

CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE E SÍNTESE DE UMA CLASSE DE SISTEMAS  
DINÂMICOS HÍBRIDOS ASSÍNCRONOS

Alexandre Rabello Pereira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

---

Prof. Amit Bhaya , Ph.D.

---

Prof. Eugenius Kaszkurewicz , D.Sc.

---

Prof(a). Vilma Alves de Oliveira , Ph.D.

---

Prof. Paulo Cesar Pellanda , Dr.

---

Prof. Fernando César Lizarralde , D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JULHO 2005

PEREIRA, ALEXADRE RABELLO

CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE  
E SÍNTESE DE UMA CLASSE DE  
SISTEMAS DINÂMICOS HÍBRIDOS  
ASSÍNCRONOS [Rio de Janeiro] 2005

VIII, 141 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ,  
D.Sc., Engenharia Elétrica, 2005)

Tese - Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Sistemas Dinâmicos Híbridos Assincronos
2. Desigualdades Matriciais Bilineares
3. Algoritmos Genéticos
4. Sistemas de Controle em Rede

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

# Agradecimentos

Eu gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos ao meu orientador Prof. Amit Bhaya, por sua inspiração e incentivo durante todo o processo de desenvolvimento desta pesquisa. Sua paciência e conselhos contribuíram de forma decisiva na elaboração desta tese.

Eu também gostaria de expressar meus agradecimentos aos membros da banca examinadora: D.Sc Eugenius Kaszkurewicz, Ph.D. Vilma Alves de Oliveira, Dr. Paulo Cesar Pellanda, D. Sc. Fernando César Lizarralde. Todos foram generosos com seu tempo e conhecimento durante o processo de dissertação.

Finalmente, eu gostaria de agradecer aos meus pais, irmã, tia e noiva pelo seu carinho e incentivo durante estes anos.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

CONTRIBUIÇÕES À ANÁLISE E SÍNTESE DE UMA CLASSE DE SISTEMAS  
DINÂMICOS HÍBRIDOS ASSÍNCRONOS

Alexandre Rabello Pereira

Julho/2005

Orientador: Prof. Amit Bhaya , Ph.D.

Programa: Engenharia Elétrica

Este tese apresenta uma classe de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos com restrições nas taxas de ocorrência de configurações discretas. A introdução de restrições nas taxas de ocorrência de configurações discretas, ao contrário de restrições nas taxas de eventos proposta recentemente na literatura técnica, apresenta vantagens na análise de estabilidade quadrática de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. Especificamente, o uso de restrições nas taxas de configurações discretas leva-nos a desigualdades matriciais bilineares com parâmetros que podem ser interpretados diretamente na análise de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. Além disso, um menor número de parâmetros é necessário na análise de estabilidade quando comparado com a metodologia utilizando taxas de eventos, o que proporciona a importante consequência de obtermos desigualdades matriciais bilineares mais tratáveis. Um algoritmo numérico para análise de estabilidade quadrática, baseado em métodos de pontos interiores para solução de desigualdades matriciais lineares e algoritmo genético é proposto. Aplicações em diversos problemas desde sistemas de controle em rede com perda de pacotes à convergência de algoritmos paralelos são apresentadas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

CONTRIBUTIONS TO THE ANALYSIS AND SYNTHESIS OF A CLASS OF  
ASYNCHRONOUS HYBRID DYNAMICAL SYSTEMS

Alexandre Rabello Pereira

July/2005

Advisor: Prof. Amit Bhaya , Ph.D.

Department: Electrical Engineering

This thesis introduces a class of asynchronous hybrid dynamical systems with rate constraints on discrete configurations. The introduction of rate constraints on the discrete configurations, as opposed to event rate constraints proposed earlier in the technical literature, is shown to have advantages in the quadratic stability analysis of asynchronous hybrid dynamical systems. Specifically, using configuration rate constraints leads to bilinear matrix inequalities in parameters that can be interpreted directly in terms of the asynchronous hybrid dynamical system being analyzed. In addition, a smaller number of parameters is involved in the stability analysis, when compared with the event rate approach, and this has the important consequence of leading to bilinear matrix inequalities that are more tractable. A numerical algorithm for quadratic stability analysis, based on a combination of an interior-point based linear matrix inequality solver and a genetic algorithm, is also proposed. Applications to diverse examples ranging from networked control systems with packet dropout, to convergence of asynchronous fixed point iterations are described.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos . . . . .	2
1.2	Revisão Bibliográfica . . . . .	3
1.3	Estrutura da Tese . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Sistemas Dinâmicos Híbridos Assíncronos com Restrições nas Taxas de Ocorrência de Configurações Discretas</b>	<b>9</b>
2.1	Introdução . . . . .	9
2.2	Definição de um sistema dinâmico híbrido assíncrono com restrições na ocorrência de eventos . . . . .	10
2.3	Exemplos de Sistemas Dinâmicos Híbridos Assíncronos . . . . .	14
2.3.1	Sistema de controle em rede com perda de pacotes . . . . .	14
2.3.2	Escalonamento de sistemas de controle em rede . . . . .	16
2.3.3	Algoritmos paralelos . . . . .	17
2.4	Análise de Estabilidade dos Sistemas Dinâmicos Híbridos Assíncronos	18
2.4.1	Estabilidade exponencial: caso contínuo . . . . .	18
2.4.2	Estabilidade exponencial: caso discreto . . . . .	21
2.5	Estabilidade Exponencial como Problema de Otimização . . . . .	23
2.6	Análise de Estabilidade Exponencial Empregando o conceito de <i>Taxa de ocorrência de configurações discretas</i> . . . . .	25
2.6.1	Síntese de controlador e análise de estabilidade exponencial simultâneas . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Aplicações em Controle e Métodos Iterativos</b>	<b>37</b>
3.1	Introdução . . . . .	37
3.2	Análise de estabilidade em sistemas de controle em rede sujeitos à perda de pacotes . . . . .	37
3.2.1	Análise de estabilidade e síntese do controlador simultânea para sistemas de controle em rede com perda de pacotes	43
3.3	Escalonamento em sistemas de controle em rede . . . . .	46
3.3.1	O algoritmo de escalonamento RM ( <i>Rate Monotonic</i> ) . . . . .	47

3.3.2	Escalonamento via algoritmo RM em sistemas de controle em rede com perdas de pacotes . . . . .	48
3.4	Algoritmos paralelos . . . . .	58
3.5	Sistemas de controle distribuído com atrasos . . . . .	63
3.5.1	Análise de estabilidade usando realimentação de estado e atraso unitário . . . . .	66
3.5.2	Exemplo numérico . . . . .	69
3.6	Sistemas lineares assíncronos . . . . .	73
3.6.1	Sistemas assíncronos em fase . . . . .	74
3.6.2	Sistemas assíncronos em frequência . . . . .	76
3.6.3	Exemplo numérico . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Resolução de Desigualdades Matriciais Bilineares Através de um Algoritmo Combinado</b>	<b>85</b>
4.1	Introdução . . . . .	85
4.2	Desigualdades matriciais lineares . . . . .	86
4.3	Desigualdades Matriciais Bilineares . . . . .	87
4.4	Complexidade computacional de problemas de otimização envolvendo LMIs e BMIs . . . . .	88
4.5	Programas numéricos para solução de problemas envolvendo <i>LMIs</i> . . . . .	89
4.6	Solução de problemas envolvendo <i>BMIs</i> . . . . .	90
4.7	Algoritmo genético . . . . .	90
4.8	Algoritmo combinado proposto para resolução de problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais bilineares . . . . .	92
4.9	Síntese de controladores $H_2/H_\infty$ utilizando Algoritmo Combinado . . .	95
4.9.1	O Problema de Controle $H_2$ usando LMIs . . . . .	95
4.9.2	Controle $H_2$ com realimentação de estado . . . . .	97
4.9.3	O Problema de Controle $H_\infty$ usando LMIs . . . . .	99
4.9.4	Controle $H_\infty$ com realimentação de estado . . . . .	100
4.9.5	Problema de controle $H_2/H_\infty$ . . . . .	101
4.9.6	O problema de controle $H_2/H_\infty$ com realimentação de estado . .	102
4.10	Solução de Problemas BMIs Através de Algoritmos Genéticos . . . . .	105
4.10.1	Um problema BMI simples com duas variáveis . . . . .	106
4.10.2	Problemas BMI gerados randomicamente . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>111</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>113</b>
<b>A</b>	<b>Outras Técnicas de Otimização para Problemas Envolvendo BMIs</b>	<b>115</b>
A.1	Minimização alternada . . . . .	115
A.2	Algoritmo Branch and Bound . . . . .	116
<b>B</b>	<b>O Algoritmo Genético Básico</b>	<b>119</b>
B.1	Representação cromossômica . . . . .	119
B.2	Tamanho da população . . . . .	120



B.3	A função de seleção . . . . .	120
B.4	Os operadores genéticos . . . . .	121
B.5	Inicialização, Critério de parada e função objetivo . . . . .	124
<b>C</b>	<b>Artigos publicados</b>	<b>125</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>136</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Os avanços tecnológicos em sistemas digitais, sistemas de comunicação, e rede de dados, estimularam o aparecimento de sistemas nos quais os períodos de amostragem são distintos em partes diferentes destes sistemas, denominados na literatura como sistemas dinâmicos híbridos assíncronos ou dessincronizados. Estes sistemas têm despertado muito interesse não só na área de controle como também em telecomunicações e computação. De fato, com o aumento da complexidade dos sistemas desenvolvidos, a dificuldade de sincronização de todos os elementos destes sistemas aumenta consideravelmente, sendo muitas vezes inviável.

Sistemas dinâmicos híbridos assíncronos podem modelar uma grande variedade de sistemas, como por exemplo, sistemas de controle nos quais sinais são transmitidos através de uma rede de comunicação assíncrona; sistemas de controle distribuídos resultantes de vários subsistemas que interagem entre si, onde cada um dos subsistemas tem seus próprios objetivos, sensores, recursos e variáveis de decisão; e algoritmos numéricos paralelizados, nos quais um problema de grande porte é decomposto em vários subproblemas de porte menor que são resolvidos concorrentemente, porém não necessariamente de maneira sincronizada, em diferentes processadores.

De forma simplificada, sistemas dinâmicos híbridos assíncronos são sistemas que incorporam simultaneamente dinâmicas discretas e contínuas, com dinâmicas discretas governadas por autômatas finitos, e dinâmicas contínuas representadas por equações diferenciais (ou a diferença) ordinárias em cada configuração discreta. Supõe-se que as configurações discretas ocorrem de forma assíncrona, porém com taxas fixas.

## 1.1 Objetivos

No presente trabalho, serão apresentadas contribuições à teoria de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos desenvolvida inicialmente por Hassibi et al em (Hassibi, Boyd & How 1999). A introdução do conceito *taxa de ocorrência de configuração discreta* neste trabalho permite a redução de termos bilineares presentes em problemas de análise e síntese de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. Além disso, com o conceito *taxa de ocorrência de configuração discreta*, o número de parâmetros utilizados nos problemas é reduzido e estes passam a apresentar uma relação direta com as configurações discretas, isto é, passam a representar as taxas de decaimento individuais das configurações discretas, facilitando, desta forma, sua interpretação e cálculo, como será visto mais adiante.

O estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos via funções de Lyapunov quadráticas geralmente leva a formulação de problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais bilineares. Desigualdades matriciais bilineares possuem complexidade maior que as desigualdades matriciais lineares, pertencendo, de modo geral, a classe de problemas NP-difíceis (Toker & Ozbay 1995).

Para a resolução de problemas de análise e síntese de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, será proposto um algoritmo combinando métodos de pontos interiores e algoritmos genéticos. O objetivo desta combinação é permitir que, uma vez feita uma decomposição adequada do problema, uma parte do problema seja tratada como um problema de otimização convexa e resolvida por técnicas eficientes de otimização local. Uma técnica de otimização metaheurística (de maior custo computacional) é aplicada somente a outra parte não-convexa do problema com dimensões reduzidas.

Com o aparecimento de diversos problemas envolvendo assincronismo na literatura, diferentes técnicas foram utilizadas para resolução destes problemas. Entre as quais podemos citar: matrizes não-negativas e indução matemática (Chazan & Miranker 1969), funções de Lyapunov do tipo diagonal (Kaszkurewicz, Bhaya & Šiljak 1990), análise probabilística (Verkama 1996) (Leland 1994), análise síncrona utilizando aproximação racional (Ritchey & Franklin 1989) e matrizes de transição de estados (Kleptsyn, Kozyakin, Krasnosel'skii & Kuznetsov 1984a) (Kleptsyn, Kozyakin, Krasnosel'skii & Kuznetsov 1984b). Neste trabalho, problemas da literatura envolvendo

assincronismo e tratados inicialmente com as técnicas citadas, serão revisitados e estudados sobre o enfoque unificado de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, ratificando a importância e abrangência da metodologia proposta inicialmente em (Hassibi et al. 1999).

Não só na área de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, como também em outras áreas, a possibilidade de vários problemas de controle na literatura serem formulados como problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais bilineares, estimula o desenvolvimento de algoritmos práticos para a resolução de desigualdades matriciais bilineares (“*Bilinear Matrix Inequalities - BMIs*”). No apêndice A, a título de exemplo, o algoritmo combinado proposto neste trabalho será utilizado no problema de Síntese de controladores  $H_2/H_\infty$ . Neste problema, o fato de trabalharmos simultaneamente com critérios quadráticos e restrições  $H_\infty$ , impede que as *BMIs* existentes sejam transformadas em desigualdades matriciais lineares (“*Linear Matrix Inequalities - LMIs*”) através de mudanças de variáveis (Boyd, Ghaoui, Feron & Balakrishnan 1994).

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Trabalhos anteriores sobre sistemas dinâmicos híbridos assíncronos priorizaram o estudo sobre os critérios de estabilidade para estes sistemas. Chazan e Miranker (Chazan & Miranker 1969) foram os primeiros a estudar a estabilidade de um sistema linear discreto sujeito a atrasos variantes no tempo e possivelmente não-limitados em um contexto chamado por estes autores de computação iterativa caótica, onde a palavra caótica significava a variação arbitrária de atrasos no sistema. O trabalho desenvolvido por estes autores apresentou condições de estabilidade utilizadas posteriormente para garantir a convergência de algoritmos numéricos assíncronos (Bertsekas & Tsitsiklis 1989).

Pelo fato dos sistemas dinâmicos híbridos assíncronos ou dessincronizados apresentarem diversos períodos de amostragem, alguns trabalhos também denominam estes sistemas como sistemas assíncronos multi-taxa. A partir de fenômenos observados no funcionamento de sistemas digitais, Kleptsyn et al (Kleptsyn, Kozyakin, Krasnosel’skii & Kuznetsov 1983, Kleptsyn, Kozyakin, Krasnosel’skii & Kuznetsov 1984c, Kleptsyn, Kozyakin, Krasnosel’skii & Kuznetsov 1984d, Kleptsyn, Krasnosel’skii, Kuznetsov &

Kozjakin 1984) apresentaram um modelo para o estudo de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, baseado nas matrizes de transição de estado associadas aos instantes de atualização das variáveis do sistema. Na coleção de artigos citados anteriormente, Kleptsyn e co-autores definiram duas classes para os tipos de assincronismo que podem ocorrer no modelo proposto por estes autores, classificando os sistemas como assíncronos em fase e assíncronos em frequência, baseado na relação racional ou não existente entre os diferentes períodos de amostragem.

Kleptsyn e co-autores forneceram alguns critérios de estabilidade, apesar de evidenciarem a dificuldade de se obter critérios de estabilidade para sistemas de ordem elevada, devido ao crescimento exponencial dos cálculos a serem realizados. Especificamente em (Kleptsyn, Krasnosel'skii, Kuznetsov & Kozjakin 1984), foi apresentado o algoritmo de Kleptsyn para sistemas assíncronos em frequência de segunda ordem, consistindo de uma série de passos que permitem fazer uma análise da estabilidade do sistema, sem aumento excessivo da complexidade matemática.

No modelo proposto por Ritchey e Franklin (Ritchey & Franklin 1989) para sistemas de controle dessincronizados, são definidos como assíncronos somente os sistemas de controle que apresentam uma relação irracional entre os diferentes períodos de amostragem existentes no sistema. A partir do modelo proposto e da idéia de aproximar um número irracional utilizando frações racionais, é apresentada uma análise síncrona aproximada fazendo uso de uma sequência de matrizes de transição de estados discretizadas, o que leva a obtenção de uma condição suficiente para a estabilidade do sistema. A principal restrição existente desta abordagem é a necessidade da hipótese de que todas as matrizes de transição de estado sejam diagonalizáveis.

Outra visão sobre assincronismo é apresentada por Krtolica et al (Hassibi et al. 1999) na análise de estabilidade de um sistema de controle distribuído onde uma rede de comunicação é utilizada na transferência de informações entre planta e controlador. O assincronismo do sistema de controle apresentado é caracterizado pela natureza randômica de possíveis atrasos na comunicação entre planta e controlador.

Krtolica et al (Krtolica, Özgüner, Chan, Göktas, Winkelman & Liubakka 1994) relacionam a estabilidade do sistema com sequências binárias que representam parâmetros de atrasos de comunicação. O aumento dos atrasos na rede de comunicação do sistema causa um aumento no número de sequências binárias a serem analisadas, o que

restringe o uso do método na verificação de estabilidade para um número pequeno de atrasos. Ainda em (Krtolica et al. 1994), os autores também apresentam uma análise do comportamento do sistema de controle com atrasos aleatórios utilizando uma cadeia de Markov.

Devido aos diferentes tipos de modelagem de assincronismo, muitas vezes restritos a casos particulares, tornou-se clara a necessidade de se unificar as teorias existentes com o objetivo de se obter critérios de estabilidade mais abrangentes para os sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. Em sua tese (de Medeiros 2001), Medeiros mostra que os modelos de assincronismo apresentados em (Ritchey & Franklin 1989) e (Krtolica et al. 1994) podem ser vistos como casos especiais do modelo estudado por Kleptsyn et al (Kleptsyn et al. 1983, Kleptsyn, Kozyakin, Krasnosel'skii & Kuznetsov 1984c, Kleptsyn, Krasnosel'skii, Kuznetsov & Kozjakin 1984).

Com o desenvolvimento de computadores paralelos, a computação científica tem sido outra área a estimular o aumento de pesquisas sobre assincronismo (Cassandras 1993). Kaszkurewicz e co-autores apresentam um modelo matemático descrito por equações de estado para uma classe de métodos iterativos assíncronos em (Kaszkurewicz & Bhaya 1999). Utilizando este modelo, que generaliza vários modelos do tipo Chazan-Miranker (Chazan & Miranker 1969), Kaszkurewicz et al. mostram que a convergência exponencial destes métodos iterativos assíncronos pode ser garantida através de funções de Lyapunov diagonais.

Se por um lado existe a facilidade de modelar uma variedade de problemas como sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, o mesmo não pode ser dito sobre a complexidade do comportamento destes sistemas. Muitos problemas sobre estes sistemas são conhecidos ou conjecturados como sendo computacionalmente intratáveis ("NP-hard") (Garey & Johnson 1983) (Papadimitriou & Steiglitz 1982). Em (Hassibi et al. 1999), Hassibi et al introduzem uma teoria baseada nas técnicas de Lyapunov para análise e controle de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. Hassibi e co-autores mostram que o cálculo de funções de Lyapunov para provar algum nível de performance ou projeto de controladores para os sistemas dinâmicos híbridos assíncronos pode ser visto como um problema de otimização envolvendo desigualdades matriciais lineares ("*LMI*s") e desigualdades matriciais bilineares ("*BMI*s").

Na teoria clássica de Lyapunov, é preciso que a função de Lyapunov decresça mono-

tonicamente ao longo das trajetórias do estado do sistema para provarmos estabilidade. Porém, Hassibi e co-autores (Hassibi et al. 1999) propõem o uso de uma função tipo Lyapunov que decresce na média ao longo das trajetórias dos estados do sistema dinâmico híbrido assíncrono. A teoria apresentada por Hassibi et al (Hassibi et al. 1999), também foi utilizada pelos autores de (Zhang, Branicky & Phillips 2001) na análise de sistemas de controle em rede, onde os dados entre planta e controlador são enviados utilizando uma rede de comunicação sujeita a possíveis perda de pacotes de dados.

### 1.3 Estrutura da Tese

O presente trabalho está estruturado da forma descrita a seguir.

No Capítulo 2 é apresentada uma definição formal para sistemas dinâmicos híbridos assíncronos com restrições na ocorrência de eventos desenvolvida por Hassibi et al (Hassibi et al. 1999). Em seguida, a estabilidade destes é analisada utilizando uma teoria baseada nas técnicas de Lyapunov. Através de um exemplo mostra-se que, mesmo tendo uma descrição simples, estes sistemas podem apresentar um comportamento muito complexo. No final do capítulo, como uma das contribuições desta tese, é proposta uma alteração no modelo proposto em (Hassibi et al. 1999), descrita nos teoremas (2.3) e (2.4), que permite achar um conjunto limitado para os parâmetros envolvidos na análise de estabilidade e ainda reduzir o número de termos bilineares presentes em problemas de análise de estabilidade e síntese de controladores.

No Capítulo 3, diferentes problemas envolvendo assincronismo, serão revisitados sob o enfoque proposto de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. Resultados obtidos com o uso do algoritmo combinado serão comparados com os resultados originais para estes problemas. E assim, ratificando mais uma contribuição desta tese.

No Capítulo 4 serão apresentadas as definições sobre desigualdades matriciais lineares e bilineares. A seguir, discutiremos sobre a complexidade computacional em problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais lineares e bilineares. Mencionaremos alguns programas numéricos utilizados para solução de desigualdades matriciais lineares e a técnica de otimização global utilizada para solução de desigualdades matriciais bilineares. Uma visão geral sobre algoritmo genético e o seu funcionamento é mostrado procurando fornecer subsídios para compreensão de outra con-

tribuição desta tese, ou seja, o algoritmo combinado que será apresentado no capítulo.

Ainda no Capítulo 4, será mostrada uma aplicação do algoritmo combinado em problemas envolvendo desigualdades matriciais bilineares não provenientes de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. O problema estudado será o problema de Síntese de Controladores  $H_2/H_\infty$ , no qual o fato de trabalharmos simultaneamente com critérios quadráticos e restrições  $H_\infty$ , impede que as *BMI*s existentes sejam transformadas em *LMI*s através de mudanças de variáveis (Boyd et al. 1994). No final do capítulo, problemas gerais envolvendo *BMI*s são resolvidos fazendo uso somente de Algoritmos Genéticos, para isto, determinamos uma representação cromossômica para todo o espaço de busca nestes problemas gerais envolvendo *BMI*s. Os resultados encontrados serão comparados com resultados obtidos através de uma implementação do algoritmo "branch and bound" (Goh, Safonov & Papavassilopoulos 1995), o qual, apesar de garantir convergência global, apresenta eficiência computacional questionável.

No Capítulo 5 serão apresentadas algumas conclusões a respeito do trabalho desenvolvido, bem como indicações de tópicos para investigações futuras.

No Apêndice A as duas principais técnicas, presentes na literatura para a resolução de problemas envolvendo *BMI*s serão mostradas.

No apêndice B serão fornecidos detalhes dos seis componentes fundamentais de algoritmo genético utilizado neste trabalho.

Cópias de artigos (Rabello & Bhaya 2002) (Rabello & Bhaya 2003) publicados no *ACC2002* e no periódico *IEE Proceedings-Control Theory and Applications* estão presentes no apêndice C.





# Capítulo 2

## Sistemas Dinâmicos Híbridos

### Assíncronos com Restrições nas

### Taxas de Ocorrência de

### Configurações Discretas

#### 2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar uma definição formal, para sistemas dinâmicos híbridos assíncronos com restrições na ocorrência de eventos, desenvolvida por Hassibi et al (Hassibi et al. 1999). Em seguida, a estabilidade destes é analisada utilizando uma teoria baseada nas técnicas de Lyapunov. Através de um exemplo mostra-se que, mesmo tendo uma descrição simples, estes sistemas podem apresentar um comportamento muito complexo. No final do capítulo, apresentamos uma modificação ao modelo proposto em (Hassibi et al. 1999), com a introdução de restrições na ocorrência de configurações discretas, que permite definir um espaço de busca limitado para os parâmetros envolvidos na análise de estabilidade. Estes parâmetros, a partir da modificação proposta, passam a representar taxas de decaimento do sistema dinâmico híbrido assíncrono nas configurações discretas, com significado diretamente interpretável em termos do sistema na análise de estabilidade.

## 2.2 Definição de um sistema dinâmico híbrido assíncrono com restrições na ocorrência de eventos

Sistemas dinâmicos híbridos assíncronos são sistemas que incorporam, ao mesmo tempo, dinâmicas contínuas e discretas, com dinâmicas contínuas representadas por equações diferenciais ou a diferença ordinárias, e dinâmicas discretas representadas por autômatos finitos. A dinâmica discreta representada por autômatos finitos está condicionada a ocorrência de eventos discretos que ocorrem de forma assíncrona, porém com taxas fixas.

O diagrama de bloco da Figura 2.1 a seguir representa um sistema dinâmico híbrido assíncrono.

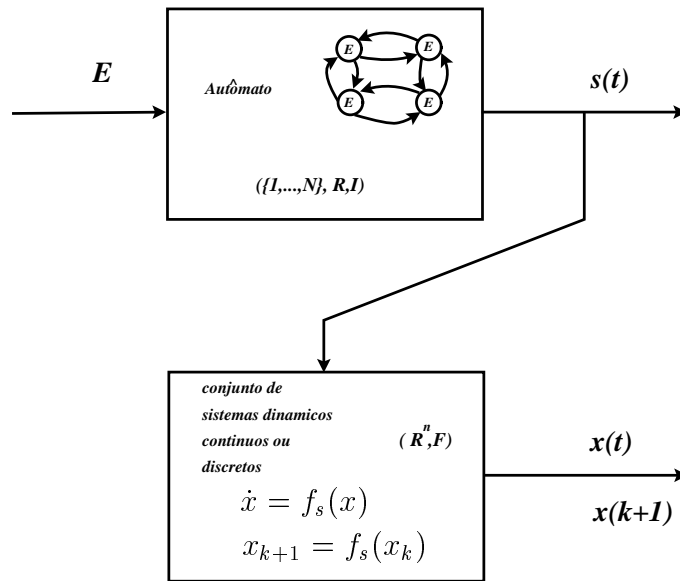


FIGURA 2.1: Diagrama de blocos de um sistema dinâmico híbrido assíncrono

Nesta tese, um sistema dinâmico híbrido assíncrono com restrições nas taxas de ocorrência de eventos é definido como uma 7-upla

$$\mathcal{A} = (R_+, \{1, \dots, N\}, R^n, E, R, \mathcal{I}, F) \quad (2.1)$$

onde  $R_+$  é o tempo,  $\{1, \dots, N\}$  é o conjunto de configurações discretas,  $R^n$  é o espaço de estados contínuos,  $E$  é o conjunto de eventos,  $R$  é o conjunto de taxas de ocorrência dos

eventos,  $\mathcal{I} : \{1, \dots, N\} \rightarrow 2^E$  é a função que relaciona evento a configuração discreta, e  $F$  é o conjunto de funções que representa o sistema dinâmico contínuo. A seguir, detalha-se esta notação.

- *Tempo.* Representado pelo conjunto  $R_+$ , onde a variável utilizada é denominada como  $t$ .
- *Configuração discreta, estado contínuo, espaço de estado.* As configurações discretas e o estado contínuo no instante de tempo  $t$  são representados por  $s(t)$  e  $x(t)$  respectivamente. Para todo  $t$ ,  $s(t) \in \{1, \dots, N\}$  e  $x(t) \in R^n$ . O espaço de estado de  $\mathcal{A}$  é o conjunto  $\{1, \dots, N\} \times R^n$ .
- *Conjunto de funções do sistema dinâmico contínuo.*  $F = \{f_1, \dots, f_N\}$  onde  $f_i : R^n \rightarrow R^n$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Estas funções determinam a dinâmica de  $x$  em cada configuração discreta  $s = i$ .
- *Conjunto de Eventos.*  $E = \{E_1, \dots, E_M\}$  é o conjunto de possíveis eventos  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ .
- *Funções indicadoras de eventos.* Define a  $i$ -ésima função indicadora do evento  $e_i : R_+ \rightarrow \{0, 1\}$  para  $i = 1, \dots, M$  onde

$$e_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } E_i \text{ ocorreu no tempo } t \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.2)$$

- *Taxa de eventos.*  $R = \{r_1, \dots, r_M\}$ , cada  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  satisfazendo  $0 \leq r_i \leq 1$ , é a taxa de ocorrência do evento  $E_i$  no tempo. Ou seja, em um intervalo de tempo  $[t, t + T]$  supondo  $T$  suficientemente grande,  $r_i T$  é a quantidade total de tempo que o evento  $E_i$  ocorreu. Em outras palavras,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} e_i(\tau) d\tau = r_i. \quad (2.3)$$

- *Conjuntos configurações-eventos discretos.* A função  $\mathcal{I} : \{1, \dots, N\} \rightarrow 2^E$  relaciona um conjunto de eventos a cada configuração discreta. Por definição  $\mathcal{I}(s)$  é o  $s$ -ésimo conjunto configuração-evento discreto. Supõe-se que

$$\mathcal{I}(s) = \{E_{s_1}, E_{s_2}, \dots, E_{s_M}\} \quad (2.4)$$

onde  $E_{s(j)} \in E$  para  $j = 1, \dots, M_i$ . Ou seja,  $E_{s(j)}$  é o  $j$ -ésimo evento do  $s$ -ésimo conjunto configuração-evento discreto. Os conjuntos configurações-eventos discretos determinam a evolução da configuração discreta segundo a influência dos eventos. Ou seja,  $s(t) = i$  se e somente se os eventos de  $\mathcal{I}(i)$  ocorreram.

- *Dinâmicas do estado.* A evolução do estado contínuo  $x$  no tempo é dada pela equação

$$x(t) = \int_0^t f_{s(\tau)}(x) d\tau + x(0).$$

Isto é, em cada configuração discreta  $s$ , as dinâmicas contínuas são governadas pela equação dinâmica  $\dot{x} = f_s(x)$ . A evolução da configuração discreta  $s$  é tal que  $s(t) = i$  se e somente se  $\mathcal{I}(i)$  é o conjunto de eventos ocorridos no instante de tempo  $t$ . A configuração discreta  $s(t)$  permanece inalterada até a ocorrência de um novo evento fazendo com que  $\mathcal{I}(j)$  seja o novo conjunto de configuração-evento discreto. Neste instante  $s(t)$  muda para  $j$ . Isto também vale quando a evolução do estado  $x$  é governada pela equação a diferenças  $x_{k+1} = f_s(x_k)$ .

- *Trajectoria.* Uma trajetória de  $\mathcal{A}$  é uma função  $(s, x) : \mathbf{R}_+ \rightarrow \{1, \dots, N\} \times \mathbf{R}^n$  onde  $s$  e  $x$  satisfazem as dinâmicas discretas e contínuas de  $\mathcal{A}$  respectivamente.
- *Diagrama de transição.* Associa-se  $\mathcal{A}$  a um grafo  $\mathcal{G}(\mathcal{A})$  chamado diagrama de transição. Neste grafo os nós representam as configurações discretas e os arcos entre os nós correspondem aos eventos que mudam a configuração discreta de um nó para outro. Qualquer trajetória de estado discreto do sistema corresponde a uma sequência de nós através dos arcos em  $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ . Na Figura 2.2 é mostrado um exemplo de diagrama de transição.

Os conceitos acima propostos por Hassibi e Boyd em (Hassibi et al. 1999) determinam o funcionamento de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. Em uma análise

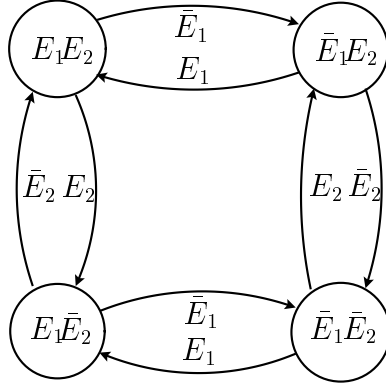


FIGURA 2.2: Exemplo de diagrama de transição de um sistema dinâmico híbrido assíncrono

critérioria, observamos que o uso do conceito *taxa de eventos* leva a uma maior complexidade na formulação de problemas de análise e síntese de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. Posto isto, lembrando que a ocorrência de eventos discretos determina diretamente a ocorrência de configurações discretas em um sistema dinâmico híbrido assíncrono, apresentamos os seguintes conceitos adicionais.

- *Funções indicadoras de configurações discretas.* Define a  $i$ -ésima função indicadora da configuração discreta  $\hat{e}_i : R_+ \rightarrow \{0, 1\}$  para  $i = 1, \dots, N$  onde

$$\hat{e}_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } s = i \text{ ocorreu no tempo } t \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.5)$$

- *Taxas de ocorrência de configurações discretas.*  $\hat{R} = \{\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_N\}$  é o conjunto de taxas de ocorrência de configurações discretas, onde cada  $\hat{r}_i$  satisfaz  $0 \leq \hat{r}_i \leq 1$  e  $\sum_{i=1}^N \hat{r}_i = 1$ , e representa a taxa de ocorrência da configuração discreta  $s = i$ . Ou seja, em um intervalo de tempo  $[t, t + T]$  no qual  $T$  é suficientemente grande,  $\hat{r}_i T$  é a quantidade total de tempo que o estado discreto  $s = i$  ocorreu. Em outras palavras,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \hat{e}_i(\tau) d\tau = \hat{r}_i. \quad (2.6)$$

O uso de taxa de ocorrência de configurações discretas, como será visto na Seção 2.6, permite uma redução dos termos bilineares presentes em problemas de análise e síntese

de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. Além de facilitar a definição de espaços de busca para os parâmetros utilizados nestes problemas, visto que estes parâmetros passam a representar taxas de decaimento para cada um dos sistemas formados em cada configuração discreta.

A definição apresentada para sistemas dinâmicos híbridos assíncronos pode ser facilmente estendida para casos mais gerais: por exemplo, considerando entradas e saídas na dinâmica contínua de cada evento discreto ou seja,  $\dot{x} = f_i(x, u)$  e  $y = g_i(x, u)$ . Podemos supor também que em um determinado intervalo de tempo a taxa de ocorrência do evento  $i$ , denotada  $r_i$ , seja limitada da seguinte maneira:

$$\bar{r}_i - \delta_i \leq r_i \leq \bar{r}_i + \delta_i \quad (2.7)$$

onde  $\bar{r}_i$  e  $\delta_i$  são dados.

## 2.3 Exemplos de Sistemas Dinâmicos Híbridos Assíncronos

Nesta seção, a título de esclarecer as definições apresentadas na seção anterior, apresentamos alguns exemplos de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos.

### 2.3.1 Sistema de controle em rede com perda de pacotes

Com os avanços nos sistemas digitais, sistemas de comunicação e rede de dados, sistemas de controle onde as malhas de controle são fechadas utilizando rede de comunicação de dados em tempo real estão ficando cada vez mais importantes. Estes sistemas são classificados como sistemas de controle em rede, onde a característica principal é o fato de que as informações, por exemplo, entradas de referência, saídas da planta e entradas de controle, são trocadas entre os componentes do sistema de controle (sensores, controladores, etc) utilizando uma rede de comunicação de dados.

A inserção de redes de comunicação de dados nas malhas de controle torna a análise e síntese de sistemas de controle em rede mais complexa. Em (Zhang et al. 2001), os autores mostram que não só os atrasos induzidos pela rede têm que ser levados em

consideração, como também a perda de pacotes de dados. Estas perdas de pacotes de dados representam tanto as possíveis colisões de pacotes, como também as possíveis falhas nos nós da rede. Quando ocorrem colisões de pacotes, do ponto de vista de controle, pode ser vantajoso não retransmitir o pacote antigo, porém transmitir um novo pacote que contenha informações mais recentes.

Sistemas de controle em rede com perda de pacotes podem ser facilmente modelados como sistemas dinâmicos híbridos assíncronos com restrições nas ocorrências de eventos (Hassibi et al. 1999), possibilitando o estudo da estabilidade destes sistemas.

