e^{-2\pi j \sqrt{-1} ((511+l)/2048)} \quad (\text{A-VI-6-6})$$

onde A_{1l} é a l -ésima intensidade dos impulsos (em cada transição) dada por

$$\begin{aligned} A_{1l} &= f_3(l) - f_3(l-1) \\ &= \text{sen} \left(\frac{2p(511+l)}{2047} \right) - \text{sen} \left(\frac{2p(510+l)}{2047} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-VI-6-7})$$

De $i = 1023$ a $i = 1024$, temos 2 (dois) platôs e 1 (uma) transição. Portanto, o coeficiente de Fourier do impulso correspondente é

$$\begin{aligned} c_{1j1024}^{(i)} &= A_{513} f_0 e^{-2\pi j \sqrt{-1} (1024/2048)} \\ &= A_{513} f_0 e^{-\pi j \sqrt{-1}} \end{aligned} \quad (\text{A-VI-6-8})$$

onde A_{513} é a intensidade do impulso na transição, isto é,

$$\begin{aligned} A_{513} &= f_4(1024) - f_3(1023) \\ &= -\text{sen } 2p(1023/2047) \\ &= -\text{sen} \left(\frac{2046p}{2047} \right) \end{aligned} \quad (\text{A-VI-6-9})$$

Para $i = 1024, \dots, 1515$, não há transições. Para $i = 1515, \dots, 1535$, temos 21 platôs e 20 transições. Portanto, os coeficientes de Fourier do trem de impulsos correspondente são

$$c_{2jA}^{(i)} = -0,05 f_0 \sum_{l=1}^{20} e^{-2\pi j \sqrt{-1}((1515+l)/2048)} \quad (\text{A-VI-6-10})$$

De $i = 1535$ a $i = 1536$, temos 2 (dois) platôs e 1 (uma) transição. Portanto, o coeficiente de Fourier do impulso correspondente é

$$\begin{aligned} c_{2jB1536}^{(i)} &= A_{1536} f_0 e^{-2\pi j \sqrt{-1}(1536/2048)} \\ &= A_{1536} f_0 e^{-3\pi j \sqrt{-1}/2} \end{aligned} \quad (\text{A-VI-6-11})$$

onde A_{1536} é a intensidade do impulso na transição, isto é,

$$\begin{aligned} A_{1536} &= f_6(1536) - f_5(1535) \\ &= \text{sen } 2p(1536/2047) - (-1) \\ &= \text{sen}\left(\frac{3072p}{2047}\right) + 1 \end{aligned} \quad (\text{A-VI-6-12})$$

Para $i = 1536, \dots, 2047$, temos 512 platôs e 511 transições. Portanto, os coeficientes de Fourier do trem de impulsos correspondente são

$$c_{2jB}^{(i)} = f_0 \sum_{l=2}^{512} A_{2l} e^{-2\pi j \sqrt{-1}((1535+l)/2048)} \quad (\text{A-VI-6-13})$$

onde A_{2l} é a l -ésima intensidade dos impulsos (em cada transição) dada por

$$\begin{aligned} A_{2l} &= f_6(l) - f_6(l-1) \\ &= \text{sen}\left(\frac{2p(1535+l)}{2047}\right) - \text{sen}\left(\frac{2p(1534+l)}{2047}\right) \end{aligned} \quad (\text{A-VI-6-14})$$

De $i = 2047$ a $i = 2048$, temos 2 (dois) platôs e 1 (uma) transição. Portanto, o coeficiente de Fourier do impulso correspondente é

$$c_{2jB2048}^{(i)} = A_{2048} f_0 e^{-2\pi j \sqrt{-1}} \quad (\text{A-VI-6-15})$$

onde A_{2048} é a intensidade do impulso na transição, isto é,

$$\begin{aligned}
 A_{2048} &= f_1(0) - f_6(2047) \\
 &= -\text{sen } 2p
 \end{aligned}
 \tag{A-VI-6-16}$$

Finalmente, os coeficientes de Fourier são calculados de

$$c_j = \frac{1}{2\pi f_0 \sqrt{-1}} \left(c_{1jA}^{(1)} + c_{1j20}^{(1)} + c_{1jB}^{(1)} + c_{1j1024}^{(1)} + c_{2jA}^{(1)} + c_{2jB1536}^{(1)} + c_{2jB}^{(1)} + c_{2jB2048}^{(1)} \right)$$

(A-VI-6-17)

Observando-se as equações acima, conclui-se que f_0 se cancela e, portanto, é irrelevante para o cálculo.

Os coeficientes de Fourier desta forma de onda foram calculados usando o programa em MATLAB descrito abaixo. O programa pergunta ao usuário o número total de degraus da forma de onda, a frequência do sinal (o programa pode ser alterado para tornar desnecessária esta pergunta) e o número de harmônicos desejados. O programa considera a forma de onda especificada por (2). O programa reporta a amplitude (relativa à fundamental) e o ângulo de fase dos harmônicos da forma de onda. A Tabela III-9 mostra os valores calculados das amplitudes (relativas à fundamental) dos primeiros 100 harmônicos do sinal de triac.

```

% Programa Harmônicos Ímpares
% Calcula os harmônicos de uma forma de onda de tiristores
%
n1 = input('Digite o número de degraus entre 0 e t1 = 491');
n2 = input('Digite o número de degraus entre 0 e t2 = 511');
n3 = input('Digite o número de degraus entre 0 e t3 = 1023');
n4 = input('Digite o número de degraus entre 0 e t4 = 1515');
n5 = input('Digite o número de degraus entre 0 e t5 = 1535');
n = input('Digite o número total de degraus = 2048');
f = input('Digite a frequência = 60');
Num = input('Digite o número de harmônicos = 100');

P = 3.1415;
T = 1/f;

dif1 = n2-n1-1;
dif2 = n5-n4;
dif3 = n3-n2;
dif4 = n-n5-1;
ii=sqrt(-1);

A1 = 0.05;
A2 = -0.05;

for i = 1:dif1,
    for j = 1:Num,
        c1na(i,j)=A1*f*exp((-j*2*pi*(n1+i)/n)*ii);
    
```



```

    end
end

A1_20 = sin(2*P*511/2047)-0.95;
for j = 1:Num,
    c1na(20,j)=A1_20*f*exp((-j*2*pi*511/n)*ii);
end

for i = 1:dif2,
    for j = 1:Num,
        c2na(i,j)=A2*f*exp((-j*2*pi*(n4+i)/n)*ii);
    end
end

C1na = sum(c1na,1);
C2na = sum(c2na,1);
Cna = (C1na+C2na);

for j = 1:Num,
    Cna(j)=Cna(j)/(j*2*pi*f*ii);
end

for i = 1:dif3,
    A_1(i) = sin(2*P*(n2+i)/(n-1))-sin(2*P*(n2+i-1)/(n-1));
    for j = 1:Num,
        c1nb(i,j)=A_1(i)*f*exp((-j*2*pi*(n2+i)/n)*ii);
    end
end

dif31 = dif3+1;
A_1(dif31) = -sin(2*P*(n2+dif3)/(n-1));
for j = 1:Num,
    c1nb(dif31,j)=A_1(dif31)*f*exp((-j*2*pi*(n2+dif31)/n)*ii);
end

A_2(1) = sin(2*P*1536/2047)-(-1);
for j = 1:Num,
    c2nb(1,j)=A_2(1)*f*exp((-j*2*pi*1536/n)*ii);
end

for i = 2:dif4,
    A_2(i) = sin(2*P*(n5+i)/(n-1))-sin(2*P*(n5+i-1)/(n-1));
    for j = 1:Num,
        c2nb(i,j)=A_2(i)*f*exp((-j*2*pi*(n5+i)/n)*ii);
    end
end

dif41 = dif4+1;
A_2(dif41) = -sin(2*P);
for j = 1:Num,
    c2nb(dif41,j) = A_2(dif41)*f*exp((-j*2*pi)*ii);
end

C1nb = sum(c1nb,1);
C2nb = sum(c2nb,1);
Cnb = (C1nb+C2nb);

for j = 1:Num,
    Cnb(j)=Cnb(j)/(j*2*pi*f*ii);
end

```

```

Cn = Cna+Cnb;
Cn_mod = abs(Cn);
format long
Cn_mod = (Cn_mod/Cn_mod(1))*100
Cn_fase = 180*angle(Cn)/pi

```

A-VI-7 Sinal trapezoidal

O sinal foi gerado por um gerador HP3245A usando o programa abaixo (linguagem de programação do próprio gerador).

```

#include <formatio.h>
#include <gpib.h>
static char comando[40];
static int num, Ger = 9;
static float TensProg;
static float Angulo = 0;
static short endereco[2];

endereco[0] = Ger;
endereco[1] = -1;
TensProg = 6;

SendIFC (0);
SetRWLS (0, endereco);
Send (0, Ger, "RST",3, 2);
Send (0, Ger, "SCRATCH",7, 2);

Send (0, Ger, "USE 0",5, 2);
Send (0, Ger, "FREQ 60",7, 2);
Fmt (comando, "%s<PANG %f[b4p5]", Angulo); //compensação do defasamento
num = StringLength (comando);
Send (0, Ger, comando, num, 2);
Send (0, Ger, "APPLY ACV 10",12, 2);

Send (0, Ger, "SUB SQUARE_WV",13, 2);
Send (0, Ger, " REAL SQUARE_WV (2047)",22, 2);
Send (0, Ger, " PI = 3.1415",12, 2);
Send (0, Ger, " FOR I = 0 TO 19",16, 2);
Send (0, Ger, " SQUARE_WV(I) = 0.05*I",23, 2);
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);

Send (0, Ger, " FOR I = 20 TO 1003",19, 2);
Send (0, Ger, " SQUARE_WV(I) = 1.0",20, 2);
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);

Send (0, Ger, " FOR I = 1004 TO 1023",21, 2);
Send (0, Ger, " SQUARE_WV(I) = 1.0-0.05*(I-1004)",34, 2);

```

```

Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);

Send (0, Ger, " FOR I = 1024 TO 1043",21, 2);
Send (0, Ger, " SQUARE_WV(I) = -0.05*(I-1024)",31, 2);
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);

Send (0, Ger, " FOR I = 1044 TO 2028",21, 2);
Send (0, Ger, " SQUARE_WV(I) = -1.0",21, 2);
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);

Send (0, Ger, " FOR I = 2029 TO 2047",21, 2);
Send (0, Ger, " SQUARE_WV(I) = -1.0+0.05*(I-2028)",35, 2);
Send (0, Ger, " NEXT I",7, 2);

Send (0, Ger, "SUBEND",6, 2);
Send (0, Ger, "CALL SQUARE_WV",14, 2);
Send (0, Ger, "USE 100",7, 2);
Send (0, Ger, "FREQ 60",7, 2);
Fmt (comando, "%s<APPLY WFV %f[b4p5],SQUARE_WV", TensProg);
num = StringLength (comando);
Send (0, Ger, comando, num, 2);
Send (0, Ger, "PHSYNC",6, 2);

```

A forma de onda sintetizada é

$$f(i) = \begin{cases} 0,05 i & i = 0, \dots, 19 \\ 1,0 & i = 20, \dots, 2003 \\ 1,0 - 0,05 \cdot (i - 1004) & i = 1004, \dots, 1023 \\ -0,05 \cdot (i - 1024) & i = 1024, \dots, 1043 \\ -1,0 & i = 1044, \dots, 2028 \\ -1,0 + 0,05 \cdot (i - 2028) & i = 2029, \dots, 2047 \end{cases} \quad (\text{A-VI-7-1})$$

A forma de onda está mostrada na Fig. III-16. Alguns harmônicos não aparecem na figura devido à escala escolhida.

Para $i = 0, \dots, 20$, temos 21 platôs e 20 transições. Portanto, os coeficientes de Fourier do trem de impulsos correspondente são

$$c_{1j}^{(i)} = 0,05 f_0 \sum_{l=1}^{20} e^{-2\pi j \sqrt{-1}((l-1)/2048)} \quad (\text{A-VI-7-2})$$

Para $i = 20, \dots, 1004$, não há transições. Para $i = 1004, \dots, 1044$, temos 41 platôs e 40 transições. Portanto, os coeficientes de Fourier do trem de impulsos correspondente são

$$c_{2j}^{(1)} = -0,05 f_0 \sum_{l=1}^{40} e^{-2\pi j \sqrt{-1} ((1003+l)/2048)} \quad (\text{A-VI-7-3})$$

Para $i = 1044, \dots, 2028$, não há transições. Para $i = 2028, \dots, 2048$, temos 21 platôs e 20 transições. Portanto, os coeficientes de Fourier do trem de impulsos correspondente são

$$c_{3j}^{(1)} = 0,05 f_0 \sum_{l=1}^{20} e^{-2\pi j \sqrt{-1} ((2027+l)/2048)} \quad (\text{A-VI-7-4})$$

Finalmente, os coeficientes de Fourier são calculados de

$$c_j = \frac{1}{2\pi f_0 \sqrt{-1}} (c_{1j}^{(1)} + c_{2j}^{(1)} + c_{3j}^{(1)}) \quad (\text{A-VI-7-5})$$

Os coeficientes de Fourier desta forma de onda foram calculados usando o programa em MATLAB descrito abaixo. O programa pergunta ao usuário o número total de degraus da forma de onda, a frequência do sinal (o programa pode ser alterado para tornar desnecessária esta pergunta) e o número de harmônicos desejados. O programa considera a forma de onda trapezoidal especificada por (1). O programa reporta a amplitude (relativa à fundamental) e o ângulo de fase dos harmônicos da forma de onda. A Tabela III-11 mostra os valores calculados das amplitudes (relativas à fundamental) dos primeiros 269 harmônicos do sinal trapezoidal.

```
% Programa Onda trapezoidal
% Calcula os harmônicos de uma forma de onda trapezoidal
%
n1 = input('Digite o número de degraus entre 0 e t1 = 20');
n2 = input('Digite o número de degraus entre 0 e t2 = 1004');
n3 = input('Digite o número de degraus entre 0 e t3 = 1044');
n4 = input('Digite o número de degraus entre 0 e t4 = 2028');
n5 = input('Digite o número de degraus entre 0 e t5 = 2048');
n = input('Digite o número total de degraus = 2048');
f = input('Digite a frequência = 60');
Num = input('Digite o número de harmônicos = 269');

dif1 = n3-n2;
dif2 = n5-n4;
```

```

ii=sqrt(-1);

A1 = 0.05;
A2 = -0.05;

for i = 1:n1,
    for j = 1:Num,
        c1na(i,j)=A1*f*exp((-j*2*pi*(i-1)/n)*ii);
    end
end

for i = 1:dif1,
    for j = 1:Num,
        c2na(i,j)=A2*f*exp((-j*2*pi*(n2+i-1)/n)*ii);
    end
end

for i = 1:dif2,
    for j = 1:Num,
        c3na(i,j)=A1*f*exp((-j*2*pi*(n4+i-1)/n)*ii);
    end
end

C1na = sum(c1na,1);
C2na = sum(c2na,1);
C3na = sum(c3na,1);
Cna = C1na+C2na+C3na;

for j = 1:Num,
    Cna(j)=Cna(j)/(j*2*pi*f*ii);
end

Cn = Cna;
Cn_mod = abs(Cn);
format long
Cn_mod = (Cn_mod/Cn_mod(1))*100
Cn_fase = 180*angle(Cn)/pi

```

APÊNDICE VII

EXTENSÃO DO ALGORITMO DE SWERLEIN PARA A MEDIÇÃO DE DESLOCAMENTO DE FASE ENTRE HARMÔNICOS DE SINAIS PERIÓDICOS ARBITRÁRIOS

A-VII-1 Especificações do programa

O programa foi elaborado em *LabWindows CVI* pelo autor desta tese para rodar em qualquer plataforma com sistema operacional *Windows* que contenha interface IEEE 488.2 da National Instruments.

