

CONTRIBUIÇÃO PARA A MELHORIA DO TRANSITÓRIO DE
CONTROLADORES ADAPTATIVOS MULTIVARIÁVEIS

Marcos Ferreira Duarte Pinto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aprovada por:

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc.

Prof. Marcos Vicente de Brito Moreira, D.Sc.

Prof. José Paulo Vilela Soares da Cunha, D.Sc.

Prof. Aldayr Dantas de Araújo, D.Sc.

Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2009

DUARTE PINTO, MARCOS

Contribuição para a melhoria do transitório de controladores adaptativos multivariáveis [Rio de Janeiro] 2009

X,179 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia Elétrica, 2009)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Controle Adaptativo Multivariável
 2. Controle Adaptativo Multivariável por Modelo de Referência
 3. Comportamento Transitório
 4. Sistemas Multivariáveis Lineares Incertos
- I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus filhos Marcela, Rafael e João Pedro e a minha mulher Ana.

Agradecimentos

Agradeço a muitas pessoas, em primeiro lugar ao meu orientador que foi incansável na sua tarefa. Ensinou-me o poder da análise, me inspirou o raciocínio objetivo e me encorajou a caminhar com meus próprios passos. Bem mais que um orientador foi um amigo e conselheiro. A você Ramon muito obrigado. Ao professor Fernando Lizarralde que sempre esclareceu minhas dúvidas com suas explicações claras e objetivas. Ao professor Liu Hsu que é um exemplo a ser seguido e sempre esteve pronto a me ajudar durante todos esses anos.

Aos companheiros do Laboratório de Controle, mas em especial, ao amigo D.Sc. Jacoud que muito me auxiliou nas tarefas do dia a dia e nos momentos difíceis a serem superados.

Agradeço também as pessoas da minha vida. Aos meus pais Helcio e Wanda que me deram a vida e com amor sempre apoiaram e incentivaram as minhas decisões. São meu porto seguro. Aos meus filhos Marcela, Rafael e João Pedro que sempre me dedicaram muito amor e me proporcionaram a tranquilidade de seguir em frente, sem a qual não teria conseguido concluir esta tese. São jóias que Deus me confiou.

Finalmente agradeço a Deus por ter colocado na minha vida alguém tão especial quanto a minha mulher Ana Claudia, que durante todos esses anos esteve ao meu lado suportando os momentos de ausência e distância sem nunca deixar de me apoiar. Por isso dedico esta tese a ela. Te amo muito.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

CONTRIBUIÇÃO PARA A MELHORIA DO TRANSITÓRIO DE CONTROLADORES ADAPTATIVOS MULTIVARIÁVEIS

Marcos Ferreira Duarte Pinto

Abril/2009

Orientadores: Ramon Romankevicius Costa

Programa: Engenharia Elétrica

Esta tese apresenta um novo algoritmo baseado no controle adaptativo por modelo de referência (MRAC) para plantas incertas, com múltiplas-entradas-múltiplas-saídas (MIMO), lineares e invariantes no tempo de grau relativo um, denominado α -MRAC MIMO. A sua principal característica é a melhoria do comportamento transitório do erro em relação a controladores adaptativos MIMO. O algoritmo α -MRAC MIMO combina a estrutura da generalização do MRAC de sistemas SISO para sistemas MIMO, onde foi usada uma fatoração conveniente da matriz de ganhos de alta frequência, com o algoritmo α -MRAC desenvolvido para o caso SISO. A inovação do algoritmo está na introdução da estimativa da derivada do erro de rastreamento, obtida via uma matriz de filtros de avanço, na lei de adaptação. Esta estratégia garante estabilidade global do sistema em malha fechada, independente da escolha das constantes de tempo dos filtros. Pelo método das perturbações singulares é mostrado que para um ganho de adaptação suficientemente alto e constantes de tempo dos filtros suficientemente pequenas, o erro de rastreamento e controle convergem para zero exponencialmente. A robustez do sistema, na presença de pequenos erros de modelagem, é assegurada modificando a lei de adaptação, onde se incluiu um sinal normalizante e um sinal chaveado.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

IMPROVING TRANSIENT BEHAVIOR OF MULTIVARIABLE ADAPTIVE CONTROLLERS

Marcos Ferreira Duarte Pinto

April/2009

Advisors: Ramon Romankevicius Costa

Department: Electrical Engineering

This thesis presents a new model-reference adaptive control (MRAC) algorithm for linear time invariant multi-input-multi-output (MIMO) uncertain plants with relative degree one, which is referred to as α -MRAC MIMO. The main characteristic of this new algorithm is its improved transient behavior compared to the standard MIMO adaptive controllers. The α -MRAC MIMO is obtained by combining the structure of the recently proposed MIMO generalization of the MRAC of SISO systems, where a convenient factorization of the high frequency gain matrix of the plant was employed, with the α -MRAC algorithm developed originally to SISO plants. The key of this algorithm is the introduction of an estimate of the error derivative, obtained via lead filters, in the update law of the parameters. The closed loop system is shown to be at least uniformly asymptotically stable, irrespectively of the time constants chosen for the filters. By *singular perturbation method*, it is shown that for a sufficiently high adaptation gain and a sufficiently small time constant of the filters, both the tracking error and the control mismatch converge exponentially to zero. To tackle the problem of uncertain plants with small unmodeled dynamics, a modification of the algorithm is proposed by including normalization and a switching term in the update law.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Abreviaturas	xii
1 Introdução	1
1.1 Revisão da literatura	2
1.2 Objetivo e proposta de trabalho	6
1.3 Organização da tese	6
1.4 Notação e terminologia	7
1.5 Conceitos básicos	8
2 Formulação do problema	12
2.1 Modelo de referência	13
2.2 Hipóteses básicas	14
3 Algoritmo α-MRAC SISO	16
3.1 Controle adaptativo por modelo de referência monovariável	17
3.1.1 Estrutura do controlador	17
3.1.2 Parametrização do erro de rastreamento	20
3.1.3 Análise de estabilidade do MRAC	22
3.2 Algoritmo α -MRAC	24
3.3 Análise de estabilidade	27
3.4 Análise do transitório	29
3.4.1 Modelo reduzido	30
3.4.2 Comportamento da camada limite	32
3.5 Resultados das simulações	37
3.5.1 Simulações do α -MRAC monovariável	37
3.6 Conclusões	43
4 Algoritmo α-MRAC SISO robusto	55
4.1 Formulação do problema	56
4.2 Lei de adaptação robusta	57
4.3 Análise de robustez do sistema	60
4.4 Resultados das simulações	64
4.5 Conclusões	69