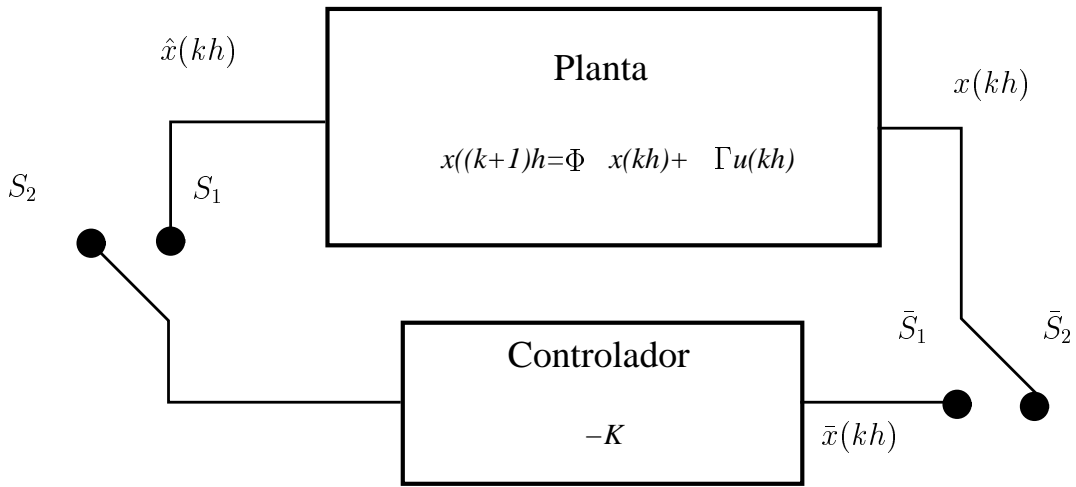


FIGURA 2.3: Sistema de controle em rede com perda de pacotes.

A Figura 2.3 apresenta um exemplo de um sistema de controle em rede com perda de pacotes, onde supõe-se que o sistema em malha fechada é estável e que uma rede de comunicação de dados conecta a planta ao controlador em ambos os sentidos. A rede é modelada como o par de chaves  $S$  e  $\bar{S}$  que comutam com certas taxas  $r_i$ . Quando as chaves estão fechadas, os pacotes de dados são transmitidos na rede sem atrasos. Quando as chaves estão abertas, as saídas das chaves mantêm os valores recebidos anteriormente e os pacotes de dados transmitidos são perdidos. O diagrama de transição do sistema é apresentado na Figura 2.4, onde  $E_1$  e  $\bar{E}_1$  correspondem aos eventos de fechar e abrir respectivamente a primeira chave e  $E_2$  e  $\bar{E}_2$  correspondem aos eventos de fechar e abrir respectivamente a segunda chave. No Capítulo 4 retornaremos a este exemplo, mostrando como a dinâmica do sistema em cada estado discreto ou nó do diagrama de transição pode ser descrita e analisaremos o comportamento do mesmo.



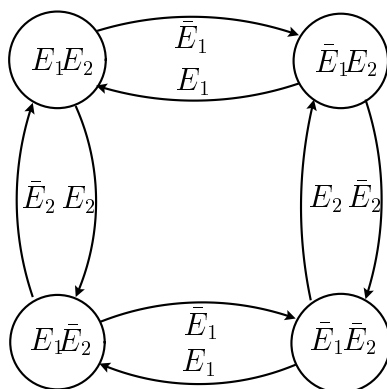


FIGURA 2.4: Diagrama de transição do sistema de controle em rede com perda de pacotes

### 2.3.2 Escalonamento de sistemas de controle em rede

A inserção de uma rede de comunicação para interligar os componentes de malhas de controle realimentadas torna a análise e projeto de sistemas de controle em rede complexa. Esta inserção, faz com que o desempenho da malha de controle não dependa somente do projeto do algoritmo de controle, mas também do escalonamento do recurso de rede compartilhado.

O problema de escalonamento da rede em sistemas de controle em rede consiste em definir uma sequência de transmissão para cada entidade transmissora (sensor, controlador, atuador) conectada na rede baseada em um algoritmo de escalonamento. Este algoritmo de escalonamento é formado por um conjunto de regras que definem qual a mensagem que pode ser transmitida num dado instante.

Considere um conjunto de sistemas de controle em rede os quais são conectados via rede, conforme a Figura (2.5), onde para efeitos de simplificação a planta e o controlador são lineares e a comunicação via rede é feita somente entre os sensores da planta e o controlador. Cada planta transmite os dados dos seus sensores com um período de transmissão  $h_i(t)$ , possibilitando a determinação de limites para os períodos de transmissão que garantem estabilidade para cada planta individualmente (Zhang et al. 2001). Contudo, como o meio de transmissão é compartilhado entre os sistemas de controle em rede, um escalonamento para transmissão de dados das plantas torna-se necessário.

Poderemos verificar, no Capítulo 4, que este escalonamento também pode ser estu-

dado sobre o enfoque de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, melhorando resultados existentes na literatura.

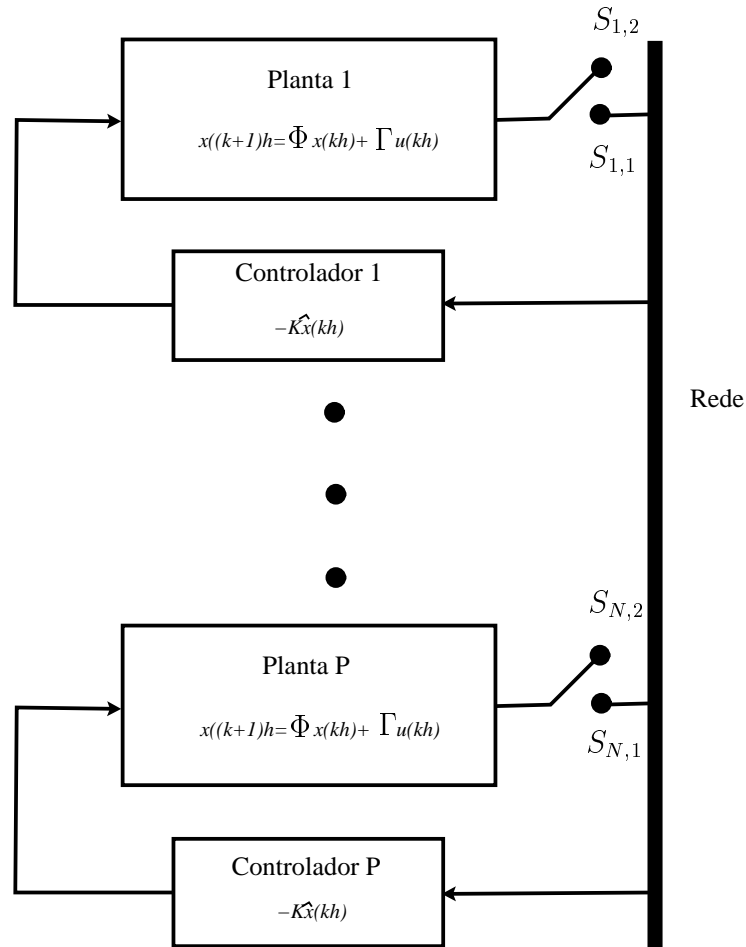


FIGURA 2.5: Escalonamento de sistemas de controle em rede.

### 2.3.3 Algoritmos paralelos

Uma maneira de achar soluções de sistemas de equações lineares, consiste em encontrar sucessivas aproximações da solução resolvendo o problema de ponto fixo  $x_{k+1} = Ax_k + b$ . Em uma implementação síncrona, este problema de ponto fixo converge para o ponto fixo  $x = (I - A)^{-1}b$  a partir de qualquer solução inicial se e somente se os autovalores da matrix  $A$  apresentarem módulo menor que um.

Em (Hassibi et al. 1999), os autores propõem uma implementação paralelizada para o problema de ponto fixo, onde o mesmo é decomposto em dois problemas locais que são resolvidos em dois processadores diferentes  $P$  e  $\bar{P}$  concorrentemente, tendo como

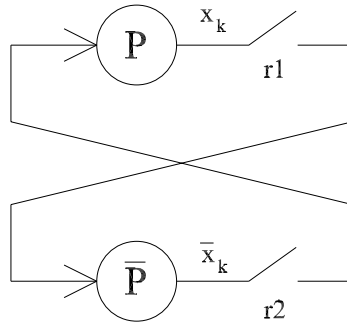


FIGURA 2.6: Versão assíncrona com dois processadores para o problema de ponto fixo objetivo reduzir o tempo de processamento necessário para resolver o problema. Esta implementação pode ser vista na Figura (2.6), onde o processador  $P$  é responsável pela atualização de uma parte do vetor  $x$ , enquanto  $\bar{P}$  fica responsável por outra parte. O assincronismo surge neste exemplo porque, para realizar outra iteração nenhum dos processadores tem que esperar até que a informação do outro processador esteja disponível. A única restrição feita é que o processador  $P$  disponibilize sua parte do vetor  $x$  para o processador  $\bar{P}$  com uma taxa  $r_1$  e que o processador  $\bar{P}$  disponibilize sua parte do vetor  $x$  para o processador  $P$  com uma taxa  $r_2$ .

## 2.4 Análise de Estabilidade dos Sistemas Dinâmicos Híbridos Assíncronos

Em (Hassibi et al. 1999), os autores apresentam uma teoria baseada nas técnicas de Lyapunov para análise de estabilidade dos sistemas dinâmicos. Enquanto na teoria clássica de Lyapunov, é necessário que a função de Lyapunov decresça monotonicamente através das trajetórias do sistema para provar estabilidade, Hassibi e co-autores, por outro lado, utilizam uma função tipo Lyapunov que decresça não estritamente, porém apenas na média, ao longo das trajetórias do sistema dinâmico híbrido assíncrono.

### 2.4.1 Estabilidade exponencial: caso contínuo

Assumindo que a evolução do estado contínuo  $x$  seja descrita por equações diferenciais ordinárias, segundo (Hassibi et al. 1999), um sistema dinâmico híbrido assíncrono é

denominado exponencialmente estável se :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|x(t)\| = 0, \quad (2.8)$$

para algum  $\alpha > 0$ , onde o maior  $\alpha$  possível é chamado de *taxa de decaimento* do sistema, servindo como uma medida do grau de estabilidade do sistema. Assim como na teoria clássica, estabilidade exponencial implica em estabilidade assintótica.

O resultado principal de Hassibi e co-autores é uma condição suficiente para estabilidade exponencial:

**Teorema 2.1** *Dada uma função tipo Lyapunov  $V : R^n \rightarrow R_+$  continuamente diferenciável tal que*

$$\beta_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \beta_2 \|x\|^2, \quad (2.9)$$

onde  $\beta_{1,2} > 0$ , a taxa de decaimento exponencial de um sistema dinâmico híbrido assíncrono será maior do que  $\alpha$ , se existirem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$  tais que

$$r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + \dots + r_M \alpha_M > \alpha > 0 \quad (2.10)$$

e a derivada de  $V$  ao longo das trajetórias denotada  $(DV(x)f_s(x))$

$$DV(x)f_s(x) \leq -2(\alpha_{s_1} + \alpha_{s_2} + \dots + \alpha_{s_{M_i}})V(x) \quad (2.11)$$

para  $s = 1, \dots, N$ , onde  $s_j$  para  $j = 1, \dots, M_s$  são definidos em (2.4).

**Prova:** Considerando que as transições das configurações discretas de qualquer trajetória do sistema ocorrem nos instantes  $0 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ , segue que  $s(t)$  permanece constante no intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ . Logo, reescrevendo a condição (2.11) para  $t \in [t_k, t_{k+1}[$  obtemos

$$\frac{\dot{V}(x(t))}{V(x(t))} \leq -2(\alpha_{s_1} + \alpha_{s_2} + \dots + \alpha_{s_{M_s}}),$$

ou ainda,

$$\ln V(x(t_{k+1})) - \ln V(x(t_k)) \leq -2\alpha_{s_1}(t_{k+1} - t_k) + \dots + \alpha_{s_{M_s}}(t_{k+1} - t_k). \quad (2.12)$$

Pela equação (2.3), os escalares  $\alpha_i$  estão relacionados diretamente aos eventos  $E_i$ . Logo, para qualquer ocorrência de um evento  $E_i$ , teremos a contribuição do termo  $\alpha_i(t_{k+1} - t_k)$  no lado direito da desigualdade (2.12). Portanto, somando-se estas desigualdades para  $k = 1, 2, \dots, K - 1$ :

$$\ln V(x(t_K)) + \sum_{k=2}^{K-1} \ln V(x(t_k)) - \sum_{k=2}^{K-1} \ln V(x(t_k)) - \ln V(x(0)) \leq$$

$$-2\alpha_1 \left( \begin{array}{c} \text{tempo de} \\ \text{ocorrência de } E_1 \end{array} \right) - \dots - 2\alpha_M \left( \begin{array}{c} \text{tempo de} \\ \text{ocorrência de } E_M \end{array} \right) \quad (2.13)$$

Observando o cancelamento dos somatórios e sabendo que no limite, o tempo total que o evento  $E_i$  ocorre é igual a  $r_i t_K$  com  $K \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\ln V(x(t_K)) - \ln V(x(0)) \leq -2\alpha_1 r_1 t_K - \dots - 2\alpha_M r_M t_K. \quad (2.14)$$

Utilizando (2.10) tem-se

$$\ln V(x(t_K)) - \ln V(x(0)) < -2\alpha t_K, \quad (2.15)$$

logo

$$V(x(t_K)) < e^{-2\alpha t_K} V(x(0)). \quad (2.16)$$

Fazendo uso de (2.9) obtemos

$$e^{\alpha t_K} \|x(t_K)\| < \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \|x(0)\| \quad (2.17)$$

que implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|x(t)\| = 0. \quad (2.18)$$

**Comentário:**

As condições (2.10) e (2.11) afirmam que a função escalar  $V$  não precisa necessariamente decrescer monotonicamente com uma taxa  $\alpha$  através das trajetórias dos estados, mas sim decrescer com uma taxa  $\alpha$  na média. Isto permite que, por exemplo, em um determinado estado discreto  $i$  a função  $V$  cresça, ou seja,  $\alpha_{s_1} + \alpha_{s_2} + \dots + \alpha_{s_{M_s}} < 0$ . Porém como o sistema apresenta uma taxa média positiva, isto é,  $r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 + \dots + r_M\alpha_M > \alpha > 0$ , este permanece exponencialmente estável.

## 2.4.2 Estabilidade exponencial: caso discreto

Supondo que a evolução do estado  $x$  seja representada, agora, por equações a diferença, segundo (Hassibi et al. 1999), um sistema dinâmico híbrido assíncrono é exponencialmente estável se :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k \|x(k)\| = 0, \quad (2.19)$$

para algum  $\alpha > 1$ , chamado também de taxa de decaimento do sistema.

O teorema a seguir resume os resultados encontrados em (Hassibi et al. 1999):

**Teorema 2.2** *Se existir uma função tipo Lyapunov  $V : R^n \rightarrow R_+$  diferenciável tal que*

$$\beta_1 \|x_k\|^2 \leq V(x_k) \leq \beta_2 \|x_k\|^2, \quad (2.20)$$

onde  $\beta_{1,2} > 0$ , a taxa de decaimento de um sistema dinâmico híbrido assíncrono será maior do que  $\alpha$ , desde que existam escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M > 0$  tais que

$$\alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \dots \alpha_M^{r_M} > \alpha > 1. \quad (2.21)$$

e a derivada discreta de  $V$  ao longo das trajetórias  $DV(x_k)f_s(x_k)$  será dada por

$$DV(x_k)f_s(x) \leq (\alpha_{i_1}^{-2} \alpha_{i_2}^{-2} \dots \alpha_{i_{M_i}}^{-2} - 1)V(x_k) \quad (2.22)$$

para  $s = 1, \dots, N$ , onde  $s_j$  para  $j = 1, \dots, M_s$  são definidos em (2.4).

**Prova:** Supondo que as transições das configurações discretas de qualquer trajetória do sistema ocorrem nos instantes  $0 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ , portanto  $s(t)$  permanece constante no intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ . Logo, reescrevendo a condição (2.22) para  $t \in [t_k, t_{k+1}[$  obtemos

$$V(x(k+1)) \leq (\alpha_{s_1}^{-2} \alpha_{s_2}^{-2} \cdots \alpha_{s_{M_s}}^{-2}) V(x(k)), \quad (2.23)$$

ou ainda

$$\ln V(x(k+1)) \leq -2(\ln \alpha_{s_1} + \ln \alpha_{s_2} + \cdots + \ln \alpha_{s_{M_s}}) + \ln V(x(k)). \quad (2.24)$$

Visto que na definição sobre sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, Hassibi e co-autores utilizam taxas de ocorrência de eventos, os escalares  $\alpha_i$  estão relacionados diretamente ao evento  $E_i$ . Logo, a ocorrência de um evento  $E_i$ , implicará a contribuição do termo  $\alpha_i$  no lado direito da desigualdade (2.24). Portanto, somando-se estas desigualdades para  $k = 1, 2, \dots, K-1$ :

$$\begin{aligned} \ln V(x(t_K)) + \sum_{k=2}^{K-1} \ln V(x(t_k)) - \sum_{k=2}^{K-1} \ln V(x(t_k)) - \ln V(x(0)) \leq \\ -2 \left( \begin{array}{c} \text{tempo de} \\ \text{ocorrência de } E_1 \end{array} \right) \ln \alpha_1 - \cdots - 2 \left( \begin{array}{c} \text{tempo de} \\ \text{ocorrência de } E_M \end{array} \right) \ln \alpha_M. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Observando o cancelamento dos somatórios e sabendo que no limite, o tempo total que o evento  $E_i$  ocorre é igual a  $r_i t_K$  com  $K \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\ln V(x(K)) - \ln V(x(0)) \leq -2r_1 K \ln \alpha_1 - \cdots - 2r_M K \ln \alpha_M. \quad (2.26)$$

Fazendo uso de (2.21)

$$\ln V(x(K)) - \ln V(x(0)) < -2K \ln \alpha, \quad (2.27)$$

portanto

$$V(x(K)) < \alpha^{-2K}V(x(0)). \quad (2.28)$$

Utilizando novamente (2.9)

$$\alpha^K \|x(K)\| < \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \|x(0)\|, \quad (2.29)$$

que implica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k \|x(k)\| = 0. \quad (2.30)$$

## 2.5 Estabilidade Exponencial como Problema de Otimização

Dada a conhecida dificuldade de achar funções de Lyapunov, um artifício comum é restringir o espaço de procura da função de Lyapunov, a determinadas classes de funções candidatas. Feita a restrição, a procura por uma função de Lyapunov para o sistema pode ser tratada como um problema de otimização. Entre as diferentes classes de funções comumente utilizadas na teoria de controle podemos citar funções de Lyapunov quadráticas, funções de Lyapunov quadráticas somadas a uma integral de não-linearidade, funções de Lyapunov quadráticas por partes, funções de Lyapunov quadráticas com restrições integrais quadráticas (Boyd et al. 1994, Megretski & Rantzer 1997, Hassibi & Boyd 1998).

Restringimos o espaço de busca à classe de funções de Lyapunov quadráticas descritas por

$$V(x) = x^T P x, \quad P \succ 0, \quad (2.31)$$

onde a expressão  $P \succ 0$  indica que a matrix  $P$  é positiva definida. Por hipótese, as funções  $f_s$  são lineares, em cada estado discreto do sistema dinâmico híbrido assíncrono, isto é,



$$\dot{x} = A_s x, \quad s = 1, \dots, N. \quad (2.32)$$

Conforme visto acima, um sistema dinâmico híbrido assíncrono é exponencialmente estável se

$$r_1 \alpha_1 + r_2 \alpha_2 + \dots + r_M \alpha_M > \alpha > 0, \quad (2.33)$$

$$x^T (A_s^T P + P A_s) x \leq -2(\alpha_{s_1} + \alpha_{s_2} + \dots + \alpha_{s_{M_i}}) V(x), \quad (2.34)$$

onde para  $V$  em (2.31), a condição (2.34) é equivalente a desigualdade matricial

$$A_s^T P + P A_s \preceq -2(\alpha_{s_1} + \alpha_{s_2} + \dots + \alpha_{s_{M_s}}) P. \quad (2.35)$$

Logo, podemos constatar que a análise de estabilidade exponencial, a partir das condições (2.33) e (2.35) com  $P \succ 0$ , pode ser vista como um problema de otimização envolvendo desigualdades matriciais bilineares (Hassibi et al. 1999) nos parâmetros  $\alpha_i$  e  $P$ . Ou ainda, como um problema envolvendo desigualdades matriciais lineares (Boyd et al. 1994), se fixarmos a variável  $P$  ou as variáveis  $\alpha_s$  separadamente.

Novamente, supondo que a evolução do estado  $x$  seja representada por equações a diferença lineares  $x_{k+1} = A_s x_k$ , no lugar de equações diferenciais  $\dot{x}(t) = A_s x(t)$ , e dada uma função de Lyapunov candidata definida segundo (2.31), as condições para estabilidade exponencial de um sistema dinâmico híbrido assíncrono podem ser escritas como :

$$\alpha_1^{r_1} \alpha_1^{r_1} \dots \alpha_M^{r_M} > \alpha > 1, \quad (2.36)$$

$$x^T (A_s^T P A_s - P) x \leq (\alpha_{s_1}^{-2} \alpha_{s_2}^{-2} \dots \alpha_{s_{M_s}}^{-2} - 1) V(x). \quad (2.37)$$

Sendo que (2.37) pode ser reescrito como a seguinte desigualdade matricial

$$A_s^T P A_s - P \preceq (\alpha_{s_1}^{-2} \alpha_{s_2}^{-2} \dots \alpha_{s_{M_i}}^{-2} - 1) P, \quad (2.38)$$

envolvendo as variáveis  $\alpha_s$  e  $P$ .

Nesta altura, dois pontos devem ser enfatizados: a presença de desigualdades matriciais não-lineares em (2.35) e (2.38). De modo geral, problemas de otimização envolvendo este tipo de desigualdades pertencem a uma classe de problemas de otimização que não podem ser resolvidos em tempo polinomial (Garey & Johnson 1983) (Toker & Ozbay 1995). O próximo capítulo está voltado para uma apresentação detalhada sobre problemas envolvendo desigualdades matriciais bilineares e os métodos existentes para obtenção de soluções locais ou globais nestes tipos de problemas.

Outro ponto que chama a atenção, confirmado o grau de complexidade das desigualdades matriciais (2.35) e (2.38), é a representação proposta por Hassibi e co-autores (Hassibi et al. 1999), relacionando os parâmetros  $\alpha_i$  diretamente com a ocorrência de eventos. Na próxima seção será mostrado como é possível utilizar outra definição para as variáveis  $\alpha_s$ , a fim de facilitar a obtenção de um conjunto viável para as variáveis desejadas.

## 2.6 Análise de Estabilidade Exponencial

### Empregando o conceito de *Taxa de ocorrência de configurações discretas*

Com o objetivo de mostrar as vantagens no uso de *taxa de ocorrência de configurações discretas*, recorreremos ao uso do exemplo a seguir.

Consideremos um sistema dinâmico híbrido assíncrono composto de 4 configurações discretas, com um diagrama de transição de estados, onde  $E_s$  e  $\bar{E}_s$  representam a ocorrência e a ausência de eventos respectivamente.

Restringindo-se a classe de funções de Lyapunov quadráticas representadas por (2.31), supõe-se as funções  $f_s$  são lineares, isto é,

$$\dot{x} = A_s x, \quad s = 1, \dots, 4,$$

em cada estado discreto do sistema dinâmico híbrido assíncrono.

As condições suficientes para estabilidade exponencial do sistema dinâmico híbrido

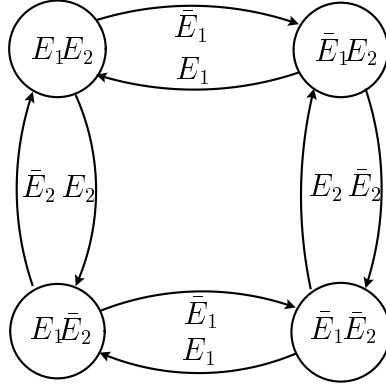


FIGURA 2.7: Exemplo de diagrama de transição de um sistema dinâmico híbrido assíncrono

assíncrono podem ser expressas por

$$r_1\alpha_1 + \bar{r}_1\bar{\alpha}_1 + r_2\alpha_2 + \bar{r}_2\bar{\alpha}_2 > \alpha > 0, \quad (2.39)$$

$$A_1^T P + P A_1 \preceq -2(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2)P, \quad (2.40)$$

$$A_2^T P + P A_2 \preceq -2(\bar{\alpha}_1 + \alpha_2)P, \quad (2.41)$$

$$A_3^T P + P A_3 \preceq -2(\alpha_1 + \bar{\alpha}_2)P, \quad (2.42)$$

$$A_4^T P + P A_4 \preceq -2(\alpha_1 + \alpha_2)P. \quad (2.43)$$

onde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\bar{\alpha}_1$  e  $\bar{\alpha}_2$  são as taxas de ocorrência dos eventos  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\bar{E}_1$  e  $\bar{E}_2$  respectivamente.

A utilização do conceito de taxas de ocorrência de eventos (Hassibi et al. 1999), tem como consequência, o aparecimento de dois termos bilineares, (por exemplo  $\alpha_1 P$  e  $\alpha_2 P$  em (2.43)), em cada uma das quatro desigualdades matriciais bilineares. Dada a dificuldade de resolução de desigualdades matriciais bilineares, qualquer representação diferente da proposta em (Hassibi et al. 1999) que reduza o número de termos bilineares, torna-se relevante.

O outro inconveniente da escolha das taxas de ocorrência de eventos em (Hassibi et al. 1999), é a presença dos parâmetros  $\alpha_i$  na forma de uma soma, impossibilitando relacionar diretamente estes parâmetros com taxas de decaimento em cada uma das desigualdades matriciais bilineares.

Observando o diagrama de estados na Figura (2.7), podemos constatar que a ocorrência de eventos determina diretamente a ocorrência de configurações discretas no sistema dinâmico híbrido assíncrono. Isto motivou a introdução dos conceitos *Funções Indicadoras de Configurações Discretas* e *Taxa de Configurações Discretas*, segundo as equações (2.5) e (2.6), respectivamente.

Utilizaremos taxas de ocorrência de configurações discretas, ao invés das taxas de ocorrência de eventos originalmente propostas em (Hassibi et al. 1999). As condições suficientes para estabilidade exponencial do sistema dinâmico híbrido assíncrono podem agora, ser expressas através do teorema a seguir.

**Teorema 2.3** *Dada uma função tipo Lyapunov  $V : R^n \rightarrow R_+$  continuamente diferenciável tal que*

$$\beta_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \beta_2 \|x\|^2, \quad (2.44)$$

onde  $\beta_{1,2} > 0$ , a taxa de decaimento exponencial de um sistema dinâmico híbrido assíncrono será maior do que  $\alpha$ , se existirem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  tais que

$$\hat{r}_1 \alpha_1 + \hat{r}_2 \alpha_2 + \dots + \hat{r}_s \alpha_s > \alpha > 0 \quad (2.45)$$

e a derivada de  $V$  ao longo das trajetórias denotada  $(DV(x)f_s(x))$

$$DV(x)f_s(x) \leq -2\alpha_s V(x) \quad (2.46)$$

para  $s = 1, \dots, N$ .

**Prova:** Considerando que as transições das configurações discretas de qualquer trajetória do sistema ocorrem nos instantes  $0 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ , segue que  $s(t)$  permanece constante no intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ . Logo, reescrevendo a condição (2.11) para  $t \in [t_k, t_{k+1}[$  obtemos

$$\frac{\dot{V}(x(t))}{V(x(t))} \leq -2\alpha_s,$$

ou ainda,

$$\ln V(x(t_{k+1})) - \ln V(x(t_k)) \leq -2\alpha_s(t_{k+1} - t_k). \quad (2.47)$$

Pela equação (2.6), os escalares  $\alpha_s$  estão relacionados diretamente às configurações discretas  $s$ . Logo, para qualquer ocorrência de uma configuração discreta  $s$ , teremos a contribuição do termo  $\alpha_s(t_{k+1} - t_k)$  no lado direito da desigualdade (2.47). Portanto, somando-se estas desigualdades para  $k = 1, 2, \dots, K - 1$ :

$$\begin{aligned} \ln V(x(t_K)) + \sum_{k=2}^{K-1} \ln V(x(t_k)) - \sum_{k=2}^{K-1} \ln V(x(t_k)) - \ln V(x(0)) \leq \\ -2\alpha_1 \left( \begin{array}{c} \text{tempo de} \\ \text{ocorrência de } s = 1 \end{array} \right) - \dots - 2\alpha_N \left( \begin{array}{c} \text{tempo de} \\ \text{ocorrência de } s = N \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Observando o cancelamento dos somatórios e sabendo que no limite, o tempo total que a configuração discreta  $s = i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ocorre é igual a  $\hat{r}_s t_K$  com  $K \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\ln V(x(t_K)) - \ln V(x(0)) \leq -2\alpha_1 \hat{r}_1 t_K - \dots - 2\alpha_N \hat{r}_N t_K. \quad (2.49)$$

Utilizando (2.45) tem-se

$$\ln V(x(t_K)) - \ln V(x(0)) < -2\alpha t_K, \quad (2.50)$$

logo

$$V(x(t_K)) < e^{-2\alpha t_K} V(x(0)). \quad (2.51)$$

Fazendo uso de (2.44) obtemos

$$e^{\alpha t_K} \|x(t_K)\| < \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \|x(0)\| \quad (2.52)$$

que implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|x(t)\| = 0. \quad (2.53)$$

Restringindo-se a classe de funções de Lyapunov quadráticas representadas por (2.31), supõe-se as funções  $f_s$  são lineares, isto é,

$$\dot{x} = A_s x, \quad s = 1, \dots, 4,$$

em cada configuração discreta do sistema dinâmico híbrido assíncrono.

As condições suficientes para estabilidade exponencial do sistema dinâmico híbrido assíncrono podem ser expressas por

$$\hat{r}_1 \alpha_1 + \hat{r}_2 \alpha_2 + \hat{r}_3 \alpha_3 + \hat{r}_4 \alpha_4 > \alpha > 0, \quad (2.54)$$

$$A_1^T P + P A_1 \preceq -2\alpha_1 P, \quad (2.55)$$

$$A_2^T P + P A_2 \preceq -2\alpha_2 P, \quad (2.56)$$

$$A_3^T P + P A_3 \preceq -2\alpha_3 P, \quad (2.57)$$

$$A_4^T P + P A_4 \preceq -2\alpha_4 P. \quad (2.58)$$

onde os parâmetros  $\alpha_s$  correspondem agora às configurações discretas existentes no sistema e  $\hat{r}_s$ ,  $s = 1, \dots, 4$  são as taxas de ocorrência de configurações discretas.

Como pode ser visto, mesmo com o uso de taxas de ocorrência de configurações discretas na análise de estabilidade exponencial de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, permanecem as desigualdades matriciais bilineares. Contudo, o uso destas taxas propicia um redução neste caso pela metade do número de termos bilineares presentes nas

condições suficientes para estabilidade exponencial. Além disto, o fato de somente um dos parâmetros  $\alpha_i$  estar presente em cada uma das desigualdades matriciais bilineares, permite que, ao olharmos cada uma destas desigualdades matriciais bilineares isoladamente, estes parâmetros passem a representar as taxas de decaimento das trajetórias de cada um dos subsistemas que existe em cada configuração discreta do sistema dinâmico híbrido assíncrono. Desta forma podemos encontrar um conjunto viável para cada um dos parâmetros utilizados na análise de estabilidade exponencial e não somente restrições para a soma dos mesmos.

No caso de dinâmicas discretas em cada configuração discreta, e utilizando novamente taxas de ocorrência de configurações discretas, as condições suficientes para estabilidade exponencial do sistema dinâmico híbrido assíncrono podem ser expressas através do teorema a seguir.

**Teorema 2.4** *Se existir uma função tipo Lyapunov  $V : R^n \rightarrow R_+$  diferenciável tal que*

$$\beta_1 \|x_k\|^2 \leq V(x_k) \leq \beta_2 \|x_k\|^2, \quad (2.59)$$

onde  $\beta_{1,2} > 0$ , a taxa de decaimento de um sistema dinâmico híbrido assíncrono será maior do que  $\alpha$ , desde que existam escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N > 0$  tais que

$$\alpha_1^{\hat{r}_1} \alpha_2^{\hat{r}_2} \dots \alpha_N^{\hat{r}_N} > \alpha > 1. \quad (2.60)$$

e a derivada discreta de  $V$  ao longo das trajetórias  $DV(x_k)f_s(x_k)$  será dada por

$$DV(x_k)f_s(x) \leq (\alpha_s^{-2} - 1)V(x_k) \quad (2.61)$$

para  $s = 1, \dots, N$ .

**Prova:** Supondo que as transições das configurações discretas de qualquer trajetória do sistema ocorrem nos instantes  $0 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ , portanto  $s(t)$  permanece constante no intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ . Logo, reescrevendo a condição (2.22) para  $t \in [t_k, t_{k+1}[$  obtemos

$$V(x(k+1)) \leq (\alpha_s^{-2})V(x(k)), \quad (2.62)$$

ou ainda

$$\ln V(x(k+1)) \leq -2(\ln \alpha_s) + \ln V(x(k)). \quad (2.63)$$

Visto que os escalares  $\alpha_s$ ,  $s = 1, \dots, N$ , estão relacionados diretamente às configurações discretas, logo, a ocorrência de uma configuração discreta, implicará a contribuição do termo  $\alpha_s$  no lado direito da desigualdade (2.63). Portanto, somando-se estas desigualdades para  $k = 1, 2, \dots, K - 1$ :

$$\ln V(x(t_K)) + \sum_{k=2}^{K-1} \ln V(x(t_k)) - \sum_{k=2}^{K-1} \ln V(x(t_k)) - \ln V(x(0)) \leq$$

$$-2 \left( \begin{array}{c} \text{tempo de} \\ \text{ocorrência de } s=1 \end{array} \right) \ln \alpha_1 - \dots - 2 \left( \begin{array}{c} \text{tempo de} \\ \text{ocorrência de } s=N \end{array} \right) \ln \alpha_N. \quad (2.64)$$

Observando o cancelamento dos somatórios e sabendo que no limite, o tempo total que a configuração discreta  $s = i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ocorre é igual a  $\hat{r}_s t_K$  com  $K \rightarrow \infty$ , obtemos

$$\ln V(x(K)) - \ln V(x(0)) \leq -2\hat{r}_1 K \ln \alpha_1 - \dots - 2\hat{r}_N K \ln \alpha_N. \quad (2.65)$$

Fazendo uso de (2.60)

$$\ln V(x(K)) - \ln V(x(0)) < -2K \ln \alpha, \quad (2.66)$$

portanto

$$V(x(K)) < \alpha^{-2K} V(x(0)). \quad (2.67)$$

Utilizando novamente (2.59)

$$\alpha^K \|x(K)\| < \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \|x(0)\|, \quad (2.68)$$

que implica



$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k \|x(k)\| = 0. \quad (2.69)$$

Restringindo-se a classe de funções de Lyapunov quadráticas representadas por (2.31), e as funções  $f_s$  representadas por equações a diferença lineares, isto é,

$$x_{k+1} = A_s x_k, \quad s = 1, \dots, 4,$$

em cada configuração discreta do sistema dinâmico híbrido assíncrono.

As condições suficientes para estabilidade exponencial do sistema dinâmico híbrido assíncrono podem ser expressas por

$$\alpha_1^{\hat{r}_1} \alpha_2^{\hat{r}_2} \alpha_3^{\hat{r}_3} \alpha_4^{\hat{r}_4} > \alpha > 1, \quad (2.70)$$

$$A_1^T P A_1 - P \preceq (\alpha_1^{-2} - 1)P, \quad (2.71)$$

$$A_2^T P A_2 - P \preceq (\alpha_2^{-2} - 1)P, \quad (2.72)$$

$$A_3^T P A_3 - P \preceq (\alpha_3^{-2} - 1)P, \quad (2.73)$$

$$A_4^T P A_4 - P \preceq (\alpha_4^{-2} - 1)P. \quad (2.74)$$

onde os parâmetros  $\alpha_s$  correspondem agora às configurações discretas existentes no sistema, e  $\hat{r}_s$ ,  $s = 1, \dots, N$  são as taxas de ocorrência de configurações discretas.

Assim como ocorre no caso em que as funções  $f_s$  são representadas por equações diferenciais ordinárias, também quando estas funções  $f_s$  são representadas por equações a diferenças, o uso de taxas de ocorrência de configurações discretas permite que seja reduzido o número de termos bilineares na análise de estabilidade de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. Os parâmetros  $\alpha_s$  passam a estar relacionados com cada um dos subsistemas de cada configuração discreta, representando a taxa de decaimento de cada subsistema individualmente. Novamente, fica facilitada a definição de intervalos factíveis

para o cálculo dos mesmos.