A versão apresentada aqui pode ser usada na medição das amplitudes e dos ângulos de fase dos harmônicos de dois sinais arbitrários com frequência fundamental de 2 Hz até 1 kHz e com tensões de 1 mV até 700 V. O algoritmo também determina a diferença relativa das amplitudes e o deslocamento de fase entre harmônicos de mesma ordem. O algoritmo tem exatidão elevada com frequências fundamentais entre 10 Hz e 100 Hz e na faixa de tensão de 10 V. O algoritmo tem tempo de medição otimizado se o número de harmônicos especificado pelo usuário não excede 64. O ruído e a distorção harmônica do sinal devem ser tais que a frequência fundamental possa ser determinada pelo cruzamento pelo nulo do sinal.

Um computador Pentium 75 MHz (mais tarde um Pentium 166 MHz) contendo uma placa GPIB da National Instruments (AT-GPIB/TNT e software NI777154-01) foi usado. Um gerador de sinais de dois canais HP 3245A e um DVM HP3458A com certificado de calibração recente no modo DCV foram usados.

A-VII-2 Descrição do programa

Quando rodamos o programa, aparece um painel inicial contendo o menu principal: *Configuração*, *Medição*, *Incerteza*, *Resultados* e *Sair*. Pode-se selecionar indistintamente qualquer um destes campos para ver o que acontece. Cada um dos campos apresentará um novo painel. Com exceção do campo *Sair* que abortará o painel inicial. O usuário pode verificar os painéis de *Configuração*, *Medição*, *Incerteza* ou *Resultados* pressionando os campos correspondentes no topo do painel. O programa é

iniciado pressionando-se o campo *Configuração*. O painel de *Configuração* então se abre (Fig. A-VII-1). Há três conjuntos de campos: (a) *Parâmetros de entrada*, (b) *Correções* e (c) *Inicialização*. No campo *Inicialização*, selecionando-se os endereços dos DVMs (mestre e escravo) nos campos homônimos e ajustando-se a chave na posição *ON*, o DVM é configurado para receber comandos pela interface IEEE 488.2. Estando tudo bem, o LED ficará vermelho e um aviso será emitido alertando o usuário de que este deverá fazer uma autocalibração do DVM (função ACAL DCV). Pressionando-se OK na tela de aviso, retornamos ao painel de *Configuração*. O usuário deve então inserir o número de harmônicos do sinal que serão amostrados sem *aliasing* no campo *Número (#) de harmônicos*.

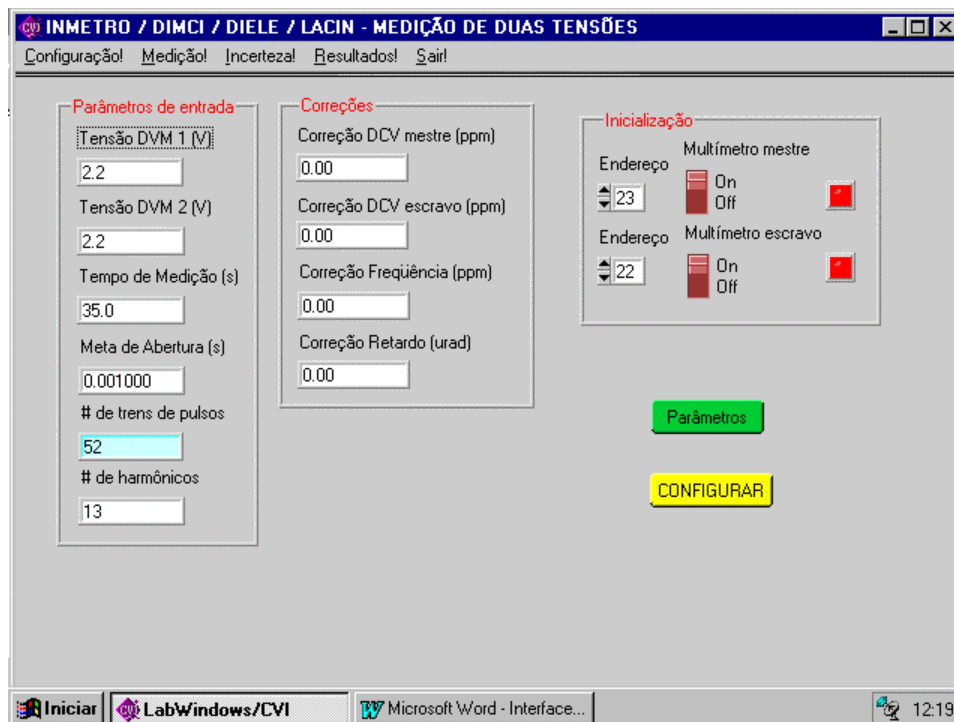


Fig. A-VII-1. Painel de *Configuração* (antes de pressionar o botão *CONFIGURAR*).

O algoritmo pressupõe uma calibração trimestral da função de tensão contínua do DVM com relação a um padrão de tensão contínua externo. No campo *Correções*, os campos *Correção DCV mestre (ppm)* e *Correção DCV escravo (ppm)* são reservados para a introdução de uma constante de correção (em partes em 10^6) obtida do certificado de calibração da função de tensão contínua dos DVMs. O algoritmo também mede a freqüência fundamental usando a base de tempo calibrada do DVM mestre. A calibração desta base de tempo não é necessária para a operação do algoritmo. Mas, é

necessária se o usuário deseja ter informações sobre o valor da frequência fundamental. Uma calibração semestral da base de tempo pode ser feita com relação a um padrão de frequência externo. O campo *Correção Frequência (ppm)* é reservado para a introdução de uma constante de correção (em partes em 10^6) obtida do certificado de calibração da base de tempo do DVM mestre. O campo *Correção Retardo (μ rad)* é reservado para a introdução de uma correção do ângulo correspondente à diferença entre as bases de tempo dos dois DVMS devido à latência do disparador externo do DVM mestre e às respostas de fase dos DVMS. Este campo não precisa ser preenchido numa primeira tentativa. Ele será preenchido após o processo de calibração, descrito mais adiante, ter sido realizado. O parâmetro de entrada *Tempo de Medição (s)* é tipicamente fixado em 35 s. O parâmetro *Meta de Abertura (s)* é fixado em 0,001 s.

O botão *CONFIGURAR* desta vez estará iluminado e o usuário poderá pressioná-lo. Uma vez tendo-o pressionado, uma tela de aviso informará o usuário do momento de aplicar o sinal de entrada ao DVM. Pressionando OK na tela de aviso, a configuração do DVM terá início. Inicialmente, os DVMS são configurados no modo ACV e os valores eficazes esperados das tensões aplicadas no DVM mestre e DVM escravo são medidos e reportados no campo *Tensão DVM 1 (V)* e *Tensão DVM 2 (V)*, respectivamente. As faixas de tensão dos DVMS são selecionadas automaticamente de modo que os valores de pico dos sinais de entrada não sobrecarreguem os DVMS.

Quando o botão *CONFIGURAR* é pressionado, o usuário é solicitado a aplicar o sinal de entrada e aguardar até que o mesmo se estabilize. Inicialmente, a fim de se calibrar o sistema, os dois DVMS são alimentados em paralelo por um único sinal. O painel informa ao usuário de que a configuração foi bem sucedida e instrui o usuário a iniciar a medição. Mas antes de proceder à medição, o usuário pode pressionar o botão *Parâmetros* para verificar os parâmetros de amostragem do DVM mestre que foram calculados pelo algoritmo. Ao pressioná-lo, abre-se o painel *Parâmetros de Amostragem* (Fig. A-VII-2). O cálculo dos parâmetros de amostragem é equivalente ao descrito nos Apêndices I e IV.

Os valores calculados do número de amostras em cada trem, do intervalo de amostragem e do tempo de abertura são registrados, respectivamente, nos campos *Número de amostras*, *Intervalo entre amostras (s)* e *Tempo de Abertura A/D (s)*. O número de trens de amostras usado é reportado no campo homônimo. Como visto na seção II-6, o número de trens de amostras deve ser de no mínimo 4 (quatro) vezes o número de harmônicos escolhidos. O valor da frequência fundamental medido na base

de tempo “descalibrada” do DVM é reportado no campo *Frequência da fundamental (Hz)*. O valor de frequência fundamental, usando a base de tempo calibrada com relação a um padrão externo, é relatada no campo *Frequência Calibrada (Hz)*.

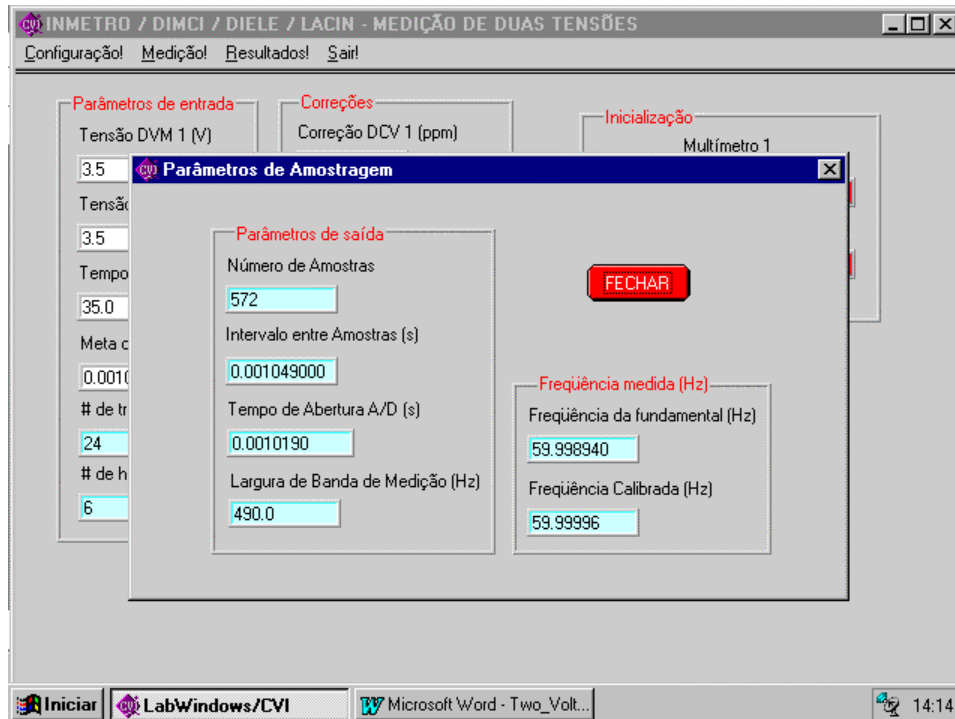


Fig. A-VII-2. Painel de *Parâmetros de Amostragem*.

O usuário acessa o painel de *Medição* pressionando o campo homônimo no topo do painel. O painel de *Medição* então se abre. O botão *MEDIR* estará iluminado. A medição se inicia ao se pressionar este botão. O campo *Iteração* será incrementado a cada trem de amostras (um total de $4m$, onde m é o número de harmônicos escolhidos pelo usuário). Para cada trem de amostras, os dados são transferidos para o computador através da interface IEEE 488.2. Todo o processamento é feito no computador. A cada iteração, valores temporários das amplitudes (relativos à fundamental) e dos ângulos de fase dos harmônicos são apresentados nas listas *Amplitude relativa (%)* e *Ângulo de fase (graus)*, respectivamente. Há listas tanto no campo *Harmônicos (mestre)* (para o sinal aplicado ao DVM mestre) quanto no campo *Harmônicos (escravo)* (para o sinal aplicado no DVM escravo). As estimativas finais das amplitudes (relativas à fundamental) e dos ângulos de fase (supondo um ângulo de fase de referência da fundamental de -90 graus) de cada harmônico são então apresentados nestas mesmas listas. O valor eficaz da fundamental, e o valor eficaz da tensão, sem e com a

componente C.C., são apresentadas nos campos *Fundam. (V)*, *A.C. RMS (V)* e *C.C. RMS (V)*, respectivamente. A distorção harmônica total é reportada no campo *THD (%)*. Isto é feito tanto para o DVM mestre (no campo *Mestre*) quanto para o DVM escravo (no campo *Escravo*). A Fig. A-VII-3 mostra como ficou o painel de *Medição* do exemplo após pressionar-se o botão *MEDIR*. O usuário, se assim o desejar poderá repetir a medição, bastando para isso pressionar novamente o botão *MEDIR*.