5	Controle adaptativo multivariável	72
5.1	Revisão do projeto MRAC multivariável	73
5.2	Fatoração SDU	74
5.3	Parametrização do controle com fatoração SDU	76
5.4	Controle adaptativo	78
5.5	Análise de robustez do sistema	81
5.5.1	Parametrização do erros com dinâmicas não modeladas	81
5.5.2	Estimativa do erro de rastreamento	83
5.5.3	Controlador robusto	84
5.5.4	Análise de estabilidade	86
5.6	Simulações	90
5.7	Conclusões	90
6	Algoritmo α-MRAC MIMO	92
6.1	Algoritmo α -MRAC multivariável	93
6.2	Análise de estabilidade	96
6.3	Análise do comportamento transitório	100
6.3.1	Modelo reduzido	100
6.3.2	Comportamento da camada limite	103
6.4	Limitante superior	106
6.5	Resultados das simulações	109
6.6	Conclusões	113
7	Algoritmo α-MRAC MIMO robusto	116
7.1	Equação do erro	116
7.2	Lei de adaptação robusta	117
7.3	Análise de robustez	119
7.4	Resultados das simulações	123
7.5	Conclusões	125
8	Conclusões, trabalhos futuros e contribuições	132
8.1	Trabalhos Futuros	133
8.2	Contribuições	134
	Apêndices	135
A	Demonstrações do capítulo 3	135
A.1	Equação Ideal ou <i>Matching Equation</i>	135
B	Demonstrações do capítulo 4	137
B.1	Parametrização do Erro de Rastreamento monovariável	137
B.2	Operadores lineares $T_1(s, t)$, $T_0(s, t)$	140
B.3	Constante μ^*	144
B.4	Limite superior para $\bar{\eta}(t)$ - caso monovariável	145
B.5	Estabilidade dos sinais do sistema com o sinal normalizante	149

C	Demonstrações para Estabilidade-multivariável	154
C.1	Operadores lineares $\bar{H}_1(s)$ e $\bar{H}_2(s)$ - multivariável	154
C.2	Demonstração do termo $\bar{\eta}(t)$ - multivariável	167
C.3	Estabilidade dos sinais do sistema pelo sinal normalizante - MIMO . . .	171
	Referências Bibliográficas	176

Lista de Figuras

2.1	Planta $G(s)$ com dinâmica não modelada.	12
3.1	Diagrama de blocos do α -MRAC SISO.	27
3.2	Diagrama de blocos mostrando a relação entre f e \hat{f}	28
3.3	Simulação para o caso 1 com o MRAC padrão.	45
3.4	Simulação para o caso 1 com o α -MRAC.	46
3.5	Simulação para o caso 1 com o α -MRAC. Efeito do ganho α alto.	47
3.6	Simulação para o caso 2 com o MRAC padrão.	48
3.7	Simulação para o caso 2 com o α -MRAC.	49
3.8	Simulação para o caso 3 com o MRAC padrão.	50
3.9	Simulação para o caso 3 com o α -MRAC.	51
3.10	Simulação para o caso 3 com o α -MRAC. Efeito de $\hat{e}_0(0)$	52
3.11	Simulação para o caso 4 com o MRAC padrão.	53
3.12	Simulação para o caso 4 com o α -MRAC.	54
4.1	Planta $G(s)$ com dinâmica não modelada.	56
4.2	Diagrama de blocos das operações sobre $e_0(t)$	59
4.3	Algoritmo MRAC para $G_0(S)$. (a) e_0 , (b) ϵ , (c) y e y_m e (d) $ \theta $	66
4.4	Algoritmo α -MRAC robusto para $G_0(S)$. (a) e_0 , (b) ϵ , (c) y e y_m e (d) $ \theta $	67
4.5	Erro: MRAC(–) e α -MRAC robusto(– –)	68
4.6	Erro: MRAC(–) e α -MRAC robusto(– –).	68
4.7	Planta $G_0(S)$. Erro: MRAC (–) e α -MRAC robusto (– –).	68
4.8	Planta $G_1(S)$ com o algoritmo MRAC. (a) e_0 , (b) ϵ , (c) y e y_m e (d) $ \theta $	71
6.1	Diagrama de blocos da equação (6.12).	94
6.2	Diagrama de blocos do algoritmo α -MRAC MIMO.	95
6.3	Simulação da planta $G_1(s)$ usando o MRAC MIMO padrão.	110
6.4	Simulação da planta $G_1(s)$ usando α -MRAC MIMO.	111
6.5	Simulação da planta $G_2(s)$ usando MRAC MIMO.	112
6.6	Resultados da simulação da planta $G_2(s)$ usando o α -MRAC MIMO.	113
6.7	Modelo reduzido (– –) e completo (–) do sistema para a planta $G_1(s)$	114
6.8	Modelo reduzido (– –) e completo (–) do sistema para a planta $G_2(s)$	114
7.1	Algoritmo MRAC MIMO para $G_{01}(s)$	127
7.2	Algoritmo α -MRAC robusto para $G_{01}(s)$	128
7.3	Algoritmo MRAC MIMO para $G_{02}(s)$	129

7.4	Algoritmo α -MRAC robusto para a planta $G_{02}(s)$	130
7.5	Norma do erro: MRAC (-) e algoritmo α -MRAC robusto (- -)	131
7.6	Erro: MRAC (-) e algoritmo α -MRAC robusto (- -).	131
7.7	Erro: MRAC (-) e algoritmo α -MRAC robusto (- -).	131

Abreviaturas

HFG : Ganho de Alta Frequência (*High Frequency Gain*)

SPR : Estritamente Real Positivo (*Strictly Positive Real*)

SPD : Estritamente Positivo Definido (*Strictly Positive Definite*)

MRAC : Controle Adaptativo por Modelo de Referência (*Model-Reference Adaptive Control*)

LTI : Linear e Invariante no Tempo (*Linear Time Invariant*)

BIBO : Entrada-limitada-saída-limitada (*Bounded-Input-Bounded-Output*)

SISO : Uma Entrada e Uma Saída - Monovariável (*Single-Input-Single-Output*)

MIMO : Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas - Multivariável (*Multi-Input-Multi-Output*)

Capítulo 1

Introdução

O controle adaptativo vem se tornando cada vez mais popular por ser um ramo da teoria de controle capaz de lidar com sistemas incertos. O controle adaptativo fornece um mecanismo de adaptação que ajusta os parâmetros de um controlador para sistemas com incertezas paramétricas, estruturais e ambientais, de modo a garantir um desempenho desejado. Variações de cargas, envelhecimento e desgastes de componentes são incertezas paramétricas, falhas de componentes ou dinâmicas não modeladas são consideradas incertezas estruturais, e perturbações externas, como ruído, são típicas de incertezas ambientais. O controle adaptativo tem obtido muito sucesso aplicado à plantas onde tais incertezas aparecem linearmente (Krstić, Kanellakopoulos & Kokotović 1994). Felizmente, em muitas aplicações práticas, tais como na indústria automobilística, aeronáutica, de processos etc, estas incertezas consideradas parâmetros desconhecidos podem ser linearizadas. Diferentemente de outras técnicas de controle que precisam do conhecimento dos parâmetros do sistema, o controle adaptativo por modelo de referência não precisa destas informações, pois se adapta independentemente deste conhecimento, usando apenas as informações da entrada e da saída do sistema e da saída de um modelo de referência em tempo real (Tao 2003).