Os Teoremas (2.3) e (2.4) mostraram que com o uso do conceito de *taxa de ocorrência* foi possível reduzir o número de termos bilineares presentes na análise de estabilidade. Contudo, mesmo que em número menor, a análise de estabilidade leva a problemas envolvendo desigualdades matriciais bilineares.

O fato de problemas envolvendo desigualdades matriciais bilineares pertencerem a uma classe de problemas de otimização que não podem ser resolvidos em tempo polinomial no pior caso (Garey & Johnson 1983), não torna impossível a existência de algoritmos para a solução dos mesmos. Algoritmos eficientes para estes tipos de problemas existem e envolvem tipicamente aproximações, heurísticas, “*branch-and-bound*”, ou busca local (Braatz, Young, Doyle & Morari 1994, Garey & Johnson 1983, Papadimitriou & Steiglitz 1982).

No capítulo 4, esclareceremos formalmente o que são desigualdades matriciais lineares e bilineares. Além disso, será apresentado um algoritmo prático para resolução de desigualdades matriciais bilineares combinando os métodos de pontos interiores (Nesterov & Nemirovskii 1994) e algoritmos genéticos (Goldberg 1989).

### **2.6.1 Síntese de controlador e análise de estabilidade exponencial simultâneas**

É possível simultaneamente projetar um controlador que permita obter um determinado nível de desempenho referente a taxa de decaimento de um sistema dinâmico híbrido assíncrono, e determinar uma função de Lyapunov que prove a estabilidade exponencial para o nível referido. Para tanto, as matrizes que representam o sistema em malha-aberta em estudo, devem ser substituídas pelas matrizes que representam o sistema em malha-fechada contendo os parâmetros do controlador desejado.

A inclusão do projeto do controlador faz com que as desigualdades matriciais apresentem termos bilineares compostos da matriz  $P$  e dos parâmetros do controlador.

Utilizando taxas de ocorrência de configurações discretas e admitindo:

- dinâmicas lineares contínuas,
- realimentação de estado,

ou seja:

$$\dot{x} = A_s x + B_s u, \quad u_s = -K_s x, \quad s = 1, \dots, N,$$

em cada configuração discreta do sistema dinâmico híbrido assíncrono. As condições suficientes para estabilidade exponencial do sistema dinâmico híbrido assíncrono podem, ser expressas através do teorema a seguir.

**Teorema 2.5** *Supondo a existência de uma função de Lyapunov candidata do tipo (2.31), a taxa de decaimento do sistema dinâmico híbrido assíncrono é maior do que  $\alpha$ , se existirem escalares  $\alpha_s$  e as matrizes  $P$  e  $K_s$  tais que*

$$\sum_{s=1}^N \hat{r}_s > \alpha > 0, \quad (2.75)$$

$$(A_s - B_s K_s)^T P + P(A_s - B_s K_s) \preceq -2\alpha_s P, \quad (2.76)$$

onde os  $s = 1, \dots, N$  e os parâmetros  $\alpha_s$  correspondem às configurações discretas existentes no sistema.

Para o caso de dinâmicas discretas em cada configuração discreta do sistema dinâmico híbrido assíncrono, ou seja:

$$x_{k+1} = A_s x_k + B_s u_{k_s}, \quad u_{k_s} = -K_s x_k, \quad s = 1, \dots, N,$$

as condições suficientes para estabilidade exponencial do sistema dinâmico híbrido assíncrono podem ser expressas através do teorema a seguir.

**Teorema 2.6** *Supondo a existência de uma função de Lyapunov candidata do tipo (2.31), a taxa de decaimento do sistema dinâmico híbrido assíncrono é maior do que  $\alpha$ , se existirem escalares  $\alpha_s$  e matrizes  $P$  e  $K_s$  tais que*

$$\prod_{s=1}^N \alpha_s^{\hat{r}_s} > \alpha > 1, \quad (2.77)$$

$$(A_s - B_s K_s)^T P(A_s - B_s K_s) - P \preceq (\alpha_s^{-2} - 1)P, \quad (2.78)$$

onde  $i = 1, \dots, N$  e os parâmetros  $\alpha_i$  correspondem agora às configurações discretas existentes no sistema.

As provas dos teoremas (2.5) e (2.6) são idênticas as provas dos teoremas (2.3) e (2.4), exceto pelo fato de utilizarmos as matrizes  $A_s - B_s K_s$ ,  $s = 1, \dots, N$  para representar as dinâmicas de cada configuração discreta em malha fechada.

Em ambos os casos de dinâmicas contínuas e dinâmicas discretas para as configurações discretas do sistema dinâmico híbrido assíncrono, o fato de utilizarmos uma matriz simultânea  $P$  gera certo conservadorismo nos resultados encontrados. Contudo, o uso desta matriz simultânea  $P$  é o que permite o cancelamento dos termos somatórios, vital para a prova de análise estabilidade exponencial de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, admitindo-se a utilização da função de Lyapunov quadrática.

Visto que a inclusão do projeto de um controlador em conjunto com a análise de estabilidade exponencial em um sistema dinâmico híbrido assíncrono causa um aumento do número de termos bilineares nas desigualdades matriciais, temos aqui mais uma motivação para o uso do conceito *taxa de configurações discretas*, a qual permite uma representação com reduzido número de termos bilineares nas desigualdades matriciais bilineares.



# Capítulo 3

## Aplicações em Controle e Métodos Iterativos

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, diferentes problemas existentes na literatura envolvendo assincronismo, serão revisitados e analisados sob a perspectiva de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos apresentada neste trabalho. A análise de estabilidade e síntese de controladores nestes exemplos serão feitas com a ajuda do algoritmo combinado proposto no capítulo 4. Em particular, para um exemplo da literatura, do chamado assincronismo em frequência (Kleptsyn, Krasnosel'skii, Kuznetsov & Kozjakin 1984), será mostrado que a estabilidade deste sistema pode ser decidida solucionando um problema de autovalor generalizado.

### 3.2 Análise de estabilidade em sistemas de controle em rede sujeitos à perda de pacotes

Nesta seção mostraremos a utilização do Teorema 2.4 e do algoritmo combinado proposto no Capítulo 4 para a análise de estabilidade, no contexto de sistemas de controle em rede sujeitos à perda de pacotes.

Retornando ao exemplo mostrado na Figura 2.3, considere uma planta com o seguinte modelo (Zhang et al. 2001):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u, \quad (3.1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

É utilizada uma realimentação proporcional de estados contínuos  $u = -Kx$ , onde  $K = [3.75, 11.5]$ . Para um período de amostragem  $h = 0.3s$ , obtemos

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.2955 \\ 0 & 0.9704 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.0045 \\ 0.0296 \end{bmatrix},$$

e a matriz  $(\Phi - \Gamma K)$ , que representa o sistema em malha fechada, possui todos os autovalores dentro do círculo unitário.

De acordo com a posição das chaves (estados  $\bar{x}$  e  $\hat{x}$ ), as suas dinâmicas podem ser modeladas como

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 : \bar{x}(kh) &= x(kh), \\ \bar{S}_2 : \bar{x}(kh) &= \bar{x}((k-1)h), \\ S_1 : \hat{x}(kh) &= -K\bar{x}(kh), \\ S_2 : \hat{x}(kh) &= \hat{x}((k-1)h). \end{aligned}$$

No caso de perda de pacotes na transmissão de dados da planta para o controlador e do controlador para a planta, a dinâmica da configuração discreta ou estado discreto correspondente do sistema dinâmico híbrido assíncrono pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} x((k+1)h) \\ \bar{x}((k+1)h) \\ \hat{x}((k+1)h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(kh) \\ \bar{x}(kh) \\ \hat{x}(kh) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

No caso de transmissão de dados da planta para o controlador e do controlador para a planta sem perda de pacotes, a dinâmica da configuração discreta ou estado discreto correspondente do sistema dinâmico híbrido assíncrono pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} x((k+1)h) \\ \bar{x}((k+1)h) \\ \hat{x}((k+1)h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & -K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(kh) \\ \bar{x}(kh) \\ \hat{x}(kh) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

No caso de perda de pacotes na transmissão de dados da planta para o controlador e transmissão de dados do controlador para a planta sem perda de pacotes, a dinâmica da configuração discreta ou estado discreto correspondente do sistema dinâmico híbrido assíncrono pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} x((k+1)h) \\ \bar{x}((k+1)h) \\ \hat{x}((k+1)h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(kh) \\ \bar{x}(kh) \\ \hat{x}(kh) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

No caso de perda de pacotes na transmissão de dados do controlador para a planta e transmissão de dados da planta para o controlador sem perda de pacotes, a dinâmica da configuração discreta ou estado discreto correspondente do sistema dinâmico híbrido assíncrono pode ser expressa como:

$$\begin{bmatrix} x((k+1)h) \\ \bar{x}((k+1)h) \\ \hat{x}((k+1)h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(kh) \\ \bar{x}(kh) \\ \hat{x}(kh) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Concatenando os vetores de estado da planta e do controlador obtemos o vetor:

$$z(kh) = [x^T(kh), \bar{x}^T(kh), \hat{x}^T(kh)]^T,$$

o que permite que o sistema de controle em rede com perda de pacotes seja representado pelo seguinte sistema variante o tempo :

$$z((k+1)h) = \tilde{\Phi}_s z(kh),$$

onde  $s = 1, \dots, 4$ .

Com a seguinte dinâmica do sistema,



$$\tilde{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & -K & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -K & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_4 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

para cada uma das quatro configurações discretas.

correspondendo às chaves nas posições  $S_2$  e  $\bar{S}_2$ ,  $S_1$  e  $\bar{S}_1$ ,  $S_1$  e  $\bar{S}_2$ ,  $\bar{S}_1$  e  $S_2$ , respectivamente.

A rede de comunicação de dados utilizada no problema apresenta perda de 5% dos pacotes de dados. Ou seja, as chaves  $S$  e  $\bar{S}$  são fechadas com taxas  $r_1 = r_2 = 0.95$ . Se utilizássemos estas taxas de ocorrência de eventos, teríamos uma maior complexidade na análise de estabilidade exponencial do problema, conforme o que foi mostrado no capítulo 2. Porém, a partir destas taxas, lembrando que a ocorrência dos eventos é independente, facilmente obtemos as seguintes taxas de ocorrência dos quatro estados discretos possíveis no problema :

$$\begin{aligned} \hat{r}_1 &= (1 - 0.95)(1 - 0.95) = 0.0025, & \hat{r}_2 &= 0.95^2 = 0.9025, \\ \hat{r}_3 &= (0.95)(1 - 0.95) = 0.0475, & \hat{r}_4 &= (1 - 0.95)(0.95) = 0.0475. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Para uma função de Lyapunov candidata quadrática descrita em (2.31), a análise de estabilidade exponencial do sistema de controle em rede pode ser representada pelo seguinte problema de otimização :

$$\max \alpha_1^{\hat{r}_1} \alpha_2^{\hat{r}_2} \alpha_3^{\hat{r}_3} \alpha_4^{\hat{r}_4}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_s^T P \tilde{\Phi}_s - P &\preceq (\alpha_s^{-2} - 1)P, \quad s = 1, 2, 3, 4 \\ 0 &\prec P,\end{aligned}\tag{3.7}$$

onde as taxas  $\hat{r}_s$  e os parâmetros  $\alpha_s$  estão relacionados às configurações discretas do sistema dinâmico híbrido assíncrono.

Visto que os parâmetros  $\alpha_s$  representam agora as taxas de decaimento de cada subsistema, existente em cada uma das configurações discretas do sistema dinâmico híbrido assíncrono, podemos facilmente definir o seguinte espaço de busca viável para estes parâmetros :

$$\begin{aligned}0 &\leq \alpha_1 \leq 1, \\ 1 &\leq \alpha_2 \leq 1.1362, \\ 0 &\leq \alpha_3 \leq 1, \\ 0 &\leq \alpha_4 \leq 1.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Os valores limites do espaço de busca para cada um dos parâmetros  $\alpha_s$  são obtidos através da solução de problemas de autovalor generalizado (Boyd et al. 1994) para cada subsistema, isto é:

$$\min \alpha_s^{-2} - 1\tag{3.9}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_s^T P \tilde{\Phi}_s - P &\preceq (\alpha_s^{-2} - 1)P, \\ 0 &\prec P,\end{aligned}$$

onde  $s = 1, \dots, 4$ .

Problemas de autovalor generalizado pertencem a classe de problemas de otimização quasi-convexos, os quais são solucionados de forma eficiente utilizando métodos de pontos interiores.

Utilizando o algoritmo proposto no capítulo 4, com uma representação cromossômica utilizando números reais, os operadores genéticos recombinação aritmética e mutação uniforme, o esquema de seleção chamado escalonamento geométrico normalizado com 8% de probabilidade par escolha do melhor indivíduo, uma população de 20 indivíduos

e 50 gerações como critério de parada, obtemos para o problema de otimização os seguintes valores:

$$\alpha_1 = 0.5714, \alpha_2 = 1.1326, \alpha_3 = 0.7158, \alpha_4 = 0.7074,$$

$$P = \begin{bmatrix} 13.02 & 26.19 & -4.21 & -10.33 & 0.61 \\ 26.19 & 67.67 & -9.99 & -29.14 & 1.72 \\ -4.21 & -9.99 & 4.59 & 11.48 & -0.04 \\ -10.33 & -29.14 & 11.48 & 33.65 & -0.13 \\ 0.61 & 1.72 & -0.04 & -0.13 & 0.14 \end{bmatrix},$$

e como consequência, uma taxa de decaimento para o sistema de controle em rede com perda de pacotes igual a :

$$\prod_{s=1}^4 \alpha_s^{\hat{r}_s} = 1.0818,$$

comprovando que o mesmo é exponencialmente estável segundo Teorema 2.2.

***Comentário:***

No exemplo original mostrado em (Hassibi et al. 1999), os autores assumiram somente uma rede de comunicação na transmissão de dados da planta para o controlador. Aqui, assumimos que existem redes de comunicação para a transmissão de dados, seja da planta para o controlador como do controlador para a planta. O fato de Hassibi e co-autores utilizarem o conceito de *taxa de eventos* faz com que os mesmos não detalhem a questão dos parâmetros  $\alpha_s$ . Com o uso do conceito *taxa de configurações discretas*, podemos observar uma relação entre os parâmetros  $\alpha_s$  e as configurações discretas do sistema dinâmico híbrido assíncrono, determinando facilmente um intervalo viável para o projeto dos mesmos. A seguir, incluiremos a questão da síntese de um controlador no problema em questão. Após uma simples inclusão no algoritmo combinado, obteremos um controlador que melhora a taxa de decaimento do sistema de controle em rede com perda de pacotes.

### ***Procedimento geral para análise de estabilidade de sistema de controle em rede sujeito à perda de pacotes***

Notamos que para qualquer sistema de controle em rede sujeito à perda de pacotes, podemos aplicar a mesma sequência de passos para a análise de estabilidade dos mesmos. A saber:

- (i) Determinar as configurações discretas,
- (ii) Determinar as dinâmicas do sistema nas configurações discretas,
- (iii) Determinar as taxas de ocorrência das configurações discretas a partir das taxas de perdas de pacotes,
- (iv) Determinar o espaço de busca dos parâmetros  $\alpha_s$  solucionando problemas de autovalor generalizado para cada configuração discreta segundo (3.9),
- (v) Formular o problema de otimização (Exemplo: problema (3.7)),
- (vi) Solucionar problema de otimização com o uso do Algoritmo Combinado (Cap. 4).

#### **3.2.1 Análise de estabilidade e síntese do controlador simultânea para sistemas de controle em rede com perda de pacotes**

No exemplo apresentado de sistemas de controle em rede com perda de pacotes (Zhang et al. 2001), foi utilizada uma realimentação proporcional de estados pré-determinada para um sistema de controle convencional, isto é, sem a rede de transmissão de dados.

Observando o problema proposto para a análise de estabilidade do sistema de controle com perda de pacotes, é interessante analisar a possibilidade de reformular o problema, de forma que seja possível incluir a síntese do controlador desejado no mesmo. Com isso, os efeitos causados na dinâmica da planta pelo uso de um sistema de controle em rede com perda de pacotes também podem ser levados em consideração na síntese do controlador.

Reescrevendo o problema de otimização (3.7), para além da análise de estabilidade exponencial, incluir a síntese de um controlador proporcional obtemos:

$$\max \alpha_1^{\hat{r}_1} \alpha_2^{\hat{r}_2} \alpha_3^{\hat{r}_3} \alpha_4^{\hat{r}_4}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1^T P \tilde{\Phi}_1 - P &\preceq (\alpha_1^{-2} - 1)P, \\ \tilde{\Phi}_2(K)^T P \tilde{\Phi}_2(K) - P &\preceq (\alpha_2^{-2} - 1)P \\ \tilde{\Phi}_3(K)^T P \tilde{\Phi}_3(K) - P &\preceq (\alpha_3^{-2} - 1)P \\ \tilde{\Phi}_4^T P \tilde{\Phi}_4 - P &\preceq (\alpha_4^{-2} - 1)P, \\ 0 &\prec P. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Fazendo uso do algoritmo proposto no Capítulo 3 modificado para incluir o controlador  $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ , no espaço de busca que será codificado utilizado algoritmos genéticos. A partir do seguinte espaço de busca escolhido:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_1 \leq 1, \\ 1 &\leq \alpha_2 \leq 1.5, \\ 0 &\leq \alpha_3 \leq 1, \\ 0 &\leq \alpha_4 \leq 1, \\ 0 &\leq k_1 \leq 15, \\ 0 &\leq k_2 \leq 15, \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde os limites do espaço de busca para cada um dos parâmetros  $\alpha_s$  são obtidos através da solução de problemas de autovalor generalizado (Boyd et al. 1994) para cada subsistema e os limites de ganhos do controlador são definidos segundo o projeto. Para taxas de ocorrências de configurações discretas (3.6), utilizando uma representação cromossômica com números reais, os operadores genéticos recombinação aritmética e mutação uniforme, o esquema de seleção chamado escalonamento geométrico normalizado com 8% de probabilidade par escolha do melhor indivíduo, uma população de 20 indivíduos e 50 gerações como critério de parada, obtemos para o problema de otimização os seguintes valores:

$$\alpha_1 = 0.5532, \alpha_2 = 1.2319, \alpha_3 = 0.6506, \alpha_4 = 0.4697,$$

$$K = \begin{bmatrix} 4.5805 & 9.6586 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 27.89 & 33.17 & -14.45 & -14.30 & 0.93 \\ 33.17 & 57.69 & -13.83 & -24.66 & 1.76 \\ -14.45 & -13.83 & 13.16 & 11.28 & -0.14 \\ -14.30 & -24.66 & 11.28 & 18.78 & -0.35 \\ 0.93 & 1.76 & -0.14 & -0.35 & 0.10 \end{bmatrix},$$

e como consequência, uma taxa de decaimento para o sistema de controle em rede com perda de pacotes igual a :

$$\prod_{s=1}^4 \alpha_s^{\hat{r}_s} = 1.1393,$$

melhor que a encontrada inicialmente com o controlador pré-determinado e comprovando que o mesmo é exponencialmente estável.

***Procedimento geral para análise de estabilidade e síntese do controlador simultânea para sistemas de controle em rede com perda de pacotes***

A inserção da síntese de um controlador proporcional em conjunto com a análise de estabilidade, visto o aumento dos termos bilineares no problema de otimização, torna necessária a codificação cromossomial também dos parâmetros do controlador. A seguir, reescrevemos a sequência de passos que podemos aplicar na análise de estabilidade de sistemas de controle em rede sujeitos à perda de pacotes incluindo agora a síntese simultânea de um controlador proporcional. A saber:

- (i) Determinar as configurações discretas,
- (ii) Determinar as dinâmicas do sistema nas configurações discretas,
- (iii) Determinar as taxas de ocorrência das configurações discretas a partir das taxas

- de perdas de pacotes,
- (iv) Determinar o espaço de busca dos parâmetros  $\alpha_s$  solucionando problemas de autovalor generalizado, conforme exemplo (3.9),
  - (v) Definir o espaço de busca dos parâmetros do controlador a partir das características do projeto,
  - (vi) Formular problema de otimização (Exemplo: problema (3.7)),
  - (vii) Solucionar problema de otimização com o uso do Algoritmo Combinado (Capítulo 4).

### 3.3 Escalonamento em sistemas de controle em rede

A inserção de uma rede de comunicação para interligar os componentes de malhas de controle realimentadas torna a análise e projeto de sistemas de controle em rede complexa. Esta inserção, faz com que o desempenho da malha de controle não dependa somente do projeto do algoritmo de controle, mas também do escalonamento do recurso de rede compartilhado.

O problema de escalonamento da rede em sistemas de controle em rede consiste em definir uma sequência de transmissão para cada entidade transmissora (sensor, controlador, atuador) conectada na rede baseada em um algoritmo de escalonamento. Este algoritmo de escalonamento é formado por um conjunto de regras que definem qual a mensagem que pode ser transmitida num dado instante.

Considere um conjunto de sistemas de controle em rede os quais são conectados via rede, conforme a Figura 3.1, onde para efeitos de simplificação a planta e o controlador são lineares e a comunicação via rede é feita somente entre os sensores da planta e o controlador. Cada planta transmite os dados dos seus sensores com um período de transmissão  $h_i(t)$ , onde  $i = 1, \dots, P$  e  $P$  é o número de sistemas de controle em rede, possibilitando a determinação de limites para os períodos de transmissão que garantem estabilidade para cada planta individualmente (Zhang et al. 2001). Contudo, como o meio de transmissão é compartilhado entre os sistemas de controle em rede, um escalonamento para transmissão de dados das plantas torna-se necessário.

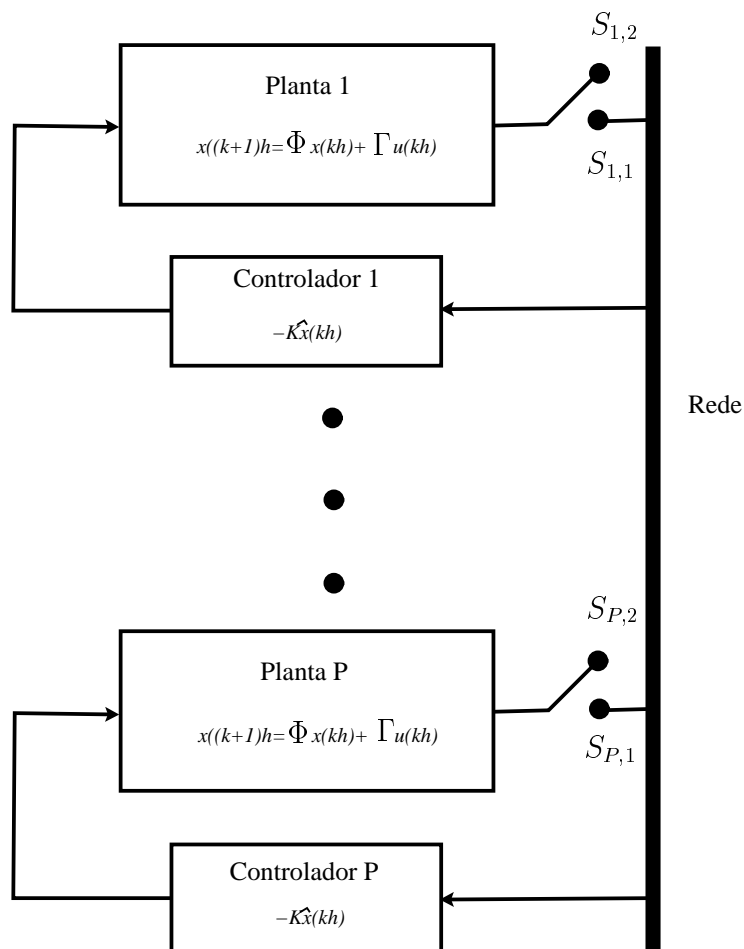


FIGURA 3.1: Escalonamento de um conjunto de sistemas de controle em rede.

### 3.3.1 O algoritmo de escalonamento RM (*Rate Monotonic*)

Em (Liu & Layland 1973), Liu e Layland estudaram o problema de escalonamento preemptivo priorizável para um conjunto de tarefas periódicas independentes em tempo real. Estes autores desenvolveram o algoritmo RM (*Rate Monotonic*), o qual atribui de forma fixa maior prioridade às tarefas periódicas cujos períodos são menores. Além disso, pode ser preemptivo, ou seja, a execução de uma tarefa corrente é mantida até o seu término, mesmo que ocorra a chegada de uma outra tarefa com um período menor.

O algoritmo RM é ótimo no sentido de que se um conjunto de tarefas é escalonável por qualquer algoritmo arbitrário, também o é por RM. Em seus estudos, Liu e Layland estabeleceram uma condição suficiente que garante que um conjunto de tarefas é escalonável pelo algoritmo RM (Teorema 6.11, (Liu & Layland 1973)):



**Teorema 3.1** *Um conjunto de  $P$  tarefas periódicas independentes, preemptivas, pode ser escalonável pelo algoritmo RM se o fator de utilização de rede,  $U$ , satisfaz*

$$U = \sum_{i=2}^P \frac{c_i}{h_i} \leq P(2^{1/P} - 1),$$

onde  $h_i$  é o período da tarefa e  $c_i$  é o tempo de computação do processo  $i$ .

Segundo este teorema, o fator de utilização decresce monotonicamente de 0.83 quando  $P = 2$  até  $\ln 2 = 0.693$  quando  $P \rightarrow \infty$ . Logo, qualquer conjunto de tarefas periódicas pode ser escalonável se o algoritmo RM é usado e o fator de utilização total for inferior a 0.693.

Para o caso de um algoritmo de escalonamento RM de um conjunto de tarefas periódicas não-preemptivas, Sha et al (Rajkumar, Sha & Lehoczky 1990) apresentaram um teorema ( Teorema 16 (Rajkumar et al. 1990)), o qual fornece uma condição suficiente que garante o escalonamento:

**Teorema 3.2** *Um conjunto de  $P$  tarefas periódicas independentes, não-preemptivas (indexadas em ordem decrescente de prioridades com  $i = 1$  sendo a prioridade mais alta e  $i = P$  sendo a de prioridade mais baixa), é escalonável se para todo  $i = 1, \dots, P$*

$$\frac{c_1}{h_1} + \frac{c_2}{h_2} + \dots + \frac{c_i}{h_i} + \frac{\bar{b}_{l,i}}{h_i} \leq i(2^{1/i} - 1), \quad (3.12)$$

onde  $\bar{b}_{l,i}$  é o maior tempo computacional entre das tarefas com prioridades mais baixas, isto é:

$$\bar{b}_{l,i} = \max_{j=i+1, \dots, P} c_j.$$

### 3.3.2 Escalonamento via algoritmo RM em sistemas de controle em rede com perdas de pacotes

O algoritmo de escalonamento RM pode ser implementado em redes baseadas em prioridades como por exemplo *CAN* e *DeviceNet*, onde a prioridade da mensagem pode ser incorporada no identificador da mensagem.

Como foi visto no exemplo anterior, um sistema de controle em rede pode sofrer uma certa perda de pacotes de dados, e ainda assim manter estabilidade. Esta idéia pode ser aplicada também no escalonamento de um conjunto de sistemas de controle em rede. Ou seja, se um conjunto de sistemas de controle em rede não é escalonável quando a entrega de todos os pacotes de dados é garantida, é possível que, admitindo certa quantidade de pacotes perdidos de alguns dos sistemas de controle em rede, o conjunto de sistemas de controle em rede seja escalonável.

Voltando a analisar um conjunto de sistemas de controle em rede conforme mostrado na figura 3.1. Para um o conjunto de plantas escalares representado por  $\dot{x} = ax + u$  com  $a = 25, 20, 5$  e  $K = 50, 45, 30$  respectivamente. Observamos que todos os três sistemas apresentam o mesmo desempenho em malha fechada para uma realimentação de estado  $u = -Kx$  ( pólo em  $-25$ ). Os períodos de transmissão dos três sistemas de controle em rede são  $h_1 = 0.01$  s,  $h_2 = 0.015$  s, e  $h_3 = 0.06$  s. Os sistemas de controle em rede têm o mesmo tempo de computação  $c_1 = c_2 = c_3 = 0.004$  s. Na figura (3.2) é mostrada a seqüência individual de transmissão dos sistemas de controle em rede.

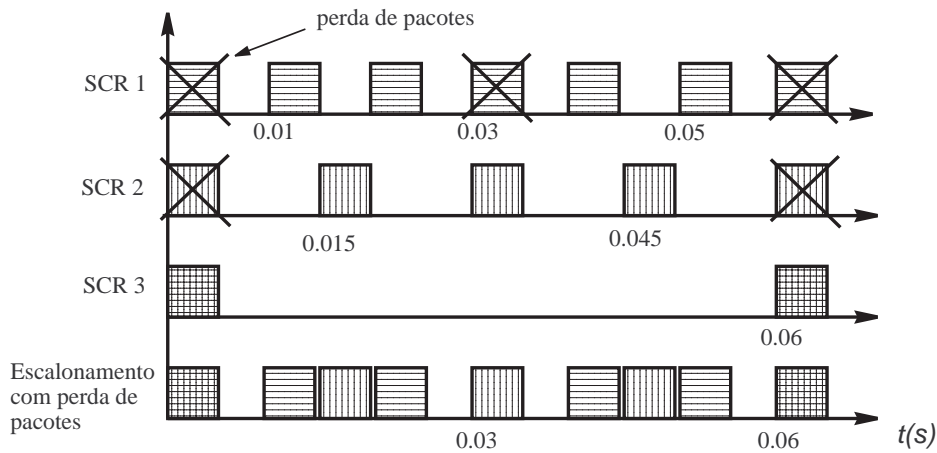


FIGURA 3.2: Sequência de transmissão dos sistemas de controle em rede (NCS).

Utilizando o Teorema 3.2 (Rajkumar et al. 1990), podemos observar que o conjunto de sistemas de controle em rede não é escalonável:

$$\frac{c_1}{h_1} + \frac{\bar{b}_{l,1}}{h_1} = 0.8 < 1(2^1 - 1) = 1,$$

$$\frac{c_1}{h_1} + \frac{c_2}{h_2} + \frac{\bar{b}_{l,2}}{h_2} = 0.9333 > 2(2^{1/2} - 1) = 0.8284.$$

Colisões de mensagens no conjunto sistemas de controle em rede ocorrem em  $0.06 * j$  s envolvendo os 3 sistemas. E em  $0.06 * j + 0.03$  s envolvendo os sistemas 1 e 2 onde  $j = 0, 1, \dots$ . O escalonamento e a perda de pacotes para os 3 sistemas é mostrada no último gráfico da figura 3.2. A perda de pacotes ocorre em  $0.06 * j$  s para os sistemas 1 e 2 enquanto em  $0.06 * j + 0.03$  s somente o sistema 1 perde pacotes de mensagens. Com isso obtemos as seguintes taxas de perda de pacotes:

sistema de controle em rede:	1	2	3
taxa de perda de pacotes:	33%	25%	0%

Discretizando cada um dos sistemas de controle em rede com os seus respectivos períodos de transmissão obtemos:

$$\Phi_1 = 1.284, \quad \Gamma_1 = 0.011,$$

$$\Phi_2 = 1.455, \quad \Gamma_2 = 0.018,$$

$$\Phi_3 = 1.345, \quad \Gamma_3 = 0.070.$$

A rede de comunicação é modelada seguindo a idéia apresenta no exemplo anterior. Contudo, agora cada um dos sistemas de controle em rede apresenta sua chave. Quando a chave de um dos sistemas de controle em rede estiver fechada, o pacote contendo a informação do estado deste sistema é transmitido. Caso contrário, os pacotes são perdidos e o último valor transmitido continua a ser utilizado pelo sistema de controle até a chegada de um pacote contendo uma informação atualizada. Determinando que  $S_{i,1}$  seja a chave do  $i$ -ésimo sistema de controle em rede na posição fechada e  $S_{i,2}$  seja a chave do  $i$ -ésimo sistema de controle em rede na posição aberta. A dinâmica das chaves dos sistemas de controle em rede ( estado  $\hat{x}_i$ ) pode ser modelada segundo:

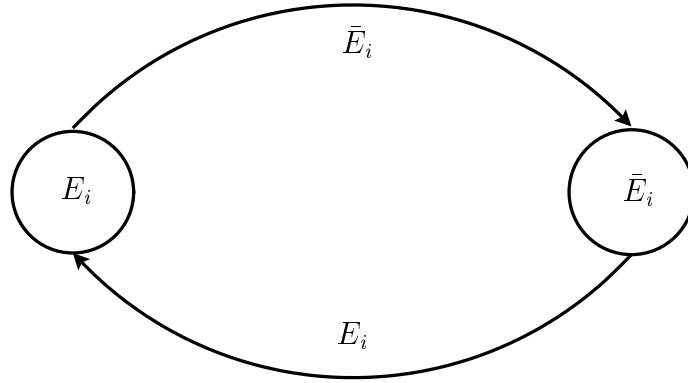


FIGURA 3.3: Diagramas de transição dos sistemas de controle em rede com perda de pacotes.

$$S_{i,1} : \quad \hat{x}_i(kh) = x_i(kh),$$

$$S_{i,2} : \quad \hat{x}_i(kh) = x_i((k-1)h),$$

onde  $i = 1, 2, 3$  representa cada um dos sistemas de controle em rede.

O diagrama de transição para os sistemas de controle em rede com perdas de pacotes é apresentado na Figura 3.3.  $E_i$  e  $\bar{E}_i$  correspondem aos eventos de fechar e abrir respectivamente da chave do  $i$ -ésimo sistema de controle em rede, onde  $i = 1, 2, 3$ .

Concatenando os vetores de estado da planta e do controlador obtemos o vetor:

$$z_i(kh) = [x_i^T(kh), \hat{x}_i^T(kh)]^T,$$

o que permite aos sistemas de controle em rede serem representados pelo seguinte sistema variante no tempo:

$$z_i((k+1)h) = \tilde{\Phi}_{i,j} z_i(kh).$$

onde  $i = 1, 2, 3$  representa cada um dos sistemas de controle em rede e  $j = 1, 2$  representa as posições possíveis das chaves para cada um dos sistemas de controle em rede.

Para o sistema de controle em rede  $i = 1$ , quando a chave que modela a rede comunicação está fechada ( $S_{1,1}$ ), obtemos:

$$\tilde{\Phi}_{1,1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & -\Gamma_1 K_1 \\ \Phi_1 & -\Gamma_1 K_1 \end{bmatrix}.$$

Quando no sistema de controle em rede  $i = 1$ , a chave que modela a rede comunicação está aberta ( $S_{1,2}$ ), obtemos:

$$\tilde{\Phi}_{1,2} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & -\Gamma_1 K_1 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

O mesmo procedimento permite determinar para os sistemas de controle em rede  $i = 2, 3$  as seguintes matrizes:

$$\tilde{\Phi}_{2,1} = \begin{bmatrix} \Phi_2 & -\Gamma_2 K_2 \\ \Phi_2 & -\Gamma_2 K_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_{2,2} = \begin{bmatrix} \Phi_2 & -\Gamma_2 K_2 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Phi}_{3,1} = \begin{bmatrix} \Phi_3 & -\Gamma_3 K_3 \\ \Phi_3 & -\Gamma_3 K_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_{3,2} = \begin{bmatrix} \Phi_3 & -\Gamma_3 K_3 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

A partir das taxas de perda de pacotes mostradas anteriormente, facilmente obtemos as taxas de ocorrência das duas configurações discretas possíveis para cada um dos sistemas de controle em rede:

$$\begin{aligned} \hat{r}_{1,1} &= 0.67, & \hat{r}_{1,2} &= 0.33, \\ \hat{r}_{2,1} &= 0.75, & \hat{r}_{2,2} &= 0.25, \\ \hat{r}_{3,1} &= 1, & \hat{r}_{3,2} &= 0, \end{aligned}$$

onde  $\hat{r}_{i,j}$  representa a taxa de ocorrência da  $j$ -ésima configuração discreta possível no  $i$ -ésimo sistema de controle em rede.