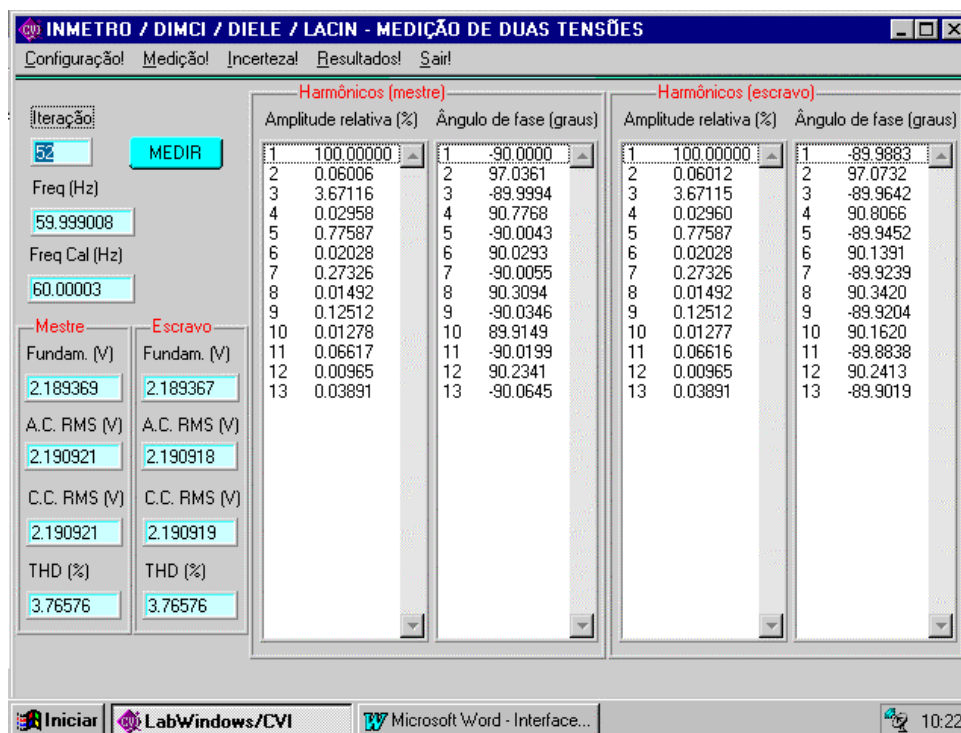


Fig. A-VII-3. Painel de *Medição* (após pressionar o botão *MEDIR*).

Para dar continuidade ao programa, é necessário pressionar o campo *Incerteza* no menu principal. O painel de *Avaliação de incerteza de medição* então se abre. O conjunto de campos à esquerda reporta as contribuições de incerteza associadas às correções dos erros sistemáticos dos DVMs e às variâncias dos ruídos adicionados a cada sinal. Os campos $u(Kf) 1$ (ppm) e $u(Kf) 2$ (ppm) reportam as incertezas das correções da resposta de frequência (na frequência fundamental) do condicionador passivo e do amplificador ativo de sinal de entrada, para o DVM mestre e o DVM escravo, respectivamente. O campo $u(Ka)$ (ppm) reporta a incerteza da correção do erro introduzido pelo atenuador de entrada. Os campos $u(Kj) 1$ (ppm) e $u(Kj) 2$ (ppm) reportam a incerteza do conteúdo harmônico da forma de onda (nestes campos somente as contribuições na frequência fundamental são apresentadas). Os campos $u(Vi') 1$

(ppm) e $u(Vi')$ 2 (ppm) reportam a incerteza das variâncias do ruído adicionado aos sinais. O campo $u(K)$ (ppm) reporta a incerteza da correção do erro da função DCV listado no certificado de calibração do DVM. O campo $u(Ra)$ (ppm) reporta a incerteza da resolução de amplitude do IADC. O campo $u(Kl)$ (ppm) reporta a incerteza da correção da linearidade do instrumento. O campo $u(Kg)$ (ppm) reporta a incerteza da correção do erro de ganho do IADC para tempos de integração menores do que 1 s. O campo $u(D)$ (ppm) reporta a incerteza associada ao limite de erro R_T (vide seção II-6)

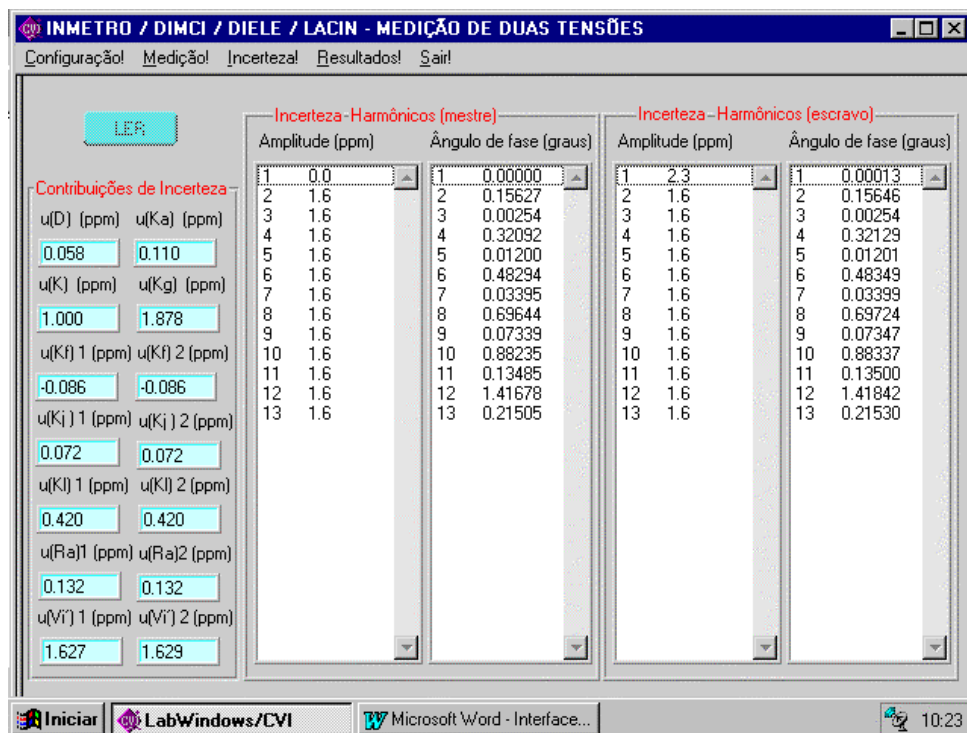


Fig. A-VII-4. Painel de *Incerteza*.

devido à resolução da base de tempo do IADC. As listas à direita (tanto para o DVM mestre quanto para o DVM escravo) reportam a incerteza de medição da amplitude relativa à fundamental (obtida de (II-7-3)) e a incerteza de medição do ângulo de fase de cada harmônico (obtida de (II-9-8b)). A tecla *LER* desta vez estará iluminada e o usuário poderá pressioná-la. Uma vez tendo-a pressionado, o processo de avaliação de incerteza de medição terá início e os valores calculados serão inseridos nos campos respectivos (Fig. A-VII-4).

Pressionando-se o campo *Resultados* no menu principal, o painel *Diferença entre Mestre e Escravo* então se abre. O botão *LER* desta vez estará iluminado e o usuário poderá pressioná-lo. Uma vez tendo-o pressionado, a lista *Amplitude (ppm)*

mostra a diferença relativa entre as amplitudes de harmônicos de mesma ordem de cada sinal em partes em 10^6 . A lista *Ângulo de fase (urad)* mostra o deslocamento de fase entre harmônicos de mesma ordem de cada sinal em microradianos.

Para o exemplo considerado, a diferença relativa entre as amplitudes das fundamentais dos dois sinais é de aproximadamente 1 (uma) parte em 10^6 (Fig. A-VII-5). Em outras palavras, a amplitude da fundamental do sinal aplicado ao DVM escravo tem uma amplitude 1 (uma) parte em 10^6 menor do que a correspondente do sinal aplicado ao DVM mestre. O deslocamento de fase entre os dois sinais é de aproximadamente $-205 \mu\text{rad}$. Em outras palavras, o ângulo de fase da fundamental do sinal aplicado ao DVM escravo está atrasado de $205 \mu\text{rad}$ do correspondente do sinal aplicado ao DVM mestre. Este deslocamento de fase corresponde a um atraso de aproximadamente 544 ns em 60 Hz.

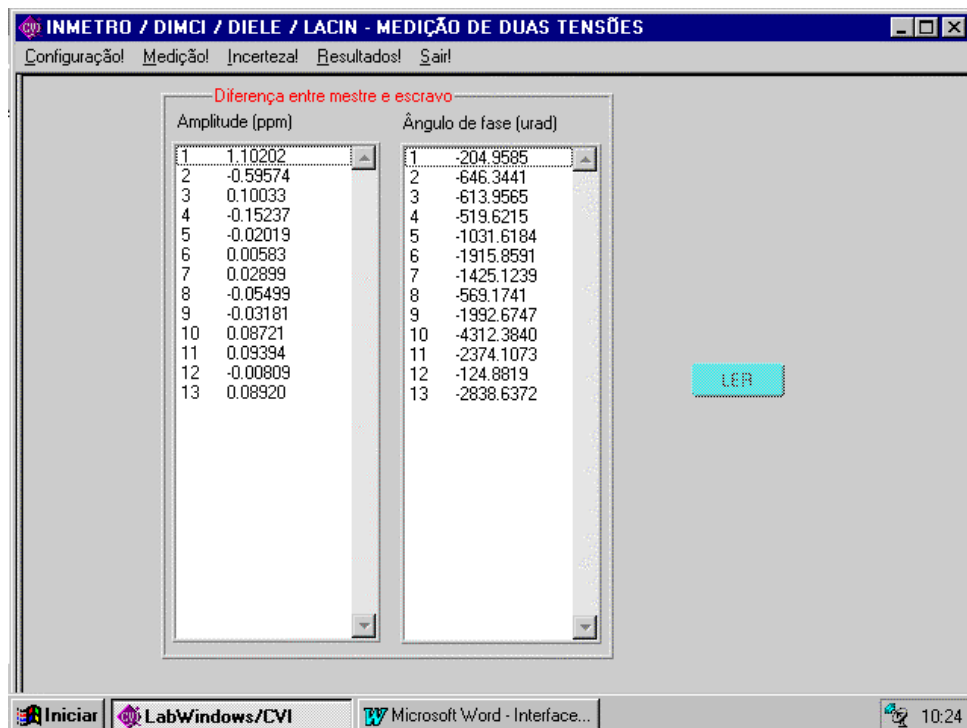


Fig. A-VII-5. Painel *Diferenças entre Mestre e Escravo*.

Os valores da diferença relativa entre as amplitudes e do deslocamento de fase das fundamentais dos dois sinais são então inseridos no campo *Correções* do painel de *Configuração* (Fig. A-VII-6). No exemplo considerado, não se teve acesso ao certificado de calibração dos DVMs e supos-se que as correções do modo DCV dos DVMs fossem nulas. A medição acima nos mostra que se estava errado ao fazer esta

suposição. No campo *Correção DCV escravo (ppm)*, insere-se agora o valor 1,0 (em partes em 10^6). Supusemos também que a correção do retardo era nula. No campo *Correção Retardo (μ rad)*, insere-se agora o valor 205 (em μ rad) (valor positivo, pois se trata de uma correção do erro negativo).

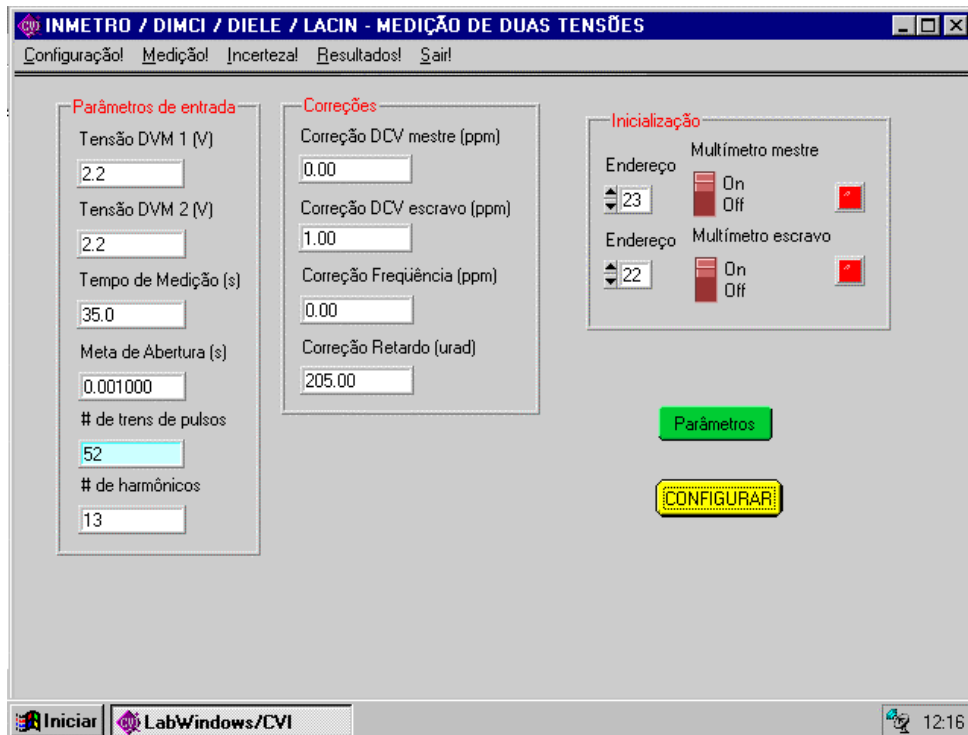


Fig. A-VII-6. Painel de *Configuração* (após inserção das correções).

Pressionando-se novamente o campo *Medição* no menu principal, o painel homônimo então se abre. Repetindo então o processo de medição descrito acima, as estimativas das amplitudes (relativas à fundamental) e dos ângulos de fase de cada harmônico com as correções inseridas, são então apresentadas no painel de *Medição* (Fig. A-VII-7). Compare com a Fig. A-VII-3. Pressionando-se novamente o campo *Resultados* no menu principal, o painel *Diferença entre Mestre e Escravo* então se abre. Obtem-se agora valores aproximadamente nulos para a diferença relativa entre as amplitudes e para o deslocamento de fase das fundamentais dos dois sinais, como era de se esperar dado que um único sinal está de fato sendo aplicado em paralelo às entradas dos dois DVMS (Fig. A-VII-8). Se a diferença relativa entre as amplitudes e o deslocamento de fase das fundamentais dos dois sinais não tiverem se anulado suficientemente, o processo deve ser repetido após um intervalo de tempo suficiente para permitir a estabilização térmica do sistema.