Um sistema de controle adaptativo típico consiste de um sistema (processo), o qual é denominado planta onde os parâmetros são desconhecidos, um controlador parametrizado e uma lei de adaptação para atualizar tais parâmetros, tal que o sistema em malha fechada atinja o desempenho especificado. Em geral, um tópico importante em sistemas de controle é o seu desempenho. No entanto, apesar dos grandes avanços

obtidos pelo controle adaptativo para sistemas lineares, esse não se tornou ainda uma ferramenta de projeto diária do engenheiro de controle. Cada esquema adaptativo requer a escolha de filtros, regras de inicialização, projetos da lei de adaptação e assim por diante. Portanto, não fica claro como o desempenho, e em particular o comportamento transitório do sistema, são afetados por essas escolhas.

Em geral, a resposta transitória de sistemas adaptativos é mal comportada, tal que os sinais do sistema podem experimentar altas frequências e grandes amplitudes, que poderiam ser proibitivos para plantas em aplicações práticas. Este fato tem sido um fator restritivo ao uso do controle adaptativo. Nos últimos anos esforços têm sido feitos para melhorar este comportamento ruim durante o transitório de sistemas adaptativos. Alguns resultados são discutidos na próxima seção.

Mesmo depois de todos esses esforços, os estudos se restringiram apenas ao caso monovariável, ficando o caso multivariável em aberto na literatura. Portanto, esta tese faz uma extensão do algoritmo α -MRAC desenvolvido para o caso monovariável, por (Costa 1999), para o caso multivariável, dando um passo na direção de cobrir esta lacuna deixada na literatura, no que tange às pesquisas da melhoria do comportamento transitório de sistemas adaptativos aplicados às plantas lineares.

1.1 Revisão da literatura

A motivação inicial para o desenvolvimento do controle adaptativo foi a necessidade de projetar controladores para sistemas dinâmicos com incertezas paramétricas.

O maior desenvolvimento do controle adaptativo ocorreu na década de 80 quando vários grupos de pesquisas (Morse 1980), (Narendra, Lin & Valavani 1980) e (Weller, G. C. Goodwin & Caines 1980) publicaram resultados importantes, os quais mostraram que satisfazendo certas condições ideais seria possível obter sistemas adaptativos globalmente estáveis. Em seguida, em (Ioannou & Kokotović 1983) e (C. E. Rohrs & Stein 1985) foi mostrado que na presença de erros de modelagem, que incluem dinâmicas não modeladas na planta e perturbações limitadas, o esquema de controle adaptativo desenvolvido, somente, asseguravam que os sinais do sistema em malha fechada e o erro de rastreamento eram limitados, com amplitudes médias pequenas, na presença de erros de modelagem também de amplitudes médias pequenas. Embora,

o erro de rastreamento fosse limitado, este poderia apresentar valores absolutos de grande amplitude, em algum instante, mesmo depois de um longo período no regime permanente, o que caracteriza o fenômeno de *bursting*. A principal causa, desta instabilidade (*bursting*) na presença de pequenos erros de modelagem, foi a lei de adaptação, que estima os parâmetros desconhecidos, a qual tornou o sistema em malha fechada não linear e mais sensível aos efeitos dos erros de modelagem. Conseqüentemente, os principais esforços de pesquisas em controle adaptativo foram na direção de tornar a lei de adaptação robusta. Isto levou ao florescimento do controle adaptativo robusto na década de 80, (Ioannou & Tsakalis 1986), (Narendra & Annaswamy 1989), (Praly 1984), (Ioannou & Sun 1988), (Sastry & Bodson 1989), (Krause & Stein 1992), (Ioannou & Kokotović 1984), (Ioannou & Tsakalis 1988b), (Tsakalis 1992).

Várias modificações foram propostas que garantiram estabilidade dos sinais em malha fechada e o erro de rastreamento da ordem do erro de modelagem para condições iniciais arbitrárias (Ioannou & Tsakalis 1986), (Narendra & Annaswamy 1989), (Praly 1984). Os resultados, entretanto, não fornecem informações em relação à taxa de convergência, a qual pode ser não uniforme e muito lenta (Narendra & Balakrishnan 1994) e nem sobre o comportamento transitório do sistema. De fato em (Zang & Bitmead 1994) um exemplo foi apresentado, e confirma o rastreamento assintótico lento e com comportamento transitório ruim. Além do mais, não há garantia de que o erro de rastreamento seria da ordem do erro de modelagem no regime permanente. Também foi mostrado em (Marcelis & Bitmead 1986), (Ydstie 1986) e (Hsu & Costa 1987) que oscilações da fase transitório e o fenômeno de *bursting* no regime permanente podem ocorrer, quando erros de modelagem, tal como pequenas perturbações, estão presentes, sem violar a estabilidade do sistema com as modificações propostas.

No esforço de eliminar estes fenômenos indesejáveis, várias pesquisas apontaram para o uso da persistência de excitação, a qual relaciona a propriedade de riqueza de sinal (Narendra 1994) e (Ioannou & Tao 1989). De (Arteaga & Tang 2002) é mostrado que um limite arbitrário para a resposta na fase transitório pode ser atingido tornando os parâmetros dependentes da condição de excitação. A persistência de excitação aumenta a identificação dos parâmetros do esquema adaptativo e melhora a convergência, tal que o erro de rastreamento e o erro paramétrico tendem para uma vizinhança da ordem do erro da modelagem. Por outro lado, a riqueza de sinal de excitação externa pode in-

introduzir indesejáveis perturbações no sistema em malha fechada e inviabilizar o seu uso em muitos casos (Sun 1993). Além disso, os efeitos da persistência de sinal na melhora do transitório não é bem definida. O controle adaptativo por modelo de referência (MRAC) como em outros esquemas de controle adaptativo são desenvolvidos usando o conhecido princípio de *certainty equivalence*. Embora este princípio seja muito simples e intuitivo, podendo assegurar desempenho assintótico, ele não garante um comportamento transitório satisfatório. Portanto, outros mecanismos de compensação tem que ser obtido com o *certainty equivalence principle* para melhorar o regime transitório. Isto tem levado à pesquisas usando outros meios diferentes daqueles baseado na identificação de parâmetros. Assim sendo, um outro caminho usando persistência de excitação foi apresentado em (Narendra & Balakrishnan 1993), onde a melhora do transitório usa uma estratégia de múltiplos modelos da planta a ser controlada, e um mecanismo de chaveamento entre eles. Os modelos são iguais exceto pelo valor dos parâmetros desconhecidos da planta. O controle é determinado a cada instante pelo modelo que melhor se aproxima da planta.