Através do Teorema (2.4), utilizando uma função de Lyapunov candidata quadrática do tipo (2.31), para o sistema de controle em rede  $i = 1$ , podemos formular o seguinte problema de otimização para analisar se o escalonamento do sistema de controle em rede com perdas de pacotes é estável:

$$\max \alpha_{1,1}^{\hat{r}_{1,1}} \alpha_{1,2}^{\hat{r}_{1,2}}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1}^{\hat{r}_{1,1}} \alpha_{1,2}^{\hat{r}_{1,2}} &> 1 \\ \tilde{\Phi}_{1,1}^T P_1 \tilde{\Phi}_{1,1} - P_1 &\preceq (\alpha_{1,1}^{-2} - 1) P_1 \\ \tilde{\Phi}_{1,2}^T P_1 \tilde{\Phi}_{1,2} - P_1 &\preceq (\alpha_{1,2}^{-2} - 1) P_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Baseados na mesma metodologia, para o sistema de controle em rede  $i = 2$ , podemos formular o seguinte problema de otimização para analisar se o escalonamento do sistema de controle em rede com perdas de pacotes é estável:

$$\max \alpha_{2,1}^{\hat{r}_{2,1}} \alpha_{2,2}^{\hat{r}_{2,2}}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \alpha_{2,1}^{\hat{r}_{2,1}} \alpha_{2,2}^{\hat{r}_{2,2}} &> 1 \\ \tilde{\Phi}_{2,1}^T P_2 \tilde{\Phi}_{2,1} - P_2 &\preceq (\alpha_{2,1}^{-2} - 1) P_2 \\ \tilde{\Phi}_{2,2}^T P_2 \tilde{\Phi}_{2,2} - P_2 &\preceq (\alpha_{2,2}^{-2} - 1) P_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

E ainda, para o sistema de controle em rede  $i = 3$ , podemos formular o seguinte problema de otimização para analisar se o escalonamento do sistema de controle em rede com perdas de pacotes é estável:

$$\max \alpha_{3,1}^{\hat{r}_{3,1}} \alpha_{3,2}^{\hat{r}_{3,2}}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \alpha_{3,1}^{\hat{r}_{3,1}} \alpha_{3,2}^{\hat{r}_{3,2}} &> 1 \\ \tilde{\Phi}_{3,1}^T P_3 \tilde{\Phi}_{3,1} - P_3 &\preceq (\alpha_{3,1}^{-2} - 1) P_3 \\ \tilde{\Phi}_{3,2}^T P_3 \tilde{\Phi}_{3,2} - P_3 &\preceq (\alpha_{3,2}^{-2} - 1) P_3 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Unificando os problemas de otimização (3.13), (3.14) e (3.15), de cada um dos sistemas de controle em rede, podemos formular o problema de otimização a seguir

para analisar se o escalonamento dos sistemas de controle em rede com perdas de pacotes é estável:

$$\max \sum_{i=1}^3 \alpha_{i,1}^{\hat{\tau}_{i,1}} \alpha_{i,2}^{\hat{\tau}_{i,2}}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \alpha_{i,1}^{\hat{\tau}_{i,1}} \alpha_{i,2}^{\hat{\tau}_{i,2}} &> 1 \\ \tilde{\Phi}_{i,1}^T P_i \tilde{\Phi}_{i,1} - P_i &\preceq (\alpha_{i,1}^{-2} - 1) P_i \\ \tilde{\Phi}_{i,2}^T P_i \tilde{\Phi}_{i,2} - P_i &\preceq (\alpha_{i,2}^{-2} - 1) P_i \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde  $i = 1, 2, 3$ , representa cada um dos sistemas de controle em rede.

Visto que os parâmetros  $\alpha_{i,1}$  e  $\alpha_{i,2}$  representam taxas de decaimento de cada sub-sistema, existente em cada uma das possíveis configurações discretas nos sistemas de controle em rede, podemos definir o seguinte espaço de busca para estes parâmetros :

$$\begin{aligned} 1 &\leq \alpha_{1,1} \leq 1.3624, \\ 0 &\leq \alpha_{1,2} \leq 1, \\ 1 &\leq \alpha_{2,1} \leq 1.5504, \\ 0 &\leq \alpha_{2,2} \leq 1, \\ 1 &\leq \alpha_{3,1} \leq 1.3245, \\ 0 &\leq \alpha_{3,2} \leq 1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Utilizando o algoritmo proposto no capítulo 4, com uma representação cromossômica utilizando números reais, os operadores genéticos recombinação aritmética e mutação uniforme, o esquema de seleção chamado escalonamento geométrico normalizado com 8% de probabilidade para a escolha do melhor indivíduo, uma população de 20 indivíduos e 50 gerações como critério de parada, obtemos para o problema de otimização os seguintes valores:

$$\alpha_{1,1} = 1.3231, \alpha_{1,2} = 0.5843, \alpha_{2,1} = 1.5046, \alpha_{2,2} = 0.4417, \alpha_{3,1} = 1.3245, \alpha_{3,2} = 0.1442,$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 15.2121 & -11.9942 \\ -11.9942 & 11.4825 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 12.1012 & -10.3186 \\ -10.3186 & 11.6616 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 5.3734 & -6.7656 \\ -6.7656 & 9.0446 \end{bmatrix}$$

e taxas de decaimento para cada sistema de controle em rede com perda de pacotes iguais a :

$$\alpha_{1,1}^{\hat{r}_{1,1}} \alpha_{1,2}^{\hat{r}_{1,2}} = 1.0104$$

$$\alpha_{2,1}^{\hat{r}_{2,1}} \alpha_{2,2}^{\hat{r}_{2,2}} = 1.1075$$

$$\alpha_{3,1}^{\hat{r}_{3,1}} \alpha_{3,2}^{\hat{r}_{3,2}} = 1.3245$$

Os resultados comprovam que o escalonamento dos sistemas de controle em rede admitindo perda de pacotes é estável.

Uma redução no período de transmissão dos sistemas de controle em rede pode acarretar em um fator de utilização da rede  $U$  superior a 1. E assim, a rede em questão não será escalonável. Neste caso, o mérito do uso de certo percentual de perda de pacotes fica evidente, visto que com este enfoque será possível tornar a rede escalonável sem que a mesma perca estabilidade.

Como exemplo, para o mesmo problema apresentado, com os períodos de transmissão  $h_1 = 0.008s$ ,  $h_2 = 0.012s$ ,  $h_3 = 0.016s$ , o conjunto de sistemas de controle em rede não é escalonável, pois seu fator de utilização de rede é:

$$U = \sum_{i=1}^3 \frac{c_i}{h_i} = \frac{0.004}{0.008} + \frac{0.004}{0.012} + \frac{0.004}{0.016} = 1.0833 > 1.$$

Contudo, para uma seqüência de transmissão dos sistemas de controle em rede



mostrada na figura (3.4), o conjunto de sistemas de controle em rede é escalonável com as respectivas taxas de perdas de pacotes:

sistema de controle em rede:	1	2	3
taxa de perda de pacotes:	17%	25%	33%

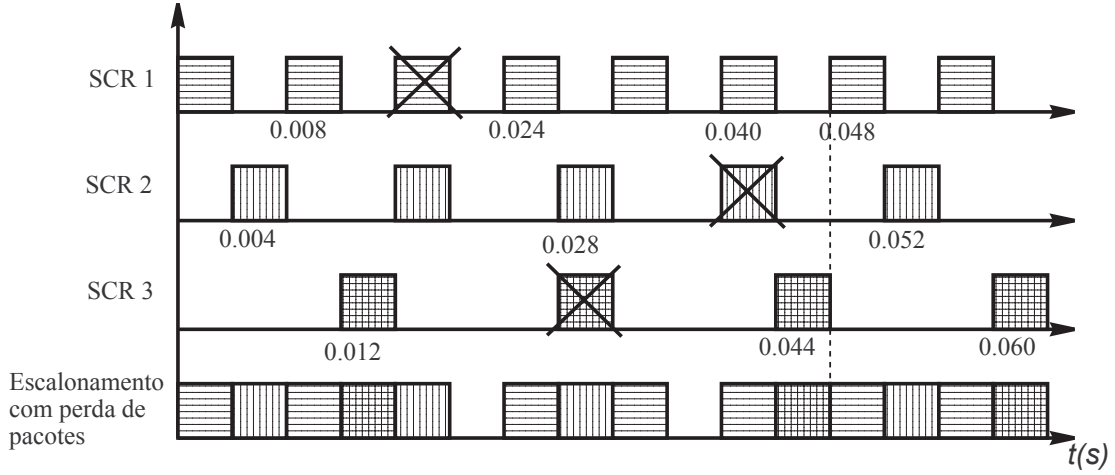


FIGURA 3.4: Sequência de transmissão dos sistemas de controle em rede (NCS).

A partir destas taxas de perda de pacotes, obtemos as seguintes taxas de ocorrência das duas configurações discretas possíveis para cada um dos sistemas de controle em rede:

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_{1,1} &= 0.83, & \hat{r}_{1,2} &= 0.17, \\
 \hat{r}_{2,1} &= 0.75, & \hat{r}_{2,2} &= 0.25, \\
 \hat{r}_{3,1} &= 0.67, & \hat{r}_{3,2} &= 0.33,
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde  $\hat{r}_{i,j}$  representa a taxa de ocorrência da  $j$ -ésima configuração discreta possível no  $i$ -ésimo sistema de controle em rede.

Com os novos períodos de transmissão, as matrizes discretizadas dos sistemas de controle e rede são :

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= 1.2214, & \Gamma_1 &= 0.0089, \\
 \Phi_2 &= 1.3500, & \Gamma_2 &= 0.0140, \\
 \Phi_3 &= 1.0833, & \Gamma_3 &= 0.0167.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Solucionando novamente o problema de otimização (3.13) com os valores apresentados em (3.18) e (3.19) obtemos:

$$\alpha_{1,1} = 1.1884, \alpha_{1,2} = 0.5860, \alpha_{2,1} = 1.2595, \alpha_{2,2} = 0.5433, \alpha_{3,1} = 1.2493, \alpha_{3,2} = 0.6584,$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 4.3627 & -2.7988 \\ -2.7988 & 2.5955 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 12.1012 & -10.3186 \\ -10.3186 & 11.6616 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 3.0308 & -2.1632 \\ -2.1632 & 2.6542 \end{bmatrix}$$

e taxas de decaimento para cada sistema de controle em rede com perda de pacotes iguais a :

$$\alpha_{1,1}^{\hat{r}_{1,1}} \alpha_{1,2}^{\hat{r}_{1,2}} = 1.0538$$

$$\alpha_{2,1}^{\hat{r}_{2,1}} \alpha_{2,2}^{\hat{r}_{2,2}} = 1.0207$$

$$\alpha_{3,1}^{\hat{r}_{3,1}} \alpha_{3,2}^{\hat{r}_{3,2}} = 1.0113.$$

Os resultados comprovam que o conjunto de sistemas de controle em rede com perda de pacotes é agora escalonável sem perder estabilidade.

### ***Comentário Geral***

O estudo do escalonamento de sistemas de controle em rede com perda de pacotes no contexto de sistemas híbridos assíncronos, permite a obtenção de resultados menos conservadores. Tal fato pode ser explicado, supondo a possibilidade de perda de pacotes na transmissão de dados, determinado as taxas de perda destes pacotes, é possível avaliar a estabilidade de cada um dos sistemas de controle que compartilham a rede de comunicação.

No exemplo apresentado, apesar do fator de utilização de rede indicar que os sis-

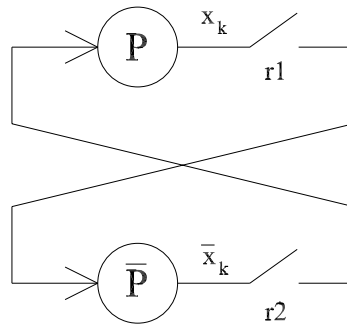


FIGURA 3.5: Versão assíncrona com dois processadores para o problema de ponto fixo

temas de controle em rede não são escalonáveis, com o enfoque de sistemas dinâmicos assíncronos, ainda que permita a perda de pacotes na transmissão de dados, foi possível confirmar a estabilidade dos sistemas de controle em rede.

### 3.4 Algoritmos paralelos

Uma maneira de achar soluções de sistemas de equações lineares, consiste em encontrar sucessivas aproximações da solução resolvendo o problema de ponto fixo  $x_{k+1} = Ax_k + b$ . Em uma implementação síncrona, este problema de ponto fixo converge para o ponto fixo  $x = (I - A)^{-1}b$  a partir de qualquer solução inicial se e somente se os autovalores da matrix  $A$  apresentarem módulo menor que um.

Em (Hassibi et al. 1999), os autores propõem uma implementação paralelizada para o problema de ponto fixo, onde o mesmo é decomposto em dois problemas locais que são resolvidos em dois processadores diferentes  $P$  e  $\bar{P}$  concorrentemente, tendo como objetivo reduzir o tempo de processamento necessário para resolver o problema. Esta implementação pode ser vista na figura 3.5, onde o processador  $P$  é responsável pela atualização de uma parte do vetor  $x$ , enquanto  $\bar{P}$  fica responsável por outra parte. O assincronismo surge neste exemplo porque, para realizar outra iteração nenhum dos processadores tem que esperar até que a informação do outro processador esteja disponível. A única restrição feita é que o processador  $P$  disponibilize sua parte do vetor  $x$  para o processador  $\bar{P}$  com uma taxa  $r_1$  e que processador  $\bar{P}$  disponibilize sua parte do vetor  $x$  para o processador  $P$  com uma taxa  $r_2$ .

Baseados nas condições suficientes para a estabilidade exponencial de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos podemos decidir se esta implementação assíncrona para o problema de ponto fixo com dois processadores é estável e converge para  $x = (I - A)^{-1}b$ .

Sejam a matrix  $A$  e o vetor  $b$  sejam particionados da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

e os estados de  $P$  e  $\bar{P}$  no instante  $k$  representados respectivamente por :

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_k = \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,k} \\ \bar{x}_{2,k} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

De acordo com a posição das chaves, 4 tipos de iterações podem ocorrer em  $P$  e  $\bar{P}$  determinando as 4 configurações discretas possíveis neste sistema dinâmico híbrido assíncrono .

Quando as duas chaves estão abertas, cada um dos processadores continua a atualização dos seus estados sem utilizar informação do outro processador, ou seja :

$$P : \begin{aligned} x_{1,k+1} &= A_{11}x_{1,k} + A_{12}x_{2,k} + b_1 \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} \end{aligned}$$

$$\bar{P} : \begin{aligned} \bar{x}_{1,k+1} &= \bar{x}_{1,k} \\ \bar{x}_{2,k+1} &= A_{21}\bar{x}_{1,k} + A_{22}\bar{x}_{2,k} + b_2. \end{aligned}$$

No caso de ambas as chaves estarem fechadas, os processadores atualizam seus estados, fazendo uso de informação do outro processador, isto é:

$$P : \begin{aligned} x_{1,k+1} &= A_{11}x_{1,k} + A_{12}\bar{x}_{2,k} + b_1 \\ x_{2,k+1} &= \bar{x}_{2,k} \end{aligned}$$

$$\bar{P} : \begin{aligned} \bar{x}_{1,k+1} &= x_{1,k} \\ \bar{x}_{2,k+1} &= A_{21}x_k + A_{22}\bar{x}_{2,k} + b_2. \end{aligned}$$

No caso de somente a chave do processador  $P$  estar fechada, este atualiza seus estados sem informação de  $\bar{P}$ , enquanto  $\bar{P}$  atualiza seus estados fazendo uso da informação disponibilizada por  $P$  :

$$P : \begin{aligned} x_{1,k+1} &= A_{11}x_{1,k} + A_{12}x_{2,k} + b_1 \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} \end{aligned}$$

$$\bar{P} : \begin{aligned} \bar{x}_{1,k+1} &= x_{1,k} \\ \bar{x}_{2,k+1} &= A_{21}x_k + A_{22}\bar{x}_{2,k} + b_2. \end{aligned}$$

Adotando o mesmo procedimento para o caso onde somente da chave do procesador  $\bar{P}$  estar fechada obtemos:

$$P : \begin{aligned} x_{1,k+1} &= A_{11}x_{1,k} + A_{12}\bar{x}_{2,k} + b_1 \\ x_{2,k+1} &= \bar{x}_{2,k} \end{aligned}$$

$$\bar{P} : \begin{aligned} \bar{x}_{1,k+1} &= \bar{x}_{1,k} \\ \bar{x}_{2,k+1} &= A_{21}\bar{x}_k + A_{22}\bar{x}_{2,k} + b_2. \end{aligned}$$

Concatenando os vetores de estados dos processadores  $P$  e  $\bar{P}$  da seguinte maneira:

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k & \bar{x}_k \end{bmatrix}^T ,$$

a versão assíncrona com 2 processadores para o problema de ponto fixo pode ser representada por :

$$z_{k+1} = \hat{A}_s z_k ,$$

onde  $s = 1, \dots, 4$  corresponde às quatro configurações discretas possíveis para este sistema dinâmico híbrido assíncrono, e as matrizes

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_3 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_4 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

representam as dinâmicas agregadas correspondentes.

Para uma função de Lyapunov candidata quadrática segundo (2.31), a análise de estabilidade exponencial da versão assíncrona com 2 processadores para o problema de ponto fixo pode ser representada pelo seguinte problema de otimização:

$$\max a_1^{\hat{r}_1} a_2^{\hat{r}_2} a_3^{\hat{r}_3} a_4^{\hat{r}_4}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} \hat{A}_s^T P \hat{A}_s - P &\preceq (a_s^{-2} - 1)P, \quad s = 1, 2, 3, 4 \\ 0 &\prec P, \end{aligned} \tag{3.22}$$

onde as taxas  $\hat{r}_i$  e os parâmetros  $\alpha_i$  estão relacionadas às configurações discretas do sistema dinâmico híbrido assíncrono.

Considere para o problema de ponto fixo

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad A = \begin{bmatrix} 0.8558 & -0.2895 \\ 0.7295 & -0.6558 \end{bmatrix},$$

que é estável para uma implementação síncrona e converge para o ponto  $x = 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ , pelo fato da matriz  $A$  possuir os autovalores 0.7 e  $-0.5$ . Supondo agora que os

processadores se comunicam de forma assíncrona com taxas  $r_1 = r_2 = 0.9$ , facilmente obtemos as seguintes taxas de ocorrência das quatro configurações discretas possíveis no problema :

$$\hat{r}_1 = 0.01, \quad \hat{r}_2 = 0.81, \quad \hat{r}_3 = 0.09, \quad \hat{r}_4 = 0.09.$$

Lembrando que os parâmetros  $\alpha_i$  representam agora as taxas de decaimento das trajetórias de cada subsistema, podemos facilmente definir o seguinte conjunto viável para estes parâmetros :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_1 \leq 1, \\ 1 &\leq \alpha_2 \leq 1.4286, \\ 0 &\leq \alpha_3 \leq 1, \\ 0 &\leq \alpha_4 \leq 1. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Utilizando o algoritmo proposto no capítulo 4, com uma representação cromossômica utilizando números reais, os operadores genéticos recombinação aritmética e mutação uniforme, o esquema de seleção chamado escalonamento geométrico normalizado com 8% de probabilidade par escolha do melhor indivíduo, uma população de 20 indivíduos e 50 gerações como critério de parada, obtemos para o problema de otimização os seguintes valores:

$$\alpha_1 = 0.4910, \quad \alpha_2 = 1.4121, \quad \alpha_3 = 0.7163, \quad \alpha_4 = 0.7072,$$

$$P = \begin{bmatrix} 72.7961 & 4.4454 & -32.7549 & -17.7848 \\ 4.4454 & 9.3635 & -8.9705 & 4.1317 \\ -32.7549 & -8.9705 & 35.4242 & -16.3742 \\ -17.7848 & 4.1317 & -16.3742 & 63.3014 \end{bmatrix},$$

determinando uma taxa de decaimento para a versão assíncrona com 2 processadores para o problema de ponto fixo igual a:

$$\alpha = \alpha_1^{\hat{r}_1} \alpha_2^{\hat{r}_2} \alpha_3^{\hat{r}_3} \alpha_4^{\hat{r}_4} = 1.2352.$$

O raio espectral da matrix  $A$  utilizada é igual a 0.7, enquanto o raio espectral de  $|A|$  é igual a 1.2261, o que não atende critério de convergência para iterações assíncronas lineares proposto por Chazan e Miranker (Chazan & Miranker 1969), isto é,  $\rho(|A|) < 1$ . O não atendimento desta condição necessária e suficiente para estabilidade de iterações assíncronas lineares, como pode ser visto em (Bertsekas & Tsitsiklis 1989) e (Su, Bhaya, Kaszkurewicz & Kozyakin 1998), permite que a presença de pequenos atrasos no sistema cause iterações assíncronas instáveis.

O enfoque adotado neste exemplo não leva em consideração atrasos que ocorram na comunicação entre os processadores. Contudo o estudo de estabilidade de algoritmos paralelos, através da análise de estabilidade de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, permite que os processadores não se comuniquem durante todo o tempo, porém apenas assincronamente com as taxas  $r_1$  e  $r_2$  apresentadas.

Mesmo supondo que os processadores se comunicam assincronamente com as taxas  $r_1$  e  $r_2$  apresentadas, baseados na condição suficiente de estabilidade exponencial para sistemas dinâmicos híbridos assíncronos é possível obter resultados menos conservadores quando comparados com os obtidos com critério de convergência para iterações assíncronas lineares proposto por Chazan e Miranker (Chazan & Miranker 1969).

### 3.5 Sistemas de controle distribuído com atrasos

Em (Krtolica et al. 1994), os autores estudam o assincronismo existente em um sistema de controle distribuído onde as informações entre planta e controlador são transmitidas por uma rede de comunicação. O problema apresenta similaridades com o exemplo de sistema de controle em rede apresentado anteriormente. Porém, Krtolica e co-autores em sua análise levam em consideração o caráter randômico dos possíveis atrasos que podem ocorrer na rede de comunicação relacionando-os com sequências binárias. Como pode ser visto na Figura 3.6, os atrasos podem ocorrer durante a transmissão de dados da planta para controlador como também durante a transmissão de dados do controlador para a planta.

A dinâmica do sistema de controle pode ser descrita por:



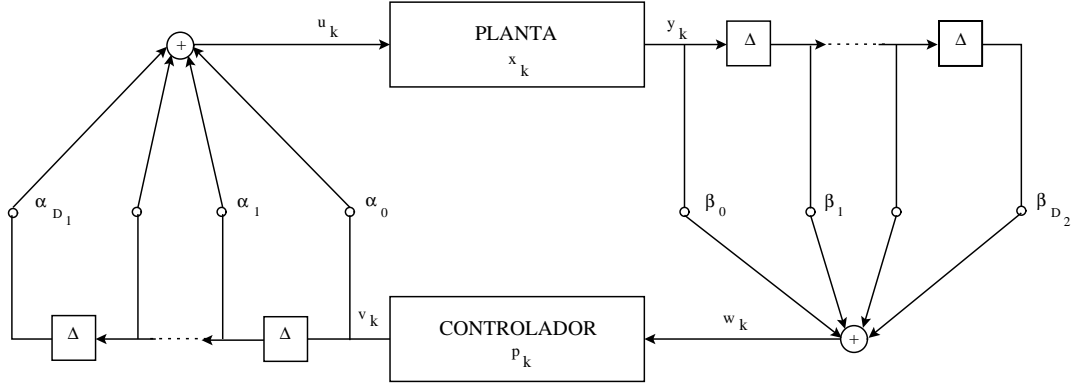


FIGURA 3.6: Sistema de controle distribuído com atrasos de comunicação

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k \end{aligned} \right\} \text{Planta} \quad (3.24)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{k+1} &= Fp_k + Gw_k \\ v_k &= Hp_k + Kw_k \end{aligned} \right\} \text{Controlador} \quad (3.25)$$

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \sum_{i=0}^{D_1} \beta_i(k)v_{k-1} \\ w_k &= \sum_{i=0}^{D_2} \gamma_i(k)y_{k-1} \end{aligned} \right\} \text{atrasos} \quad (3.26)$$

onde as matrizes  $A, B, C, F, G, H, K$  são constantes com dimensões apropriadas, e  $\beta_i(k), \gamma_i(k) \in \{0, 1\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , sendo que

$$\sum_{i=0}^{D_1} \beta_i(k) = 1, \quad \sum_{i=0}^{D_2} \gamma_i(k) = 1.$$

Substituindo (3.26) em (3.24) e (3.25) obtemos:

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ w_{k+1} &= C \sum_{i=0}^{D_2} \gamma_i(k+1)x_{k+1-i} \\ p_{k+1} &= Fp_k + Gw_k \\ u_{k+1} &= H \sum_{i=0}^{D_1} \beta_i(k+1)p_{k+1-i} + K \sum_{i=0}^{D_1} \beta_i(k+1)w_{k+1-i} \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Supondo por simplicidade que  $D_1 = D_2 = 1$  e concatenando os vetores de estados segundo

$$z(k) = \begin{bmatrix} x_k & w_k & p_k & u_k \end{bmatrix}^T,$$

a dinâmica do sistema pode ser expressa por

$$z(k+1) = \Theta_i z(k), \quad (3.28)$$

onde  $\Theta_i$ , com  $i = 1, 2$ , correspondem as matrizes de estado do sistema quando não existem atrasos ( $D_1 = D_2 = 0$ ) e quando os atrasos são unitários ( $D_1 = D_2 = 1$ ) respectivamente.

A partir de (3.27) para  $D_1 = D_2 = 0$  obtemos

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & B \\ CA & 0 & 0 & CB \\ 0 & G & F & 0 \\ KCA & HG & HF & KCB \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

e na presença de atrasos unitários ( $D_1 = D_2 = 1$ )

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & B \\ \theta_{21} & 0 & 0 & \theta_{24} \\ 0 & G & F & 0 \\ \theta_{41} & \theta_{42} & \theta_{43} & \theta_{44} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

onde :

$$\begin{aligned} \theta_{21} &= \gamma_0(k+1)CA + \gamma_1(k+1)C, \\ \theta_{24} &= \gamma_0(k+1)CB, \\ \theta_{41} &= \beta_0(k+1)\gamma_0(k+1)KCA + \beta_0(k+1)\gamma_1(k+1)BC, \\ \theta_{42} &= \beta_0(k+1)HG + \beta_1(k+1)K, \\ \theta_{43} &= \beta_0(k+1)HF + \beta_1(k+1)H, \\ \theta_{44} &= \beta_0(k+1)\gamma_0(k+1)KCB. \end{aligned}$$

Podemos notar que a matriz  $\Theta_1$  é constante e independente de  $k$ , enquanto  $\Theta_2$

depende de  $k$ , devido a presença das sequências binárias  $\beta_i(k+1)$  e  $\gamma_i(k+1)$  que representam os atrasos de comunicação do sistema.

### 3.5.1 Análise de estabilidade usando realimentação de estado e atraso unitário

Krtolica e co-autores, em sua análise de estabilidade, optaram por focalizar o seu estudo sobre um modelo simplificado, onde é utilizado um controlador proporcional e possíveis atrasos unitários ocorrem somente nos dados enviados da planta para o controlador, ou seja  $F = G = H = 0$ ,  $D_2 = 0$  e  $D_1 = 1$ . Posto isto, as equações (3.27) podem ser reescritas como:

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k \\ w_k &= y_k \\ v_k &= -Kw_k \\ u_k &= \beta_0(k)v_k + [1 - \beta_0(k)]v_{k-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

onde  $K$  foi substituído por  $-K$ , por conveniência. Eliminando agora variáveis redundantes, obtemos :

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k \\ u_k &= -\beta_0(k)Ky_k - [1 - \beta_0(k)]Ky_{k-1}, \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Definindo  $d_{k-1} = 1$  se o atraso ocorrer no  $k$ -ésimo intervalo de tempo e  $d_{k-1} = 0$ , caso contrário. Podemos então obter

$$w_k = [CA + d_{k-1}C(I_n - A)]x_{k-1} - (1 - d_{k-1})CBKw_{k-1}. \quad (3.33)$$

Concatenando novamente os vetores segundo

$$z(k) = \begin{bmatrix} x_k & w_k \end{bmatrix}^T,$$

a dinâmica do sistema pode ser expressa por

$$z(k+1) = A_i z(k), \quad (i = 1, 2), \quad (3.34)$$

onde

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & -BK \\ CA & -CBK \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & -BK \\ CA + C(I_n - A) & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

correspondem as matrizes de estado do sistema quando não existe atraso ( $d_k = 0$ ), e quando o atraso é unitário ( $d_k = 1$ ), respectivamente.

O sistema de controle apresentado ainda pode ser escrito como

$$z(k+1) = (A_0 + d_k A_c) z(k), \quad (3.37)$$

onde

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C(I_n - A) & CBK \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

observando a relação  $A_1 = A_0 + A_c$ .

A estabilidade do sistema (3.37) depende não só das matrizes  $A_1$  e  $A_0$ , como também da sequência binária  $d_k$ . Mesmo que  $A_1$  e  $A_0$  sejam estáveis, não existem garantias de que, por exemplo, para uma sequência binária  $d_k = \{0, 0, 0, 1, \dots\}$ , a matriz de estado após os quatro primeiros passos

$$\Phi(4) = A_1 A_0 A_0 A_0,$$

seja estável.

Com o objetivo de contornar a não praticidade de examinar todas sequências binárias possíveis, os autores optaram por utilizar a teoria clássica de Lyapunov na análise de estabilidade do sistema (3.37).

A partir de função candidata

$$V_k(z) = z^T P_k z, \quad (3.39)$$

o sistema (3.37) é exponencialmente estável se

$$\Delta V_k(z) = z^T \Phi_k^T P_{k+1} \Phi_k z - z^T P_k z = -z^T Q_k z \quad (3.40)$$

onde  $P_k$  e  $Q_k$  são sequências de matrizes simétricas positivas definidas.

Substituindo as matrizes variantes no tempo  $P_k$  e  $Q_k$  por matrizes invariantes  $P$  e  $Q$  e assumindo que  $A_0$  é estável, podemos escrever:

$$A_0^T P A_0 - P = -Q. \quad (3.41)$$

Considerando agora uma função de Lyapunov candidata

$$V_k(z) = z^T P z, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.42)$$

(3.40) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \Delta V_k(z) &= V_k(\Phi z) - V_k(z) \\ &= z^T [(A_0 + d_k A_c)^T P (A_0 + d_k A_c) - P] z \\ &= z^T [A_0^T P A_0 + A_0^T P d_k A_c + d_k A_c^T P A_0 + d_k^2 A_c^T P A_c - P] z \\ &= z^T [A_0^T P A_0 - P + d_k (A_0^T P A_c + A_c^T P A_0 + A_c^T P A_c)] z \end{aligned} \quad (3.43)$$

lembrando que  $d_k^2 = d_k$ . Definindo

$$G := A_0^T P A_c + A_c^T P A_0 + A_c^T P A_c, \quad (3.44)$$

e usando em (3.43) obtemos:

$$\Delta V_k(z) = z^T [-Q + d_k G] z. \quad (3.45)$$

A partir de (3.45), Krtolica e co-autores apresentam uma condição suficiente para estabilidade do sistema (3.37) na forma do teorema a seguir.

**Teorema 3.3** *O estado de equilíbrio  $z_e = 0$  do sistema (3.37) é exponencialmente estável para todas as sequências  $d_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , se*

$$\rho(Q^{-1}G) < 1 \quad (3.46)$$

onde  $\rho(\cdot)$  é raio espectral da matriz correspondente.

O grande problema existente no sistema estudado em (Krtolica et al. 1994), conforme dito anteriormente, encontra-se na quantidade infinita de valores que a sequência binária  $d_k$  pode assumir. Outra forma apresentada por Krtolica e co-autores para contornar este problema, consiste em uma análise estocástica do sistema, onde grupos de sequências são especificadas por probabilidades. Para isto, os autores utilizam uma cadeia de Markov com dois estados  $X_1$  e  $X_2$  que correspondem a  $d_k = 0$  e  $d_k = 1$ , respectivamente, e uma matriz de probabilidades condicionais referente aos atrasos aleatórios.

Contudo, voltando nossas atenções para a equação (3.34), podemos observar que o sistema apresentado por Krtolica e co-autores pode ser colocado facilmente no contexto de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, onde poderíamos definir como eventos discretos a presença ou não de atrasos no sistema. Maiores detalhes serão apresentados no exemplo a seguir, retirado de (Krtolica et al. 1994).

### 3.5.2 Exemplo numérico

O exemplo apresentado por Krtolica e co-autores consiste de uma rede de comunicação, com dois computadores acoplados. A análise de estabilidade do sistema, a partir de um ganho estimado, é feita com relação aos períodos de atualização e um possível atraso de um intervalo de tempo na transmissão de dados.

Uma planta contínua é simulada num computador analógico, com a seguinte dinâmica:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Um dos computadores, através de um conversor A-D, capta o valor medido e o coloca na rede. Este valor é recebido no outro PC, multiplicado pelo ganho e enviado para a planta analógica por meio de um conversor D-A. Conforme mostrado anteriormente, obtemos, para o sistema equivalente discreto em malha fechada, as matrizes

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & -BK \\ CA & -CBK \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} A & -BK \\ C & 0 \end{bmatrix},$$

onde  $A_0$  representa o sistema sem atraso e  $A_1$  representa o sistema quando o atraso unitário ocorre.

Assumindo que o ganho de realimentação seja  $K = 36$  e variando os instantes de atualização, os resultados apresentados pelos autores foram:

(i) para um período de amostragem  $T_s = 4ms$ , o equivalente discreto da planta contínua é representado por:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0041 \\ 0 & 0.9972 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.004 \end{bmatrix} u,$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

Os autores concluem que o sistema é estável para todas as sequências binárias.

(ii) para um período de amostragem  $T_a = 7ms$ , o sistema continua estável para todas as sequências binárias pelo método de Krtolica et al.

(iii) já para o caso de  $T_a = 10ms$  o sistema é estável na ausência de atrasos, mas como  $\rho(A_1) > 1$ , não se pode provar estabilidade para todas as sequências pelo método de Krtolica et al.

Analisando este exemplo no contexto de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, as duas configurações discretas possíveis no sistema são determinadas pela presença ou não de atrasos. Especificamente, para o caso de  $T_a = 10ms$  e  $K = 36$  o equivalente discreto da planta contínua é representado por:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 \\ 0 & 0.993 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \end{bmatrix} u,$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix},$$

definindo as seguintes matrizes para cada estado discreto do sistema:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.993 & -0.36 \\ 1 & 0.01 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0.993 & -0.36 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Para uma função de Lyapunov candidata quadrática segundo (2.31), a análise de estabilidade exponencial no contexto de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos para o sistema de controle distribuído com atrasos pode ser representada pelo seguinte problema de otimização:

$$\max \alpha_0^{\hat{r}_0} \alpha_1^{\hat{r}_1}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} A_s^T P A_s - P &\preceq (\alpha_s^{-2} - 1)P, \quad s = 0, 1 \\ 0 &\prec P, \end{aligned} \tag{3.48}$$

Supondo que a taxa de ocorrência de atrasos é igual a 20%, ou seja,  $\hat{r}_0 = 0.8$  e  $\hat{r}_1 = 0.2$ , não precisamos mais analisar cada uma das sequências binárias possíveis. Neste caso, todas as sequências binárias que atendam a restrição da taxa de ocorrência de atrasos estão incluídas na análise.

Recordando que os parâmetros  $\alpha_i$  representam taxas de decaimento de cada subsistema, correspondente a cada configuração discreta do sistema dinâmico híbrido assíncrono, podemos facilmente definir o seguinte conjunto viável para estes parâmetros

:



$$\begin{aligned} 1 &\leq \alpha_0 \leq 1.0021, \\ 0 &\leq \alpha_1 \leq 0.9992 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Utilizando o algoritmo proposto no capítulo 4, com uma representação cromossômica utilizando números reais, os operadores genéticos recombinação aritmética e mutação uniforme, o esquema de seleção chamado escalonamento geométrico normalizado com 8% de probabilidade par escolha do melhor indivíduo, uma população de 20 indivíduos e 50 gerações como critério de parada, obtemos para o problema de otimização os seguintes valores:

$$\alpha_0 = 1.0021, \alpha_1 = 0.9992,$$

$$P = \begin{bmatrix} 81.2219 & 0.8311 & -20.3836 \\ 0.8311 & 1.6960 & -0.4714 \\ -20.3836 & -0.4714 & 20.3704 \end{bmatrix},$$

e como consequência, uma taxa de decaimento para o sistema de controle distribuído com atrasos igual a :

$$\prod_{s=0}^1 \alpha_s^{\hat{r}_s} = 1.0015,$$

comprovando que o mesmo ainda é exponencialmente estável para um período de amostragem  $T_a = 10ms$ .