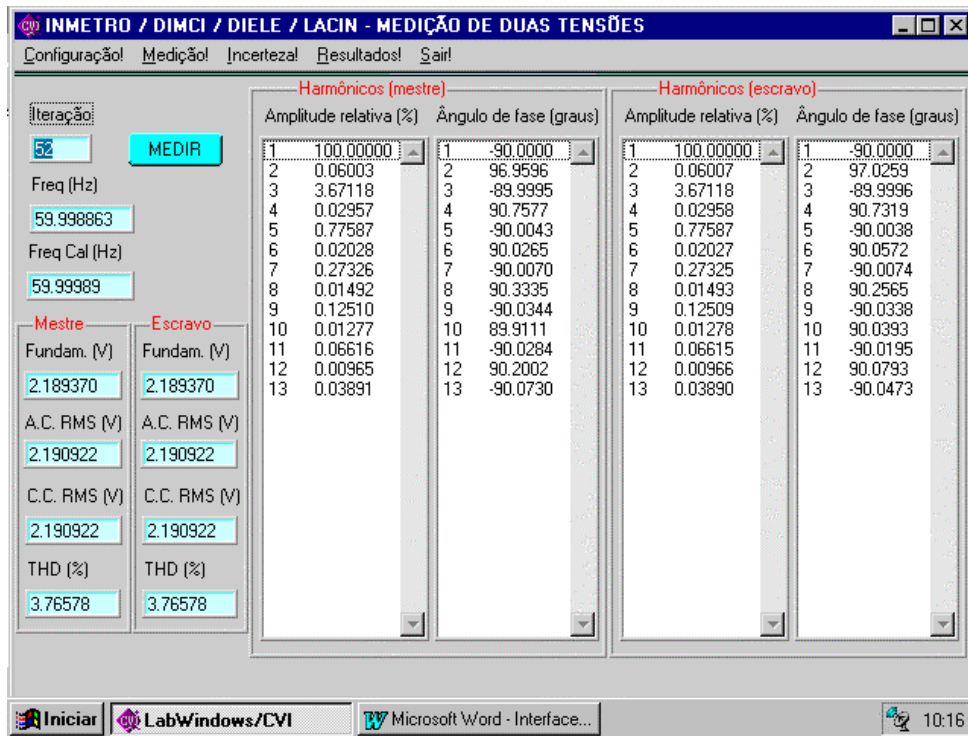


Fig. A-VII-7. Painel de *Medição* (após inserção das correções).



Fig. A-VII-8. Painel de *Diferenças entre Mestre e Escravo* (após inserção das correções).

O sistema calibrado da maneira descrita acima pode então ser usado para efetuar medições de dois sinais distintos. Sinais produzidos por geradores (ou canais) distintos são então aplicados separadamente a cada um dos DVMs.

Para refazer qualquer parte do programa, basta pressionar o campo desejado no menu principal e repetir o procedimento descrito acima. Se a qualquer momento o usuário desejar sair do programa, basta pressionar o campo *Sair* no menu principal. A tela inicial reaparece e, caso realmente seja do desejo do usuário sair do programa, este deverá pressionar novamente o campo *Sair*.

Obs. O programa emite avisos quando não pode ser rodado. Isto ocorre quando a interface GPIB não está operando (possível ausência de algum DVM ou uma interface desconectada), quando a tensão é menor do que 0,00007 V (possível ausência do gerador, gerador desligado ou cabo desconectado), quando não há memória suficiente nos DVMs para as amostras necessárias, quando a tensão dos sinais excede 700 V, quando a frequência do sinal é nula, e quando o tempo de integração é muito pequeno.

APÊNDICE VIII

ESTIMAÇÃO CLÁSSICA DE PARÂMETROS DE AJUSTE DE UMA SÉRIE DE FOURIER TRUNCADA A UM CONJUNTO DE LEITURAS DE UM VOLTÍMETRO DIGITAL INTEGRADOR

A-VIII-1 Inferência clássica

O problema de inferência clássica em ciência e tecnologia de medição envolve os passos seguintes:

- (1) Uma variável aleatória é atribuída somente às grandezas aleatórias (estocásticas) observáveis e não observáveis nas medições. Exemplos de grandezas observáveis são leituras de instrumentos de medir. Exemplos de grandezas não observáveis são erros aleatórios de medição.
- (2) Uma variável não aleatória é atribuída às grandezas (ou parâmetros) observáveis ou não observáveis (desconhecidas) que podemos supor fixas durante a medição (ou parte dela). Exemplos de grandezas observáveis são os instantes de tempo nos quais tomamos as leituras (no caso de modelos lineares). Exemplos de grandezas (ou parâmetros) desconhecidas são os parâmetros de ajuste de uma função aos dados medidos. Uma variável não aleatória é atribuída às correções para os efeitos sistemáticos, uma vez que as mesmas são fixas durante a medição.
- (3) Estas variáveis aleatórias e não aleatórias devem obedecer todas as relações e restrições das grandezas físicas envolvidas. Um modelo de medição que relaciona tais variáveis é portanto introduzido.
- (4) Uma maneira de obter conhecimento é observar o resultado de um novo experimento. Como estas observações são geralmente sujeitas a fatores imprevisíveis, pode ser desejável incorporá-las a um modelo de probabilidade. O modelo conterá grandezas desconhecidas que permanecem constantes e grandezas que variam de um modo imprevisível (aleatório) durante o curso da investigação. A fim de determinar a verossimilhança, deve-se ponderar sobre as razões físicas que fornecem os dados observados. Uma distribuição de amostragem é atribuída que descreve nosso

conhecimento sobre os erros aleatórios (ruído). A finalidade de se atribuir uma distribuição de amostragem ao ruído é definir a faixa de diferentes variações possíveis dos dados devido ao ruído que se irá permitir na inferência, uma das quais será realmente realizada. Como a matriz de covariância geralmente não está disponível, ela é algumas vezes substituída por uma matriz de covariância diagonal com variância global (de ruído) desconhecida se as grandezas aleatórias são do mesmo tipo e independentemente medidas sob condições similares. A estimação da variância de ruído é de grande interesse. Ela indica quão bem os dados aparecem à luz do modelo e podem ajudar alguém a decidir se tenta um novo modelo, se controla uma grandeza de influência ou mesmo se constrói um novo instrumento.

- (5) Ao fazer uma experiência, o investigador freqüentemente conhece ou deseja supor que a função de densidade de probabilidade (*fdp*) da qual ele toma observações tem uma certa forma funcional $f(y; \theta)$, onde o parâmetro θ não é conhecido mas é a grandeza que se deseja determinar. Um investigador seleciona observações de uma *fdp* e com base nestas observações ele tenta estimar o valor do parâmetro desconhecido θ . Há dois tipos de estimação: estimação pontual e estimação de intervalo.
- (6) O problema da estimação pontual é este: A *fdp* $f(y; \theta)$ da amostra observável representa uma família de *fdps* – uma para cada valor de θ no espaço de parâmetros Ω . O procedimento é usar estatísticas apropriadas para estimar θ . Um estimador ótimo será aquele que minimiza o erro médio quadrático. Entretanto, um estimador que minimize o erro médio quadrático para *todos* os valores de θ quase nunca existirá. É algumas vezes razoável restringir a classe dos estimadores àqueles que são não enviesados. Se isto é feito, então o estimador de θ com erro quadrático mínimo será um estimador (não enviesado) com variância mínima. Há vários métodos para se achar estimadores não enviesados de variância mínima.
- (7) O método da verossimilhança máxima é um método de estimação muito útil e pode ajudar a se achar estimadores não enviesados de variância mínima. O processo adotado em teoria de modelos lineares consiste dos seguintes passos: (a) Ache o estimador de verossimilhança máxima (MLE) de θ . (b)

Ajuste-o se necessário de modo que se torne não enviesado. (c) O estimador não enviesado de variância mínima é desconhecido mas espera-se que ele seja igual ao estimador não enviesado obtido. Verifique se a variância do estimador obtido é igual ao limite de variância mínima definido pelo teorema de Cramèr-Rao.

- (8) Quando a estimação pontual é usada, não há um enunciado de probabilidade sobre a incerteza da inferência. É desejável ter uma confiança de que o valor do parâmetro está dentro de limites especificados. Uma estimação pontual não atende este requisito. Isto sugere o uso de uma estimativa de intervalo, chamado de intervalo de confiança. Um *intervalo de confiança* é um intervalo aleatório cujos pontos extremos $l(\mathbf{Y})$ e $u(\mathbf{Y})$, onde $l(\mathbf{Y}) \leq u(\mathbf{Y})$, são funções das variáveis aleatórias observáveis tais que a probabilidade das desigualdades $l(\mathbf{Y}) \leq \theta \leq u(\mathbf{Y})$ serem satisfeitas é um nível de confiança $1 - \alpha$. O intervalo é denominado um intervalo de confiança $1 - \alpha$. A interpretação em termos de frequência é a seguinte: se para cada vetor aleatório observado \mathbf{y} as mesmas funções $l(\mathbf{y})$ e $u(\mathbf{y})$ são usadas, então com o decorrer do tempo a proporção dos intervalos que cobrirão o parâmetro desconhecido verdadeiro, é $1 - \alpha$. Muito embora observemos apenas um intervalo, temos uma confiança de $1 - \alpha$ que *este* intervalo cobre o parâmetro desconhecido θ . Na prática um conjunto de intervalos de confiança (para vários $1 - \alpha$) devem ser computados. Estes intervalos de confiança dão uma informação mais completa sobre o valor de θ .
- (9) Há duas situações distintas: (1) *Intervalos de confiança individuais*. Isto significa que cada θ_i é tratado individualmente, e um intervalo de confiança $1 - \alpha$ é determinado separadamente para cada θ_i . (2) *Intervalos de confiança simultâneos*. Isto significa que todos os θ_i são tratados simultaneamente, e intervalos de confiança são determinados para cada θ_i , tais que a probabilidade de que os q intervalos cubram simultaneamente seus θ_i respectivos é igual a $1 - \alpha$. Para cada problema, o investigador deve decidir que método usar. Como uma regra geral, *intervalos de confiança simultâneos* devem ser usados quando um investigador tomar uma decisão que dependa do seu “conhecimento” (alta probabilidade) dos valores aproximados (intervalos de confiança) de *todos* os θ_i simultaneamente.

Para simplificar a notação, o mensurando, a variável aleatória atribuída ao mesmo, e seus valores numéricos são denotados pelo mesmo símbolo.

A-VIII-2 Modelo do voltímetro digital integrador

Como mostrado em KYRIAZIS, CAMPOS (2004), os estágios de entrada do DVM e a amostragem não ideal introduzem vários efeitos sistemáticos que precisam ser corrigidos. O DVM integrador pode ser modelado por

$$k_{dc}y(t) = \frac{1}{t_{aper}} \cdot \int_{t-t_{aper}/2}^{t+t_{aper}/2} \{ h_{bw}(\tau) * [s(\tau) + n(\tau)] \} d\tau \cdot \sum_i \delta(t - it_{samp}) \quad (\text{A-VIII-2-1})$$

onde o símbolo * denota convolução, $s(\tau)$ e $n(\tau)$ são, respectivamente, o sinal (grandeza não aleatória desconhecida) aplicado e o ruído branco aditivo presente na entrada do DVM (grandeza aleatória não observável), $h_{bw}(\tau)$ é a resposta ao impulso dos estágios de entrada do DVM (grandeza não aleatória suposta conhecida), t_{aper} é o tempo de abertura (grandeza não aleatória observável), t_{samp} é o período de amostragem (maior do que t_{aper} para impedir erros de disparador muito rápido) (grandeza não aleatória observável), $y(t)$ é o sinal de saída cujo valor no instante it_{samp} é a i -ésima leitura do DVM (grandeza aleatória observável), e k_{dc} é a correção do erro do modo de tensão contínua do DVM (grandeza não aleatória suposta conhecida). Supõe-se que o ruído de amostragem dos circuitos internos do DVM é desprezível comparado com o ruído adicionado ao sinal. Também se supõe que a contribuição de incerteza associada com a resolução de amplitude do IADC possa ser desprezada. Devido ao fato do mesmo clock usado para a temporização da amostra ser também usado para estabelecer a base de tempo na medição de frequência, em princípio a incerteza da base de tempo do DVM é invisível. As incertezas associadas com as grandezas temporais são também desprezadas, uma vez que a inquietude (*jitter*) do tempo de amostragem e a distorção da base de tempo são supostos desprezíveis em comparação com o ruído superposto nas amostras.

Supondo que o sinal é uma forma de onda com frequência fundamental única f_0 (grandeza não aleatória suposta conhecida), o modelo no domínio da frequência é

$$k_{dc}Y(f) = f_s \cdot \sum_k H_{int}(f - kf_s) \cdot H_{bw}(f - kf_s) \cdot \left[\sum_j C_j \delta(f - jf_0 - kf_s) + N_0 \right] \quad (\text{A-VIII-2-2})$$

onde $\delta(\cdot)$ é a função delta, f_s ($= 1/t_{\text{samp}}$) é a frequência de amostragem, $Y(f)$ é a transformada de Fourier do sinal de saída, $H_{int}(f - kf_s)$ é a resposta de frequência do conversor A/D integrador do DVM (IADC) deslocada por kf_s , $H_{bw}(f - kf_s)$ é a resposta de frequência dos estágios de entrada do DVM também deslocada por kf_s , N_0 é potência de ruído média por unidade de largura de banda, e C_j é o j -ésimo coeficiente da série de Fourier exponencial complexa que representa a forma de onda do sinal de entrada. Esta equação pode ser escrita como

$$k_{dc}Y(f) = f_s \sum_k \sum_j H_{int}(jf_0) \cdot H_{bw}(jf_0) \cdot C_j \delta(f - jf_0 - kf_s) + N_0 f_s \sum_k H_{int}(f - kf_s) \cdot H_{bw}(f - kf_s) \quad (\text{A-VIII-2-3})$$

Retornando ao domínio do tempo, o modelo do DVM integrador é então

$$k_{dc}y(t) = \left\{ \sum_j |H_{int}(jf_0)| \cdot |H_{bw}(jf_0)| \cdot (A_j \cos 2\pi jf_0 t + B_j \sin 2\pi jf_0 t) + e(t) \right\} \cdot \sum_i \delta(t - it_{\text{samp}}) \quad (\text{A-VIII-2-4})$$

onde A_j e B_j são os coeficientes da série de Fourier trigonométrica que representa a forma de onda do sinal de entrada (grandezas não aleatórias desconhecidas) e $e(t)$ é o ruído de banda limitada na saída do IADC (grandeza aleatória não observável). Neste apêndice, como estamos interessados em estimar as amplitudes dos harmônicos da forma de onda, não há necessidade de incluir a fase das respostas de frequência.