Uma nova abordagem para a melhora do comportamento transitório, na presença de incertezas paramétricas, foi apresentado por (Sun 1993), onde é proposta uma modificação na lei de controle via a adição de um termo extra que compensa os parâmetros desconhecidos. O algoritmo foi denominado *modified certainty equivalence*. Neste algoritmo a estimação do erro de rastreamento gerada por um filtro *Lead* é adicionado diretamente na lei de controle. Se a constante de tempo do filtro é pequena, a adaptação dos parâmetros é lenta. Entretanto, a dificuldade de implementar o algoritmo reside no conhecimento do ganho de alta frequência (k_p) da planta. Esta restrição é relaxada em (Datta & Ho 1994) e (Papadakis & Thomopoulos 1996), onde se requer apenas o conhecimento de um limite inferior e superior para k_p . O filtro *Lead* empregado usa a inversa da função de transferência do modelo de referência. Um filtro similar será usado no algoritmo apresentado nesta tese. No entanto os resultados são completamente diferentes. Motivado pelos resultados de (Sun 1993) foi proposto por (Datta & Ioannou 1994) uma modificação no MRAC, a qual melhora o desempenho do sistema baseado em dois critérios de desempenho: do erro médio quadrático e limite \mathcal{L}_∞ do erro de rastreamento, para uma arbitrária condição inicial, no caso ideal e na presença de perturbações limitadas.

Os resultados mais recentes de (Cao & Hovakimyan 2006a), (Cao & Hovakimyan 2006b), (Cao & Hovakimyan 2007b), (Cao & Hovakimyan 2007a), (Cao & Hovakimyan 2007d), (Cao & Hovakimyan 2007c) e (Cao & Hovakimyan 2007e), que ainda se encontram em evolução, e tem gerado muitos artigos, que igualmente à maioria dos outros autores seguem um caminho próprio. Nestes trabalhos foram apresentados os fundamentos de uma nova arquitetura de controle adaptativo, a qual assegura que os sinais de entrada e saída de um sistema linear com parâmetros desconhecidos rastreiam a entrada e a saída de um sistema de referência durante a fase transitória, isto é, a entrada e a saída da planta podem ter um comportamento transitório desejado. Esta característica é atingida reparametrizando a planta que define o sistema companheiro, o qual tem a mesma estrutura da planta, sendo que os parâmetros desconhecidos são substituídos pelos parâmetros adaptativos.

Entende-se que a diferença entre os estados da planta e do sistema companheiro define um novo sinal de erro para a lei de adaptação. A principal ideia é a introdução de um filtro passa baixa na lei de controle. Quando o sinal de controle fecha a malha para ambos os sistemas, o sistema companheiro retém os sinais de alta frequência, enquanto o sistema da planta (real) retém os sinais de baixa frequência. A incorporação do filtro passa baixa na malha permite o rastreamento desejado pelo aumento do ganho de adaptação acima de um limitante inferior. Entretanto, até o presente momento, esta abordagem abrange apenas sistemas SISO, e é importante notar que todos os autores apresentaram resultados para melhora do regime transitório focados em sistemas monovariáveis.

Em (Krstić et al. 1994) a metodologia de projeto recursiva, chamada *adaptive backstepping*, junto com a função de sintonia (tuning function) garante estabilidade e rastreamento. Durante o processo recursivo a função de Lyapunov leva em conta todas as dinâmicas do sistema, inclusive os parâmetros estimados. Para sistemas triangulares, a função de Lyapunov fornece a prova da estabilidade global e também a prova do rastreamento assintótico para zero quando $t \rightarrow \infty$, e embora seja uma técnica de projeto não linear, é capaz de melhorar o comportamento transitório do rastreamento de sistemas lineares. Em (Zhang & Ioannou 2000), um novo controlador adaptativo, baseado na equivalência certa, é apresentado, usando uma lei de controle obtida via o método *backstepping* com a lei de adaptação normalizada, que garante convergência

assintótica e transitório limitado para sistemas lineares invariante no tempo. Dando continuidade, (B. Fidan & Ioannou 2002) estendeu os resultados para sistemas lineares variantes no tempo.

Podemos assim observar que a melhora do comportamento transitório tem sido considerada por diferentes abordagens.

1.2 Objetivo e proposta de trabalho

O objetivo desta tese será generalizar, para sistemas multivariáveis incertos, o algoritmo α -MRAC aplicado a sistemas monovariáveis incertos de grau relativo $n^* = 1$. Analisará a estabilidade de sistemas monovariáveis (SISO) e sistemas multivariáveis (MIMO), em malha fechada, com o algoritmo α -MRAC. Desenvolverá a análise de robustez do controle adaptativo por modelo de referência (MRAC), usando a fatoração SDU da matriz de ganhos de alta frequência, de plantas multivariáveis. Um novo algoritmo, baseado no algoritmo α -MRAC, será desenvolvido para garantir robustez de sistemas SISO e MIMO na presença de erros de modelagem. Simulações ilustrarão a contribuição para a melhoria da resposta transitória de sistemas MIMO, obtida com esta generalização, quando comparado com o algoritmo MRAC multivariável.