O resultado encontrado garante estabilidade exponencial sem a necessidade de análise de todas as possíveis sequências binárias, desde que os atrasos satisfaçam os limites impostos na taxa de ocorrência. Apesar de garantir estabilidade somente para as sequências binárias que obedeçam a taxa de ocorrência em questão, o resultado supera o obtido por Krtolica et al (Krtolica et al. 1994) , no qual para o caso  $T_a = 10ms$ , não se pode provar estabilidade para o sistema de controle em rede independente da sequência binária.

### 3.6 Sistemas lineares assíncronos

A partir de fenômenos observados no funcionamento de sistemas digitais, Kleptsyn et al (Kleptsyn et al. 1983, Kleptsyn, Kozyakin, Krasnosel'skii & Kuznetsov 1984c, Kleptsyn, Kozyakin, Krasnosel'skii & Kuznetsov 1984d, Kleptsyn, Krasnosel'skii, Kuznetsov & Kozjakin 1984) apresentaram um modelo para o estudo de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, baseado nas matrizes de transição de estados associadas aos instantes de atualização das variáveis do sistema.

Os sistemas estudados são descritos pelas equações

$$x_i(T_i^{n+1}) = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j(T_i^n) \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.50)$$

Toda variável  $x_i$  pode ser tanto um escalar como um vetor de dimensão  $d_i$ . A função  $x_i(t)$  permanece constante no intervalo  $T_i^n < t \leq T_i^{n+1}$ . O símbolo  $a_{ij}$  representa números no caso de variáveis escalares, enquanto no caso de variáveis vetoriais matrizes retangulares ou quadradas com dimensões adequadas.

Na coleção de artigos citados anteriormente, Kleptsyn e co-autores definiram duas classes de sistemas dessincronizados ou assíncronos que podem ocorrer no modelo proposto por eles, segundo a relação existente entre os instantes de atualização em (3.50). No caso de  $T_i^n = nh + \tau_i$  onde todos os números  $\tau_i$  não são iguais, o sistema (3.50) é classificado como *assíncrono em fase* e os números  $\tau_i$  representam os *deslocamentos de fase*. Se  $T_i^n = n(h + \delta_i)$  onde todos os  $\delta_i$  não são iguais, o sistema (3.50) é classificado como *assíncrono em frequência* e os números  $\delta_i$  representam os *deslocamentos de frequência*. Nas próximas seções veremos que pelo fato de existir uma periodicidade nos instantes de atualização de sistemas assíncronos em fase, sua análise de estabilidade apresenta similaridades com a análise de sistemas síncronos. Por outro lado, para sistemas assíncronos em frequência, a ausência desta periodicidade nos instantes de atualização dificulta a análise de estabilidade do mesmo. Em exemplo específico, mostraremos que sistemas assíncronos em frequência podem ser estudados sobre o enfoque de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos.

A princípio, o exemplo numérico servirá para mostrar que como estudar estabilidade de sistemas assíncronos em frequência, utilizando o algoritmo combinado proposto nesta tese. Contudo, veremos que supondo certas simplificações, será possível obter

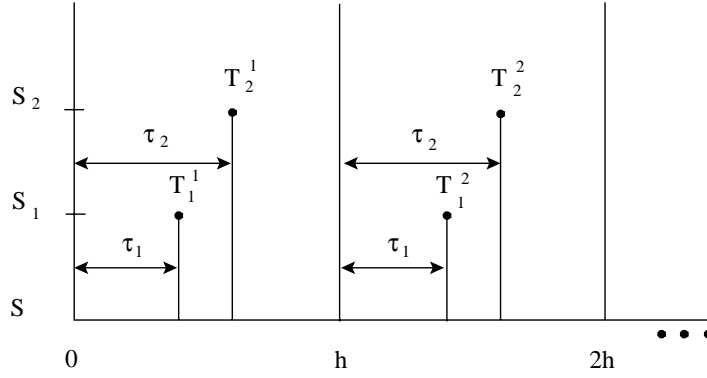


FIGURA 3.7: Sequência assíncrona em fase para  $N = 2$ .

resultados sobre a estabilidade do problema resolvendo um dos problemas padrão LMIs, chamado problema de autovalor generalizado.

### 3.6.1 Sistemas assíncronos em fase

A partir do modelo descrito em (3.50), vamos assumir que todos os subsistemas apresentam o mesmo período de atualização  $h$ , porém com a presença de assincronismo de fase, isto é:

$$T_i^n = nh + \tau_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.51)$$

onde  $\tau_i$  representa o deslocamento de fase de cada subsistema.

Substituindo (3.51) em (3.50), obtemos:

$$x_i[(n+1)h + \tau_i] = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j(nh + \tau_j), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.52)$$

A figura (3.7) exemplifica para um valor específico de  $N = 2$  a evolução do sistema (3.52) em relação às fases  $\tau_1$  e  $\tau_2$ .

Como os valores das fases são diferentes, definindo

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

podemos observar com a ajuda da figura (3.7), a seguinte sequência de movimento:

$$x(4) = A_2 A_1 A_2 A_1 x(0).$$

Generalizando agora para o caso de  $N$  subsistemas, assumindo todos os  $\tau_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , distintos e por simplicidade ordenados de forma crescente, onde :

$$0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_N < h. \quad (3.53)$$

O sistema (3.52) pode ser expresso por :

$$x(n+1) = B(n)x(n), \quad (3.54)$$

onde

$$B = A_N A_{N-1} \dots A_2 A_1, \quad \forall n. \quad (3.55)$$

A periodicidade entre os instantes de atualização, permite que o sistema assíncrono de fase seja visto como um sistema síncrono segundo (3.54) e (3.55). A estabilidade do sistema pode ser facilmente determinada através de uma inspeção do autovalores da matriz  $B$ , ou seja, o sistema assíncrono de fase é estável se

$$\rho(B) < 1, \quad (3.56)$$

onde  $\rho(\cdot)$  é raio espectral da matriz correspondente.

A análise acima também pode ser utilizada no caso em que nem todos os  $\tau_i$  são distintos, isto é:

$$0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \dots \leq \tau_N < h. \quad (3.57)$$

A coincidência de fase acarreta atualizações simultâneas de subsistemas, proporcionando alterações nas matrizes que determinam  $B$ , mas a periodicidade, que caracteriza o sistema assíncrono em fase, continua presente.

### 3.6.2 Sistemas assíncronos em frequência

O que diferencia o assincronismo de fase do assincronismo de frequência é a periodicidade dos instantes de atualização, presente nos sistemas assíncronos de fase e ausente nos sistemas assíncronos em frequência.

No assincronismo em frequência os instantes de atualização são representados por :

$$T_i^n = nh_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.58)$$

onde  $h_i$  caracteriza o período de atualização do  $i$ -ésimo subsistema segundo

$$h_i = h + \delta_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3.59)$$

sendo que  $\delta_i$  corresponde ao deslocamento de frequência do  $i$ -ésimo subsistema .

Reescrevendo (3.50), obtemos:

$$x_i[(n+1)h] = \sum_{j=1}^N a_{ij}x_j(nh_i) \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.60)$$

No caso dos períodos de atualização  $h_1, h_2, \dots, h_N$  serem comensuráveis, é possível achar um valor  $h^* > 0$  mínimo, múltiplo de todos os  $h_i$ , e uma matriz de transição  $C^*$  onde  $x(h^*) = C^*x(0)$ , os quais permitem um a análise do sistema baseada nos critérios de estabilidade para sistemas síncronos. Porém, ao assumirmos que os períodos de atualização  $h_1, h_2, \dots, h_N$  são incomensuráveis, ou seja, não existe relação racional entre quaisquer par deles, o mesmo procedimento já não é possível.

Uma alternativa, consiste em escolher um número  $H$  e considerarmos os intervalos de tempo definidos por:

$$T^n = nH, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.61)$$

para expressar o estado do sistema segundo as atualizações em cada intervalo  $(T^n, T^{n+1}]$ . Na figura (3.8), supondo por exemplo que  $N = 2$ , podemos observar que devido a relação entre os valores  $h_1$  e  $h_2$  a sequência de instantes de atualização difere de um intervalo para o outro.

Considerando os intervalos de tempo definidos em (3.61), a dinâmica do sistema

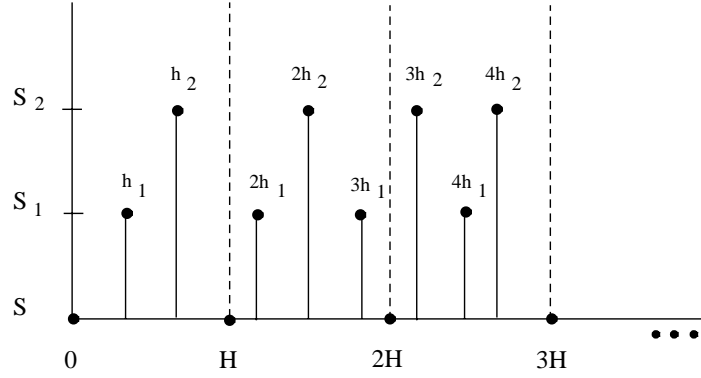


FIGURA 3.8: Sequência assíncrona em frequência para  $N = 2$ .

poder ser reescrita como:

$$x(nH + H) = D_n(H)x(nH), \quad (3.62)$$

onde  $D_n(H)$  é a matriz de transição do estado  $x(nH)$  para o estado  $x(nH + H)$ .

O fato do número de atualizações ser limitado em um intervalo de tempo  $H$ , determina um número finito  $D_1, D_2, \dots, D_m$  de matrizes possíveis. Segundo Kleptsyn e coautores (Kleptsyn, Kozyakin, Krasnosel'skii & Kuznetsov 1984d), admitindo que  $\eta(n, i)$  seja o número de matrizes do tipo  $D_i$  na sequência de intervalos e definindo para cada matriz  $D_i$ ,

$$p_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta(n, i)}{n}, \quad (3.63)$$

como sendo a frequência média de surgimento da matriz  $D_i$ . Lembrando que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1, \quad (3.64)$$

o sistema descrito em (3.50) é assintoticamente estável para o assincronismo de frequência se

$$q(H) = \|D_1\|^{p_1} \|D_2\|^{p_2} \dots \|D_m\|^{p_m} < 1. \quad (3.65)$$

Por outro lado, se

$$d(H) = |\det D_1|^{p_1} |\det D_2|^{p_2} \cdots |\det D_m|^{p_m} > 1, \quad (3.66)$$

o sistema (3.50) é instável.

A facilidade de uso das grandezas  $q(H)$  e  $d(H)$  na análise de estabilidade de sistemas assíncronos de frequência é inversamente proporcional ao aumento dos valores de  $H$  e  $N$ , visto que o aumento dos valores de  $H$  e  $N$  ocasionam um crescimento exponencial no número matrizes  $D_i$  possíveis, dificultando a obtenção das mesmas e das respectivas frequências médias de surgimento. Uma maneira alternativa para a obtenção das frequências  $p_i$  é apresentada pelos autores para *o caso específico de 3 instantes de atualização* utilizando um processo gráfico para analisar os possíveis arranjos de matrizes existentes.

Especificamente para o caso de 2 instantes de atualização, os autores ainda apresentam algoritmos para a análise de estabilidade de sistemas assíncronos de frequência com os períodos de atualização comensuráveis ou não.

A seguir, através de um exemplo, será mostrado como estes sistemas lineares dessincronizados podem ser analisados como sistemas dinâmicos assíncronos. Em alguns casos, ainda é possível formular o problema de estabilidade de tais sistemas como um problema de otimização quase-convexa, chamado problema de autovalor generalizado. Tais problemas podem ser solucionados de forma eficiente através de métodos de pontos interiores (Boyd et al. 1994)

### 3.6.3 Exemplo numérico

Consideremos um sistema com assincronismo de frequência descrito por (3.50) apresentado em (Kleptsyn, Krasnosel'skii, Kuznetsov & Kozjakin 1984), com a respectiva matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & -0.4 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

contendo 3 amostradores com os seguintes períodos de atualização

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \sqrt{2}, \quad h_3 = \sqrt{3}. \quad (3.68)$$

Observando que os instantes de atualização são incomensuráveis, para uma escolha de  $H = h_3$ , e definindo :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.70)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.4 & -0.4 & -0.1 \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Kleptsyn e coautores (Kleptsyn, Krasnosel'skii, Kuznetsov & Kozjakin 1984) mostram que existem 10 possíveis matrizes  $D_i$  e determinam as respectivas frequências médias de surgimento.

$$D_1 = A_2 A_1 A = \begin{bmatrix} 0.040 & 0.640 & -0.040 \\ -0.096 & -0.056 & 0.216 \\ 0.400 & -0.400 & -0.100 \end{bmatrix}, \quad p_1 = 0,$$

$$D_2 = A_2 A_1 A_3 = \begin{bmatrix} 0.440 & 0.560 & 0.040 \\ -0.016 & 0.216 & -0.056 \\ 0.400 & -0.400 & -0.100 \end{bmatrix}, \quad p_2 = 0.104,$$

$$D_3 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} 0.340 & 0.336 & 0.024 \\ -0.240 & 0.440 & -0.040 \\ 0.400 & -0.400 & -0.100 \end{bmatrix}, \quad p_3 = 0.104,$$



$$D_4 = A_2 A_1 A_1 A_3 = \begin{bmatrix} 0.104 & 0.896 & 0.064 \\ 0.118 & 0.082 & -0.066 \\ 0.400 & -0.400 & -0.100 \end{bmatrix}, \quad p_4 = 0.061,$$

$$D_5 = A_1 A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} -0.050 & 0.538 & 0.038 \\ -0.240 & 0.440 & -0.040 \\ 0.400 & -0.400 & -0.100 \end{bmatrix}, \quad p_5 = 0.061,$$

$$D_6 = A_2 A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} 0.344 & 0.336 & 0.024 \\ -0.122 & -0.030 & -0.074 \\ 0.400 & -0.400 & -0.100 \end{bmatrix}, \quad p_6 = 0.06,$$

$$D_7 = A_1 A_2 A_1 A_3 = \begin{bmatrix} 0.098 & 0.582 & 0.042 \\ -0.016 & 0.216 & -0.056 \\ 0.400 & -0.400 & -0.100 \end{bmatrix}, \quad p_7 = 0.416,$$

$$D_8 = A_2 A_1 A_2 A_1 A_3 = \begin{bmatrix} 0.098 & 0.582 & 0.042 \\ 0.111 & -0.263 & -0.090 \\ 0.400 & -0.400 & -0.100 \end{bmatrix}, \quad p_8 = 0.036,$$

$$D_9 = A_2 A_1 A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} -0.050 & 0.538 & 0.038 \\ 0.036 & -0.111 & -0.079 \\ 0.400 & -0.400 & -0.100 \end{bmatrix}, \quad p_9 = 0.093,$$

$$D_{10} = A_1 A_2 A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} -0.002 & 0.349 & 0.025 \\ -0.122 & -0.030 & -0.074 \\ 0.400 & -0.400 & -0.100 \end{bmatrix}, \quad p_{10} = 0.036.$$

Para a uma escolha de norma infinita obtemos:

$$\begin{aligned} \|D_1\|_\infty &= 0.900, & \|D_2\|_\infty &= 1.040, \\ \|D_3\|_\infty &= 0.900, & \|D_4\|_\infty &= 1.064, \\ \|D_5\|_\infty &= 0.900, & \|D_6\|_\infty &= 0.900, \\ \|D_7\|_\infty &= 0.900, & \|D_8\|_\infty &= 0.900, \\ \|D_9\|_\infty &= 0.900, & \|D_{10}\|_\infty &= 0.900, \end{aligned}$$

e conseqüentemente as quantidades  $q(H)$  e  $d(H)$  encontradas foram:

$$q(H) = 0.923, \quad d(H) = 0.0247, \quad (3.72)$$

significando que o sistema é estável.

Este exemplo pode ser analisado no contexto de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. As matrizes  $D_i$ , onde  $i = 1, \dots, 10$ , determinam a dinâmica do sistema para cada uma das configurações discretas possíveis no mesmo. As frequências de surgimento  $p_i$  das matrizes  $D_i$  são, na verdade, as taxas de ocorrência  $\hat{r}_s$  das respectivas configurações discretas possíveis no sistema dinâmico híbrido assíncrono.

Para uma função de Lyapunov candidata quadrática segundo (2.31), a análise de estabilidade exponencial no contexto de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos para este exemplo de assincronismo de frequência pode ser representada pelo seguinte problema de otimização:

$$\max \prod_{s=1}^{10} \alpha_s^{\hat{r}_s}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} D_s^T P D_s - P &\preceq (\alpha_s^{-2} - 1)P, \quad s = 1, 10 \\ 0 &\prec P, \end{aligned} \tag{3.73}$$

onde  $\alpha_s$  representa a taxa de decaimento da  $s$ -ésima configuração discreta.

Neste instante, o próximo passo seria a aplicação do algoritmo proposto no capítulo 4 de forma a obter algum resultado que confirmasse a estabilidade do sistema. Porém, vamos optar por pela análise do pior caso supondo que todos os parâmetros  $\alpha_i$  são iguais. Lembrando que

$$\sum_{s=1}^{10} \hat{r}_s = 1,$$

o problema pode ser reescrito da seguinte forma :

$$\max \alpha$$

sujeito a

$$\begin{aligned} D_s^T P D_s &\preceq \alpha^{-2} P, \quad s = 1, 10 \\ 0 &\prec P. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Substituindo agora  $\alpha^{-2} = \lambda$  em (3.74) obtemos:

$$\min \lambda$$

sujeito a

$$\begin{aligned} D_s^T P D_s &\preceq \lambda P, \quad s = 1, 10 \\ 0 &\prec P. \end{aligned} \tag{3.75}$$

O problema de otimização (3.75), é conhecido na literatura especializada como problema de autovalor generalizado, onde o máximo autovalor generalizado de um par de matrizes que dependem linearmente de uma variável é minimizado, tendo uma desigualdade matricial linear como restrição. O problema de autovalor generalizado é um problema de otimização quase-convexo, e corresponde a um dos problemas padrões

que podem ser resolvidos utilizando métodos de pontos interiores (Boyd et al. 1994).

Recorrendo agora ao uso do programa MATLAB, especificamente ao pacote utilizado na solução de desigualdades matriciais lineares, obtemos como solução para o problema (3.75):

$$\lambda = 0.3801, \quad P = \begin{bmatrix} 3.0799 & -0.8363 & -0.2283 \\ -0.8363 & 7.8370 & 0.8676 \\ -0.2283 & 0.8676 & 1.8723 \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

O que determina para o problema uma taxa de decaimento  $\alpha = 1.6219$ , confirmando que o sistema é estável, sem a necessidade de calcular as frequências médias de surgimento das matrizes  $D_s$ , apesar de um maior conservadorismo ao supor que todas as taxas de decaimento das configurações discretas possíveis são iguais.

O resultado encontrado confirma que o sistema é estável, ratificando por outro método a informação sobre estabilidade obtida em (Kleptsyn, Krasnosel'skii, Kuznetsov & Kozjakin 1984).

Este exemplo confirma que problemas de assincronismo em frequência também podem ser avaliados sobre o enfoque de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, permitindo que a estabilidade de tais problemas seja analisada através da formulação de problemas de otimização.



# Capítulo 4

## Resolução de Desigualdades

## Matriciais Bilineares Através de um Algoritmo Combinado

### 4.1 Introdução

No capítulo 2 verificamos o surgimento de desigualdades matriciais bilineares na análise e síntese de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos e a necessidade de obtermos soluções para tais problemas.

Será apresentado um algoritmo prático combinando métodos de pontos interiores e algoritmos genéticos para a resolução de problemas envolvendo desigualdades matriciais bilineares referentes a análise de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. A metodologia é geral e poderá ser aplicada para resolução de problemas de análise de estabilidade e síntese simultânea em sistemas dinâmicos híbridos assíncronos, bem como para a resolução de outros problemas envolvendo desigualdades matriciais bilineares.

Inicialmente neste capítulo serão apresentadas as definições sobre desigualdades matriciais lineares e bilineares. A seguir, discutiremos sobre a complexidade computacional em problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais lineares e bilineares. Mencionaremos alguns programas numéricos utilizados para solução de desigualdades matriciais lineares e a técnica de otimização global utilizada para solução de desigualdades matriciais bilineares. Os dois principais algoritmos utilizados na

literatura para a resolução de desigualdades matriciais bilineares poderão ser encontrados em detalhes no apêndice A.

Uma visão geral sobre algoritmo genético e o seu funcionamento serão mostrados procurando fornecer subsídios para compreensão do algoritmo combinado que será apresentado. Detalhes sobre cada um dos componentes fundamentais utilizados no algoritmo genético poderão ser encontrados no Apêndice B.

## 4.2 Desigualdades matriciais lineares

Uma variedade de problemas existentes na teoria de controle e sistemas pode ser reduzida a problemas-padrão de otimização envolvendo desigualdades matriciais lineares (*LMIs*). A grande motivação desta redução é que estes problemas, por pertencerem a classe de problemas convexos, podem ser resolvidos numericamente utilizando os métodos eficientes de pontos-interiores (Nesterov & Nemirovskii 1994).

Desigualdades matriciais lineares podem ser descritas da seguinte maneira:

Supõe-se que  $F(x)$  é uma função afim dos elementos de  $x$ .

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succ 0, \quad (4.1)$$

onde  $x \in R^m$ ,  $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$ , e a desigualdade denotada  $\succ 0$  significa que  $F(x)$  é uma matriz positiva definida. Isto é:

$$z^T F(x) z > 0, \quad \forall z \neq 0, \quad z \in R^n. \quad (4.2)$$

As matrizes simétricas  $F_i$  são especificadas (dados do problema) e o vetor  $x$  é a incógnita.

A desigualdade (4.1) é classificada como uma desigualdade matricial linear estrita. Se assumirmos que a função  $F(x)$  em (4.1) seja somente positiva semi-definida, teremos então uma desigualdade matricial linear não-estrita. Desigualdades matriciais lineares não-estrictas viáveis podem ser reduzidas a desigualdades matriciais lineares estritas viáveis equivalentes, através da eliminação das restrições de igualdades implícitas, que permite a redução as desigualdades matriciais lineares resultantes com a remoção do espaço nulo constante (Boyd et al. 1994).

### 4.3 Desigualdades Matriciais Bilineares

Apesar de *LMIs* serem uma ferramenta capaz de resolver uma ampla variedade de problemas de otimização e controle de forma eficiente (Boyd et al. 1994), existem muitos problemas de controle que não podem ser formulados em termos de *LMIs*, porém através de uma formulação conhecida como desigualdade matricial bilinear (*BMI* = iniciais em inglês de *Bilinear Matrix Inequality*) (Tuan & Apkarian 2000a). Por não serem convexos, problemas envolvendo *BMI*s são fundamentalmente mais difíceis que problemas envolvendo *LMIs*, não existindo algoritmos globalmente convergentes que apresentem a mesma eficiência obtida pelos métodos de pontos interiores na solução de *LMIs*.

Desigualdades matriciais bilineares podem ser descritas da seguinte forma:

$$F(x, y) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i + \sum_{j=1}^n y_j G_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j H_{ij} \succ 0, \quad (4.3)$$

onde  $F_i = F_i^T$ ,  $G_j = G_j^T$ ,  $H_{ij} = H_{ij}^T$ ,  $x \in R^m$  e  $y \in R^n$ .

Notamos que a *BMI* se transforma em uma *LMI* em  $x$  para valores fixos de  $y$  e em *LMI* em  $y$  para valores fixos de  $x$ , porém quando consideramos que  $x$  e  $y$  sejam variáveis, temos uma desigualdade matricial não-convexa.

Consideremos, por exemplo, para  $x$  e  $y$  escalares, a seguinte *BMI*

$$1 - xy > 0, \quad (4.4)$$

que representa uma desigualdade bilinear. Os pontos  $(x, y)$  iguais a  $(0.1, 7.9)$  e  $(7.9, 0.1)$  satisfazem a desigualdade bilinear (4.4), porém a combinação convexa dos mesmos  $(0.5(0.1, 7.9) + 0.5(7.9, 0.1) = (4, 4))$  não satisfaz a desigualdade bilinear:  $1 - 4 \cdot 4 = -15 < 0$ , demonstrando a não convexidade do conjunto solução de (4.4).

É possível transformar determinadas desigualdades quadráticas e polinomiais em *BMI*s (Parrilo 2000). Por exemplo, considere a desigualdade polinomial não-linear

$$x^3 + yz > 1, \quad (4.5)$$

definindo  $x^2 = w$ , e  $x = v$ , é equivalente a :



$$\begin{aligned}
1 - xw - yz &> 0 \\
x - v &\geq 0 \\
v - x &\geq 0 \\
w - vx &\geq 0 \\
vx - w &\geq 0.
\end{aligned}
\tag{4.6}$$

O conjunto de desigualdades (4.6) está claramente na forma *BMI*.

## 4.4 Complexidade computacional de problemas de otimização envolvendo LMIs e BMIs

Muitos problemas de otimização e controle podem ser formulados em termos de busca por uma solução viável para um conjunto de *LMIs* ou *BMIs*. Ou ainda, em termos de otimização de uma função objetivo simples sujeita a restrições descritas por *LMIs* ou *BMIs*. A seguir será mostrada a relação entre convexidade e complexidade computacional evidenciando a diferença relativa a complexidade entre problemas de otimização envolvendo *LMIs* e *BMIs*.

Problemas de otimização são classificados em duas classes: *P* e “*NP-hard*” (Garey & Johnson 1983) (Papadimitriou & Steiglitz 1982), segundo a complexidade computacional apresentada por eles. A grosso modo, problemas nos quais o tempo necessário para resolvê-los pode ser sempre limitado por uma única função polinomial na quantidade de dados necessários para definir o problema, pertencem a classe *P*. Isto é, podem ser resolvidos em tempo polinomial. Por outro lado, a classe de problemas “*NP-hard*” ainda apresenta uma questão aberta fundamental na teoria sobre complexidade computacional. Geralmente é aceito que um problema “*NP-hard*” é aquele onde a solução não pode ser calculada em tempo polinomial no pior caso.

É importante ressaltar que a propriedade “*NP-hard*” diz respeito aos problemas e não aos algoritmos utilizados para solução dos mesmos. O fato de problemas pertencerem a classe “*NP-hard*”, não torna impossível a existência de algoritmos práticos para solução dos mesmos. Algoritmos práticos para problemas “*NP-hard*” existem e envolvem tipicamente aproximações, heurísticas, “*branch-and-bound*”, ou busca local

(Braatz et al. 1994, Garey & Johnson 1983, Papadimitriou & Steiglitz 1982).

Conforme mostrado anteriormente, desigualdades matriciais lineares representam restrições convexas, e podem ser utilizadas na formulação de problemas de controle em termos de problemas de otimização convexa. A vantagem em se utilizar esta formulação está no fato de que uma ampla variedade de problemas de otimização convexa pertencer a classe  $P$  (Nesterov & Nemirovskii 1994). E sendo assim, estes problemas podem ser resolvidos eficientemente em um computador em tempo polinomial. Por outro lado, problemas escritos em termos de desigualdades matriciais bilineares são “ $NP$ -hard” (Toker & Ozbay 1995), implicando que seja altamente improvável a existência de um algoritmo que resolva estes problemas em tempo polinomial. Algoritmos existentes atualmente para solução de problemas de otimização envolvendo  $BMI$ s, devido a complexidade descrita acima, estão limitados a problemas de tamanhos modestos.

## 4.5 Programas numéricos para solução de problemas envolvendo $LMI$ s

Como visto anteriormente, os problemas padrão envolvendo  $LMI$ s são convexas. Todos são tratáveis dos pontos de vista teórico e prático, e podem ser resolvidos em tempo polinomial, e, na prática, de forma eficiente utilizando os algoritmos de pontos interiores desenvolvidos recentemente (Nesterov & Nemirovskii 1994).

Diferentes grupos de pesquisa desenvolveram pacotes de programas para a solução de problemas envolvendo  $LMI$ s. Entre este pacotes podemos citar o  $LMI$ -Lab (Gahinet & Nemirovskii 1991) escrito por Gahinet e Nemirovskii e mais tarde incorporado ao programa  $MATLAB$  como uma ferramenta  $LMI$  Toolbox. Fujisawa e Kojima desenvolveram o pacote  $SDPA$  (Fujisawa & Kojima 1995) baseado no método de pontos interiores primal-dual inviável tipo preditor-corretor, enquanto Vandenberghe e Boyd produziram o programa  $SP$  (Boyd & Vandenberghe 1994), baseados em uma implementação do método de redução de potencial primal-dual para programação semidefinida de Nesterov e Todd.

## 4.6 Solução de problemas envolvendo *BMI*s

A flexibilidade da formulação *BMI* em representar diferentes tipos de problemas, causa um ônus no problema de otimização resultante, visto que o mesmo agora é não-convexo. Apesar disto, a falta desta propriedade não necessariamente quer dizer que não seja possível a solução de problemas envolvendo *BMI*s. Visto que o problema é bilinear, uma maneira óbvia de se obter soluções locais é resolver *BMI*s alternando entre *LMI*s. Outros procedimentos de otimização locais podem ser utilizados e junto a escolha de boas condições iniciais geralmente podem obter resultados significativos, porém não garantidamente globalmente ótimos.

De modo geral, para a solução de problemas envolvendo *BMI*s, o uso de técnicas de otimização globais se faz necessário. Nesta área, os algoritmos “*branch and bound*” têm se destacado (Goh et al. 1995). Os algoritmos “*branch and bound*” são considerados como uma maneira inteligente de particionar o espaço de busca iterativamente, reduzindo a diferença entre os limites superior e inferior da solução para problema em questão, até atingirmos a solução global do problema dentro de uma certa tolerância. No Apêndice C, serão mostrados em detalhes os dois principais algoritmos utilizados na literatura para solução de desigualdades matriciais bilineares.

## 4.7 Algoritmo genético

O algoritmo genético é utilizado na solução de problemas de otimização que não podem ser resolvidos com o uso de técnicas tradicionais que utilizam características dos problemas, como por exemplo: linearidade, diferenciabilidade e convexidade.

O algoritmo genético mantém e manipula uma família, ou população, de soluções e implementa uma estratégia baseada na sobrevivência dos indivíduos mais aptos, na busca por soluções melhores. Estes algoritmos são classificados como algoritmos de busca e otimização probabilísticos (Michalewicz 1994), que se mostram mais eficientes do que as técnicas de busca e otimização locais, ou do que aquelas baseadas em buscas puramente aleatórias, quando aplicados a espaços de busca complexos. O algoritmo genético é insensível à forma da função objetivo, sendo igualmente eficiente em funções descontínuas, ruidosas, multidimensionais e multimodais (Davis 1991) (Goldberg 1989)

(Holland 1975) (Michalewicz 1994).

A partir de uma população inicial de soluções para um dado problema de otimização, gerada aleatoriamente ou segundo alguma heurística, um algoritmo genético executa os seguintes passos (Goldberg 1989, Park, Kandel & Langholz 1994):

1. Avaliação da qualidade de cada uma das soluções da população atual e, com base nesta informação, definir probabilidades de sobrevivência correspondentes para estas soluções. As melhores soluções, de acordo com o critério de aptidão, terão maior probabilidade de seleção para continuarem na próxima população, enquanto que as soluções ruins terão menor probabilidade de seleção.
2. Enquanto o critério de término do algoritmo genético não for satisfeito:
  - a- Seleciona duas soluções da população atual, de acordo com as probabilidades pré-definidas.
  - b- Aplica os operadores genéticos recombinação e mutação a estas soluções, gerando duas novas soluções para a nova população.

Os critérios de término ou parada para o algoritmo genético mais utilizados são:

- Número máximo de populações geradas,
- Convergência para uma solução aceitável.

Com o uso dos mecanismos da genética e seleção natural descritos acima, o algoritmo genético tende a convergir a uma população contendo cada vez mais indivíduos aptos (soluções boas).

O uso do algoritmo genético requer a determinação de seis componentes fundamentais: representação cromossômica, tamanho da população, função de seleção, os operadores genéticos responsáveis pela execução da função de reprodução, criação da população inicial, critério de término ou parada, e a função objetivo. Detalhes sobre cada um destes componentes poderão ser encontrados no Apêndice B.

## 4.8 Algoritmo combinado proposto para resolução de problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais bilineares

Entre os métodos usados para resolução de problemas envolvendo desigualdades matriciais bilineares, o algoritmo *branch and bound* tem-se destacado por garantir convergência global dentro de uma certa tolerância pré-estabelecida. Contudo o número de termos não-convexos influencia diretamente a aplicação prática de tal algoritmo (Tuan & Apkarian 2000b).

Como alternativa para resolução de problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais bilineares, é proposto nesta seção um algoritmo combinado. A idéia básica deste algoritmo consiste na utilização de uma combinação de algoritmos genéticos e algoritmos de pontos interiores na resolução de um mesmo problema, de modo a obter desempenho superior ao obtido utilizando-se cada um dos algoritmos isoladamente, seja em termos de eficiência (menor esforço computacional) e/ou eficácia (capacidade de obter solução ou qualidade da solução obtida).

O conceito de algoritmos combinados foi anteriormente empregado na literatura em aplicações de sistemas de potência (Dusonchet, Talukdar & Sinnot 1971) (Almeida, Bhaya, Falcão & Kaszkurewicz 2001), e no contexto de computadores paralelos, no qual diferentes computadores cooperam na resolução do problema utilizando algoritmos diferentes (Ramesh, Quadrel, de Souza & Talukdar 1991).

O algoritmo combinado proposto visa a resolução de problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais bilineares descritos por:

$$\max_{x,y} J(x,y) \tag{4.7}$$

sujeito a

$$F(x,y) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i + \sum_{j=1}^n y_j G_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j H_{ij} \succ 0, \tag{4.8}$$

onde  $F_i = F_i^T$ ,  $G_j = G_j^T$ ,  $H_{ij} = H_{ij}^T$ ,  $x \in R^m$ ,  $y \in R^n$  e  $J(x,y)$  é uma função convexa ou não, nas incógnitas  $(x,y)$ , denominada função objetivo do problema de otimização.

Descrito o problema de otimização envolvendo desigualdades matriciais bilineares, a idéia consiste em particionar as variáveis  $x$  e  $y$  do problema em dois subconjuntos disjuntos, de modo que o problema seja considerado convexo na variável  $x$ , quando se fixam valores constantes para a variável  $y$ .

Um particionamento adequado, torna o número de variáveis de decisão a serem tratadas pelo algoritmo genético substancialmente menor que o número de variáveis de decisão do problema original. Tal particionamento implica que somente uma parte das variáveis de decisão responsável pelos termos bilineares é tratada pelo algoritmo genético.

O algoritmo combinado proposto é formado por dois algoritmos, um algoritmo principal e outro secundário responsável por avaliar a função objetivo do problema.

O algoritmo principal emprega os mecanismos de genética e seleção natural, a partir de uma população de soluções candidatas, na busca de soluções para o problema original com um número de variáveis de decisão reduzido.

Durante a execução do algoritmo principal, as variáveis de decisão tratadas neste são repassadas ao algoritmo secundário responsável por avaliar a função objetivo do problema.

O algoritmo secundário decodifica a solução candidata e avalia a viabilidade das desigualdades matriciais lineares obtidas para esta solução candidata com o uso de métodos de pontos interiores. Se as desigualdades matriciais lineares forem viáveis, é calculado o valor da função objetivo para a solução candidata. Caso estas desigualdades não sejam viáveis, é atribuído um valor a função objetivo que garanta que a solução candidata não seja descartada totalmente, pois esta pode estar próxima de soluções viáveis e talvez da solução ótima para o problema em questão.

Na Figura (4.1) é mostrada a estrutura básica do algoritmo combinado. A seguir, são apresentados os algoritmos principal e secundário que compõem o algoritmo combinado.