Após ser aplicado aos terminais de entrada do DVM, o sinal é conduzido a um condicionador de sinal passivo e a um amplificador ativo. A correção da resposta de frequência destes estágios de entrada é modelada como

$$k_{bw}(jf_0) = |H_{bw}(jf_0)|^{-1} = \left(1 + (jf_0/bw)^2 \right)^{1/2} \quad (\text{A-VIII-2-5})$$

onde bw é a largura de banda dos estágios de entrada fornecida pelo fabricante (grandeza não aleatória suposta conhecida).

Finalmente, o sinal é aplicado ao IADC. No domínio do tempo, a resposta é uma média do sinal de entrada sobre um intervalo de tempo equivalente ao tempo de abertura especificado t_{aper} (grandeza não aleatória suposta conhecida). Claramente, de (1), a leitura do IADC é a saída de um sistema com resposta de impulso igual a um pulso retangular de duração t_{aper} . A correção da resposta de frequência do IADC para o j -ésimo harmônico do sinal é portanto

$$k_{\text{int}}(jf_0) = |H_{\text{int}}(jf_0)|^{-1} = \left(\frac{\sin \pi j f_0 t_{\text{aper}}}{\pi j f_0 t_{\text{aper}}} \right)^{-1} \quad (\text{A-VIII-2-6})$$

Diferentemente das outras correções, esta é significativa, isto é, para tempo de abertura de 1 ms e uma frequência fundamental de 100 Hz, a correção $k_{\text{int}}(f_0)$ é aproximadamente 2%.

O IADC usa uma referência de tensão contínua que tem de ser periodicamente calibrada contra um padrão de referência C.C. externo. A correção do erro do modo de tensão contínua do DVM (k_{dc}) é a correção do erro listado em um certificado de calibração (grandeza não aleatória suposta conhecida). Supõe-se aqui que os erros de linearidade do DVM são desprezíveis.

Como a resolução de amplitude do IADC decresce com o tempo de abertura, este último deve ser selecionado de modo a preservar uma resolução mínima de $6\frac{1}{2}$ digits (21 bits) a fim de que a contribuição de incerteza associada com a resolução de amplitude possa ser considerada desprezível.

A-VIII-3 Modelo linear de ajuste para sinais estacionários

As informações desta seção foram em grande parte baseadas em JOHNSTON (1971) e GRAYBILL (1976).

Um total de n trens de N amostras uniformes em instantes de tempo $t_i, i = 0, \dots, N-1$, são tomados retardados um do outro por um intervalo de tempo t_D . A série temporal a ser considerada contém um sinal periódico estacionário $f(t)$ com ruído aditivo. Um sinal é considerado estacionário se os parâmetros de ajuste são os mesmos para cada trem de amostras. De (A-VIII-2-4), supõe-se que cada trem possa ser modelado por

$$\begin{aligned}
k_{dc}y_{ik} &= f(t_i + kt_D) + u_{ik} \\
&= \sum_{j=1}^m k_{bw}^{-1}(jf_0)k_{int}^{-1}(jf_0) \{A_j \cos 2\pi jf_0(t_i + kt_D) + B_j \sin 2\pi jf_0(t_i + kt_D)\} + u_{ik}
\end{aligned} \tag{A-VIII-3-1}$$

onde y_{ik} ($= y(t_{ik})$) é a i -ésima leitura do DVM no k -ésimo trem ($k = 0, \dots, n-1$), A_j e B_j são parâmetros de ajuste desconhecidos corrigidos para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, jf_0 é o j -ésimo harmônico da frequência fundamental constante conhecida f_0 , m é o número de harmônicos especificados da série de Fourier truncada, e u_{ik} ($= u(t_{ik})$) é o i -ésimo valor do ruído na saída do IADC no k -ésimo trem (Este termo de ruído agora inclui tanto uma parte aleatória devido ao ruído de banda limitada na saída do IADC e uma parte sistemática devido ao truncamento da série de Fourier. O modelo supõe que o conjunto de dados tem um valor médio nulo (qualquer valor médio não nulo foi subtraído dos dados). Em notação matricial,

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{x} + \mathbf{u}_k, \quad k = 0, \dots, n-1 \tag{A-VIII-3-2}$$

onde $\mathbf{y}_k = (y_{1k}, \dots, y_{Nk})'$ é o vetor de dados no k -ésimo trem, \mathbf{W}_k é a matriz $N \times 2m$ conhecida com (i, j) -ésimo elemento $\cos 2\pi jf_0(t_i + kt_D)$ para $j = 1, \dots, m$ e $\sin 2\pi(j-m)f_0(t_i + kt_D)$ para $j = m+1, \dots, 2m$, $\mathbf{x} = (\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_m, \underline{B}_1, \dots, \underline{B}_m)'$, com $\underline{A}_j = A_j/k_{bw}(jf_0)k_{int}(jf_0)\kappa$ e $\underline{B}_j = B_j/k_{bw}(jf_0)k_{int}(jf_0)\kappa$, é o vetor de parâmetros de ajuste não corrigido para os efeitos sistemáticos, e $\mathbf{u}_k = (u_{1k}, \dots, u_{Nk})'$ é o vetor dos termos de ruído na saída do IADC no k -ésimo trem.

Supõe-se que os elementos de \mathbf{u}_k sejam normalmente e independentemente distribuídos, cada um com esperança nula e variância comum desconhecida σ^2 ; isto é, $E[\mathbf{u}_k] = 0$ e $E[\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k'] = \sigma^2 \mathbf{I}_N$ (homoscedasticidade), onde \mathbf{I}_N é uma matriz identidade de ordem N .

O espaço de parâmetros é $\mathbf{\Omega}$ onde $\mathbf{\Omega} = \{(A_j, B_j, \sigma^2): -\infty < A_j < \infty, -\infty < B_j < \infty, j = 1, \dots, m, 0 < \sigma^2 < \infty\}$.

Com as suposições acima, a distribuição de amostragem para os elementos de \mathbf{y}_k é

$$p(\mathbf{y}_k : \mathbf{x}, \phi) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x})'(\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x})\right\} \tag{A-VIII-3-3}$$

Supondo que σ^2 é o mesmo em todos os trens de amostras, a distribuição de amostragem conjunta para os elementos de \mathbf{y}_k de todos os n trens é

$$p(\mathbf{y} : \mathbf{x}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{nN/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x})' (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x})\right\} \quad (\text{A-VIII-3-4})$$

onde \mathbf{y} é uma notação compacta para $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{n-1}$. Vista como uma função dos parâmetros \mathbf{x} e σ^2 , esta expressão não é uma distribuição de probabilidade e recebe o nome de função de verossimilhança do conjunto de dados, denotada por $l(\mathbf{x}, \sigma^2; \mathbf{y}, \mathbf{W})$.

Estimadores pontuais clássicos para \mathbf{x} e σ^2 podem ser obtidos da função de verossimilhança. Como o logaritmo é uma função crescente monótona de seu argumento, o valor de \mathbf{x} que maximiza $l(\mathbf{x})$ também maximiza $\log l(\mathbf{x})$. Como $\log l(\mathbf{x})$ é com freqüência uma função mais simples do que $l(\mathbf{x})$, é em termos da maximização de $\log l(\mathbf{x})$ que geralmente formulamos o problema. Começando pela estimação de \mathbf{x} , vemos que os estimadores de mínimos quadrados e de máxima verossimilhança realmente coincidem e são dados pelo valor de $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ que minimiza a forma quadrática

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x})' (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x}) \quad (\text{A-VIII-3-5})$$

Derivando esta expressão com relação aos elementos do vetor de parâmetros \mathbf{x} e igualando a zero, isto é,

$$\left. \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{W}'_k \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{W}'_k \mathbf{y}_k) = 0 \quad (\text{A-VIII-3-6})$$

Isto é equivalente às *equações normais*

$$\mathbf{M} \hat{\mathbf{x}} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{W}'_k \mathbf{y}_k \quad (\text{A-VIII-3-7})$$

onde

$$\mathbf{M} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{W}'_k \mathbf{W}_k \quad (\text{A-VIII-3-8})$$

Resolvendo para $\hat{\mathbf{x}}$, contanto que \mathbf{M} seja não singular (posto completo ou colunas linearmente independentes),

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{W}'_k \mathbf{y}_k \quad (\text{A-VIII-3-9})$$

Considerando que $\mathbf{H}(S(\mathbf{x}))$ é a matriz Hessiana de $S(\mathbf{x})$, isto é, $H_{ij} = \partial^2 S(\mathbf{x}) / \partial(\mathbf{x})_i \partial(\mathbf{x})_j$ e que esta é definida positiva, isto é, para um vetor não nulo \mathbf{y}_k

$$\mathbf{y}'_k \mathbf{H}(S(\mathbf{x})) \mathbf{y}_k > 0 \quad (\text{A-VIII-3-10})$$

então (9) é um mínimo local de $S(\mathbf{x})$ e, portanto, é o MLE.

A forma quadrática (5) pode ser expressa como

$$S(\mathbf{x}) = S_e + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})' \mathbf{M} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \quad (\text{A-VIII-3-11})$$

onde

$$\begin{aligned} S_e = S(\hat{\mathbf{x}}) &= \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}})' (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \{ \mathbf{y}'_k \mathbf{y}_k - \mathbf{y}'_k \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}} \} \end{aligned} \quad (\text{A-VIII-3-12})$$

Substituindo (11) em (4), o MLE de σ^2 é obtido como solução da equação

$$\left. \frac{\partial \log l(\mathbf{x}, \sigma^2; \mathbf{y}, \mathbf{W})}{\partial \sigma^2} \right|_{\substack{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}} \\ \sigma=\hat{\sigma}^2}} = -\frac{nN}{2} \frac{1}{\hat{\sigma}^2} + \frac{S_e}{2\hat{\sigma}^4} = 0 \quad (\text{A-VIII-3-13})$$

donde,

$$\hat{\sigma}^2 = S_e / nN \quad (\text{A-VIII-3-14})$$

A distribuição de amostragem do estimador $\hat{\mathbf{x}}$ pode ser facilmente obtida. Como $\hat{\mathbf{x}}$ é uma função linear de \mathbf{y}_k , o estimador é normalmente distribuído de dimensão $2m$, isto é,

$$p(\hat{\mathbf{x}} : \mathbf{x}, \sigma^2) = \left[(2\pi)^m |\mathbf{S}_x|^{1/2} \right]^{-1} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\hat{\mathbf{x}} - E(\hat{\mathbf{x}}))' \mathbf{S}_x^{-1} (\hat{\mathbf{x}} - E(\hat{\mathbf{x}})) \right\} \quad (\text{A-VIII-3-15})$$

com esperança e matriz de covariância dadas por

$$\begin{aligned}
 E(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{M}^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{W}'_k E(\mathbf{y}_k) \\
 &= \mathbf{M}^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{W}'_k \mathbf{W}_k \mathbf{x} \\
 &= \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{A-VIII-3-16}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_x &= E(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})' \\
 &= \mathbf{M}^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} [\mathbf{W}'_k E(\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x})(\mathbf{y}_l - \mathbf{W}_l \mathbf{x})' \mathbf{W}_l] (\mathbf{M}')^{-1} \\
 &= \sigma^2 \mathbf{M}^{-1}
 \end{aligned} \tag{A-VIII-3-17}$$

uma vez que \mathbf{M} é simétrica, $(\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x})$ são independentemente distribuídos, e

$$\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{W}'_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \mathbf{x}) \tag{A-VIII-3-18}$$

O teorema de Cramèr-Rao assegura que para qualquer vetor não nulo \mathbf{y}_k

$$\mathbf{y}'_k [\mathbf{S}_x - \mathbf{P} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}'] \mathbf{y}_k \geq 0 \tag{A-VIII-3-19}$$

onde $\mathbf{P} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}'$ é o limite de variância mínima (MVB),

$$\mathbf{P} = \partial E(\hat{\mathbf{x}}) / \partial \mathbf{x} \tag{A-VIII-3-20}$$

$$\mathbf{R} = E\left((\partial \log l(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}) (\partial \log l(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x})' \right) \tag{A-VIII-3-21}$$

onde \mathbf{R} é a informação de Fisher. A expressão (19) é igual a zero se, e somente se, há uma matriz \mathbf{A} (cujos elementos podem ser função de \mathbf{x}) tal que

$$\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \partial \log l(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} \tag{A-VIII-3-22}$$

Em nosso caso,

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\
 &= -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{W}'_k \mathbf{W}_k \mathbf{x} - \mathbf{W}'_k \mathbf{y}_k)
 \end{aligned} \tag{A-VIII-3-23}$$

Comparando com (18), temos que existe uma matriz \mathbf{A} dada por

$$\mathbf{A} = \sigma^2 \mathbf{M}^{-1} \quad (\text{A-VIII-3-24})$$

Em nosso caso, os valores de \mathbf{P} e \mathbf{R} são

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_{2m} \quad (\text{A-VIII-3-25})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{4\sigma^4} E(\partial S(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x})(\partial S(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x})' \\ &= \frac{1}{\sigma^4} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \mathbf{W}'_k E(\mathbf{W}_k \mathbf{x} - \mathbf{y}_k)(\mathbf{W}_l \mathbf{x} - \mathbf{y}_l)' \mathbf{W}_l \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{M} \end{aligned} \quad (\text{A-VIII-3-26})$$

onde \mathbf{I}_{2m} é a matriz identidade de ordem $2m$. Portanto, o MVB é igual a (17), e o estimador $\hat{\mathbf{x}}$ tem variância mínima. Portanto, considerando (16), $\hat{\mathbf{x}}$ é um estimador não enviesado de variância mínima.