1.3 Organização da tese

O capítulo 2 apresenta o problema de rastreamento, a classe de plantas e o modelo de referência que serão abordados, bem como as hipóteses que devem ser satisfeitas pelas plantas e suas dinâmicas não modeladas. O capítulo 3 mostra uma breve revisão do controle adaptativo por modelo de referência (MRAC) monovariável e introduz o algoritmo α -MRAC para o caso SISO. O capítulo 4 desenvolve a análise de robustez do algoritmo α -MRAC SISO para plantas com erros de modelagem. O capítulo 5 relembra o controle adaptativo por modelo de referência usando a fatoração SDU e mostra as vantagens da reparametrização do vetor de erros de rastreamento com esta abordagem. Nesse capítulo também é apresentada a análise de robustez do sistema. O capítulo 6 introduz a generalização do algoritmo α -MRAC do caso SISO para o caso MIMO, aplicado a plantas de grau relativo $n^* = 1$, faz a análise de estabilidade e compara os

resultados das simulações do sistema usando ambos os algoritmos, α -MRAC MIMO e MRAC com a fatorização SDU. O capítulo 7 mostra a análise de robustez do algoritmo α -MRAC MIMO em malha fechada. Concluí-se a tese com o capítulo 8, onde são sugeridos trabalhos futuros. Algumas demonstrações relevantes são apresentadas nos apêndices.

1.4 Notação e terminologia

Um sistema linear, monovariável e invariante no tempo, tem a representação entrada-saída dado por $y(s) = G(s)u(s)$, onde $G(s)$ é a função de transferência do sistema e $u(s)$ e $y(s)$ são as transformadas de Laplace dos sinais de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ do sistema, respectivamente. Considere $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$, a inversa da transformada de Laplace de $G(s)$, ou a função resposta ao impulso do sistema representado por $G(s)$. Então, a resposta do sistema é o resultado da convolução,

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (1.1)$$

Se considerarmos $G(s)$ um operador cuja operação é definida por (1.1) podemos expressar convenientemente o sinal de saída do sistema $y(s) = G(s)u(s)$ como

$$y(t) = G(s)[u](t), \quad (1.2)$$

isto é, $G(s)[u](t)$ define a saída do sistema onde a representação do operador (função de transferência) é $G(s)$ e a entrada é $u(t)$.

Um sistema linear, multivariável e invariante no tempo, tem a representação entrada-saída dado por $y(s) = H(s)u(s)$, onde $H(s)$ é uma matriz de transferência $m \times m$ do sistema e $u(s) \in \mathbb{R}^m$ e $y(s) \in \mathbb{R}^m$ são as transformadas de Laplace dos vetores de sinais de entrada $u(t)$ e saída $y(t)$ do sistema, respectivamente. Considere $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, a inversa da transformada de Laplace de $H(s)$, ou a função resposta ao impulso do sistema representado por $H(s)$. Então, a resposta do sistema é

o resultado da convolução,

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (1.3)$$

Se a matriz de transferência $H(s)$ é considerada um operador cuja operação é definida por (1.3) podemos expressar o vetor de sinais de saída do sistema $y(s) = G(s)u(s)$ como

$$y(t) = H(s)[u](t), \quad (1.4)$$

Esta representação simplifica a notação e mantém o rigor matemático. Portanto será adotada em toda a tese.

1.5 Conceitos básicos

Para melhor compreender as análises desenvolvidas, é útil relembrar alguns fundamentos matemáticos descritos em (Tao 2003, cap.2).

Considere a matriz de transferência $G_0(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, com a decomposição em matrizes polinomiais coprimas à direita $G_0(s) = Z_r(s)P_r^{-1}(s)$ ou coprimas à esquerda $G_0(s) = P_l^{-1}(s)Z_l(s)$, com coeficientes reais. Os graus das colunas de $P(s)$ são definidos como

$$\mu_j = \partial_{c_j}[P_r(s)] = \max_{1 \leq i \leq m} \{\partial[p_{ij}(s)]\}, j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.5)$$

e os graus das linhas,

$$\nu_i = \partial_{l_i}[P_l(s)] = \max_{1 \leq j \leq m} \{\partial[p_{ij}(s)]\}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (1.6)$$

onde, o símbolo ∂ indica o grau do polinômio (matriz) $P(s)$.

Para uma realização mínima $\{A, B, C\}$ de $G_0(s)$ (controlável e observável) a ordem do sistema é dada por,

$$n = \sum_{j=1}^m \mu_j = \sum_{i=1}^m \nu_i, \quad (1.7)$$

onde $\mu_j, j = 1, 2, \dots, m$, são chamados de índices de controlabilidade de $G_0(s)$ com $\mu = \max_{j=1,2,\dots,m} \{\mu_j\}$ chamado de índice de controlabilidade, enquanto $\nu_i, i = 1, 2, \dots, m$ são os índices de observabilidade e $\nu = \max_{i=1,2,\dots,m} \{\nu_i\}$ é o índice de observabilidade.

Norma de vetores reais como função do tempo:

Para o vetor $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ defini-se as seguintes normas:

$$\|x(t)\|_1 = |x_1(t)| + |x_2(t)| + \dots + |x_n(t)|,$$

$$\|x(t)\|_2 = \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + \dots + x_n(t)^2},$$

$$\|x(t)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i(t)|.$$

Norma de sinais vetoriais contínuos no tempo:

A norma \mathcal{L}_1 é definida como

$$\|x(\cdot)\|_1 = \int_0^\infty \|x(t)\|_1 dt.$$

A norma \mathcal{L}_2 é definida como

$$\|x(\cdot)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \|x(t)\|_2^2 dt}.$$

e a norma \mathcal{L}_∞ como

$$\|x(\cdot)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|x(t)\|_\infty.$$

Espaços de sinais:

O espaço de sinais \mathcal{L}_1 é definido como

$$\mathcal{L}_1 = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : \|x(\cdot)\|_1 < \infty\}. \quad (1.8)$$

O espaço de sinais \mathcal{L}_2 é definido como

$$\mathcal{L}_2 = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : \|x(\cdot)\|_2 < \infty\}. \quad (1.9)$$

O espaço de sinais \mathcal{L}_∞ é definido como

$$\mathcal{L}_\infty = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : \|x(\cdot)\|_\infty < \infty\}. \quad (1.10)$$

Versão multivariável do Lemma 2.6 (Tao 2003, p.400):

Se $x_1(t) = H(s) \frac{1}{(s+\delta)} [x_2](t)$ com $\delta > 0$, $x_1(t) \in \mathbb{R}^m$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^m$ e a matriz de resposta ao impulso $h_\delta(t)$ de $H(s - \delta)$ satisfaz $\|h_\delta(\cdot)\|_1 \triangleq \max_{i \leq j \leq m} \int_0^\infty \sum_{i=1}^m |h_{\delta ij}(\tau)| d\tau < \infty$

onde $h_{\delta ij}(t)$ é o (i, j) -ézimo elemento de $h_{\delta}(t)$ então,

$$|x_1(t)| \leq \|h_{\delta}(\cdot)\|_1 \frac{1}{(s + \delta)} [|x_2](t). \quad (1.11)$$

Lemas de convergência de sinais:

Lema 1.1 Se $\dot{f}(t) \in \mathcal{L}_{\infty}$ e $f(t) \in \mathcal{L}_2$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

Lema 1.2 [Barbalat] Se uma função escalar $f(t)$ é uniformemente contínua, tal que o $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau$ existe e é finito, então $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

Deste lema verifica-se que $f(t) \in \mathcal{L}_1$ e $\dot{f}(t) \in \mathcal{L}_{\infty}$ o que implica $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, porque para $f(t) \in \mathcal{L}_1$ implica $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(\tau) d\tau$ finito.