#### **Algoritmo 1:** Principal

Início

Definir uma população inicial de soluções candidatas codificando como genes somente a variável de decisão  $x$

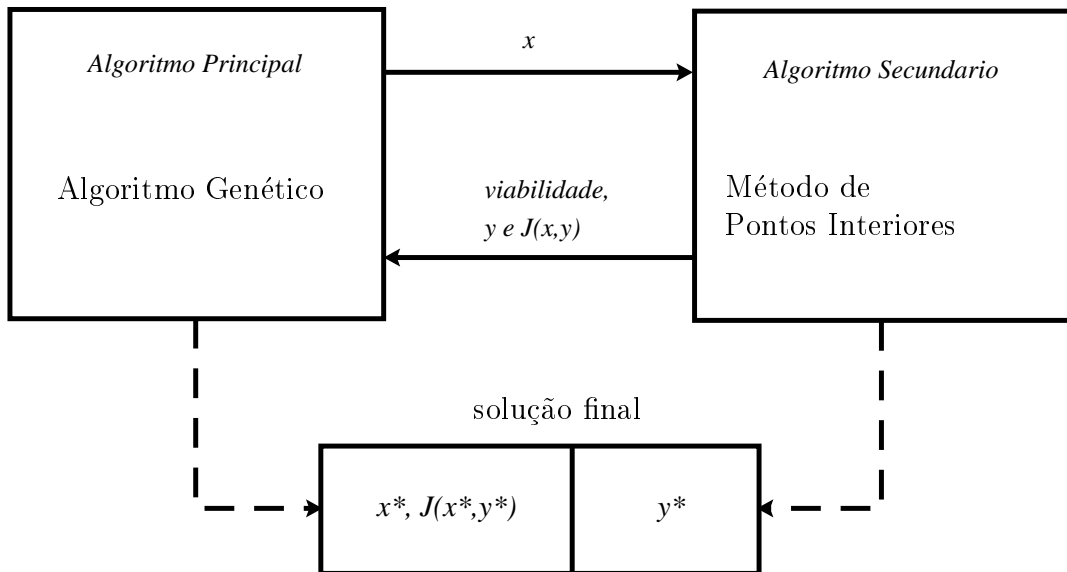


FIGURA 4.1: Estrutura do Algoritmo Combinado

Para cada solução candidata, avaliar sua aptidão através da função objetivo:

Enquanto o critério de parada não for satisfeito,

Selecionar soluções pais para próxima geração, de acordo com a sua aptidão.

Recombinar os genes pais para produzir uma nova geração de soluções.

Aplicar o operador mutação às novas soluções.

Para cada solução, avaliar a função de seleção.

Fim

Admitir a solução candidata com maior valor na função de seleção como a solução final.

Fim

**Algoritmo 2:** Viabilidade e valor da função objetivo para solução candidata.

Início

Decodificar a variável de decisão  $x$  dos genes da solução candidata.

Resolver o problema de viabilidade em  $y$  para LMI(4.8) assumindo como constante a variável de decisão  $x$ :

Se (4.8) for viável, calcular o valor da função objetivo (4.7).

Senão definir o valor da função de seleção como o menor valor calculado dentro do espaço de busca das variáveis  $x$  e  $y$ .

Fim

Um critério simples de parada para o algoritmo combinado pode ser o término do algoritmo após um número específico de gerações.

## 4.9 Síntese de controladores $H_2/H_\infty$ utilizando Algoritmo Combinado

Diferentes problemas de controle podem ser escritos em termos de problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais bilineares. Fato este que estimula o desenvolvimento de algoritmos práticos para a resolução de desigualdades matriciais bilineares. Nesta seção, será mostrada uma aplicação do algoritmo combinado para resolução de problemas envolvendo desigualdades matriciais bilineares fora do contexto de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos.

O problema estudado será o problema de síntese de controladores  $H_2/H_\infty$ . No qual, o fato de trabalharmos simultaneamente com critérios quadráticos e restrições  $H_\infty$ , impede que as *BMI*s existentes sejam transformadas em *LMI*s através de mudanças de variáveis (Boyd et al. 1994).

O problema  $H_2/H_\infty$  é um problema de controle ótimo sobre sistemas lineares com critérios quadráticos e restrições incorporando a classe de controladores desejada através da parametrização de Youla e parametrizações derivadas, acrescido de outras especificações envolvendo normas  $H_2$  e  $H_\infty$ , entre as quais as de margem de estabilidade do sistema com relação à perturbações em sua função de transferência.

### 4.9.1 O Problema de Controle $H_2$ usando LMIs

Os artigos de Youla (Jabr, Youla & Jr. 1975, Jabr, Youla & Jr. 1976) são considerados na literatura como os precursores do problema  $H_2$ , onde os critérios quadráticos sobre sistemas lineares foram definidos de tal forma que a variável de otimização passa a ser



o controlador linear representado no domínio da frequência. Para que o critério continuasse quadrático, o conjunto de controladores estabilizantes da planta foi parametrizado de forma afim por matrizes reais, racionais, próprias e estáveis, sendo chamada de parametrização de Youla.

A norma  $H_2$  é definida como a energia da resposta ao impulso  $h(t)$  de um sistema  $G$ :

$$\| G \|_2 = \left( \int_0^\infty h^T(t)h(t)dt \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty H(j\omega)H^T(j\omega)d\omega \right)^{1/2}.$$

Para um sistema contínuo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

com uma função de transferência  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$  devemos assumir  $D = 0$  para obtermos a norma  $\| G \|_2$  finita.

Seja  $H_i(t) = Ce^{At}B_i$  a  $i$ -ésima coluna da resposta ao impulso de  $G$ , então

$$\begin{aligned} \| G \|_2^2 &= \sum_i \| h_i \|_2^2 \\ &= \sum_i \int_0^\infty B_i^T e^{A^T t} C^T C e^{At} B_i dt \\ &= \text{traço } B^T \left( \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \right) B. \end{aligned}$$

A matriz

$$P_o = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt,$$

é a solução Gramiana de observabilidade para a equação de Lyapunov

$$A^T P_o + P_o A + C^T C = 0,$$

logo

$$\| G \|_2^2 = \text{traço } B^T P_o B,$$

onde se  $(A, C)$  é observável então  $P_0 \succ 0$ .

Definindo a matriz Gramiana de controlabilidade

$$P_c = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt,$$

como a solução para equação de Lyapunov

$$A P_c + P_c A^T + B B^T = 0,$$

obtemos a seguinte expressão dual para a norma  $H_2$ :

$$\|G\|_2^2 = \text{traço} C P_c C^T.$$

Definidas as expressões para norma  $H_2$  podemos reescrevê-las como desigualdades matriciais lineares:

$$\|G\|_2^2 = \min \text{traço} B^T P B \tag{4.9}$$

sujeito a :

$$\begin{aligned} A^T P + P A + C^T C &\preceq 0, \\ P &\succeq 0. \end{aligned}$$

$$\|G\|_2^2 = \min \text{traço} C Q C^T \tag{4.10}$$

sujeito a :

$$\begin{aligned} A Q + P A^T + B B^T &\preceq 0 \\ Q &\succeq 0 \end{aligned}$$

## 4.9.2 Controle $H_2$ com realimentação de estado

Seja o sistema contínuo linear e invariante no tempo em malha aberta

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_w w + B_u u \\ z &= C_z x + D_{zw} w + D_{zu} u\end{aligned}$$

com o controlador de realimentação de estados

$$u = Kx$$

obtemos o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + B_u K)x + B_w w \\ z &= (C_z + D_{zu} K)x + D_{zw} w\end{aligned}$$

com a função de transferência

$$G(s) = D_{zw} + (C_z + D_{zu} K)(sI - A - B_u K)^{-1} B_w$$

entre os sinais  $w$  e  $z$ .

A especificação de desempenho  $H_2$  é definida como

$$\|G\|_2 < \gamma_2,$$

sendo que para um ganho finito devemos ter  $D_{zw} = 0$ .

A síntese do controlador  $H_2$  consiste na busca de uma matriz de realimentação de estados  $K$  que minimize o índice de desempenho  $\gamma_2$  atendendo às seguintes desigualdades:

$$\text{traço}(C_z + D_{zu} K)Q(C_z + D_{zu} K)^T < \gamma_2 \quad (4.11)$$

$$(A + B_u K)Q + Q(A + B_u K)^T + BB^T \prec 0 \quad (4.12)$$

A desigualdade (4.11) pode ser reescrita como

$$\text{traço}(C_z + D_{zu}K)Q(C_z + D_{zu}K)^T < \text{traço}W < \gamma_2 \quad (4.13)$$

para uma matriz  $W$  tal que:

$$\begin{bmatrix} W & (C_z + D_{zu}K)Q \\ Q(C_z + D_{zu}K)^T & Q \end{bmatrix} \succ 0. \quad (4.14)$$

Definindo a variável auxiliar  $Y = KQ$ , obtemos a seguinte formulação envolvendo desigualdades matriciais lineares para o problema de síntese do controlador  $H_2$ :

$$\min \gamma_2 \quad (4.15)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} W & C_zQ + D_{zu}Y \\ QC^T + Y^T D_{zu}^T & Q \end{bmatrix} \succ 0, \\ & \text{traço}(W) < \gamma_2, \\ & AQ + QA^T + B_uY + Y^T B_u^T + B_w B_w^T \prec 0, \\ & Q \succ 0, \end{aligned}$$

resultando numa matriz de realimentação de estados  $K = YQ^{-1}$ .

### 4.9.3 O Problema de Controle $H_\infty$ usando LMIs

As restrições  $H_\infty$  surgiram na literatura no contexto de robustez de plantas face às perturbações, em relação à propriedade de estabilidade (Doyle & Stein 1981, Zames 1981). Uma descrição completa deste problema pode ser encontrada no artigo de Francis (Francis 1987). A norma  $H_\infty$  é definida como o ganho de energia induzido :

$$\|G\|_\infty = \sup_{\|x\|_2=1} \|Gx\|_2 = \sup_\omega \|G(j\omega)\|$$

Para um sistema contínuo linear e invariante no tempo descrito por:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

com a função de transferência  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ , temos  $\|G(s)\|_\infty < \gamma_\infty$  se existe uma matriz  $P_\infty \succ 0$  solução para a seguinte desigualdade matricial linear

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} \prec 0$$

Ou ainda, recorrendo ao complemento Schur,

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma_\infty & D^T \\ C & D & -\gamma_\infty \end{bmatrix} \prec 0.$$

#### 4.9.4 Controle $H_\infty$ com realimentação de estado

Seja o sistema contínuo linear e invariante no tempo em malha aberta

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_w w + B_u u \\ z &= C_z x + D_{zw} w + D_{zu} u \end{aligned}$$

com o controlador de realimentação de estados

$$u = Kx$$

obtemos o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_u K)x + B_w w \\ z &= (C_z + D_{zu} K)x + D_{zw} w \end{aligned}$$

com a função de transferência

$$G(s) = D_{zw} + (C_z + D_{zu} K)(sI - A - B_u K)^{-1} B_w$$

entre os sinais  $w$  e  $z$ .

A especificação de desempenho  $H_\infty$  é definida como

$$\|G\|_\infty < \gamma_\infty,$$

sendo que para um ganho finito devemos ter  $D_{zw} = 0$ .

A síntese do controlador  $H_\infty$  consiste na busca de uma matriz de realimentação de estados  $K$  que minimize o índice de desempenho  $\gamma_\infty$  atendendo à seguinte desigualdade matricial bilinear:

$$\begin{bmatrix} (A + B_u)^T P_\infty + P_\infty (A + B_u K) & P_\infty B_w & (C_z + D_{zu} K)^T \\ B_w^T P_\infty & -\gamma_\infty I & 0 \\ C_z + D_{zu} K & 0 & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (4.16)$$

Definindo a variável auxiliar  $Q = P_\infty^{-1}$  e  $Y = KQ$ , podemos transformar esta desigualdade em LMI, obtendo a seguinte formulação envolvendo desigualdades matriciais lineares para o problema de síntese do controlador  $H_\infty$ :

$$\min \gamma_\infty \quad (4.17)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_u Y + Y^T B^T & B_w & (C_z Q + D_{zu} Y)^T \\ B_w^T & -\gamma_\infty I & 0 \\ C_z Q + D_{zu} Y & 0 & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} \prec 0$$

resultando numa matriz de realimentação de estados  $K = YQ^{-1}$ .

#### 4.9.5 Problema de controle $H_2/H_\infty$

O problema  $H_2/H_\infty$ , conjugando critérios quadráticos com restrições de robustez em estabilidade na norma  $H_\infty$  foi inicialmente proposto por Bernstein e Haddad (Bernstein & Haddad 1989) e por Glover e Mustafa (Glover & Mustafa 1989). Desde então uma grande variedade de problemas e diferentes métodos de resolução surgiram na literatura. Estes problemas podem ser inicialmente classificados em duas categorias distintas, de acordo com o critério de otimização adotado, considerando se o critério quadrático original foi modificado ou não em função das restrições  $H_\infty$ .

Na primeira classe enquadram-se os métodos propostos por Bernstein e Haddad

(Bernstein & Haddad 1989), Khargonekar e Rotea (Khargonekar & Rotea 1991) e por Glover e Mustafa (Glover & Mustafa 1989). Os dois primeiros substituem as equações de Lyapunov do problema  $H_2$  original por equações algébricas de Riccati (ou de Lyapunov) convenientemente adaptadas utilizando um lema de Willems (Willems 1971), gerando limitantes superiores do critério  $H_2$  englobando as restrições  $H_\infty$ . O método proposto por Khargonekar e Rotea (Khargonekar & Rotea 1991) propõe uma mudança de variável levando a um problema de otimização convexo.

#### 4.9.6 O problema de controle $H_2/H_\infty$ com realimentação de estado

Seja o sistema contínuo linear e invariante no tempo em malha aberta contendo duas saídas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_w w + B_u u \\ z_\infty &= C_\infty x + D_{\infty w} w + D_{\infty u} u \\ z_2 &= C_2 x + D_{2w} w + D_{2u} u \end{aligned} \tag{4.18}$$

com o controlador de realimentação de estados

$$u = Kx$$

obtemos o sistema em malha fechada

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_u K)x + B_w w \\ z_\infty &= (C_\infty + D_{\infty u} K)x + D_{\infty w} w \\ z_2 &= (C_2 + D_{2u} K)x + D_{2w} w. \end{aligned}$$

Definidas as especificações desempenho

$$\|G_\infty(s)\|_\infty < \gamma_\infty, \quad \|G_2(s)\|_2 < \gamma_2,$$

relacionadas às funções de transferência de  $w$  para  $z_\infty$  e  $z_2$  respectivamente, o objetivo neste problema  $H_2/H_\infty$  é encontrar uma matriz de ganhos de realimentação  $K$  que

minimize a norma  $H_2$  de  $w$  para  $z_2$  enquanto a norma  $H_\infty$  de  $w$  para  $z_\infty$  é menor que um valor previamente definido  $\gamma_\infty$ . A partir dos problemas (4.15) e (4.17), obtemos a seguinte formulação envolvendo desigualdades matriciais bilineares para o problema de controle  $H_2/H_\infty$ :

$$\min \gamma_2 \tag{4.19}$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} AQ_\infty + Q_\infty A^T + B_u K Q_\infty + Q_\infty K^T B^T & B_w Q_\infty & (C_z Q_\infty + D K Q_\infty)^T \\ Q_\infty B_w^T & -\gamma_\infty I & 0 \\ C_z Q_\infty + D_{\infty u} K Q_\infty & 0 & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\begin{bmatrix} W & C_z Q_2 + D_{2u} K Q_2 \\ Q_2 C^T + Q_2 K^T D_{2u}^T & Q_2 \end{bmatrix} \succ 0,$$

$$\text{traço}(W) < \gamma_2,$$

$$AQ_2 + Q_2 A^T + B_u K Q_2 + Q_2 K^T B_u^T + B_w B_w^T \prec 0,$$

$$Q_2 \succ 0, Q_\infty \succ 0,$$

Como podemos observar no problema (4.19), a linearização feita nos problemas anteriores específicos de  $H_2$  e  $H_\infty$  não pode ser aplicada neste caso. Isto ocorre porque não podemos linearizar simultâneamente os termos  $KQ_\infty$  e  $KQ_2$ .

Em (Khargonekar & Rotea 1991), os autores optaram por utilizar uma única matriz de Lyapunov ( $Q_\infty = Q_2$ ), permitindo assim através de linearização reescrever o problema (4.19) de forma que o mesmo envolva somente desigualdades matriciais lineares. Esta opção apesar de permitir a linearização causa um maior conservadorismo nos resultados encontrados como veremos posteriormente.

Definido o problema (4.19), utilizaremos agora a metodologia do algoritmo combinado para solucioná-lo. Os resultados serão comparados com os encontrados pelo método de (Khargonekar & Rotea 1991).

No sistema descrito em (4.18), definimos os seguintes valores como exemplo em (Khargonekar & Rotea 1991):



$$A = \begin{bmatrix} -1.40 & -0.49 & -1.93 \\ -1.73 & -1.69 & -1.25 \\ 0.99 & 2.08 & -2.49 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} -0.16 & -1.29 \\ 0.81 & 0.96 \\ 0.41 & 0.65 \end{bmatrix} \quad B_u = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.41 \\ 0.65 \end{bmatrix},$$

$$C_\infty = \begin{bmatrix} -0.41 & 0.44 & 0.68 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -1.77 & 0.5 & -0.40 \end{bmatrix},$$

$$D_\infty = 1 \quad D_2 = 1 \quad \gamma_\infty = 2$$

Lembrando que as desigualdades matriciais bilineares envolvem as variáveis  $K$ ,  $Q_\infty$ , e  $Q_2$ , escolhemos a matriz de ganhos de realimentação  $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$  para receber uma representação cromossômica. Para isto arbitramos os seguintes espaços de busca:

$$\begin{aligned} -1 &\leq k_0 \leq 1, \\ -1 &\leq k_1 \leq 1, \\ -1 &\leq k_2 \leq 1, \end{aligned} \tag{4.20}$$

O algoritmo combinado aplicado neste problema de otimização apresenta as seguintes características: representação cromossômica utilizando números reais, os operadores genéticos recombinação aritmética e mutação uniforme, o esquema de seleção chamado escalonamento geométrico normalizado com 8% de probabilidade para escolha do melhor indivíduo, uma população de 20 indivíduos e 50 gerações como critério de parada.

Definidos os parâmetros para o algoritmo combinado, obtemos com a sua utilização os seguintes resultados:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -0,6727 & -0,3639 \end{bmatrix},$$

$$Q_\infty = \begin{bmatrix} 10,8871 & 11,9586 & 0,0964 \\ 11,9586 & 13,8566 & -0,4168 \\ 0,0964 & -0,4168 & 14,6247 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 8,5439 & 9,9142 & -0,5738 \\ 9,9142 & 12,3822 & -1,9244 \\ -0,5738 & -1,9244 & 11,7169 \end{bmatrix},$$

e um índice de desempenho para a norma  $H_2$  igual a  $\gamma_2 = 1,50$ .

O resultado obtido supera aquele encontrado em (Khargonekar & Rotea 1991), onde admitindo-se  $Q_2 = Q_\infty$  foi obtido um índice de desempenho para a norma  $H_2$  igual a  $\gamma_2 = 2,55$ . O que mostra que com o uso do algoritmo combinado na resolução de problemas envolvendo desigualdades matriciais bilineares é possível melhorar resultados de problemas na literatura onde até o momento, os autores preferem acrescentar um certo conservadorismo aos resultados a ter que resolver desigualdades matriciais bilineares.

## 4.10 Solução de Problemas BMIs Através de Algoritmos Genéticos

As principais vantagens na formulação de problemas envolvendo BMIs são a simplicidade e generalidade. A formulação de problemas envolvendo BMIs oferece uma interpretação direta das variáveis desejadas em problemas de controle. Contudo problemas envolvendo BMIs são não-convexos e em geral difíceis de serem resolvidos em tempo polinomial.

Na aplicação já apresentada, com o uso do algoritmo combinado somente uma parte

do espaço de busca dos problemas recebeu uma representação cromossômica. Com isso, numa segunda etapa, para cada conjunto de possíveis soluções candidatas continuamos resolvendo problemas contendo desigualdades matriciais lineares através de métodos de pontos interiores.

Nesta seção optamos por uma representação cromossômica para todo o espaço de busca em problemas BMI, com o objetivo de solucionar esses problemas fazendo uso somente de algoritmos genéticos. Os resultados encontrados serão comparados com resultados obtidos através de uma implementação do algoritmo “branch and bound” (Goh et al. 1995), o qual apesar de garantir convergência global, apresenta eficiência computacional questionável.

Inicialmente estudaremos um problema BMI simples utilizado por Goh em (Goh et al. 1995) para verificar o funcionamento do algoritmo “branch-and-bound” proposto no mesmo artigo. A seguir, serão estudados problemas BMI gerados randomicamente, os quais também serão resolvidos pelo algoritmo “branch-and-bound” proposto por Goh em (Goh et al. 1995) e pelo uso de Algoritmos Genéticos. Os objetivos são avaliar os resultados obtidos pelos dois métodos e comparar os tempos computacionais gastos pelos mesmos.

#### 4.10.1 Um problema BMI simples com duas variáveis

O primeiro exemplo consiste de um problema BMI simples com duas variáveis, proposto por Goh (Goh et al. 1995) como um exemplo de problema BMI que apresenta múltiplos mínimos locais. O problema é descrito como:

$$\min \gamma \tag{4.21}$$

sujeito a:

$$F(x, y) - \gamma I \prec 0,$$

$$(x, y) \in [-0.5, 2] \times [-3, 7],$$

onde:

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} -10 & -0.5 & -2 \\ -0.5 & 4.5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1.8 & -0.1 & -0.4 \\ -0.1 & 1.2 & -1 \\ -0.4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ + x \begin{bmatrix} 9 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} + xy \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5.5 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

O problema apresenta os seguintes mínimos locais no domínio:

$$(x, y) = (0.0049, -2.0253) \rightarrow \gamma = 3.3886$$

$$(x, y) = (0.4436, 4.0174) \rightarrow \gamma = -0.4434$$

$$(x, y) = (1.0488, 1.4179) \rightarrow \gamma = -0.9565$$

Através de uma implementação do algoritmo "branch and bound" baseada em (Goh et al. 1995), com um critério de parada

$$\gamma_{upperbound} - \gamma_{lowerbound} \leq 0.001\gamma_{upperbound},$$

obtemos:

$$\gamma_{upperbound} = -0.9565, \quad \gamma_{lowerbound} = -0.9573,$$

$$(x, y)_{otimo} = (1.0510, 1.4141).$$

Para atingir estes valores o algoritmo precisou 105 iterações em 74.14 segundos.

Usando o algoritmo genético obtemos para o mesmo problema:

$$(x, y)_{otimo} = (1.0510, 1.4141) \quad \gamma_{otimo} = -0.9565,$$

após o funcionamento do mesmo durante 51.93 segundos. Os parâmetros usados pelo algoritmo genético foram: representação cromossômica com números reais, operadores genéticos recombinação aritmética e mutação uniforme, escalonamento geométrico normalizado com 9% de probabilidade de escolha do melhor indivíduo, uma população de 50 indivíduos e 100 gerações como critério de parada.

Os resultados mostram que mesmo para um problema BMI reduzido como o que foi mostrado, o algoritmo genético conseguiu atingir o ótimo global com um menor tempo de processamento.

#### 4.10.2 Problemas BMI gerados aleatoriamente

Neste exemplo utilizaremos problemas BMI gerados aleatoriamente com a seguinte forma:

$$\min_{x \in R^{N_1}, y \in R^{N_2}} \gamma \quad (4.22)$$

sujeito a:

$$F_0 + \sum_{i=1}^{N_1} x_i F_{i0} + \sum_{j=1}^{N_2} y_j F_{0j} + \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} x_i y_j F_{ij} - \gamma I \prec 0,$$

onde  $F_0, F_{i0}, F_{0j}$ , e  $F_{ij} \in R^{m \times m}$  são matrizes constantes simétricas geradas aleatoriamente. Com  $i = 1, \dots, N_1$  e  $j = 1, \dots, N_2$ . Cada um dos coeficientes das matrizes são escolhidos aleatoriamente no intervalo  $[-10, 10]$ . Todas as variáveis,  $x_i (i = 1, \dots, N_1)$  e  $y_j (j = 1, \dots, N_2)$  são restritas ao intervalo  $[0.1, 10]$ .

Inicialmente, para cada problema gerado aleatoriamente, o mínimo global foi calculado utilizando uma implementação do algoritmo "branch and bound" proposto por Goh (Goh et al. 1995). O critério de parada utilizado foi

$$\gamma_{upperbound} - \gamma_{lowerbound} \leq 0.001 \gamma_{upperbound}.$$

Obtidos estes valores, o algoritmo genético foi utilizado para a obtenção de soluções para os mesmos problemas. Para cada problema, o algoritmo genético foi executado 10 vezes seguidas e o valor da solução definido como válido, assim como o tempo

computacional necessário, corresponde à média aritmética destas execuções. Este teste foi aplicado em 3 diferentes tipos de problemas:

- 1)  $F_0, F_{ij} \in R^{3 \times 3}$  e  $x, y \in R$  (10 problemas )
- 2)  $F_0, F_{ij} \in R^{3 \times 3}$  e  $x \in R^2, y \in R$  (10 problemas )
- 3)  $F_0, F_{ij} \in R^{3 \times 3}$  e  $x \in R^3, y \in R$  (10 problemas )

A tabela (4.10.2) a seguir contém um resumo dos resultados obtidos pelo algoritmo "branch and bound" e o algoritmo genético.

Dimensões dos Problemas	Tempo médio computacional gasto		Erro médio (%)
	Algoritmo Branch-and-Bound	Algoritmo Genético	
$F_0, F_{ij} \in R^{3 \times 3}$ e $x, y \in R$	94.34s	67.79s	0.61
$F_0, F_{ij} \in R^{3 \times 3}$ e $x \in R^2, y \in R$	249.36s	71.90s	1.21
$F_0, F_{ij} \in R^{3 \times 3}$ e $x \in R^3, y \in R$	643.85s	78,47s	0.98

Tabela (4.10.2): Resumo de resultados obtidos com o uso dos algoritmos "branch-and-bound" e genético.

O termo Erro médio é definido como o erro percentual entre o valor ótimo obtido pelo algoritmo Branch-and-Bound e o valor ótimo médio obtido através do algoritmo genético.

Os resultados mostrados na Tabela 4.10.2 indicam que mesmo no caso de  $x$  e  $y$  serem escalares, o tempo computacional gasto pelo algoritmo genético é menor do que o apresentado pelo algoritmo Branch-and-Bound. Com o aumento da dimensão do vetor  $x$ , podemos constatar um aumento expressivo no tempo computacional gasto pelo algoritmo Branch-and-Bound enquanto o tempo computacional gasto pelo algoritmo genético pouco sofre influência deste aumento dimensional.

Os erros médios percentuais obtidos mostram a validade do uso do algoritmo genético na solução de desigualdades matriciais bilineares. Existindo a necessidade de se obter valores menores de erro, visto o pequeno tempo computacional gasto pelo Algoritmo Genético comparado ao algoritmo Branch-and-Bound, ainda é possível refinar os

resultados obtidos inicialmente sem perder o foco no critério de tempo computacional gasto.

# Capítulo 5

## Conclusão

Este trabalho teve como objetivo fornecer contribuições para a análise de estabilidade e síntese de controladores no âmbito de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. A seguir, explicitamos estas contribuições e seus respectivos comentários:

- **Introdução do conceito de Taxas de Configurações Discretas em problemas de análise e síntese de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos.**

A partir do modelo proposto por Hassibi et al em (Hassibi et al. 1999), foi introduzido o novo conceito de *Taxa de Configurações Discreta* que permitiram reduzir o número de termos bilineares presentes em problemas de análise e síntese de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. Além disso, o uso deste conceito *Taxa de Configurações Discreta* possibilitou que parâmetros utilizados na análise de estabilidade e síntese de controladores representem as taxas de decaimento individuais para cada uma das configurações discretas facilitando a determinação de intervalos factíveis, necessários para a resolução dos problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais bilineares, formulados para sistemas dinâmicos híbridos assíncronos.

- **Análise de estabilidade e síntese de controladores simultânea em sistemas de controle em rede**

No caso específico de Sistemas de Controle em Rede com perda de pacotes, a abordagem feita abrange comunicação não apenas na transmissão de dados da planta para o controlador, como também na transmissão de dados do controlador para a planta.



A questão da análise de estabilidade e síntese de controladores simultânea em tais sistemas também foi abordada, ampliando a formulação proposta para tais sistemas em (Zhang et al. 2001).

- **Estudo unificado de problemas envolvendo assincronismo**

Diferentes problemas envolvendo assincronismo, existentes na literatura, e que até o momento utilizavam diferentes técnicas no seu estudo, foram revisitados no contexto da nova proposta de forma unificada sobre o enfoque de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos. Os resultados obtidos ratificaram a capacidade de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos em englobarem diferentes tipo de problemas envolvendo assincronismo. Em alguns casos foram obtidos resultados melhores do que os existentes.

- **Algoritmo combinado para resolução de problemas envolvendo desigualdades matriciais bilineares**

Apesar do uso de novos conceitos, problemas de análise e síntese em sistemas dinâmicos híbridos assíncronos continuam sendo formulados como problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais bilineares. Para resolução de tais problemas foi proposto neste trabalho o uso de um algoritmo combinando métodos de pontos interiores e algoritmos genéticos. O objetivo desta combinação foi permitir que parte dos problemas fosse tratada por técnicas de otimização local mais eficientes, enquanto técnicas de otimização não-convexa (de alto custo computacional) eram utilizadas em subproblemas de dimensões reduzidas.

- **Síntese de Controladores  $H_2/H_\infty$  utilizando algoritmo combinado**

A possibilidade de se formular como problemas de otimização envolvendo desigualdades matriciais bilineares diferentes problemas de controle nas mais diversas áreas, aumenta a necessidade de desenvolvimento de algoritmos práticos para a resolução de desigualdades matriciais bilineares. Uma aplicação do algoritmo combinado para resolução de problemas envolvendo desigualdades matriciais bilineares fora do contexto de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos também foi apresentada. O problema escolhido foi o problema de Síntese de Controladores  $H_2/H_\infty$ , no qual o fato de trabalharmos simultaneamente com critérios quadráticos e restrições  $H_\infty$ , impede que as

BMIs existentes sejam transformadas em LMIs através de mudanças de variáveis (Boyd et al. 1994).

- **Avaliação de algoritmos genéticos na resolução de BMIs**

As duas principais técnicas para resolução, existentes na literatura, são: o algoritmo de minimização alternada e o algoritmo branch and bound. A primeira não garante que a solução encontrada pelo algoritmo seja a solução global. Por outro lado, o algoritmo branch and bound, apesar de garantir que a solução encontrada pelo algoritmo seja a solução global, apresenta sérias limitações quanto a sua praticidade, visto que o número de iterações para obtenção da solução depende fortemente da dimensão do espaço de busca. Neste trabalho, avaliamos também o uso somente de algoritmos genéticos para solucionar problemas envolvendo BMIs, para isto optamos por uma representação cromossômica para todo o espaço de busca em tais problemas. Os resultados encontrados foram comparados com resultados obtidos através de uma implementação do algoritmo "branch and bound" (Goh et al. 1995), o qual apesar de garantir convergência global, apresenta eficiência computacional questionável.

São sugeridos alguns tópicos que merecem uma posterior investigação em pesquisas futuras:

- Estudo de sistemas assíncronos com características aleatórias (Verkama 1996) (Leland 1993) no contexto de sistemas dinâmicos híbridos assíncronos.
- Investigar a eficiência computacional do Algoritmo Combinado em problemas de controle descentralizado do amortecimento de oscilações eletromecânicas em sistemas de potência (de Almeida 2003).
- Aprofundar estudo comparativo com outros algoritmos de otimização global no contexto de desigualdades matriciais bilineares (Tuan & Apkarian 2000b).
- Análise e propriedades de convergências para o algoritmo combinado apresentado, através da teoria de cadeias de Markov utilizada para análise de convergência de algoritmos genéticos (Suzuki 1995).



# Apêndice A

## Outras Técnicas de Otimização para Problemas Envolvendo BMIs

A seguir, serão apresentados dois algoritmos existentes na literatura para a resolução de problemas BMIs descritos segundo:

$$\min c^T x + d^T y \tag{A.1}$$

sujeito a

$$F(x, y) \succ 0$$

onde  $F(x, y)$  é definido em (4.3),  $x \in [a, b] \subset R^m$ ,  $y \in [r, s] \subset R^n$ ,  $c \in R^m$  e  $d \in R^n$ .

### A.1 Minimização alternada

Claramente, para valores fixos de  $x$  e  $y$  alternadamente, o problema (4.3) transforma-se em um problema de programação semidefinida em  $x$  e  $y$  respectivamente, para os quais existem vários algoritmos eficientes conforme dito anteriormente. Baseado nesta propriedade do problema, o seguinte algoritmo é proposto:

#### Algoritmo A.1

- Definir:  $k = 0$  e  $x^{(0)} \in R^m$ .
- Repetir:

- Atualizar  $k = k + 1$ .
  - Encontrar  $y^{(k)} = \arg \min\{c^T x^{(k-1)} + d^T y \mid F(x^{(k-1)}, y) \succ 0 \text{ e } y \in R^n\}$ .
  - Encontrar  $x^{(k)} = \arg \min\{c^T x + d^T y^{(k)} \mid F(x, y^{(k)}) \succ 0 \text{ e } x \in R^m\}$ .
- Enquanto :  $F(x^{(k-1)}, y^{(k)}) \succ 0$  ou  $F(x^{(k)}, y^{(k)}) \succ 0$ .

Infelizmente a minimização alternada não garante que a solução encontrada pelo algoritmo seja a solução global para o problema (A.1) (Goh et al. 1995).

## A.2 Algoritmo Branch and Bound

Várias referências podem ser encontradas na literatura sobre algoritmos “branch and bound”, aplicados a problemas envolvendo desigualdades matriciais bilineares, por exemplo: (Goh et al. 1995, Lim & Papavassilopoulos 1996, Fujioka & Hoshijima 1997). Goh e coautores foram os primeiros a apresentarem um algoritmo “branch and bound” de propósito geral. Este algoritmo foi melhorado posteriormente em (Fujioka & Hoshijima 1997), com o uso de uma relaxação baseada em resultados de programação quadrática indefinida (Al-Khayyal 1990, R. & Tuy 1996, McCormick 1976, McCormick 1982). O particionamento exigido nos algoritmos apresentados em (Goh et al. 1995, Fujioka & Hoshijima 1997), é feito no espaço de busca de todas as variáveis  $(x, y)$ , o que causa sérias limitações na praticidade dos mesmos, visto que, em geral, o número de iterações de um algoritmo “branch and bound” depende principalmente da dimensão do espaço particionado.

Com o objetivo de reduzir esta dependência, em (Tuan & Apkarian 2000a), os autores apresentam um algoritmo “branch and bound”, onde o particionamento fica restrito somente ao conjunto de variáveis responsáveis pela não-convexidade no problema. A seguir será apresentado um algoritmo “branch and bound”, similar àquele apresentado em (Tuan & Apkarian 2000a), onde o particionamento fica restrito somente às variáveis  $x_i$ . O algoritmo proposto alterna entre dois problemas que representam os limites inferior e superior para o problema (4.3).

Dado  $M = [p, q] \subset [a, b]$ , o limite inferior de (4.3) para  $x \in M$  pode ser representado pelo seguinte problema:

$$\left. \begin{aligned} & \min_{x,y,w_{ij}} c^T x + d^T y \\ & F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i + \sum_{j=1}^n y_j G_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} H_{ij} > 0, \\ & x \in M, \quad y \in [p, q]. \end{aligned} \right\} LB(M) \quad (\text{A.2})$$

O fato das não-convexidades serem omitidas em (A.2) ao utilizarmos as variáveis livres  $w_{ij}$ , garante que o problema representa um limite inferior de (A.1).

Admitindo que  $(x(M), y(M), W(M))$  seja uma solução ótima de (A.2), o limite superior de (4.3) pode ser representado pelo seguinte problema:

$$\left. \begin{aligned} & \min_{x,y,w_{ij}} c^T x(M) + d^T y \\ & F_0 + \sum_{i=1}^m x_i(M) F_i + \sum_{j=1}^n y_j G_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i(M) y_j H_{ij} > 0, \\ & y \in [p, q]. \end{aligned} \right\} UB(M) \quad (\text{A.3})$$

O limite superior dado pelo problema (A.3), consiste em uma LMI em  $y$  para valores fixos de  $x(M)$  de uma solução ótima de (A.2).