Para achar a distribuição de amostragem do estimador $\hat{\sigma}^2$, notamos que podemos escrever

$$\begin{aligned} S_e &= (\mathbf{y} - \mathbf{W}\hat{\mathbf{x}})'(\mathbf{y} - \mathbf{W}\hat{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y})'(\mathbf{y} - \mathbf{W}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{y}'(\mathbf{I}_{nN} - \mathbf{K})\mathbf{y} \end{aligned} \quad (\text{A-VIII-3-27})$$

onde \mathbf{W} e \mathbf{y} são notações compactas para $(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_{n-1})'$ e $(\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_{n-1})'$, respectivamente, e

$$\mathbf{K} = \mathbf{W}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}' \quad (\text{A-VIII-3-28})$$

A matriz $\mathbf{B} = \mathbf{I}_{nN} - \mathbf{K}$ é simétrica e idempotente pois

$$\begin{aligned} \mathbf{B}' &= \mathbf{I}_{nN} - \mathbf{K} = \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^2 &= (\mathbf{I}_{nN} - \mathbf{K})(\mathbf{I}_{nN} - \mathbf{K}) \\ &= \mathbf{I}_{nN} - 2\mathbf{K} + \mathbf{W}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{W}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}' \\ &= \mathbf{I}_{nN} - \mathbf{K} \\ &= \mathbf{B} \end{aligned}$$

O traço da matriz \mathbf{B} é

$$\begin{aligned}\text{tr}(\mathbf{I}_{nN} - \mathbf{K}) &= \text{tr}(\mathbf{I}_{nN}) - \text{tr}(\mathbf{W}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}') \\ &= nN - \text{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}) \\ &= nN - 2m\end{aligned}$$

pois $\text{tr}(\mathbf{ABC}) = \text{tr}(\mathbf{BCA}) = \text{tr}(\mathbf{CAB})$. Então segue que o posto de \mathbf{B} é $v = nN - 2m$ e é possível encontrar uma matriz ortogonal \mathbf{P} , tal que $\mathbf{P}'\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathbf{E}_v$, onde \mathbf{E}_v é uma matriz diagonal com v unidades e $2m$ zeros na diagonal principal. Essa matriz ortogonal pode, também, ser usada para definir uma transformação a partir do vetor \mathbf{y} para um vetor \mathbf{z} , ou seja, $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{z}$ ou $\mathbf{z} = \mathbf{P}'\mathbf{y}$, pois $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}'$. Substituindo em (27)

$$\begin{aligned}S_e &= \mathbf{y}'\mathbf{B}\mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{P}'(\mathbf{I}_{nN} - \mathbf{K})\mathbf{P}\mathbf{y} \\ &= \mathbf{z}'\mathbf{E}_v\mathbf{z} \\ &= \sum_{l=1}^v (z_l)^2\end{aligned}\tag{A-VIII-3-29}$$

onde \mathbf{z} é uma notação compacta para z_0, \dots, z_v , e onde, sem qualquer perda de generalidade, tomamos os v elementos unitários para ocuparem os primeiros v lugares da diagonal principal de \mathbf{E}_v . Segue-se, das propriedades das matrizes ortogonais, que se os elementos de \mathbf{y} são distribuídos normal e independentemente, com média zero e variância constante σ^2 , os elementos de \mathbf{z} também serão. Então (29) exprime S_e como a soma de quadrados de v variáveis normais independentes com média zero e variância σ^2 . Logo, $U = S_e/\sigma^2$ tem uma distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade, isto é,

$$\chi^2(u : v) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} u^{v/2-1} \exp\{-u/2\}\tag{A-VIII-3-30}$$

De (14), a distribuição de amostragem do estimador $\hat{\sigma}^2 = U\sigma^2/nN$ é então qui-quadrada com v graus de liberdade dividida por nN/σ^2 , isto é,

$$p(\hat{\sigma}^2 : nN, v, \sigma^2) = \frac{(nN/\sigma^2)^{v/2}}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} \hat{\sigma}^{v/2-1} \exp\{-nN\hat{\sigma}^2/2\sigma^2\}\tag{A-VIII-3-31}$$

com esperança e variância dadas por

$$E(\hat{\sigma}^2) = v\sigma^2/nN \quad (\text{A-VIII-3-32})$$

$$Var(\hat{\sigma}^2) = 2v\sigma^4/n^2N^2 \quad (\text{A-VIII-3-33})$$

Portanto, o estimador

$$\tilde{\sigma}^2 = S_e/v \quad (\text{A-VIII-3-34})$$

é um estimador não enviesado para σ^2 . De (30) e (34) temos que $Q = v\tilde{\sigma}^2/\sigma^2$ tem uma distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade. A distribuição de amostragem do estimador $\tilde{\sigma}^2 = Q\sigma^2/v$ é então qui-quadrada com v graus de liberdade dividida por v/σ^2 , isto é,

$$p(\tilde{\sigma}^2 : v, \sigma^2) = \frac{(v/\sigma^2)^{v/2}}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} \tilde{\sigma}^{v/2-1} \exp\{-v\tilde{\sigma}^2/2\sigma^2\} \quad (\text{A-VIII-3-35})$$

com esperança e variância dadas por

$$E(\tilde{\sigma}^2) = \sigma^2 \quad (\text{A-VIII-3-36})$$

$$Var(\tilde{\sigma}^2) = 2\sigma^4/v \quad (\text{A-VIII-3-37})$$

A variância de $\tilde{\sigma}^2$ tende a zero para $v \rightarrow \infty$, o que significa que o estimador é também consistente.

Se o σ^2 fosse conhecido, poderíamos usar (15) para estimar os intervalos de confiança para \mathbf{x} usando as tabelas da distribuição normal. Entretanto, σ^2 é desconhecido e, portanto, precisamos de mais uma etapa para obtermos um procedimento prático para estimação do intervalo de confiança. Primeiro, precisamos mostrar que S_e é distribuído independentemente de $\hat{\mathbf{x}}$. Podemos escrever,

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_k, \quad k = 0, \dots, n-1 \quad (\text{A-VIII-3-38})$$

onde \mathbf{e}_k denota o vetor de N resíduos $\mathbf{y}_k - \mathbf{W}_k \hat{\mathbf{x}}$. Notemos, com cuidado, a distinção entre (8) e esta expressão. Na primeira aparecem os parâmetros desconhecidos \mathbf{x} e os resíduos desconhecidos \mathbf{u}_k , enquanto que na última temos um conjunto de estimadores $\hat{\mathbf{x}}$ e o conjunto correspondente de resíduos \mathbf{e}_k . Pode-se mostrar que S_e é distribuído

independentemente de $\hat{\mathbf{x}}$ mostrando que \mathbf{e} é distribuído independentemente de $\hat{\mathbf{x}}$, onde \mathbf{e} é uma notação compacta para $(\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{n-1})'$. Ora,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e} &= \mathbf{y} - \mathbf{W}\hat{\mathbf{x}} \\
 &= \mathbf{W}\mathbf{x} + \mathbf{u} - \mathbf{W}[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}'(\mathbf{W}\mathbf{x} + \mathbf{u})] \\
 &= \mathbf{u} - \mathbf{W}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{u} \\
 &= (\mathbf{I}_{nN} - \mathbf{W}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}')\mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{A-VIII-3-39}$$

e

$$\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}'\mathbf{u} \tag{A-VIII-3-40}$$

Substituindo estas expressões na matriz de covariância de \mathbf{e} e $\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$, temos

$$\begin{aligned}
 E[\mathbf{e}(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})'] &= E[(\mathbf{I}_{nN} - \mathbf{W}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{W}')\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{W}\mathbf{M}^{-1}] \\
 &= \sigma^2\mathbf{W}\mathbf{M}^{-1} - \sigma^2\mathbf{W}\mathbf{M}^{-1} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{A-VIII-3-41}$$

Já que \mathbf{e} e $\hat{\mathbf{x}}$ são, cada uma, funções lineares de variáveis normais, estão também normalmente distribuídos e, como sua covariância é nula, segue-se que são distribuídos independentemente. Portanto, S_e é distribuído independentemente de $\hat{\mathbf{x}}$.

De (15), verifica-se que o estimador $\hat{\mathbf{x}}$ tem uma distribuição normal multivariada. Da discussão em torno de (30) e (34), sabemos que $Q = v\tilde{\sigma}^2/\sigma^2$ tem uma distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade. Mostramos acima que S_e é distribuído independentemente de $\hat{\mathbf{x}}$. Mostraremos a seguir que a fdp do vetor aleatório definido por

$$\mathbf{t}' = ((\mathbf{t})_1, (\mathbf{t})_2, \dots, (\mathbf{t})_{2m}) \tag{A-VIII-3-42}$$

onde

$$(\mathbf{t})_j = \frac{[(\hat{\mathbf{x}})_j - (\mathbf{x})_j]}{\tilde{\sigma}(\mathbf{M}^{-1})_{jj}^{1/2}} \tag{A-VIII-3-43}$$

é dada por

$$\mathbf{S}(\mathbf{t} : 2m, \nu; \mathbf{R}) = \frac{\nu^{\nu/2} \Gamma(nN/2) |\mathbf{R}|^{-1/2}}{\pi^m \Gamma(\nu/2)} (\nu + \mathbf{t}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{t})^{-nN/2}, \quad -\infty < (\mathbf{t})_j < \infty$$

(A-VIII-3-44)

onde

$$\mathbf{R} = [(\mathbf{R})_{ij}] \quad (\mathbf{R})_{ij} = \frac{(\mathbf{M}^{-1})_{ij}}{\sqrt{(\mathbf{M}^{-1})_{ii} (\mathbf{M}^{-1})_{jj}}}, \quad (\text{A-VIII-3-45})$$

ou seja, uma distribuição t multivariada com ν graus de liberdade.

Começamos determinando a fdp conjunta de $Q = \nu \tilde{\sigma}^2 / \sigma^2$ e o vetor definido por

$$\mathbf{z}' = ((\mathbf{z})_1, (\mathbf{z})_2, \dots, (\mathbf{z})_{2m}) \quad (\text{A-VIII-3-46})$$

onde

$$(\mathbf{z})_j = \frac{[(\hat{\mathbf{x}})_j - (\mathbf{x})_j]}{(\mathbf{M}^{-1})_{jj}^{1/2}} \quad (\text{A-VIII-3-47})$$

A variável Q tem distribuição $\chi^2(q : \nu)$. O vetor \mathbf{z} é distribuído normalmente com esperança nula e covariância $\sigma^2 \mathbf{R}$. Como Q é também independente de \mathbf{z} , temos

$$f_{\mathbf{z}, Q}(\mathbf{z}, q) = (2\pi)^{-m} \sigma^{-2m} |\mathbf{R}|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{z} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}\right\} \cdot \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} u^{\nu/2-1} \exp\{-u/2\}$$

(A-VIII-3-48)

Considere que $(\mathbf{t})_j = (\mathbf{z})_j / \tilde{\sigma}^2 = (\mathbf{z})_j / (q\sigma^2/\nu)^{1/2}$, o que dá $(\mathbf{z})_j = (\mathbf{t})_j (q\sigma^2/\nu)^{1/2}$; o jacobiano é obtido de $\partial(\mathbf{z})_i / \partial(\mathbf{t})_j = \delta_{ij} (q\sigma^2/\nu)^{1/2}$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$, e é $(q\sigma^2/\nu)^m$. Obtemos então a fdp conjunta de \mathbf{t} e Q , isto é,

$$f_{\mathbf{t}, Q}(\mathbf{t}, q) = \frac{(2\pi)^{-m} |\mathbf{R}|^{-1/2}}{2^{\nu/2} \nu^m \Gamma(\nu/2)} q^{nN/2-1} \cdot \exp\left\{\left(-\frac{q}{2\nu}\right) \mathbf{t}' \mathbf{R}^{-1} \mathbf{t} - \frac{q}{2}\right\} \quad (\text{A-VIII-3-49})$$

e (44) é obtida integrando esta expressão com relação a q de 0 a ∞ .

Nota-se que (44) não contém nenhum parâmetro desconhecido. Esta fdp é usada para estabelecer intervalos de confiança simultâneos para os vários $(\mathbf{x})_j$. A grandeza $t_{\alpha/2:2m,v;\mathbf{R}}$ é determinada de modo que (para um $1 - \alpha$ especificado)

$$P\left[-t_{\alpha/2:2m,v;\mathbf{R}} \leq (\mathbf{t})_j \leq t_{\alpha/2:2m,v;\mathbf{R}} \quad \text{para } j = 1, \dots, 2m\right] = 1 - \alpha \quad (\text{A-VIII-3-50})$$

Substituindo (43), e resolvendo as desigualdades para $(\mathbf{x})_j$ temos

$$P\left[(\hat{\mathbf{x}})_j - t_{\alpha/2:2m,v;\mathbf{R}} \tilde{\sigma}(\mathbf{M}^{-1})_{jj}^{1/2} \leq (\mathbf{x})_j \leq (\hat{\mathbf{x}})_j + t_{\alpha/2:2m,v;\mathbf{R}} \tilde{\sigma}(\mathbf{M}^{-1})_{jj}^{1/2} \quad \text{para } j = 1, \dots, 2m\right] = 1 - \alpha \quad (\text{A-VIII-3-51})$$

A matriz \mathbf{R} é conhecida, mas para se determinar $t_{\alpha/2:2m,v;\mathbf{R}}$ seria necessário um conjunto impraticável de tabelas. Na prática, a forma padronizada da distribuição t multivariada é usada em vez de (44),

$$\mathbf{S}(\mathbf{t}; 2m, v) = \frac{v^{v/2} \Gamma(nN/2)}{\pi^m \Gamma(v/2)} (v + \mathbf{t}'\mathbf{t})^{-nN/2}, \quad -\infty < (\mathbf{t})_j < \infty \quad (\text{A-VIII-3-52})$$

Pode-se mostrar que $t_{\alpha/2:2m,v;\mathbf{R}} \leq t_{\alpha/2:2m,v;\mathbf{I}}$ e, portanto,

$$P\left[-t_{\alpha/2:2m,v;\mathbf{I}} \leq (\mathbf{t})_j \leq t_{\alpha/2:2m,v;\mathbf{I}} \quad \text{para } j = 1, \dots, 2m\right] \geq 1 - \alpha \quad (\text{A-VIII-3-53})$$

Isto é, usamos “valores t ” que são computados usando \mathbf{I} em vez de \mathbf{R} , e a probabilidade é maior ou igual a $1 - \alpha$ em vez de igual a $1 - \alpha$. Assim, os intervalos de confiança são

$$P\left[(\hat{\mathbf{x}})_j - t_{\alpha/2:2m,v} \tilde{\sigma}(\mathbf{M}^{-1})_{jj}^{1/2} \leq (\mathbf{x})_j \leq (\hat{\mathbf{x}})_j + t_{\alpha/2:2m,v} \tilde{\sigma}(\mathbf{M}^{-1})_{jj}^{1/2} \quad \text{para } j = 1, \dots, 2m\right] \geq 1 - \alpha \quad (\text{A-VIII-3-54})$$

onde $t_{\alpha/2:2m,v}$ ($= t_{\alpha/2:2m,v;\mathbf{I}}$) é computado de

$$\int_{-t_{\alpha/2:2m,v}}^{t_{\alpha/2:2m,v}} \dots \int_{-t_{\alpha/2:2m,v}}^{t_{\alpha/2:2m,v}} \mathbf{S}(\mathbf{t}; 2m, v) d\mathbf{t} = 1 - \alpha \quad (\text{A-VIII-3-55})$$

Assim, qualquer que seja a matriz \mathbf{R} , segue que os intervalos de confiança conjuntos em $(\mathbf{x})_j$ na equação (51) são simultaneamente corretos com probabilidade *maior* ou igual a $1 - \alpha$.