Corolário Se $f(t) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_{\infty}$ e $\dot{f}(t) \in \mathcal{L}_{\infty}$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

Lema 1.3 Se $f(t) \in \mathcal{L}_1$ então $\frac{b}{s+a}[f](t) \in \mathcal{L}_{\infty}$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{b}{s+a}[f](t) = 0$, para as constantes $a > 0$ e $b > 0$.

Operador Linear (Tao 2003, p.382):

Um operador linear $T(s, t)$ é estável e próprio se para $y(t) \triangleq T(s, \cdot)[u](t)$ e quaisquer constantes $\beta \geq 0$, $\alpha > 0$, e $\gamma > 0$, para todo, $t \geq 0$, e algum $u(t)$,

$$\|y(t)\| = \|T(s, t)u(t)\| \leq \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \|u(\tau)\| d\tau + \gamma \|u(t)\|, \quad (1.12)$$

onde $y(t) = T(s, \cdot)[u](t)$ denomina a convolução da resposta ao impulso de $T(s, \cdot)$ para $u(t)$. O operador linear $T(s, t)$ é estável e estritamente próprio se ele é estável para $\gamma = 0$.

Um operador linear aplica-se a sistemas lineares e não lineares.

Norma de Operador:

Considere $u(t) \in \mathcal{L}_1$. Então, a norma \mathcal{L}_1 da matriz $H(s)$ $m \times m$ é

$$\|H\|_1 = \|h(\cdot)\|_1 \triangleq \max_{1 \leq j \leq m} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^m |h_{ij}(\tau)| d\tau, \quad (1.13)$$

onde $h_{ij}(t)$ é a resposta ao impulso de $H_{ij}(s)$, o (i, j) -ézimo elemento de $H(s)$.

Definição 1 (Tao 2003, def.5.1, p.231):

Um sinal $x(t) \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$ para algum $\mu > 0$ e $\bar{k}_0 > 0$ se, para $t_2 > t_1 \geq 0$ e $\bar{\gamma}_0 > 0$, satisfaz,

$$\int_{t_1}^{t_2} \|x(t)\|_2^2 dt \leq \mu^2 \bar{k}_0 (t_2 - t_1) + \bar{\gamma}_0. \quad (1.14)$$

Se $\mu = 0$, $t_1 = 0$ e $t_2 = \infty$ em (1.14), teremos

$$\int_0^{\infty} \|x(t)\|_2^2 dt \leq \bar{\gamma}_0. \quad (1.15)$$

Da definição da norma \mathcal{L}_2 concluí-se que $x(t) \in \mathcal{L}_2$.

Matriz Positiva Definida:

Uma matriz quadrada positiva definida $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pode ser decomposta como $Q = U^T \Lambda U$, onde U é uma matriz de autovetores que satisfaz $U^T U = I$, e Λ é uma matriz diagonal contendo os autovalores de Q . Considere $\lambda_{min}(Q)$ o menor autovalor de Q e $\lambda_{max}(Q)$ o maior autovalor. Então, para $Z \in \mathbb{R}^m$, teremos

$$\lambda_{min}(Q) Z^T Z \leq Z^T Q Z \leq \lambda_{max}(Q) Z^T Z. \quad (1.16)$$

Função Estritamente Real Positiva (SPR):

Uma função $h(s)$ da variável complexa $s = \sigma + jw$ é dita estritamente real positiva se,

1. $h(s)$ não tem polos $Re[s] \geq 0$;
2. $Re[h(jw)] \geq 0$ para todo $w \in (-\infty, +\infty)$; e
3. $\lim_{w \rightarrow \infty} Re[h(jw)] > 0$ quando $n^* = 1$ ou $\lim_{w \rightarrow \infty} Re[h(jw)] > 0$ quando $n^* = 0$.

Capítulo 2

Formulação do problema

Neste trabalho consideramos a classe de plantas lineares invariantes no tempo, observáveis e controláveis com m entradas e m saídas, descritas pelas equações diferenciais

$$y(t) = G(s) [u](t), \quad (2.1)$$

onde a matriz de transferência $G(s)$ é considerada um operador que realiza a convolução definida em (1.1), tal que o sistema $y(s) = G(s)u(s)$ pode ser convenientemente expresso por (2.1), $y(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saída mensurável da planta, e $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada da planta.

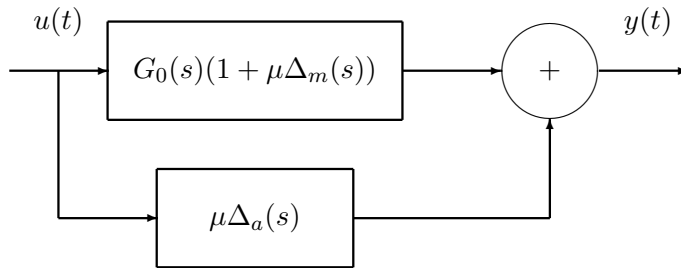


FIGURA 2.1: Planta $G(s)$ com dinâmica não modelada.

Assume-se que $G(s)$ pode ser escrita como

$$G(s) = G_0(s)(1 + \mu\Delta_m(s)) + \mu\Delta_a(s), \quad (2.2)$$

onde $G_0(s) = Z_0(s)P_0^{-1}(s)$ é a parte nominal de $G(s)$, $Z_0(s)$ and $P_0(s)$ são matrizes polinomiais $m \times m$, coprimas a direita, sendo $P_0(s)$ de grau igual ao índice de controlabilidade de $G_0(s)$ e $\mu\Delta_m(s)$ e $\mu\Delta_a(s)$ são matrizes que representam as dinâmicas não

modeladas multiplicativas e aditivas, respectivamente, com $\mu \geq 0$.