### Algoritmo A.2

- 1 Definir  $M_0 = [a, b]$ ,  $\gamma^0 = +\infty$ , a solução viável  $(x^0, y^0)$  qualquer,  $S_1 = N_1 = \{M_0\}$  e  $k = 1$ .
- 2 Para cada  $M \in N_k$  resolver (A.2) para obter o valor ótimo  $\beta(M)$  e a solução ótima  $(x(M), y(M), W(M))$ . Resolver (A.3) para atualizar o melhor valor corrente  $\gamma^k$  com a solução  $(x^k, y^k)$  corrente correspondente.
- 3 Em  $S_k$ , deletar todo  $M$  tal que  $\beta(M) \geq \gamma^k - \epsilon$ . Sendo  $R_k$  o conjunto de retângulos restantes. Se  $R_k = 0$ , finalizar o algoritmo e  $\gamma^k$  é o valor  $\epsilon$ -sub-ótimo com a correspondente solução  $(x^k, y^k)$ .
- 4 Escolher  $M_k \in \arg \min\{\beta(M) | M \in R_k\}$  e dividi-lo em dois retângulos menores  $M_{k,1}, M_{k,2}$  segundo a regra de subdivisão:

– Definir

$$* \mu_i = \min\{x_i(M) - p_i, q_i - x_i(M)\}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1,$$

$$* i_M = \arg_{i=1,2,\dots,N_1} \max \mu_i.$$

– Subdividir  $M$  pelo segmento de reta  $x_{i_M} = x_{i_M}(M)$ .

Determinar  $N_{k+1} = \{M_{k,1}, M_{k,2}\}$ ,  $S_{k+1} = (R_k \setminus M_k) \cup N_{k+1}$ . Determinar  $k \leftarrow k+1$  e retornar ao item 2.

# Apêndice B

## O Algoritmo Genético Básico

Neste apêndice são mostrados em detalhes os seis componentes fundamentais do algoritmo genético utilizado neste trabalho.

Os algoritmos genéticos representam uma classe de procedimentos de busca e otimização, baseados nos mecanismos da genética e seleção natural (Goldberg 1989). Estes algoritmos manipulam uma população de soluções codificadas, dentro de um certo domínio de definição do problema de otimização, utilizando os operadores genéticos a partir da informação fornecida pela função de seleção (Goldberg 1989) (Kristinsson & Dumont 1992).

O uso dos algoritmos genéticos requer a determinação de seis componentes fundamentais: representação cromossômica, tamanho da população, função de seleção, os operadores genéticos responsáveis pela execução da função de reprodução, criação da população inicial, critério de término ou parada, e a função objetivo. A seguir cada um destes componentes é descrito.

### B.1 Representação cromossômica

Em qualquer algoritmo genético, é necessária uma representação cromossômica para descrever cada indivíduo em uma população de soluções. O esquema de representação determina como o problema é estruturado no algoritmo genético e os operadores genéticos que são utilizados. Cada indivíduo ou cromossomo é formado por uma sequência de genes descritos em termos de um certo alfabeto, que pode consistir de dígitos binários (0 e 1), números em ponto flutuante, inteiros, símbolos, matrizes, etc.



O trabalho original de Holland (Holland 1975), faz uso de um alfabeto limitado a dígitos binários. Contudo, deste então, o tipo de representação tem sido muito investigado. Em (Michalewicz 1994), o autor mostra que representações mais naturais são mais eficientes e produzem melhores soluções. Uma representação muito utilizada para os indivíduos ou cromossomos é aquela que utiliza um alfabeto formado por números em ponto flutuante com valores dentro dos limites superiores e inferiores de cada variável do problema. Ainda em (Michalewicz 1994), experimentos comparando a representação cromossômica com valores reais e a com dígitos binários mostram que o algoritmo genético com uma representação com valores reais é uma ordem de magnitude mais eficiente em termos de tempo de processamento, além de oferecer maior precisão e resultados mais consistentes.

## **B.2 Tamanho da população**

Populações muito pequenas não representam amostras significativas do espaço de soluções para o problema de otimização, implicando em convergência rápida para soluções pobres. Por outro lado, populações grandes, apesar de representarem amostras significativas do espaço de soluções e tornarem o processo de busca do algoritmo genético mais informado, requerem um tempo de processamento maior, resultando em taxas de convergência maiores para o algoritmo. Desta forma, o tamanho das populações representa um compromisso entre a quantidade de informação a ser manipulada pelo algoritmo genético e o tempo computacional necessário para processar as informações.

## **B.3 A função de seleção**

A seleção de indivíduos para produzir sucessivas gerações é uma regra extremamente importante em um algoritmo genético. A seleção é probabilística e baseada no grau de aptidão dos indivíduos. Quanto maior o grau de aptidão do indivíduo, maior probabilidade este terá em ser selecionado. Existem vários esquemas utilizados no processo de seleção, como por exemplo: seleção baseada em roleta e suas extensões, técnicas de escalonamento e modelos elitistas (Goldberg 1989) (Michalewicz 1994).

A seleção baseada em roleta, desenvolvida por Holland (Holland 1975), foi o primeiro

método de seleção. A probabilidade de escolha,  $P_i$ , de cada indivíduo é definida como:

$$P_i = \frac{F_i}{\sum_{j=1}^{PopSize} F_j}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $F_i$  é o valor da aptidão do indivíduo  $i$ . O uso de seleção baseada em roleta limita o algoritmo genético para maximização de funções objetivo positivas, porém extensões, tais como janelamento e escalonamento, têm sido propostas permitindo minimização e negatividade de funções objetivo.

Técnicas de escalonamento requerem somente o mapeamento de soluções para conjuntos parcialmente ordenados, permitindo minimização e negatividade da função objetivo. O método de escalonamento geométrico normalizado (Joines & Houck 1994) define  $P_i$  para cada indivíduo como

$$P_i = p'(1 - p)^{q-1}, \quad (\text{B.2})$$

onde :

- $p$  é a probabilidade de seleção do melhor indivíduo,
- $q$  é o valor normalizado do indivíduo, onde 1 é o melhor,
- $S$  é o tamanho da população,
- $p' = \frac{p}{1-(1-p)^S}$ .

## B.4 Os operadores genéticos

Os operadores genéticos são a base do mecanismo de busca dos algoritmos genéticos. Uma vez avaliada a qualidade das soluções da população corrente, os operadores são utilizados para gerar uma nova população baseados nestas soluções da população corrente. Existem dois tipos básicos de operadores : recombinação e mutação. O operador recombinação gera duas novas alternativas de soluções, a partir de dois indivíduos da população corrente, enquanto o operador mutação altera um indivíduo para produzir uma nova alternativa de solução. A aplicação deste dois tipos básicos de operadores e suas variações depende do tipo de representação cromossômica utilizada.

Assumindo que  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  são dois vetores-linha de dimensão  $m$  correspondendo a indivíduos (pais) da população. Para  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$  binários, são definidos, a seguir, os operadores recombinação simples e mutação binária.

O operador recombinação simples gera um número randômico  $r_a$  de uma distribuição uniforme de 1 até  $m$  e cria dois novos indivíduos ( $\bar{X}'$  e  $\bar{Y}'$ ) segundo:

$$x'_i = \begin{cases} x_i, & \text{se } i < r_a \\ y_i, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$y'_i = \begin{cases} y_i, & \text{se } i < r_a \\ x_i, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

A mutação binária troca cada bit em todo indivíduo na população com probabilidade  $p_m$  conforme:

$$x'_i = \begin{cases} 1 - x_i, & \text{se } U(0, 1) < p_m \\ x_i, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Operadores para representação utilizando um alfabeto de números reais foram desenvolvidos por Michalewicz (Michalewicz 1994). Assumindo valores reais para  $\bar{X}$  e  $\bar{Y}$ , e  $a_i$  e  $b_i$  como sendo os limites inferior e superior, respectivamente, de cada variável  $i$ , a seguir os seguintes operadores são definidos: mutação uniforme, mutação não-uniforme, mutação limite, recombinação simples, recombinação aritmética e recombinação heurística.

O operador mutação uniforme seleciona randomicamente uma variável  $j$ , e altera seu valor para um número randômico distribuído uniformemente no intervalo  $[a_i, b_i]$ :

$$x'_i = \begin{cases} U(a_i, b_i), & \text{se } i = j \\ x_i, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

O operador mutação limite seleciona randomicamente uma variável  $j$ , e altera seu valor para o seu limite inferior ou superior, onde  $r_l = U(0, 1)$ :

$$x'_i = \begin{cases} a_i, & \text{se } i = j, r_l < 0.5 \\ b_i, & \text{se } i = j, r_l \geq 0.5 \\ x_i, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Na mutação não-uniforme, uma variável  $j$  é selecionada randomicamente, e assume um valor igual ao número randômico não-niforme:

$$x'_i = \begin{cases} x_i + (b_i - x_i)f(G), & \text{se } r_l^1 < 0.5 \\ x_i + (x_i + a_i)f(G), & \text{se } r_l^1 \geq 0.5 \\ x_i, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

onde

- $f(G) = (r_l^2(1 - \frac{G}{G_{max}}))^b$ ,
- $r_l^1$  e  $r_l^2$  são números randômicos entre 0 e 1,
- $G$  é a geração atual,
- $G_{max}$  é o número máximo de gerações,
- $b$  é um parâmetro.

A recombinação simples com valores reais é idêntica a versão binária. Já a recombinação aritmética produz duas combinações lineares dos pais, onde  $r_l = U(0, 1)$ :

$$\bar{X}' = r_l \bar{X} + (1 - r_l) \bar{Y} \quad (\text{B.9})$$

$$\bar{X}' = (1 - r_l) \bar{X} + r_l \bar{Y} \quad (\text{B.10})$$

Na recombinação simples são produzidas extrapolações lineares de dois indivíduos. O novo indivíduo  $\bar{X}'$ , é criado segundo (B.11), onde  $r_l = U(0, 1)$  e  $\bar{X}$  é uma solução de qualidade melhor do que  $\bar{Y}$ . Se  $\bar{X}'$  for inviável, segundo (B.13), então é gerado um novo número randômico e criada uma nova solução utilizando a equação (B.11). Se após  $t$  tentativas ainda ocorrer inviabilidade, o valor da nova solução assume o valor do indivíduo pai.

$$\bar{X}' = r_l \bar{X} + r_l (\bar{X} - \bar{Y}) \quad (\text{B.11})$$

$$\bar{Y}' = \bar{X} \quad (\text{B.12})$$

$$viabilidade = \begin{cases} 1, & \text{se } x'_i \geq a_i, x'_i \leq b_i, \quad \forall i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

## B.5 Inicialização, Critério de parada e função objetivo

A população inicial utilizada no algoritmo genético é mais comumente gerada aleatoriamente.

O critério de parada mais frequentemente utilizado é o limite superior no número máximo de gerações criadas. Outro critério também utilizado baseia-se em estatísticas da população: quando a soma dos desvíos entre os indivíduos fica menor do que um determinado valor, o algoritmo pode ser finalizado. Outro método para finalização do algoritmo pode ser baseado na falta de melhora na melhor solução, após um especificado número de gerações.

Os algoritmos genéticos podem ser aplicado a funções objetivo de diferentes formatos bastante variados, sendo que em alguns casos é necessário o mapeamento destas funções em conjuntos parcialmente ordenados com o objetivo de atender às características dos algoritmos genéticos.

# Apêndice C

## Artigos publicados

# Stability of Asynchronous Dynamical Systems with Rate Constraints and Applications

Alexandre Rabello and Amit Bhaya

Dept. of Electrical Engineering

PEE/COPPE/UFRJ, P.O. Box 68504, Federal University of Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, RJ 21945-970, BRAZIL

E-mail: rabello@vishnu.coep.ufrj.br, amit.bhaya@na-net.ornl.gov

## Abstract

A class of asynchronous dynamical systems with rate constraints that is a modification of the class defined by Hassibi and coworkers is introduced. A numerical procedure for a quadratic stability analysis, based on a combination of LMI and a genetic algorithm is proposed. Applications to networked control systems with packet dropout and to convergence of asynchronous fixed point iterations are described. The results obtained are put in perspective as well as compared with those obtained earlier in the literature.

## 1 Introduction

Due to the very rapid advances in digital systems, communication systems, and data networks, feedback control systems in which control loops are closed through a real-time network are becoming increasingly important. Such systems are called networked control systems (NCS). The defining feature of an NCS is that information (reference input, plant output, control input, etc.) is exchanged using a network that connects control system components (sensors, controller, actuators, etc). Design that choose to use a networked control system architecture are motivated by cost, maintenance, and reliability, rather than performance.

The insertion of a communication network in the feedback control loop makes the analysis and design of an NCS rather complex. Conventional control theory with many ideal assumptions, such as synchronized control and sensing and actuation without delays, must be reevaluated before it can be applied to NCSs. In [17], the authors show that when using a networked control system, not only networked-induced delay, but also data packet dropout must be considered. Packet dropout refers to packet collisions and network node failures. A networked control system with data packet dropout is modelled as an asynchronous dynamical system with rate constraints on events [8].

The basic feature of Lyapunov-based theory for a class of asynchronous dynamical systems proposed in [8], is that the Lyapunov function is not required to decrease monotonically along the state trajectories, but only on the average. This theory was applied to asynchronous iterations [4, 2, 11] and it was concluded in [8] that the condition given by [4] can be relaxed, *assuming that there are no delays when processors communicate and that the latter communicate at a fixed rate.*

This paper modifies the definition of exponential stability for the class of rate constrained models considered by Hassibi et al. [8] relating the design parameters not to the rate of occurrence of events but rather to the rate of occurrence of discrete states of a dynamical system. This leads to a simplification in the problem description as well as the design procedure. The decay rate of the system is still determined by nonlinear matrix inequalities and is calculated using genetic algorithms, that have been used to solve difficult problems with objective functions that do not possess nice properties such as continuity, differentiability, etc. Examples show that the Lyapunov-based theory for a class of asynchronous dynamical systems can be used to find sufficient conditions for stability of linear desynchronized systems [12] and networked control systems with data packet dropout [17].

## 2 The rate-constrained model

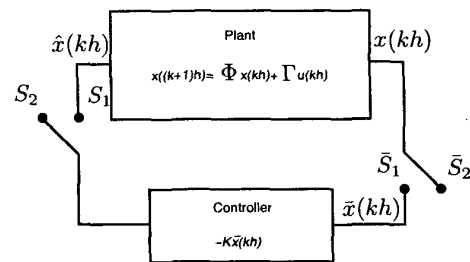


Figure 1: NCS with data packet dropout.

Fig. 1 illustrates a simple networked control system with data packet dropout, where it is assumed that the closed-loop system  $(\Phi - \Gamma K)$  remains stable with the continuous controller and furthermore that the network connects the plant to the controller and vice-versa. The network is modelled as a pair of switches  $S$  and  $\bar{S}$  that close at certain rates  $r_i$ . When the switches are closed, the network packets are transmitted without delay, whereas when they are open, the output of the switches is held at the previous value and the packets are lost. Thus the dynamics of the switches (states  $\bar{x}$  and  $\hat{x}$ ) can be modelled as

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 : \bar{x}(kh) &= x(kh), \\ \bar{S}_2 : \bar{x}(kh) &= \bar{x}((k-1)h), \\ S_1 : \hat{x}(kh) &= -K\bar{x}(kh), \\ S_2 : \hat{x}(kh) &= \hat{x}((k-1)h). \end{aligned}$$

Concatenating the state vectors of the plant and controller to obtain a global vector:

$$z(kh) = [x^T(kh), \bar{x}^T(kh), \hat{x}^T(kh)]^T,$$

the networked control system with data packet dropout is represented as the following time-varying system:

$$z((k+1)h) = \bar{\Phi}_i z(kh),$$

where  $i = 1, \dots, 4$ . When the switches are in positions  $S_2$  and  $\bar{S}_2$ ,

$$\bar{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix};$$

when the switches are in positions  $S_1$  and  $\bar{S}_1$ ,

$$\bar{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & -K & 0 \end{bmatrix};$$

when the switches are in positions  $S_1$  and  $\bar{S}_2$ ,

$$\bar{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -K & 0 \end{bmatrix};$$

when the switches are in positions  $\bar{S}_1$  and  $S_2$ ,

$$\bar{\Phi}_4 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

The particular matrices  $\bar{\Phi}_i$  that occur at each instant can be worked out as functions of  $k$ , given the rates of switching  $r_i$ . Furthermore, it is clear that if the rates  $r_1$  and  $r_2$  are commensurable, then the states  $x(kh)$  from the plant become available to controller with certain periodic delays, and the states  $\bar{x}(kh)$  from controller also become available to the plant with periodic delays. If the rates are incommensurable, then the delays will be aperiodic but bounded. Thus the rate constrained model is a special case of the model of asynchronous iterations [4]. Readers wishing further details on the two kinds of model should consult [8, 15].

### 3 Models of asynchronous dynamical systems

In their derivation of exponential stability for a class of asynchronous dynamical systems, Hassibi et al. [8] used the rates of occurrence of the events directly. The first switch is closed at rate  $r_1$  and therefore  $100(1 - r_1)\%$  of the plant data is lost in the network. The second switch is closed at rate  $r_2$  and therefore  $100(1 - r_2)\%$  of controller data is lost in the network. The transition diagram of the networked control system with packet dropout is given in Figure 2, where  $E_1$  and  $\bar{E}_1$  denote the events of closing and opening the first switch, and  $E_2$  and  $\bar{E}_2$  denote the events of closing and opening the second switch. Using these rates, a sufficient condition

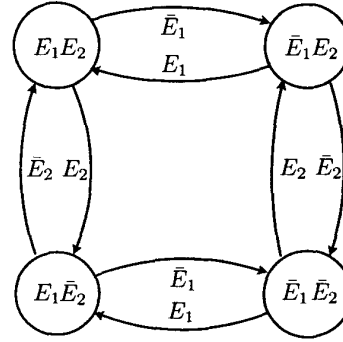


Figure 2: Transition diagram of the networked control system with packet dropout

for exponential stability is obtained by the use of a simple quadratic Lyapunov function given by

$$V(x) = x^T P x, \quad P > 0. \quad (1)$$

One obtains the following set of matrix inequalities

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1^T P \bar{\Phi}_1 - P &\leq (\bar{\alpha}_1^{-2} \bar{\alpha}_2^{-2} - 1)P, \\ \bar{\Phi}_2^T P \bar{\Phi}_2 - P &\leq (\alpha_1^{-2} \alpha_2^{-2} - 1)P, \\ \bar{\Phi}_3^T P \bar{\Phi}_3 - P &\leq (\bar{\alpha}_1^{-2} \alpha_2^{-2} - 1)P, \\ \bar{\Phi}_4^T P \bar{\Phi}_4 - P &\leq (\alpha_1^{-2} \bar{\alpha}_2^{-2} - 1)P, \end{aligned} \quad (2)$$

and

$$\alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \bar{\alpha}_1^{1-r_1} \bar{\alpha}_2^{1-r_2} > 1, \quad (3)$$

where  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\bar{\alpha}_1$ , and  $\bar{\alpha}_2$  correspond to the events  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\bar{E}_1$  and  $\bar{E}_2$  respectively, and  $\bar{\Phi}_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  correspond to the configurations shown in the previous section.

In (2), the inequalities contain the product of three variables of the problem, e.g.  $\alpha_1^{-2} \alpha_2^{-2} P$ , and a feasible set of  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\bar{\alpha}_1$ , and  $\bar{\alpha}_2$  is difficult to find. An alternative approach arises from the realization that specification of a rate of switching defines, implicitly, a



rate of occurrence of the corresponding discrete system defined, in the example above, by one of the matrices  $\tilde{\Phi}_i$ . The benefits of doing this are explored in the next section.

#### 4 Exponential stability using Lyapunov-based theory

Before proceeding, a basic stability definition from [8] is repeated here:

The asynchronous dynamical system is said to be *exponentially stable* if its trajectories satisfy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k \|x_k\| = 0, \quad (4)$$

for some  $\alpha > 1$ . The largest such  $\alpha$  is referred to as the *decay rate* of the system. It is clear that exponential stability implies uniform asymptotic stability.

A sufficient condition for exponential stability is the existence of a Lyapunov function  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$\beta_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \beta_2 \|x\|^2 \quad (5)$$

where  $\beta_{1,2} > 0$  satisfying the following conditions:

(i) there exist  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , such that:

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq (\alpha_i^{-2} - 1)V(x_k), \quad (6)$$

and (ii) the  $\alpha_i$ s satisfy:

$$\prod_{i=1}^m \alpha_i^{\hat{r}_i} > \alpha > 1, \quad (7)$$

where  $m$  is the number of discrete states of the system.

The proof is as follows. Suppose that the discrete state transitions of any trajectory of the system occur at times  $0 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ . Then, for  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ , condition (6) gives

$$V(x(t_{k+1})) \leq \alpha_i^{-2} V(x(t_k))$$

or

$$\ln V(x(t_{k+1})) \leq -2 \ln \alpha_i + \ln V(x(t_k)) \quad (8)$$

Note that whenever an discrete state of the asynchronous dynamical system occurs we have a contributing term  $\alpha_i$  on the right hand side of (8). Hence, summing up these inequalities for  $k = 1, 2, \dots, K - 1$ , in the limit, the total time that one discrete state occurs is equal to  $\hat{r}_i K$  as  $K \rightarrow \infty$ . Therefore

$$\begin{aligned} \ln V(x(K)) - \ln V(x(0)) &\leq \\ &-2\hat{r}_1 K \ln \alpha_1 - \dots - 2\hat{r}_m K \ln \alpha_m \end{aligned}$$

or by (7)

$$\ln V(x(K)) - \ln V(x(0)) < -2K \ln \alpha$$

so that

$$V(x(K)) < \alpha^{-2K} V(x(0)).$$

Now using (5) we get

$$\alpha^K \|x(K)\| < \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \|x(0)\|$$

or

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k \|x_k\| = 0.$$

Defining  $\hat{r}_i$  as the rate of occurrence of the matrix  $\tilde{\Phi}_i$  that corresponds to one of the four configurations of switches described in the section two, it is clear that they must satisfy the equation below

$$\sum_{i=1}^m \hat{r}_i = 1. \quad (9)$$

#### 5 Maximization of decay rate using quadratic Lyapunov function

This section presents a formulation for the problem of maximization of decay rate for the networked control system with packet dropout introduced above.

For the quadratic Lyapunov function (1), using the sufficient condition for exponential stability given above, the problem of maximization of decay rate can be defined as :

$$\max \alpha_1^{\hat{r}_1} \alpha_2^{\hat{r}_2} \alpha_3^{\hat{r}_3} \alpha_4^{\hat{r}_4}$$

such that

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_i^T P \tilde{\Phi}_i - P &\leq (\alpha_i^{-2} - 1)P, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ 0 &< P, \end{aligned} \quad (10)$$

where the rates  $\hat{r}_i$  and the parameters  $\alpha_i$  refer to the discrete states of the asynchronous dynamical system, and the relation between  $i$  and the configuration of the switches described in the section two is shown below:

$i$	$S_{switch}$	$\bar{S}_{switch}$
1	Off	Off
2	On	On
3	Off	On
4	On	Off

The nonlinear matrix inequalities in (10) can also be written as bilinear matrix inequalities [16] in  $P$  and  $\log \alpha_i$ 's, showing that the computational complexity of this type of optimization problem belongs to class defined as NP-hard [6][14]. In addition, a BMI describes sets that are not necessarily convex. It is important to understand that being a NP-hard is a property of the problem itself, not of any particular algorithm. It is also important to understand that if a

problem is NP-hard, this does not imply that practical algorithms to solve it cannot exist. Practical algorithms for NP-hard problems exist and typically involve approximation, heuristics, branch-and-bound, or local search [3, 6, 14]. In this paper we attack this optimization problem using genetic algorithms.

## 6 Maximization of decay rate via genetic algorithms

Genetic algorithms have been used to solve difficult problems in control with objective functions that do not possess “nice” properties such as continuity, differentiability, satisfaction of the Lipschitz condition, convexity [1]. These algorithms maintain and manipulate a population of solutions and implement a survival-of-the-fittest strategy in their search for the better solutions.

Genetic algorithms have been shown to solve linear and nonlinear problems by exploring all regions of the state space and exponentially exploiting promising areas through mutation, crossover, and selection operations applied to individuals in the population [13]. A more complete discussion of genetic algorithms can be found in the books [5, 7, 9, 13].

The problem of maximization of the decay rate, as formulated in this paper, can be observed to have an objective function that is homogeneous in  $P$  of degree zero that we can determine easily a feasible convex set for the  $\alpha_i$ 's. Algorithms 1 and 2 illustrate how the algorithm works.

Algorithm 1: main procedure

```

Begin
  Set up initial population of candidate solutions
  For each candidate solution, evaluate fitness function:
  While the termination criterion is not satisfied,
    Select parent solutions for the next generation, according to fitness.
    Crossover parent genes to produce a new generation of offspring solutions.
    Subject offspring solutions to random mutation.
    For each solution, evaluate fitness function.
  End
  Take the candidate solution with highest fitness value as the final solution.
End

```

Algorithm 2: Fitness function for a candidate solution

```

Begin
  Decode parameters  $\alpha_i$ 's from candidate solution genes.
  Solve the feasibility problem of LMI in (10):
  if (10) is feasible, the set fitness value to  $\prod_{i=1}^m \alpha_i^{\bar{r}_i}$ 
  else set fitness value to lower value than the lowest value possible in the feasible set of  $\alpha_i$ 's (13).
End

```

When there does not exist a feasible  $P$ , the set of  $\alpha_i$ 's is not discarded, but this individual is assigned a fitness value lower than the lowest value possible in the feasible set of  $\alpha_i$ 's (13). It is important not to discard infeasible solutions that are near feasible solutions and perhaps near the optimal solution.

## 7 Examples and Numerical results

### 7.1 Example 1

Consider the state-space plant model [17] :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

A continuous-state feedback controller is  $u = -Kx$ , where  $K = [3.75, 11.5]$ . When the plant is sampled with a sampling period  $h = 0.3s$ , we obtain

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.2955 \\ 0 & 0.9704 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.0045 \\ 0.0296 \end{bmatrix},$$

and the closed-loop system  $(\Phi - \Gamma K)$  is still stable with the continuous controller.

Each  $\alpha_i$  refers to the decay rate of individual systems represented for the matrix  $\Phi_i$ , so that we can define the feasible set of  $\alpha_i$ 's as :

$$\begin{aligned} 0.1 &\leq \alpha_1 \leq 1 \\ 1 &\leq \alpha_2 \leq 1.1362 \\ 0.1 &\leq \alpha_3 \leq 1 \\ 0.1 &\leq \alpha_4 \leq 1 \end{aligned} \quad (12)$$

The real lower bounds of  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ , and  $\alpha_4$  are actually zero, but the value 0.1 is used in order to obtain a feasible matrix  $P$ .

Consider the setup shown in Fig. 1, which differs from that of [17] since it permits packet dropout from plant

to controller and vice-versa, whereas only the former is considered in [17]. Assuming that the switches  $S$  and  $\bar{S}$  are closed at rates  $r_1 = r_2 = 0.9$ , the rates of occurrence of the four matrices corresponding to the four configuration of switches are:  $\hat{r}_1 = 0.01$ ,  $\hat{r}_2 = 0.81$ ,  $\hat{r}_3 = 0.09$  and  $\hat{r}_4 = 0.09$ .

Using a floating point representation for each individual or chromosome, the genetic operators arithmetic crossover and uniform mutation [13], normalized geometric ranking [10] as scheme for selection process with 8% of probability of selection the best individual, population size of 20 individuals and 50 generations as a simple termination criterion, we obtained, via a genetic algorithm, the following values:

$$\alpha_1 = 0.6524, \alpha_2 = 1.1361, \alpha_3 = 0.7288, \alpha_4 = 0.7247,$$

$$P = \begin{bmatrix} 19.08 & 22.73 & -14.16 & -12.70 & 0.42 \\ 22.73 & 54.29 & -12.99 & -30.46 & 1.26 \\ -14.16 & -12.99 & 15.11 & 15.75 & 0.07 \\ -12.70 & -30.46 & 15.75 & 39.44 & 0.26 \\ 0.42 & 1.26 & 0.07 & 0.26 & 0.15 \end{bmatrix},$$

and the decay rate of networked control system with packet dropout is given by:

$$\prod_{i=1}^4 \alpha_i^{\hat{r}_i} = 1.0425.$$

The results show that networked control system with packet dropout at two locations is stable, generalizing the example of [17].

## 7.2 Example 2

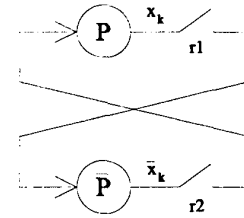
Consider the parallelized asynchronous fixed point problem [8] with the matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8558 & -0.2895 \\ 0.7295 & -0.6558 \end{bmatrix}.$$

Note that the spectral radius of  $A$  is 0.7, while the spectral radius of  $|A|$  is 1.23, so that the sufficient condition of [4] for convergence of asynchronous iterations ( $\rho(|A|) < 1$ ) is *not* satisfied.

The situation is shown schematically in Figure 3, in which it is assumed that  $P$  carries out the iteration for the top half of the vector  $x$  and  $\bar{P}$  for the bottom half. Neither processor waits for information to become available from the other, so the idle time of processors is minimized, implying that they are used more efficiently. It is only assumed that  $P$  makes its state vector  $x_k$  available to  $\bar{P}$  at rate  $r_1$  and that  $\bar{P}$  makes its state vector  $\bar{x}_k$  available to  $P$  at rate  $r_2$ .

We will suppose the rates of communication between processors  $P$  and  $\bar{P}$  are  $r_1 = r_2 = 0.9$ . So the rates of occurrence of the four matrices corresponding to the



**Figure 3:** Asynchronous two processor implementation of iteration for fixed point problem

four configuration of switches are:

$i$	$P_{switch}$	$\bar{P}_{switch}$	$\hat{r}_i$
1	Off	Off	0.01
2	On	On	0.81
3	Off	On	0.09
4	On	Off	0.09

Each  $\alpha_i$  refers to the decay rate of individual systems represented for the matrix  $A_i$ , so that we can define the feasible set of  $\alpha_i$ 's as :

$$\begin{aligned} 0.1 &\leq \alpha_1 \leq 1 \\ 1 &\leq \alpha_2 \leq 1.4281 \\ 0.1 &\leq \alpha_3 \leq 1 \\ 0.1 &\leq \alpha_4 \leq 1 \end{aligned} \quad (13)$$

The real lower bounds of  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ , and  $\alpha_4$  are actually zero, but the value 0.1 is used in order to obtain a feasible matrix  $P$ .

Using a floating point representation for each individual or chromosome, the genetic operators arithmetic crossover and uniform mutation [13], normalized geometric ranking [10] as scheme for selection process with 8% of probability of selection the best individual, population size of 20 individuals and 50 generations as a simple termination criterion, we obtained, via a genetic algorithm, the following values:

$$\alpha_1 = 0.4910, \alpha_2 = 1.4121, \alpha_3 = 0.7163, \alpha_4 = 0.7072,$$

$$P = \begin{bmatrix} 72.7961 & 4.4454 & -32.7549 & -17.7848 \\ 4.4454 & 9.3635 & -8.9705 & 4.1317 \\ -32.7549 & -8.9705 & 35.4242 & -16.3742 \\ -17.7848 & 4.1317 & -16.3742 & 63.3014 \end{bmatrix},$$

and the decay rate of parallelized asynchronous fixed point problem:

$$\alpha = \alpha_1^{\hat{r}_1} \alpha_2^{\hat{r}_2} \alpha_3^{\hat{r}_3} \alpha_4^{\hat{r}_4} = 1.2352.$$

The results show that parallelized asynchronous version of fixed point problem using two processors is stable, even when the Chazan-Miranker sufficient condition is not satisfied.

## 8 Concluding remarks

This paper has shown that rate-constrained asynchronous dynamical systems introduced in [8] can be redefined in order to produce a set of bilinear matrix inequalities that can determine the stability of the system via a quadratic Lyapunov function. Applications to networked control systems with packet dropout and to the convergence of asynchronous fixed point iterations are described. The class of rate-constrained asynchronous iterations is one for which it is possible to obtain a convergence condition that are weaker than the classical Chazan–Miranker condition ( $\rho(|A|) < 1$ ). This is interesting because only very few classes of asynchronous systems of this type are known. On the other hand, many issues remain to be investigated. Using genetic algorithms it is possible to check whether a given matrix and communication rates leads to a stable asynchronous iteration, but the class of matrices and rates has not been characterized. The generalization to iterations with  $n$  processors and to general asynchronous dynamical systems need further work.

## References

- [1] H. L. S. Almeida, A. Bhaya, D. M. Falcão, and E. Kaszkurewicz. A team algorithm for robust stability analysis and control design of uncertain time-varying linear systems using piecewise quadratic Lyapunov functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 11(4):357–371, 2001.
- [2] D. P. Bertsekas and J. N. Tsitsiklis. *Parallel and Distributed Computation: Numerical Methods*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.
- [3] R.D. Braatz, P.M. Young, J.C. Doyle, and M. Morari. Computational complexity of  $\mu$  calculation. *IEEE Transactions on Auto. Control*, 39:1000–1002, 1994.
- [4] D. Chazan and W. L. Miranker. Chaotic relaxation. *Linear Algebra and its Applications*, 2:190–222, 1969.
- [5] L. Davis. *The Handbook of Genetic Algorithms*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1991.
- [6] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to NP-Completeness*. W.H. Freeman and Company, New York, 1983.
- [7] D. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley, 1989.
- [8] A. Hassibi, S. P. Boyd, and J. P. How. Control of asynchronous dynamical systems with rate constraints on events. In *38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1345–1351, Phoenix, AZ, USA, December 1999.
- [9] J. Holland. *Adaptation in natural and artificial systems*. The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [10] J. Joines and C. Houck. On the use of non-stationary penalty functions to solve constrained optimization problems with genetic algorithms. In *IEEE International Symposium Evolutionary Computation*, pages 579–584, Orlando, FL, USA, 1994.
- [11] E. Kaszkurewicz, A. Bhaya, and D. D. Šiljak. On the convergence of parallel asynchronous block-iterative computations. *Linear Algebra and its Applications*, 131:139–160, 1990.
- [12] A. F. Kleptsyn, M. A. Krasnosel’skii, N. A. Kuznetsov, and V. S. Kozjakin. Desynchronization of linear systems. *Mathematics and Computers in Simulation*, XXVI:423–431, 1984.
- [13] Z. Michalewicz. *Genetic algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. AI Series, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [14] C.H. Papadimitriou and K. Steiglitz. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [15] Y. Su, A. Bhaya, E. Kaszkurewicz, and V. S. Kozyakin. Further results on the stability of asynchronous discrete-time linear systems. *Linear Algebra and its Applications*, 281(1-3):11–24, 1998.
- [16] J. G. VanAntwerp and R. D. Braatz. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 10:363–385, 2000.
- [17] Wei Zhang, Miachel S. Branicky, and Stephen M. Phillips. Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(1):84–99, 2001.

# Stability of asynchronous dynamical systems with rate constraints and applications

A. Rabello and A. Bhaya

**Abstract:** A class of asynchronous dynamical systems with rate constraints is introduced. A numerical procedure for a quadratic stability analysis, based on a combination of linear matrix inequalities and a genetic algorithm is proposed. Applications to networked control systems with packet dropout and to convergence of asynchronous fixed point iterations are described. The results obtained are put in perspective as well as compared with those obtained earlier in the literature.

## 1 Introduction

Due to rapid advances in digital systems, communication systems, and data networks, feedback control systems in which control loops are closed through a real-time network are becoming increasingly important. Such systems are called networked control systems (NCSs). The defining feature of an NCS is that information (reference input, plant output, control input, etc.) is exchanged using a network that connects control system components (sensors, controller, actuators, etc). Designs that choose to use a NCS architecture are motivated by cost, maintenance and reliability issues rather than performance.

The insertion of a communication network in the feedback control loop makes the analysis and design of an NCS rather complex. Conventional control theory with many ideal assumptions, such as synchronised control and nondelayed sensing and actuation, must be re-evaluated before it can be applied to NCSs. In [1], it is shown that when using a NCS, not only networked-induced delay, but also data packet dropout must be considered. Packet dropout refers to packet collisions and network node failures. An NCS with data packet dropout is modelled as an asynchronous dynamical system with rate constraints on events [2].

The basic feature of a Lyapunov-based theory for a class of asynchronous dynamical systems proposed in [2] is that the Lyapunov function is not required to decrease monotonically along the state trajectories, but only on the average. This theory was applied to asynchronous iterations [3–5] and it was concluded in [2] that the condition given by [3] can be relaxed, assuming that there are no delays when processors communicate and that the latter communicate at a fixed rate.

We modify the definition of exponential stability for the class of rate constrained models considered by Hassibi *et al.* [2] relating the design parameters not to the rate of occurrence of events but instead to the rate of occurrence of discrete states of a dynamical system. This leads to a simplification in the problem description as well as the design procedure. The decay rate of the system is still determined by nonlinear matrix inequalities and is calculated using genetic algorithms, that have been used to solve difficult problems with objective functions that do not possess helpful properties such as continuity, differentiability, etc. Examples show that the Lyapunov-based theory for a class of asynchronous dynamical systems can be used to find sufficient conditions for stability of linear desynchronised systems [6] and NCSs with data packet dropout [1].