Podemos definir também intervalos de confiança individuais para $(\mathbf{x})_j$, isto é,

$$P\left[(\hat{\mathbf{x}})_j - t_{\alpha/2;v} \tilde{\sigma}(\mathbf{M}^{-1})_{jj}^{1/2} \leq (\mathbf{x})_j \leq (\hat{\mathbf{x}})_j + t_{\alpha/2;v} \tilde{\sigma}(\mathbf{M}^{-1})_{jj}^{1/2} \right] = 1 - \alpha \quad (\text{A-VIII-3-56})$$

onde $t_{\alpha/2;v}$ é obtido de tabelas da distribuição *t*-Student com v graus de liberdade.

Podemos obter também um intervalo de confiança para σ^2 . Usamos o fato da variável Q ter uma distribuição $\chi^2(q : v)$ e obtemos

$$P\left(-\chi_{1-\alpha_2;v}^2 \leq Q \leq \chi_{\alpha_1;v}^2 \right) = 1 - \alpha \quad (\text{A-VIII-3-57})$$

onde $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ e $\chi_{1-\alpha_2;v}^2, \chi_{\alpha_1;v}^2$ são obtidos de tabelas da distribuição qui-quadrado com v graus de liberdade. Substituindo $Q = v\tilde{\sigma}^2/\sigma^2$ e resolvendo as desigualdades para σ^2 temos

$$P\left(\frac{v\tilde{\sigma}^2}{\chi_{\alpha_1;v}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{v\tilde{\sigma}^2}{\chi_{1-\alpha_2;v}^2} \right) = 1 - \alpha \quad (\text{A-VIII-3-58})$$

que é um intervalo de confiança para σ^2 . Os parâmetros α_1 e α_2 podem ser escolhidos para minimizar o comprimento do intervalo em (58).

A escolha de um intervalo de confiança para um dado nível de confiança $1 - \alpha$ é um tanto arbitrária. Critérios comumente empregados para escolher dentre todos os pontos extremos $l(\mathbf{Y})$ e $u(\mathbf{Y})$ possíveis, tais que a probabilidade das desigualdades $l(\mathbf{Y}) \leq \theta \leq u(\mathbf{Y})$ serem satisfeitas é um nível de confiança $1 - \alpha$, são os seguintes:

1. Comprimento mínimo. Escolha os pontos extremos $l(\mathbf{Y})$ e $u(\mathbf{Y})$ de modo que $u(\mathbf{Y}) - l(\mathbf{Y})$ é mínimo.
2. Simetria em torno do estimador, isto é, $u(\mathbf{Y}) - \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - l(\mathbf{Y})$.
3. Simetria em probabilidade, isto é, $P[\mathbf{x}^* < l(\mathbf{Y})] = P[\mathbf{x}^* > u(\mathbf{Y})] = (1 - \alpha)/2$.
4. Probabilidade igual nas extremidades. A função de densidade da distribuição de amostragem assume valores iguais em $\mathbf{x}^* = l(\mathbf{Y})$ e $\mathbf{x}^* = u(\mathbf{Y})$.

Os critérios acima coincidem quando a função de densidade é unimodal e simétrica.

A-VIII-4 Amostragem síncrona

Os estimadores $\hat{\mathbf{x}}$ dos parâmetros de ajuste para sinais estacionários (não corrigidos para os efeitos sistemáticos), discutidos na seção anterior, são ótimos se as seguintes condições suficientes são atendidas: (a) o sinal contém uma única frequência, (b) a frequência do sinal é estacionária, (c) a frequência do sinal é conhecida com exatidão, (d) não há componente C.C. nos dados, (e) a amostragem é uniforme e não há “aliasing”, (f) o ruído adicionado ao sinal é branco, (g) o ruído de amostragem do DVM é desprezível comparado com o ruído adicionado ao sinal, (h) a variância de ruído na saída do IADC é a mesma sobre todos os trens de amostras, (i) a incerteza associada com as grandezas temporais pode ser desprezada, e (j) o conversor A/D integrador do DVM tem uma resolução elevada.

Estes estimadores têm as desvantagens seguintes: (i) as operações matriciais tomam muito tempo e espaço de memória de computador, (ii) os elementos de $\hat{\mathbf{x}}$ são geralmente correlacionados, e (iii) os estimadores são sensíveis com relação à exatidão da frequência. Um projeto de experimentos que resulta em estimadores que não apresentam estas desvantagens é discutido nesta seção.

O método é sincronizar a frequência de amostragem do DVM à frequência fundamental do sinal gerado. Se $t_i = i/N_T f_0$ e $t_D = M_T/f_0$, onde N_T é o número de amostras por período e M_T é o número de períodos em um trem de amostras, i.e. $N = N_T M_T$, pode-se facilmente mostrar que as colunas de \mathbf{W}_k são ortogonais e que suas normas euclidianas são iguais a $(N/2)^{1/2}$. Portanto, cada \mathbf{F}_k é diagonal com todos os $2m$ elementos diagonais iguais a $N/2$.

De (A-VIII-3-9), o estimador $\hat{\mathbf{x}}$ se torna

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{2}{nN} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{W}'_k \mathbf{y}_k \quad (\text{A-VIII-4-1})$$

O estimador dos parâmetros de ajuste de sinais estacionários, não corrigido para os efeitos sistemáticos, coincide com a média das transformadas de Fourier discretas sobre todos os trens de amostras. A cada trem de amostras, os dados são expandidos em um conjunto ortonormal de vetores. Os coeficientes da expansão a cada trem de amostras são apenas as projeções dos dados nos vetores de expansão para aquele trem de

amostras particular. O estimador resultante é uma média destas projeções sobre todos os trens de amostras.

De (A-VIII-3-15), verifica-se que o estimador $\hat{\mathbf{x}}$ tem uma distribuição normal multivariada com esperança \mathbf{x} e matriz de covariância diagonal igual a $\sigma^2 \mathbf{I}$. Mostramos que o estimador $\tilde{\sigma}^2 = S_e / \nu$ é um estimador não enviesado para σ^2 . De (A-VIII-3-12),

$$S_e = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{y}'_k \mathbf{y}_k - \frac{2}{nN} \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{W}'_k \mathbf{y}_k \right\|^2 \quad (\text{A-VIII-4-2})$$

onde o símbolo $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana.

Da discussão em torno de (A-VIII-3-30) e (A-VIII-3-34), sabemos que $Q = \nu \tilde{\sigma}^2 / \sigma^2$ tem uma distribuição qui-quadrado com ν graus de liberdade. Mostramos acima que S_e é distribuído independentemente de $\hat{\mathbf{x}}$. Portanto, a fdp do vetor aleatório definido por

$$\mathbf{t}' = ((\mathbf{t})_1, (\mathbf{t})_2, \dots, (\mathbf{t})_{2m}) \quad (\text{A-VIII-4-3})$$

onde

$$(\mathbf{t})_j = \frac{[(\hat{\mathbf{x}})_j - (\mathbf{x})_j]}{\tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2}} \quad (\text{A-VIII-4-4})$$

é dada pela forma padronizada da distribuição t multivariada com ν graus de liberdade (58). Assim, os intervalos de confiança são

$$P\left[(\hat{\mathbf{x}})_j - t_{\alpha/2; 2m, \nu} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2} \leq (\mathbf{x})_j \leq (\hat{\mathbf{x}})_j + t_{\alpha/2; 2m, \nu} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2} \quad \text{para } j = 1, \dots, 2m\right] \geq 1 - \alpha \quad (\text{A-VIII-4-5})$$

onde $t_{\alpha/2; 2m, \nu}$ ($= t_{\alpha/2; 2m, \nu; \mathbf{1}}$) é computado de

$$\int_{-t_{\alpha/2; 2m, \nu}}^{t_{\alpha/2; 2m, \nu}} \dots \int_{-t_{\alpha/2; 2m, \nu}}^{t_{\alpha/2; 2m, \nu}} \mathbf{S}(\mathbf{t}; 2m, \nu) d\mathbf{t} = 1 - \alpha \quad (\text{A-VIII-4-6})$$

Assim, os intervalos de confiança conjuntos em $(\mathbf{x})_j$ na equação (5) são simultaneamente corretos com probabilidade *maior* ou igual a $1 - \alpha$.

Podemos definir também intervalos de confiança individuais para $(\mathbf{x})_j$, isto é,

$$P\left[(\hat{\mathbf{x}})_j - t_{\alpha/2;v} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2} \leq (\mathbf{x})_j \leq (\hat{\mathbf{x}})_j + t_{\alpha/2;v} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2} \right] = 1 - \alpha \quad (\text{A-VIII-4-7})$$

onde $t_{\alpha/2;v}$ é obtido de tabelas da distribuição t -Student com v graus de liberdade.

Podemos obter também um intervalo de confiança para σ^2 usando (A-VIII-3-58).

O estimador (1) é ótimo se todas as condições listadas no início desta seção (exceto (c)) e as adicionais seguintes são atendidas: (a) a taxa de amostragem é um múltiplo inteiro da freqüência do sinal e (b) os trens de amostras são tomados retardados um do outro por um número inteiro de períodos do sinal.

A-VIII-5 Estimadores das amplitudes dos harmônicos

Supondo que o projeto de experimento ortogonal descrito na seção anterior seja usado, o estimador $\hat{\mathbf{x}}$ tem uma distribuição normal multivariada com esperança \mathbf{x} e matriz de covariância diagonal igual a $\sigma^2 \mathbf{I}$. Notando-se que $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_m, \hat{B}_1, \dots, \hat{B}_m)'$, pode-se escrever

$$p(\hat{\mathbf{x}} : \mathbf{x}, \sigma^2) \propto \exp\left\{-\frac{n^2 N^2}{4\sigma^2} \sum_{j=1}^m \left[(\hat{A}_j - A_j)^2 + (\hat{B}_j - B_j)^2 \right]\right\} \quad (\text{A-VIII-5-1})$$

Portanto, a distribuição de amostragem conjunta para \hat{A}_j e \hat{B}_j , dados A_j e B_j , é

$$p(\hat{A}_j, \hat{B}_j : A_j, B_j, \sigma^2) \propto \exp\left\{-\frac{n^2 N^2}{4\sigma^2} \sum_{j=1}^m \left[(\hat{A}_j - A_j)^2 + (\hat{B}_j - B_j)^2 \right]\right\} \quad (\text{A-VIII-5-2})$$

Introduzindo as coordenadas polares $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, em vez de $\hat{\mathbf{x}}$, isto é,

$$(\hat{\mathbf{r}})_j = (\hat{A}_j^2 + \hat{B}_j^2)^{1/2} \quad (\text{A-VIII-5-3a})$$

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}})_j = \text{tg}^{-1}[\hat{B}_j / \hat{A}_j], \quad (\text{A-VIII-5-3b})$$

onde o símbolo $(\cdot)_j$ denota o j -ésimo elemento, e inserindo o Jacobiano, a distribuição de amostragem conjunta para $(\hat{\mathbf{r}})_j$ e $(\hat{\boldsymbol{\theta}})_j$, dados \hat{A}_j e \hat{B}_j , se torna

$$p(\hat{\mathbf{r}}_j, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j : \hat{A}_j, \hat{B}_j, \sigma^2) \propto (\hat{\mathbf{r}}_j) \exp \left\{ -\frac{n^2 N^2}{4\sigma^2} \left[(\hat{\mathbf{r}}_j)^2 + A_j^2 + B_j^2 - 2(\hat{\mathbf{r}}_j)_j A_j \cos(\hat{\boldsymbol{\theta}}_j) - 2(\hat{\mathbf{r}}_j)_j B_j \sin(\hat{\boldsymbol{\theta}}_j) \right] \right\} \quad (\text{A-VIII-5-4})$$

Introduzindo as coordenadas polares $(\mathbf{r})_j$ e $(\boldsymbol{\theta})_j$, em vez de A_j e B_j , isto é,

$$(\mathbf{r})_j = (A_j^2 + B_j^2)^{1/2} \quad (\text{A-VIII-5-5a})$$

$$(\boldsymbol{\theta})_j = \text{tg}^{-1}[B_j/A_j], \quad (\text{A-VIII-5-5b})$$

a distribuição de amostragem conjunta para $(\hat{\mathbf{r}})_j$ e $(\hat{\boldsymbol{\theta}})_j$, dados $(\mathbf{r})_j$ e $(\boldsymbol{\theta})_j$, é

$$p(\hat{\mathbf{r}}_j, \hat{\boldsymbol{\theta}}_j : (\mathbf{r})_j, (\boldsymbol{\theta})_j, \sigma^2) \propto \exp \left\{ -\frac{n^2 N^2}{4\sigma^2} \left[(\hat{\mathbf{r}}_j)^2 + (\mathbf{r})_j^2 - 2(\hat{\mathbf{r}}_j)_j (\mathbf{r})_j \cos((\boldsymbol{\theta})_j - (\hat{\boldsymbol{\theta}})_j) \right] \right\} \quad (\text{A-VIII-5-6})$$