Especificada uma *trajetória desejada* $y_M(t) \in \mathbb{R}^m$ e considerando os parâmetros de $G(s)$ desconhecidos, o objetivo do controle adaptativo é encontrar uma lei de controle $u(t)$ para a planta (2.1), usando realimentação de saída, que assegure a convergência assintótica do erro de rastreamento

$$e_0(t) = y(t) - y_M(t) \quad (2.3)$$

para zero, ou para uma vizinhança dada por $B^{2,\mu^2\bar{k}_0}$, como definido em (1.14), com $\bar{k}_0 > 0$, mantendo todos os sinais do sistema em malha fechada uniformemente limitados, para qualquer condição inicial apesar da presença das dinâmicas não modeladas $\mu\Delta_m(s)$ e $\mu\Delta_a(s)$.

A seguir são apresentadas as hipóteses básicas que devem ser satisfeitas pela planta e pelas dinâmicas não modeladas. Elas caracterizam uma classe de plantas multivariáveis lineares invariantes no tempo observáveis e controláveis de fase mínima.

2.1 Modelo de referência

Seja $\{A, B, C\}$ uma realização observável de $G_0(s) = C(sI - A)^{-1}B$. Se $\det(CB) \neq 0$, a matriz de transferência $G_0(s)$ tem grau relativo uniforme $n^* = 1$ e a matriz não singular $K_p = CB$ é denominada *Matriz de Ganhos de Alta Frequência* (HFG). Se os zeros de transmissão de $G_0(s)$ tem parte real negativa então $G_0(s)$ pode ser diagonalizada via realimentação dinâmica da saída (Rugh 1993). Sem perda de generalidade, escolhamos o modelo de referência descrito pela matriz de transferência diagonal $m \times m$ *estritamente real positiva* (SPR),

$$W_M(s) = K_M \text{diag} \left\{ \frac{1}{s + a_1} \dots, \frac{1}{s + a_m} \right\} = K_M \text{diag} \left\{ \frac{1}{s + a_i} \right\}, \quad (2.4)$$

onde $a_i > 0$, ($i = 1, \dots, m$). Consideramos também $K_M = I$.

A trajetória desejada ou a saída do modelo de referência $y_M(t) \in \mathbb{R}^m$ é descrita pelo sistema de equações diferenciais conhecido,

$$y_M(t) = W_M(s) [r](t), \quad (2.5)$$

onde $r(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de sinais de referência externo, uniformemente limitado e contínuo por partes.

2.2 Hipóteses básicas

As seguintes hipóteses resumem as informações consideradas disponíveis a priori do sistema (Tao 2003):

- (H1) $G_0(s)$ é estritamente própria e com posto completo;
- (H2) Todos os zeros de transmissão de $G_0(s)$ tem parte real negativa;
- (H3) O índice de observabilidade ν de $G_0(s)$ é conhecido;
- (H4) $G_0(s)$ tem grau relativo $n^* = 1$;
- (H5) A matriz polinomial $P_0(s)$ tem grau igual ao índice de observabilidade de $G_0(s)$;
- (H6) Os sinais dos menores principais líderes da matriz de ganho de alta frequência K_p são conhecidos.

As hipóteses abaixo são relativas às dinâmicas não modeladas:

- (H7) $G_0(s)\Delta_m(s)$, $\Delta_a(s)$ são matrizes de transferências estritamente próprias (Tao 2003);
- (H8) As matrizes $D_m = \lim_{s \rightarrow \infty} sW_M(s)K_p\Delta_m(s)$ e $D_a = \lim_{s \rightarrow \infty} s\Delta_a(s)$ tem norma finita independente de μ e as matrizes de transferência $(s + a - q)(W_M(s - q)K_p\Delta_m(s - q) - D_m)s$ e $((s + a - q)\Delta_a(s - q) - D_a)s$ são estáveis e próprias, com limite superior dado pelo operador de norma \mathcal{L}_1 , independente de μ , para uma constante conhecida $0 < q < a$.

As hipóteses (H1) e (H2) garantem que a planta é não singular e de fase mínima, condição fundamental para o controle adaptativo por modelo de referência. A hipótese (H3) poderia ser relaxada requerendo somente o conhecimento de um limite superior para ν , como em (Ioannou & Sun 1996), entretanto isto aumentaria a ordem dos filtros e o número de parâmetros de adaptação. A hipótese (H4) permite aplicar o método de Lyapunov para analisar a estabilidade dos sinais do sistema. Embora a hipótese (H6)

possa ser relaxada (Weller & Goodwin 1994), essa garante simplicidade nos resultados para o esquema de controle baseado no MRAC e permite uma completa analogia com o caso SISO (Costa, Hsu, Imai & Kokotović 2003). As hipóteses **(H7)** e **(H8)**, quando satisfeitas, permitem usar a versão multivariável do lema 2.6, dado em (Tao 2003, p.71), durante o desenvolvimento da análise de robustez do algoritmo α -MRAC, no capítulo 7. Baseado nestas hipóteses é possível provar que o vetor de sinais, correspondentes às dinâmicas não modeladas, é limitado.

Exemplo 2.1 *Para ilustrar as dinâmicas não modeladas, considere a dinâmica aditiva*

$$\Delta_a(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{(\mu s + 1)(s + q)} \right\} + \text{diag} \left\{ \frac{1}{(s + a)} \right\} D_a, \quad (2.6)$$

onde $\Delta_a(s)$ é estritamente própria, conforme hipótese **(H7)**. Substituindo (2.6) na expressão da hipótese **(H8)**, teremos

$$\begin{aligned} ((s + a - q)\Delta_a(s - q) - D_a)s &= \\ &= (s + a - q) \left(\text{diag} \left\{ \frac{1}{(\mu(s - q) + 1)(s - q + q)} \right\} + \text{diag} \left\{ \frac{1}{(s - q + a)} \right\} D_a \right) s - D_a s \\ &= (s + a - q) \left(\text{diag} \left\{ \frac{s}{(\mu(s - q) + 1)s} \right\} + \text{diag} \left\{ \frac{s}{(s - q + a)} \right\} D_a \right) - D_a s \\ &= \text{diag} \left\{ \frac{(s + a - q)}{\mu(s - q) + 1} \right\} + D_a s - D_a s \\ &= \text{diag} \left\{ \frac{(s + a - q)}{\mu(s - q) + 1} \right\}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde a matriz de transferência (2.7) é estável e própria, para q conhecido e $0 < q < a$, satisfazendo a hipótese **(H8)**.

Capítulo 3

Algoritmo α -MRAC SISO

Este capítulo apresenta uma revisão do algoritmo α -MRAC aplicado a plantas lineares monovariáveis (SISO) invariantes no tempo, sem perturbações ou erros de modelagem dinâmica.