## 2 The rate-constrained model

Figure 1 illustrates a simple networked control system with data packet dropout, where it is assumed that the non-networked system is stable and that the network connects the plant to the controller and *vice-versa*. The network is modelled as a pair of switches  $S$  and  $\bar{S}$  that close at certain rates  $r_i$ . When the switches are closed, the network packets are transmitted without delay, whereas when they are open, the output of the switches is held at the previous value and the packets are lost. Thus the dynamics of the switches (states  $\bar{x}$  and  $\hat{x}$ ) can be modelled as:

$$\begin{aligned} \bar{S}_1: \bar{x}(kh) &= x(kh) \\ \bar{S}_2: \bar{x}(kh) &= \bar{x}((k-1)h) \\ S_1: \hat{x}(kh) &= -K\bar{x}(kh) \\ S_2: \hat{x}(kh) &= \hat{x}((k-1)h) \end{aligned}$$

Concatenating the state vectors of the plant and controller to obtain a global vector:

$$z(kh) = [x^T(kh), \bar{x}^T(kh), \hat{x}^T(kh)]^T$$

the networked control system with data packet dropout is represented as the following time-varying system:

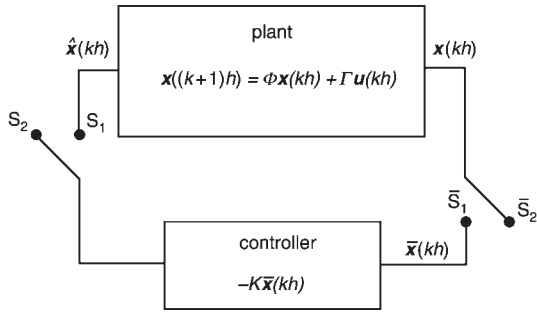


Fig. 1 NCS with data packet dropout

$$z((k+1)h) = \tilde{\Phi}_i z(kh)$$

where  $i = 1, \dots, 4$ . When the switches are in positions  $S_2$  and  $\bar{S}_2$ :

$$\tilde{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

When the switches are in positions  $S_1$  and  $\bar{S}_1$ :

$$\tilde{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & -K & 0 \end{bmatrix}$$

When the switches are in positions  $S_1$  and  $\bar{S}_2$ :

$$\tilde{\Phi}_3 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -K & 0 \end{bmatrix}$$

When the switches are in positions  $\bar{S}_1$  and  $S_2$ :

$$\tilde{\Phi}_4 = \begin{bmatrix} \Phi & 0 & \Gamma \\ \Phi & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

The particular matrices  $\tilde{\Phi}_i$  that occur at each instant can be worked out as functions of  $k$ , given the rates of switching  $r_i$ . Furthermore, it is clear that if the rates  $r_1$  and  $r_2$  are commensurable, then the states  $x(kh)$  from the plant become available to the controller with certain periodic delays, and the states  $\bar{x}(kh)$  from the controller also become available to the plant with periodic delays. If the rates are incommensurable, then the delays will be aperiodic but bounded. Thus, the rate-constrained model is a special case of the model of asynchronous iterations [3]. Readers wishing further details on the two kinds of model should consult [2, 7].

### 3 Models of asynchronous dynamical systems

In their derivation of exponential stability for a class of asynchronous dynamical systems, Hassibi *et al.* [2] used the rates of occurrence of the events directly. The first switch is closed at rate  $r_1$  and therefore  $100(1 - r_1)\%$  of the plant data is lost in the network. The second switch is closed at rate  $r_2$  and therefore  $100(1 - r_2)\%$  of controller data is lost in the network. The transition diagram of the networked control system with packet dropout is given in Fig. 2, where  $E_1$  and  $\bar{E}_1$  denote the events of closing and opening the first switch, and  $E_2$  and  $\bar{E}_2$  denote the events of closing and opening the second switch.

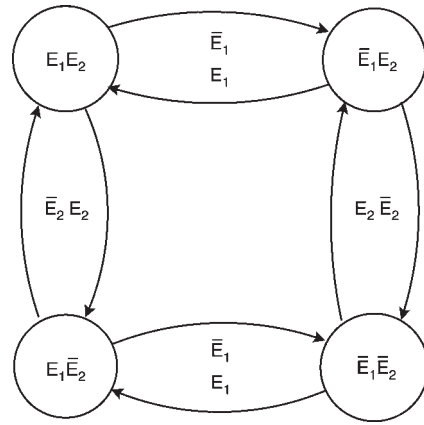


Fig. 2 Transition diagram of the NCS with packet dropout

Using these rates, a sufficient condition for exponential stability is obtained by the use of a simple quadratic Lyapunov function given by:

$$V(x) = x^T P x, P > 0 \quad (1)$$

One obtains the following set of matrix inequalities:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1^T P \tilde{\Phi}_1 - P &\leq (\bar{\alpha}_1^{-2} \bar{\alpha}_2^{-2} - 1) P \\ \tilde{\Phi}_2^T P \tilde{\Phi}_2 - P &\leq (\alpha_1^{-2} \alpha_2^{-2} - 1) P \\ \tilde{\Phi}_3^T P \tilde{\Phi}_3 - P &\leq (\bar{\alpha}_1^{-2} \alpha_2^{-2} - 1) P \\ \tilde{\Phi}_4^T P \tilde{\Phi}_4 - P &\leq (\alpha_1^{-2} \bar{\alpha}_2^{-2} - 1) P \end{aligned} \quad (2)$$

and

$$\alpha_1^{r_1} \alpha_2^{r_2} \bar{\alpha}_1^{1-r_1} \bar{\alpha}_2^{1-r_2} > 1 \quad (3)$$

where  $\alpha_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_1$ , and  $\bar{\alpha}_2$  correspond to the events  $E_1, E_2, \bar{E}_1$  and  $\bar{E}_2$  respectively, and  $\tilde{\Phi}_i, i = 1, \dots, 4$  correspond to the configurations shown in the preceding Section.

In (2), the inequalities contain the product of three variables of the problem, e.g.  $\alpha_1^{-2} \alpha_2^{-2} P$ , and a feasible set of  $\alpha_1, \alpha_2, \bar{\alpha}_1$ , and  $\bar{\alpha}_2$  is difficult to find. An alternative approach arises from the realisation that the specification of a rate of switching defines, implicitly, a rate of occurrence of the corresponding discrete system defined, in the example above, by one of the matrices  $\tilde{\Phi}_i$ . The benefits of doing this are explored in the following Section.

### 4 Exponential stability using a Lyapunov-based theory

Before proceeding, a basic stability definition from [2] is repeated here:

The asynchronous dynamical system is said to be exponentially stable if its trajectories satisfy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k \|x_k\| = 0 \quad (4)$$

for some  $\alpha > 1$ . The largest such  $\alpha$  is referred to as the decay rate of the system. It is clear that exponential stability implies uniform asymptotic stability.

Defining  $\tilde{r}_i$  as the rate of occurrence of the configuration described by the matrix  $\tilde{\Phi}_i$ , it is clear that the  $\tilde{r}_i$ s must satisfy the equation below:

$$\sum_{i=1}^m \tilde{r}_i = 1. \quad (5)$$

With this definition of rate of occurrence, we can derive a result for exponential stability.

*Theorem 1:* If there exists a Lyapunov function  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ :

$$\beta_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \beta_2 \|\mathbf{x}\|^2 \quad (6)$$

where  $\beta_{1,2} > 0$  and  $V$  satisfies the following conditions:

(i) there exists  $\alpha_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , such that:

$$V(\mathbf{x}_{k+1}) - V(\mathbf{x}_k) \leq (\alpha_i^{-2} - 1)V(\mathbf{x}_k) \quad (7)$$

and

(ii) the  $\alpha_i$ s satisfy:

$$\prod_{i=1}^m \alpha_i^{\tilde{r}_i} > \alpha > 1 \quad (8)$$

where  $m$  is the number of discrete states of the system, then the asynchronous dynamical system  $\mathbf{z}((k+1)h) = \tilde{\Phi}_i \mathbf{z}(kh)$ , where  $\tilde{\Phi}_i$  occurs with rate  $\tilde{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  is exponentially stable in the sense of definition (4).

*Proof:* Suppose that the discrete state transitions of any trajectory of the system occur at times  $0 = t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ . Then, for  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ , condition (7) gives:

$$V(\mathbf{x}(t_{k+1})) \leq \alpha_i^{-2} V(\mathbf{x}(t_k))$$

or

$$\ln V(\mathbf{x}(t_{k+1})) \leq -2 \ln \alpha_i + \ln V(\mathbf{x}(t_k)) \quad (9)$$

Note that whenever a discrete state of the asynchronous dynamical system occurs we have a contributing term  $\alpha_i$  on the right-hand side of (9). Hence, summing up these inequalities for  $k = 1, 2, \dots, K-1$ , in the limit, the total time that one discrete state occurs is equal to  $\tilde{r}_i K$  as  $K \rightarrow \infty$ . Therefore:

$$\ln V(\mathbf{x}(K)) - \ln V(\mathbf{x}(0)) \leq -2\tilde{r}_1 K \ln \alpha_1 - \dots - 2\tilde{r}_m K \ln \alpha_m$$

or, by (8)

$$\ln V(\mathbf{x}(K)) - \ln V(\mathbf{x}(0)) < -2K \ln \alpha$$

so that

$$V(\mathbf{x}(K)) < \alpha^{-2K} V(\mathbf{x}(0))$$

Now using (6) we get:

$$\alpha^K \|\mathbf{x}(K)\| < \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}} \|\mathbf{x}(0)\|$$

or

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k \|\mathbf{x}_k\| = 0$$

completing the proof.  $\square$

## 5 Maximisation of the decay rate using a quadratic Lyapunov function

This Section presents a formulation for the problem of maximisation of the decay rate for the NCS with the packet dropout introduced above.

For the quadratic Lyapunov function (1), using the sufficient condition for exponential stability given before,

the problem of maximisation of the decay rate can be defined as:

$$\max \alpha_1^{\tilde{r}_1} \alpha_2^{\tilde{r}_2} \alpha_3^{\tilde{r}_3} \alpha_4^{\tilde{r}_4}$$

such that

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_i^T \mathbf{P} \tilde{\Phi}_i - \mathbf{P} &\leq (\alpha_i^{-2} - 1) \mathbf{P} \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ 0 &< \mathbf{P} \end{aligned} \quad (10)$$

where the rates  $\tilde{r}_i$  and the parameters  $\alpha_i$  refer to the discrete states of the asynchronous dynamical system, and the relation between  $i$  and the configuration of the switches described in Section 2 is listed in Table 1.

The nonlinear matrix inequalities in (10) can also be written as bilinear matrix inequalities (BMIs) [8] in  $\mathbf{P}$  and  $\log \alpha_i$ s, showing that the computational complexity of this type of optimisation problem belongs to class defined as NP-hard [9, 10]. In addition, a BMI describes sets that are not necessarily convex. It is important to understand that being an NP-hard is a property of the problem itself, not of any particular algorithm. It is also important to understand that if a problem is NP-hard, this does not imply that practical algorithms to solve it cannot exist. Practical algorithms for NP-hard problems exist and typically involve approximation heuristics, branch-and-bound, or local search [9–11]. We will attack this hard optimisation problem using genetic algorithms.

## 6 Maximisation of decay rate via genetic algorithms

Genetic algorithms (GAs) have been used to solve difficult problems in control with objective functions that do not possess helpful properties such as continuity, differentiability, satisfaction of the Lipschitz condition, convexity [12]. These algorithms maintain and manipulate a population of solutions and implement a survival-of-the-fittest strategy in their search for the better solutions.

GAs have been shown to solve linear and nonlinear problems by exploring all regions of the state space and exponentially exploiting promising areas through mutation, crossover, and selection operations applied to individuals in the population [13].

The use of GAs requires the determination of six fundamental issues: (i) chromosome representation; (ii) selection function; (iii) the genetic operators making up the reproduction function; (iv) the creation of the initial population; (v) termination criteria; and (vi) the evaluation function.

Convergence is another important issue in the theoretical study of GAs. Many papers [13–16] have analysed the convergence of GAs using the results of Markov chain theory. Markov chains offer an appropriate theoretical model to analyse the global convergence of GAs, although the convergence analysis of a specific GA using this theory is still quite difficult. A more complete discussion of GAs can be found in [13, 17–19].

**Table 1: The relationship between  $i$  and the switch configuration**

$i$	$S_{switches}$	$\tilde{S}_{switches}$
1	Off	Off
2	On	On
3	Off	On
4	On	Off

The problem of maximisation of the decay rate, as currently formulated, can be observed to have an objective function that is homogeneous in  $\mathbf{P}$  of degree zero, so that we can determine easily a feasible convex set for the  $\alpha_i$ s. Thus, chromosome representation was only used for the  $\alpha_i$ s. Each individual of each population has information about the  $\alpha_i$ s codified in its gene. The fitness function tests if there is a feasible matrix  $\mathbf{P}$  for the set of  $\alpha_i$ s of each individual. If the test has a affirmative answer, then the fitness function is equal to the objective function of the maximisation problem. When there does not exist a feasible  $\mathbf{P}$ , the set of  $\alpha_i$ s is not discarded, but this individual is assigned a fitness value lower than the lowest value possible in the feasible set of  $\alpha_i$ s. It is important not to discard infeasible solutions that are near-feasible solutions and perhaps near the optimal solution. Algorithms 1 and 2 illustrate how the algorithm works.

*Algorithm 1: Main procedure*

```

Begin
  Set up initial population of candidate solutions
  For each candidate solution, evaluate fitness function:
  While termination criteria is not satisfied,
    Select parent solutions for the next generation,
    according to fitness.
    Crossover parent genes to produce a new generation of
    offspring solutions.
    Subject offspring solutions to random mutation.
    For each solution, evaluate fitness function.
End
Take the candidate solution with highest fitness value as
the final solution.

```

End

*Algorithm 2: Fitness function for a candidate solution*

```

Begin
  Decode  $\alpha_i$ s from candidate solution genes.
  Solve the feasibility problem of linear matrix inequalities
  in (10):
  if (10) is feasible, then set fitness value to  $\prod_{i=1}^m \alpha_i^{\bar{r}_i}$ 
  else set fitness value to a value lower than that of the
  lowest value possible in the feasible set of  $\alpha_i$ s.
End

```

End

A simple termination criteria is to stop the algorithm after a specified number of generations.

## 7 Applications in control and iterative methods

### 7.1 NCS

Consider the state-space plant model [1]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

A continuous-state feedback controller is  $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ , where  $\mathbf{K} = [3.75, 11.5]$ . When the plant is sampled with a sampling period  $h = 0.3/s$ , we obtain:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.2955 \\ 0 & 0.9704 \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.0045 \\ 0.0296 \end{bmatrix}$$

and the closed-loop system  $(\Phi - \Gamma\mathbf{K})$  is still stable with the continuous controller.

Each  $\alpha_i$  refers to the decay rate of individual systems represented for the matrix  $\tilde{\Phi}_i$ , so that we can define the feasible set of  $\alpha_i$ s as:

$$\begin{aligned} 0.1 &\leq \alpha_1 \leq 1 \\ 1 &\leq \alpha_2 \leq 1.1362 \\ 0.1 &\leq \alpha_3 \leq 1 \\ 0.1 &\leq \alpha_4 \leq 1 \end{aligned} \quad (12)$$

The real lower bounds of  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ , and  $\alpha_4$  are actually zero, but the value 0.1 is used in order to obtain a feasible matrix  $\mathbf{P}$ .

Consider the setup shown in Fig. 1, which differs from that of [1] since it permits packet dropout from plant to controller and *vice-versa*, whereas only the former is considered in [1]. Assuming that the switches S and  $\bar{S}$  are closed at rates  $r_1 = r_2 = 0.9$ , the rates of occurrence of the four matrices corresponding to the four configuration of switches are:  $\bar{r}_1 = 0.01$ ,  $\bar{r}_2 = 0.81$ ,  $\bar{r}_3 = 0.09$  and  $\bar{r}_4 = 0.09$ .

Using a floating point representation for each individual or chromosome, the genetic operators arithmetic crossover and uniform mutation [13], normalised geometric ranking [20] as scheme for selection process with 8% of probability of selection the best individual, population size of 20 individuals and 50 generations as a simple termination criteria, we obtained, via a GA, the following values:

$$\alpha_1 = 0.6524 \quad \alpha_2 = 1.1361 \quad \alpha_3 = 0.7288 \quad \alpha_4 = 0.7247$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 19.08 & 22.73 & -14.16 & -12.70 & 0.42 \\ 22.73 & 54.29 & -12.99 & -30.46 & 1.26 \\ -14.16 & -12.99 & 15.11 & 15.75 & 0.07 \\ -12.70 & -30.46 & 15.75 & 39.44 & 0.26 \\ 0.42 & 1.26 & 0.07 & 0.26 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Thus, the decay rate of the NCS with packet dropout is given by:

$$\prod_{i=1}^4 \alpha_i^{\bar{r}_i} = 1.0425$$

The results show that the NCS with packet dropout at two locations is stable, generalising the example of [1].

### 7.2 Parallel asynchronous computation

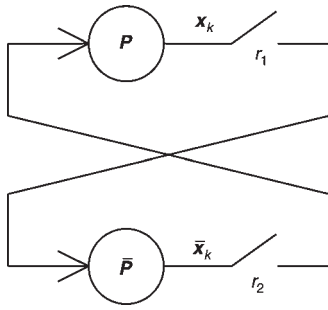
Consider the parallelised asynchronous fixed point problem treated in [2] with the matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8558 & -0.2895 \\ 0.7295 & -0.6558 \end{bmatrix}$$

Note that the spectral radius of  $\mathbf{A}$  is 0.7, while the spectral radius of  $|\mathbf{A}|$  is 1.23, so that the sufficient condition of [3] for convergence of asynchronous iterations ( $\rho(|\mathbf{A}|) < 1$ ) is not satisfied.

The situation is shown schematically in Fig. 3, in which it is assumed that  $\mathbf{P}$  carries out the iteration for the top half of the vector  $\mathbf{x}$  and  $\bar{\mathbf{P}}$  for the bottom half. Neither processor waits for information to become available from the other, so the idle time of processors is minimised, implying that they are used more efficiently. It is only assumed that  $\mathbf{P}$  makes its state vector  $\mathbf{x}_k$  available to  $\bar{\mathbf{P}}$  at rate  $r_1$  and that  $\bar{\mathbf{P}}$  makes its state vector  $\bar{\mathbf{x}}_k$  available to  $\mathbf{P}$  at rate  $r_2$ .





**Fig. 3** Asynchronous two processor implementation of iteration for fixed point problem

We will assume that the rates of communication between processors  $P$  and  $\bar{P}$  are  $r_1 = r_2 = 0.9$ . So the rates of occurrence of the four matrices corresponding to the four configuration of switches are as listed in Table 2.

Each  $\alpha_i$  refers to the decay rate of an individual system of those represented by the matrix  $A_i$ , so that we can define the feasible set of  $\alpha_i$ 's as:

$$\begin{aligned} 0.1 &\leq \alpha_1 \leq 1 \\ 1 &\leq \alpha_2 \leq 1.4281 \\ 0.1 &\leq \alpha_3 \leq 1 \\ 0.1 &\leq \alpha_4 \leq 1 \end{aligned} \quad (13)$$

The real lower bounds of  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ , and  $\alpha_4$  are actually zero, but the value 0.1 is used in order to obtain a feasible matrix  $P$ .

Using a floating point representation for each individual or chromosome, the genetic operators arithmetic crossover and uniform mutation [13], normalised geometric ranking [20] as schemes for selection process with a probability of 8% of selecting the best individual, population size of 20 individuals and with 50 generations as a simple termination criteria, we obtained, via a GA, the following values:

$$\alpha_1 = 0.4910 \quad \alpha_2 = 1.4121 \quad \alpha_3 = 0.7163 \quad \alpha_4 = 0.7072$$

$$P = \begin{bmatrix} 72.7961 & 4.4454 & -32.7549 & -17.7848 \\ 4.4454 & 9.3635 & -8.9705 & 4.1317 \\ -32.7549 & -8.9705 & 35.4242 & -16.3742 \\ -17.7848 & 4.1317 & -16.3742 & 63.3014 \end{bmatrix}$$

and a decay rate for the parallelised asynchronous fixed point problem of:

$$\alpha = \alpha_1^{\bar{r}_1} \alpha_2^{\bar{r}_2} \alpha_3^{\bar{r}_3} \alpha_4^{\bar{r}_4} = 1.2352$$

The results show that the parallelised asynchronous version of the fixed point problem using two processors is stable, even when the Chazan-Miranker sufficiency condition is not satisfied.

**Table 2: The rates of occurrence of the matrices for the switch configurations**

$i$	$P$ for the $S$ switches	$\bar{P}$ for the $\bar{S}$ switches	$\bar{r}_i$
1	Off	Off	$0.1 \times 0.1 = 0.01$
2	On	On	$0.9 \times 0.9 = 0.81$
3	Off	On	$0.9 \times 0.1 = 0.09$
4	On	Off	$0.9 \times 0.1 = 0.09$

## 8 Conclusions

It has been shown that the event rate-constrained asynchronous dynamical systems introduced in [2] can be redefined as discrete state rate-constrained asynchronous dynamical systems in order to produce a set of BMIs that can determine stability via a quadratic Lyapunov function. Applications to NCSs with packet dropout and to the convergence of asynchronous fixed point iterations have been described. The class of rate-constrained asynchronous iterations is one for which it is possible to obtain a convergence condition that is weaker than the classical Chazan-Miranker condition ( $\rho(|A|) < 1$ ). This is interesting because only a few classes of asynchronous systems of this type are known. However, many issues remain to be investigated. For example, using GAs, it is possible to check whether a given matrix and communication rate leads to a stable asynchronous iteration, it would be interesting to characterise the class of matrices and rates for which this occurs.

## 9 Acknowledgments

This research was partially supported by the Brazilian Government agencies CAPES, CNPq, MCT(PRONEX), and FAPERJ.

## 10 References

- Zhang, W., Branicky, M.S., and Phillips, S.M.: 'Stability of networked control systems', *IEEE Control Syst. Mag.*, 2001, **21**, (1), pp. 84–99
- Hassibi, A., Boyd, S.P., and How, J.P.: 'Control of asynchronous dynamical systems with rate constraints on events'. Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and control, Phoenix, AZ, 7–10 December 1999, vol. 2, pp. 1345–1351
- Chazan, D., and Miranker, W.L.: 'Chaotic relaxation', *Linear Algebr. Appl.*, 1969, **2**, pp. 190–222
- Bertsekas, D.P., and Tsitsiklis, J.N.: 'Parallel and distributed computation: Numerical methods' (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989)
- Kaszakurewicz, E., Bhaya, A., and Šiljak, D.D.: 'On the convergence of parallel asynchronous block-iterative computations', *Linear Algebr. Appl.*, 1990, **131**, pp. 139–160
- Kleptsyn, A.F., Krasnosel'skii, M.A., Kuznetsov, N.A., and Kozjakin, V.S.: 'Desynchronization of linear systems', *Math. Comput. Simul.*, 1984, **XXVI**, pp. 423–431
- Su, Y., Bhaya, A., Kaszkurewicz, E., and Kozyakin, V.S.: 'Further results on the stability of asynchronous discrete-time linear systems', *Linear Algebr. Appl.*, 1998, **281**, (1–3), pp. 11–24
- VanAntwerp, J.G., and Braatz, R.D.: 'A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities', *J. Process Control*, 2000, **10**, pp. 363–385
- Garey, M., and Johnson, D.: 'Computers and intractability: A guide to np-completeness' (W.H. Freeman and Company, New York, 1983)
- Papadimitriou, C., and Steiglitz, K.: 'Combinatorial optimization: Algorithms and complexity' (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1982)
- Braatz, R., Young, P., Doyle, J.C., and Morari, M.: 'μcomputational complexity of calculation', *IEEE Trans. Autom. Control*, 1994, **39**, pp. 1000–1002
- Almeida, H.L.S., Bhaya, A., Falcão, D.M., and Kaszkurewicz, E.: 'A team algorithm for robust stability analysis and control design of uncertain time-varying linear systems using piecewise quadratic Lyapunov functions', *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2001, **11**, (4), pp. 357–371
- Michalewicz, Z.: 'Genetic algorithms + data structures = evolution programs' (Springer-Verlag, New York, 1994)
- Eiben, A.E., Aarts, E.H.L., and Hee, K.M.V.: 'Global convergence of genetic algorithm: A Markov chain analysis', Schwefel, H.-P., and Männer, R. (Eds.): 'Parallel Problem Solving from Nature' (Springer, Berlin, 1991), pp. 4–12
- Lund, R.B., and Tweedie, R.L.: 'Geometric convergence rates for stochastically ordered Markov chain', *Math. Oper. Res.*, 1996, **21**, pp. 101–121
- Rudolph, G.: 'Convergence analysis of canonical genetic algorithms', *IEEE Trans. Neural Netw.*, 1994, **5**, pp. 56–101
- Davis, L.: 'The handbook of genetic algorithms' (Van Nostrand Reinhold, New York, 1991)
- Goldberg, D.: 'Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning' (Addison-Wesley, Reading, MA, 1989)
- Holland, J.: 'Adaptation in natural and artificial systems' (The University of Michigan Press, Ann Arbor, MI, 1975)
- Joines, J., and Houck, C.: 'On the use of non-stationary penalty functions to solve constrained optimization problems with genetic algorithms'. Proc. IEEE Int. Symp. on Evolutionary computation, Orlando, FL, 27–29 June 1994, vol. 2, pp. 579–584

# Referências Bibliográficas

- Al-Khayyal, F. A. (1990), ‘Jointly constrained bilinear programs and related problems: An overview’, *Comput. Math. Applications* **19**, 53–62.
- Almeida, H. L. S., Bhaya, A., Falcão, D. M. & Kaszkurewicz, E. (2001), ‘A team algorithm for robust stability analysis and control design of uncertain time-varying linear systems using piecewise quadratic Lyapunov functions’, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **11**, 357–371.
- Bernstein, D. S. & Haddad, W. M. (1989), ‘LQG control with  $H_\infty$  performance bound: A Riccati equation approach’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **34**(3), 293–305.
- Bertsekas, D. P. & Tsitsiklis, J. N. (1989), *Parallel and distributed computation—Numerical methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. & Balakrishnan, V. (1994), *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia.
- Boyd, S. & Vandenberghe, L. (1994), *SP: Software for Semidefinite Programming*, Stanford University, Stanford, CA.
- Braatz, R. D., Young, P. M., Doyle, J. C. & Morari, M. (1994), ‘Computational complexity of  $\mu$  calculation’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**, 1000–1002.
- Cassandras, C. G. (1993), *Discrete Event Systems: modeling and performance analysis*, IRWIN, Boston.
- Chazan, D. & Miranker, W. L. (1969), ‘Chaotic relaxation’, *Linear Algebra and its Applications* **2**, 190–222.
- Davis, L. (1991), *The Handbook of Genetic Algorithms*, Van Nostrand Reinhold, New York.
- de Almeida, H. L. S. (2003), *Otimização de controladores robustos utilizando funções de Lyapunov quadráticas por partes*, Tese de Doutorado COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- de Medeiros, P. R. (2001), *Análise de Estabilidade de Sistemas Lineares Multi-taxa Assíncronos*, Tese de Doutorado COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.
- Doyle, J. C. & Stein, G. (1981), ‘Multivariable feedback design: concepts for classical/modern synthesis’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **26**, 4–16.

- Dusonchet, Y. P., Talukdar, S. N. & Sinnott, H. E. (1971), ‘Load flows using a combination of point Jacobi and Newton’s methods’, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems* **PAS-90**, 941–949.
- Francis, B. (1987), *A course on  $H_\infty$  control theory*, Springer Verlag, Berlin.
- Fujioka, H. & Hoshijima, K. (1997), ‘Bounds for the BMI eigenvalue problems - a good lower bound and a cheap upper bound’, *Trans. SICE* **33**, 616–621.
- Fujisawa, K. & Kojima, M. (1995), *SDPA (Semidefinite Programming Algorithm) User’s Manual*, Computer software.
- Gahinet, P. & Nemirovskii, A. (1991), *LMI Lab: a package for manipulating and solving LMIs*, Computer Software.
- Garey, M. & Johnson, D. (1983), *Computers and Intractability: A Guide to NP-Completeness*, W.H. Freeman and Company, New York.
- Glover, K. & Mustafa, D. S. (1989), ‘Derivation of the maximum entropy  $H_\infty$  - controller and state-space formula for its entropy’, *International Journal of Control* **50**(3), 899–916.
- Goh, K., Safonov, M. G. & Papavassilopoulos, G. P. (1995), ‘Global optimization for the biaffine matrix inequality problem’, *Journal of Global Optimization* **7**, 365–380.
- Goldberg, D. (1989), *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley.
- Hassibi, A. & Boyd, S. (1998), Quadratic stabilization and control of piecewise-linear systems, in ‘Proc. of the American Control Conference’, Philadelphia, PA, pp. 3659–3664.
- Hassibi, A., Boyd, S. P. & How, J. P. (1999), Control of asynchronous dynamical systems with rate constraints on events, in ‘Proceedings of 38th IEEE Conference on Decision and Control’, Phoenix, AZ, pp. 1345–1351. Paper 0248.pdf on CD-ROM.
- Holland, J. (1975), *Adaptation in natural and artificial systems*, The University of Michigan Press, Ann Arbor.
- Jabr, H. A., Youla, D. C. & Jr., J. B. (1975), ‘Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers, part i’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **19**, 655–659.
- Jabr, H. A., Youla, D. C. & Jr., J. B. (1976), ‘Modern wiener-hopf design of optimal controllers, part ii: The multivariable case’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **21**, 319–338.
- Joines, J. & Houck, C. (1994), On the use of non-stationary penalty functions to solve constrained optimization problems with genetic algorithms, in ‘IEEE International Symposium Evolutionary Computation’, Orlando, FL, pp. 579–584.

- Kaszkurewicz, E. & Bhaya, A. (1999), *Matrix Diagonal Stability in Systems and Computation*, MA: Birkhäuser, Boston.
- Kaszkurewicz, E., Bhaya, A. & Šiljak, D. D. (1990), ‘On the convergence of parallel asynchronous block-iterative computations’, *Linear Algebra and its Applications* **131**, 139–160.
- Khargonekar, P. P. & Rotea, M. A. (1991), ‘Mixed  $H_2/H_\infty$  control: A convex optimization approach’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **36**(7), 824–837.
- Kleptsyn, A. F., Kozyakin, V. S., Krasnosel’skii, M. A. & Kuznetsov, N. A. (1983), ‘Effect of small synchronization errors on stability of complex systems. I’, *Automation and Remote Control* **44**(7), 861–867.
- Kleptsyn, A. F., Kozyakin, V. S., Krasnosel’skii, M. A. & Kuznetsov, N. A. (1984a), ‘Effect of small synchronization errors on stability of complex systems. II’, *Automation and Remote Control* **45**(3), 309–314.
- Kleptsyn, A. F., Kozyakin, V. S., Krasnosel’skii, M. A. & Kuznetsov, N. A. (1984b), ‘Effect of small synchronization errors on stability of complex systems. III’, *Automation and Remote Control* **45**(8), 1014–1018.
- Kleptsyn, A. F., Kozyakin, V. S., Krasnosel’skii, M. A. & Kuznetsov, N. A. (1984c), ‘Effect of small synchronization errors on stability of complex systems. II’, *Automation and Remote Control* **45**(3), 309–314.
- Kleptsyn, A. F., Kozyakin, V. S., Krasnosel’skii, M. A. & Kuznetsov, N. A. (1984d), ‘Effect of small synchronization errors on stability of complex systems. III’, *Automation and Remote Control* **45**(8), 1014–1018.
- Kleptsyn, A. F., Krasnosel’skii, M. A., Kuznetsov, N. A. & Kozjakin, V. S. (1984), ‘Desynchronization of linear systems’, *Mathematics and Computers in Simulation* **XXVI**, 423–431.
- Kristinsson, K. & Dumont, G. A. (1992), ‘Systems identification and control using genetic algorithms’, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **22**(5), 1033–1046.
- Krtolica, R., Özgüner, Ü., Chan, H., Göktas, H., Winkelman, J. & Liubakka, M. (1994), ‘Stability of linear feedback systems with random communication delays’, *International Journal of Control* **59**, 925–953.
- Leland, R. P. (1993), Stochastic convergence of asynchronous parallel computations for solving systems of linear equations, in ‘Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control’, Vol. 4, San Antonio, TX, pp. 3604–3605.
- Leland, R. P. (1994), ‘Stability of asynchronous systems with Poisson transitions’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(1), 182–185.
- Lim, S. M. & Papavassilopoulos, G. P. (1996), Numerical experience with parallel algorithms for solving the BMI problems, in ‘13th IFAC Congress’, San Fransisco, CA, pp. 387–392.

- Liu, C. L. & Layland, J. W. (1973), ‘Scheduling algorithm for multiprogramming in a hard-real-time environment’, *Journal of the Association of Computing Machinery* **20**(1), 46–61.
- McCormick, G. P. (1976), ‘Computability of global solutions to factorable nonconvex programs: Part i - convex underestimating problems’, *Math. Program.* **10**, 147–175.
- McCormick, G. P. (1982), *Nonlinear Programming: Theory, Algorithms and Applications*, Wiley, New York.
- Megretski, A. & Rantzer, A. (1997), ‘System analysis via integral quadratic constraints’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(6), 819–830.
- Michalewicz, Z. (1994), *Genetic algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, AI Series, Springer-Verlang, New York.
- Nesterov, Y. & Nemirovskii, A. (1994), *Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, Vol. 13 of Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA.
- Papadimitriou, C. & Steiglitz, K. (1982), *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Park, D., Kandel, A. & Langholz, G. (1994), ‘Genetic-based new fuzzy reasoning models with application to fuzzy control’, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **24**(1), 39–47.
- Parrilo, P. (2000), *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*, PhD Thesis California Institute of Technology, California.
- R., H. & Tuy, H. (1996), *Global Optimization: Deterministic Approaches*, 3rd edn, Germany:Springer, Berlin.
- Rabello, A. & Bhaya, A. (2002), Stability of asynchronous dynamical systems with rate constraints and applications, in ‘Proc. of the American Control Conference’, Anchorage, AK, pp. 1284–1289.
- Rabello, A. & Bhaya, A. (2003), ‘Stability of asynchronous dynamical systems with rate constraints and applications’, *IEE Proc. Control Theory and Applications* **150**(5), 456–550.
- Rajkumar, R., Sha, L. & Lehoczky, J. (1990), ‘Priority inheritance protocols: An approach to real-time synchronization’, *IEEE Trans. on Computers* **39**(9), 1175–1185.
- Ramesh, V. C., Quadrel, R., de Souza, P. & Talukdar, N. (1991), Asynchronous teams, American Institute of Chemical Engineers, Pittsburgh-USA.
- Ritchey, V. S. & Franklin, G. F. (1989), ‘A stability criterion for asynchronous multirate linear systems’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **34**, 529–535.

- Su, Y., Bhaya, A., Kaszkurewicz, E. & Kozyakin, V. S. (1998), ‘Further results on convergence of asynchronous linear iterations’, *Linear Algebra and its Applications* (281), 11–24.
- Suzuki, J. (1995), ‘A Markov chain analysis on simple genetic algorithms’, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* **25**, 655–659.
- Toker, O. & Ozbay, H. (1995), On NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback, in ‘American Control Conference’, Piscataway, NJ, pp. 2525–2526.
- Tuan, H. D. & Apkarian, P. (2000a), ‘D.C. optimization approach to robust controls: The feasibility problem’, *International Journal of Control* **73**, 89–104.
- Tuan, H. D. & Apkarian, P. (2000b), ‘Low nonconvexity-rank bilinear matrix inequalities: Algorithms and applications in robust controller and structure designs’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**(11), 2111–2117.
- Verkama, M. (1996), ‘Random relaxation of fixed-point iteration’, *SIAM J. Sci. Comput.* **17**(4), 906–912.
- Willems, J. C. (1971), ‘Least squares stationary optimal control and algebraic Riccati equation’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **6**, 621–634.
- Zames, G. (1981), ‘Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **26**, 301–320.
- Zhang, W., Branicky, M. S. & Phillips, S. M. (2001), ‘Stability of networked control systems’, *IEEE Control Systems Magazine* **21**(1), 84–99.