Integrando sobre $(\hat{\boldsymbol{\theta}})_j$, e usando a relação (ABRAMOWITZ, STEGUN, 1965)

$$\int_0^{2\pi} \exp\{p \cos(\hat{\boldsymbol{\theta}})_j\} d(\hat{\boldsymbol{\theta}})_j = 2\pi I_0(p) \quad (\text{A-VIII-5-7})$$

onde $I_0(\cdot)$ é a função de Bessel modificada de ordem zero e argumento puramente imaginário, a distribuição de amostragem para $(\hat{\mathbf{r}})_j$, dado $(\mathbf{r})_j$, é

$$p(\hat{\mathbf{r}}_j | (\mathbf{r})_j, \sigma^2) = \frac{n^2 N^2 (\hat{\mathbf{r}})_j}{2\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{n^2 N^2}{4\sigma^2} \left[(\hat{\mathbf{r}}_j)^2 + (\mathbf{r})_j^2 \right] \right\} \cdot I_0 \left[\frac{n^2 N^2 (\hat{\mathbf{r}})_j (\mathbf{r})_j}{2\sigma^2} \right] \quad (\text{A-VIII-5-8})$$

Esta é uma distribuição Rayleigh não central, uma distribuição Rician, uma distribuição Rayleigh-Rice ou uma distribuição Rice-Nakagami (HELSTROM, 1995, WHALEN, 1971). Quando o $(\mathbf{r})_j$ se aproxima de zero, esta é a distribuição de Rayleigh. O r -ésimo momento desta distribuição de amostragem é (HELSTROM, 1995, WHALEN, 1971)

$$E\{(\hat{\mathbf{r}}_j)^r\} = \left(\frac{2\sigma}{nN} \right)^r \Gamma\left(\frac{r}{2} + 1\right) {}_1F_1\left(-\frac{r}{2}; 1; -\frac{n^2 N^2 (\mathbf{r})_j^2}{4\sigma^2}\right) \quad (\text{A-VIII-5-9})$$

onde ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$ é a função hipergeométrica confluyente e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama. Em especial, a melhor estimativa da amplitude do j -ésimo harmônico, não corrigida para os efeitos sistemáticos, pode ser obtida desta expressão. Para relação harmônico-ruído grande, isto é, $n^2 N^2(\mathbf{r})_j^2 / 4\sigma^2 \gg 1$, $p((\hat{\mathbf{r}})_j; (\mathbf{r})_j, \sigma^2)$ se torna aproximadamente Gaussiana em torno do seu valor esperado. O valor esperado da amplitude do j -ésimo harmônico, é então

$$E\{(\hat{\mathbf{r}})_j : (\mathbf{r})_j, \sigma^2\} \approx (\mathbf{r})_j \quad (\text{A-VIII-5-10})$$

Se o σ^2 fosse conhecido, poderíamos usar (8) para estimar os intervalos de confiança para \mathbf{x} usando as tabelas da função Q de Marcum (HELSTROM, 1995, WHALEN, 1971).

Supondo que o projeto de experimento ortogonal descrito na seção anterior seja usado, o valor ‘verdadeiro’ da amplitude (em volts) do j -ésimo harmônico de um sinal estacionário, corrigido para todos os efeitos sistemáticos conhecidos, é modelada por

$$V_j = \kappa k_{\text{bw}}(jf_0) k_{\text{int}}(jf_0) \cdot E\{(\hat{\mathbf{r}})_j : (\mathbf{r})_j, \sigma^2\} \quad j = 1, \dots, m \quad (\text{A-VIII-5-11})$$

A diferença entre o valor ‘verdadeiro’ e o valor esperado da distribuição de amostragem para o valor estimado do mensurando é chamado de *viés*.

A-VIII-6 Comentários

Na estatística clássica, o valor do mensurando é suposto ser uma constante desconhecida, freqüentemente chamada de ‘valor verdadeiro’, e os dados medidos são variáveis aleatórias cada uma com uma distribuição de probabilidade de amostragem. Suponha que as condições de medição são fixadas de alguma forma nos níveis pretendidos. Suponha que o processo de feitura das medições é repetido infinitas vezes nas condições fixadas produzindo medições independentes. Suponha que a dispersão dos dados obtidos de medições repetidas seja devido a efeitos aleatórios que ocorrem nas condições de medição fixadas. Agora pense na freqüência relativa de realização dos dados na vizinhança de uma dada medição. Uma *distribuição de amostragem* é uma distribuição de probabilidade que descreve as freqüências relativas de ocorrência de todas as medições possíveis nas condições de medição fixadas. Uma distribuição de amostragem tem um valor esperado e um desvio padrão entre outros parâmetros. Uma

análise estatística clássica começa com uma distribuição de amostragem suposta que se aplica a cada medição em um conjunto. As medições são geralmente supostas independentes. O pesquisador relaciona o valor esperado da distribuição de amostragem dos dados de medição ao valor do mensurando. O desvio padrão da distribuição de amostragem quantifica a dispersão de todas as medições possíveis nas condições fixadas. Uma estimativa do valor do mensurando é determinada de uma teoria estatística. A distribuição de amostragem suposta para os dados de medição induz uma distribuição de amostragem para o valor estimado do mensurando. Os resultados principais de uma análise estatística clássica são: (1) uma estimativa do valor esperado da distribuição de amostragem para o valor estimado do mensurando e (2) uma estimativa do desvio padrão da distribuição de amostragem para o valor estimado do mensurando. A diferença entre o valor esperado da distribuição de amostragem para o valor estimado do mensurando e o ‘valor verdadeiro’ do mensurando é erro sistemático (viés). As estimativas (frequentistas) clássicas são baseadas em uma ocorrência nas condições de medição supostas fixadas nos níveis pretendidos. As estimativas clássicas não se aplicam a outras condições de medição. Na estatística clássica, não se pode usar julgamento científico baseado em outras medições ou em dados publicados.

Algumas componentes de incerteza representam a incerteza resultante de efeitos aleatórios e outras representam a incerteza resultante de efeitos sistemáticos (não aleatórios). A estatística clássica permite elaborar enunciados de incerteza somente para efeitos aleatórios. Isto fatalmente nos conduz a uma sub-estimação das incertezas de medição. Isto, no passado, conduziu à opinião de que o enunciado de incerteza de medição deveria consistir de duas partes separadas, uma que se refere aos tão chamados erros aleatórios e uma outra aos erros sistemáticos não estatísticos. Aparte do fato de que uma distinção clara entre estes tipos de erros não pode geralmente ser estabelecida, este tratamento separado não permite uma construção consistente de uma incerteza de medição global. Adicionalmente, há o problema de se ter de introduzir de forma consistente na avaliação de outros experimentos as duas componentes, que tinham sido tratadas diferentemente. Com os avanços na ciência das medições e nos instrumentos de medir, a incerteza resultante dos efeitos aleatórios em medições físicas continua a decrescer. Conseqüentemente, a importância da incerteza resultante de efeitos sistemáticos continua a aumentar. Antes da publicação do ISO (1995), não havia nenhum método geralmente aceito para se considerar a incerteza resultante dos efeitos

sistemáticos. O método proposto pelo ISO (1995) é inteiramente consistente com os procedimentos da estatística Bayesiana.

Na estatística Bayesiana, os dados de medição são constantes e o valor do mensurando é uma variável aleatória. A distribuição de probabilidade para o valor do mensurando é uma *distribuição de estado de conhecimento* que descreve os graus de confiança sobre todos os valores possíveis que poderiam ser atribuídos ao valor do mensurando. Os graus de confiança são baseados em toda a informação disponível incluindo julgamento científico, medições correntes, e conhecimento ancilar. Distribuições de probabilidade de estado de conhecimento similares são também aplicadas às outras grandezas desconhecidas (por exemplo, as correções para os efeitos sistemáticos) envolvidas na medição. Quando dizemos que uma variável representa um estado de conhecimento queremos dizer que sua distribuição de probabilidade é uma distribuição de estado de conhecimento que descreve a confiança sobre todos os valores possíveis da variável com base na informação disponível. Uma análise Bayesiana começa com distribuições *anteriores*, que representam os estados de conhecimento dos valores das grandezas desconhecidas antes das medições serem feitas. Conhecimento anterior desprezível é expresso por meio de distribuições de probabilidade não informativas. As medições são então usadas para atualizar as distribuições *anteriores* usando o teorema de Bayes para obter distribuições posteriores. A distribuição posterior para o valor do mensurando é uma distribuição de probabilidade que poderia ser razoavelmente atribuída ao valor do mensurando após as medições serem feitas. Uma medida de centralidade (tal como o valor esperado) e uma medida de dispersão (tal como o desvio padrão) da distribuição posterior Bayesiana quantifica, respectivamente, o resultado de medição e sua incerteza padrão associada. Assim, a análise Bayesiana é um método estatístico para se atualizar o estado de conhecimento. Na estatística Bayesiana, tanto dados de medição quanto julgamento científico são usados. À medida que informação adicional se torna disponível, as estimativas Bayesianas são atualizadas via teorema de Bayes.

Comparando-se os resultados do presente trabalho com os resultados correspondentes obtidos no Capítulo 2, verifica-se que as estimativas obtidas de uma análise estatística clássica são iguais ou aproximadamente iguais às estimativas correspondentes obtidas de uma análise Bayesiana com as mesmas distribuições de amostragem e distribuições de probabilidade anteriores não informativas. Portanto, as

estimativas (freqüentistas) clássicas podem ser usadas em uma estrutura Bayesiana contanto que elas sejam interpretadas do ponto de vista Bayesiano.

Alguns comentários sobre a diferença entre intervalos de confiança clássicos e intervalos de credibilidade Bayesianos são oportunos. O intervalos de confiança clássicos conduzem a muita confusão. Considere o intervalo de confiança clássico (A-VIII-4-7). Ele é comumente mal interpretado como significando que o parâmetro desconhecido $(\mathbf{x})_j$ está no intervalo $\left((\hat{\mathbf{x}})_j - t_{\alpha/2;v} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2}, (\hat{\mathbf{x}})_j + t_{\alpha/2;v} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2} \right)$ com probabilidade $1 - \alpha$. Isto é incorreto, pois para valores *dados* de $(\hat{\mathbf{x}})_j$ e $\tilde{\sigma}^2$, o valor *fixo* $(\mathbf{x})_j$ está ou não no intervalo. Este enunciado de probabilidade deve ser interpretado *muito cuidadosamente*. Ele *não* significa que a probabilidade do parâmetro $(\mathbf{x})_j$ cair dentro do intervalo especificado é igual a $1 - \alpha$; $(\mathbf{x})_j$ é um parâmetro constante (não aleatório) e está ou não no intervalo acima. Em vez disso, o enunciado deve ser interpretado como segue: $1 - \alpha$ é uma probabilidade de que o intervalo aleatório $\left((\hat{\mathbf{x}})_j - t_{\alpha/2;v} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2}, (\hat{\mathbf{x}})_j + t_{\alpha/2;v} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2} \right)$ contém $(\mathbf{x})_j$. Este intervalo é chamado de *intervalo de confiança* para o parâmetro $(\mathbf{x})_j$. Como $t_{\alpha/2;v}$ está a nossa disposição, podemos escolhê-lo de tal modo que a probabilidade acima seja igual a $1 - \alpha$. $1 - \alpha$ é um número igual ao limite da proporção de intervalos que conteriam o parâmetro $(\mathbf{x})_j$ se o processo de medição fosse repetido sem limites. Esta proporção é chamada de “nível de confiança”.

O nível de confiança não é um enunciado a respeito do intervalo computado, que inclui ou não inclui o valor desconhecido do mensurando $(\mathbf{x})_j$. Ele é um enunciado a respeito do procedimento estatístico usado para computar o intervalo. Imagine que o experimento pudesse ser repetido infinitamente muitas vezes sob exatamente as mesmas condições e usando exatamente os mesmos instrumentos e artefatos. Agora imagine que em todas estas repetições exatamente as mesmas distribuições de amostragem continuaram a valer para as grandezas aleatórias. O nível de confiança é a fração dos infinitos intervalos hipotéticos $\left((\hat{\mathbf{x}})_j - t_{\alpha/2;v} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2}, (\hat{\mathbf{x}})_j + t_{\alpha/2;v} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2} \right)$ que incluiriam o valor desconhecido do mensurando $(\mathbf{x})_j$.

Em contraste, a estatística Bayesiana considera $(\mathbf{x})_j$ como uma variável aleatória no sentido de que temos algumas crenças sobre seu valor, e pensamos no intervalo como fixo uma vez que o dado esteja disponível. Esta abordagem interpreta $(\hat{\mathbf{x}})_j$ e $\tilde{\sigma}^2(2/nN)^{1/2}$ como o valor esperado e o desvio padrão de uma distribuição de estado de

conhecimento para $(\mathbf{x})_j$. A *probabilidade de abrangência* $1 - \alpha$ do intervalo $\left((\hat{\mathbf{x}})_j - t_{\alpha/2, \nu} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2}, (\hat{\mathbf{x}})_j + t_{\alpha/2, \nu} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2} \right)$ é uma fração de uma distribuição de estado de conhecimento representada por $(\hat{\mathbf{x}})_j$ e $\tilde{\sigma}^2 (2/nN)^{1/2}$ que é abrangida por este intervalo.

Neste caso, a interpretação do *intervalo de credibilidade* Bayesiano é mais próxima do senso comum. Ele é com efeito corretamente interpretado como significando que o parâmetro desconhecido $(\mathbf{x})_j$ está no intervalo $\left((\hat{\mathbf{x}})_j - t_{\alpha/2, \nu} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2}, (\hat{\mathbf{x}})_j + t_{\alpha/2, \nu} \tilde{\sigma}(2/nN)^{1/2} \right)$ com probabilidade $1 - \alpha$. Note que isto fornece um enunciado direto, imediatamente intuitivo, sobre a grandeza de interesse desconhecida $(\mathbf{x})_j$ em termos de probabilidade, em forte contraste com os circunlóquios fornecidos pelos intervalos de confiança freqüentistas. Como no método Bayesiano, $(\hat{\mathbf{x}})_j$ e $\tilde{\sigma}^2 (2/nN)^{1/2}$ são conhecidos e dados, o intervalo de credibilidade é fixo. A probabilidade $1 - \alpha$ é chamada de “probabilidade de abrangência”.