O algoritmo α -MRAC SISO foi introduzido por (Costa 1999). O algoritmo se caracteriza pela introdução de uma estimativa da derivada do erro, via um filtro de avanço *Lead*, na lei de adaptação dos parâmetros do controlador do MRAC. Para fundamentar a teoria do algoritmo, a propriedade de estabilidade, o comportamento do erro de rastreamento durante o transitório do sistema em malha fechada, são analisados. Simulações mostram uma notável melhoria da resposta transitória do sistema usando o α -MRAC SISO em comparação com a resposta transitória do sistema usando o MRAC padrão. Esta característica é a principal vantagem em aplicações.

O capítulo está organizado como segue. Na Seção 3.1 é revisto o controle adaptativo MRAC para sistemas SISO abordando a estrutura do sistema de controle, a parametrização do erro de rastreamento, o método de Lyapunov para obter a lei de adaptação que garante a estabilidade do sistema, e o comportamento do erro de rastreamento. Em seguida, na Seção 3.2 é revista a ideia básica do algoritmo α -MRAC para sistemas quando a derivada do erro é medida e formulada a lei de adaptação pela função de Lyapunov. Dando continuidade à revisão, a ideia básica é estendida para plantas cuja derivada do erro é indisponível para medição e a lei de adaptação é reformulada. A análise de estabilidade do sistema e o comportamento do rastreamento em malha fechada são apresentados na Seção 3.3. A partir das equações dinâmicas que descrevem o

sistema, o comportamento da resposta transitória do sistema é analisado na Seção 3.4, usando o método de perturbações singulares (Kokotović, Khalil & O'Reilly 1986). Na Seção 3.5, simulações ilustram a melhoria do comportamento transitório obtido com o algoritmo α -MRAC SISO.

3.1 Controle adaptativo por modelo de referência monovariável

Nesta seção, revemos a teoria básica do controle adaptativo por modelo de referência (MRAC).

3.1.1 Estrutura do controlador

Considere a planta nominal contínua LTI monovariável expressa no domínio da frequência

$$y(s) = G_0(s)u(s), \quad (3.1)$$

com a função de transferência $G_0(s) = k_p \frac{Z(s)}{P(s)}$, e descrita no domínio do tempo pela equação diferencial

$$P(s)[y](t) = k_p Z(s)[u](t), \quad (3.2)$$

onde, $y(t)$ é a saída mensurável da planta, $u(t)$ é a entrada aplicada a planta, $k_p \neq 0$ é o ganho de alta frequência, $P(s)$ e $Z(s)$ são polinômios mônicos coprimos:

$$P(s) = s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \cdots + p_1s + p_0 \quad (3.3)$$

$$Z(s) = s^m + z_{m-1}s^{m-1} + \cdots + z_1s + z_0, \quad (3.4)$$

onde $p_i \in \mathbb{R}$, ($i = 0, 1, \dots, n-1$), $z_j \in \mathbb{R}$, ($j = 0, 1, \dots, m-1$), com $n > m$, são coeficientes constantes e desconhecidos, assim como k_p .

O objetivo do controle é: dado um modelo de referência no domínio da frequência,

$$y_m(s) = W_m(s)r(s), \quad (3.5)$$

com a função de transferência $W_m(s)$, e descrita no domínio do tempo pela equação

diferencial

$$y_m(t) = W_m(s)[r](t), \quad (3.6)$$

onde, $y_m(t)$ é a saída mensurável (trajetória desejada) do modelo e $r(t)$ é a entrada de referência uniformemente limitada e contínua por partes, obter um sinal de controle via realimentação de saída, tal que todos os sinais do sistema em malha fechada sejam uniformemente limitados e a saída da planta $y(t)$ rastreie a saída do modelo de referência $y_m(t)$ assintoticamente quando $t \rightarrow \infty$.

O conjunto de hipóteses abaixo resume o conhecimento a priori da planta, (Bodson & Sastry 1989)(Tao 2003):

(A1) $Z(s)$ é um polinômio estável,

(A2) O grau n de $P(s)$ é conhecido,

(A3) $G_0(s)$ tem grau relativo $n - m = n^* = 1$,

(A4) O sinal do ganho de alta frequência k_p é conhecido.

Com relação ao modelo de referência assume-se que:

(A5) $W_m(s) = \frac{N_m(s)}{P_m(s)}$ é estritamente própria, estável, de fase mínima e grau relativo $n^* = 1$, onde $N_m(s)$ e $P_m(s)$ são polinômios mônicos, coprimos e estáveis.

(A6) $P_m(s)$ tem grau n^* .

Em vista de (A3), (A5) e (A6), definimos $W_m(s) = \frac{1}{P_m(s)}$, onde

$$P_m(s) = s + a_m, \quad (3.7)$$

com $a_m > 0$.

Para atingir o objetivo do controle consideramos a seguinte estrutura para o controlador,

$$u(t) = \theta_1^T w_1(t) + \theta_2^T w_2(t) + \theta_3 y(t) + \theta_4 r(t), \quad (3.8)$$

onde,

$$w_1(t) = \frac{a(s)}{\Lambda(s)}[u](t) \quad , \quad w_2(t) = \frac{a(s)}{\Lambda(s)}[y](t), \quad (3.9)$$

$a(s) = [1, s, \dots, s^{n-2}]^T$, $\theta_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\theta_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\theta_3 \in \mathbb{R}$ e $\theta_4 \in \mathbb{R}$ são parâmetros, e $\Lambda(s) = \lambda_0 + \lambda_1 s + \dots + s^{n-1}$ é um polinômio mônico estável de grau $n - 1$.

Se os coeficientes de $G_0(s)$ são conhecidos, então os parâmetros do controlador θ_1 , θ_2 , θ_3 e θ_4 são obtidos da solução da seguinte equação

$$\theta_1^{*T} a(s)P(s) + (\theta_2^{*T} a(s) + \theta_3^* \Lambda(s)) k_p Z(s) = \Lambda(s) (P(s) - k_p \theta_4^* Z(s) P_m(s)), \quad (3.10)$$

onde $\theta_i = \theta_i^*$, ($i = 1, \dots, 4$), são denominados parâmetros ideais ou *matching parameters*, e a equação (3.10) é chamada equação ideal ou *matching equation*.

A existência e a unicidade da solução de (3.10) é provada no Lema 3.1, dado em (Tao 2003, p.197).

Com o conjunto de parâmetros ideais o controlador (3.8) realiza o rastreamento da saída da planta (3.2), em malha fechada, com a saída do modelo de referência (3.6). Portanto, quando $G_0(s)$ é conhecido, a solução do controle não adaptativo por modelo de referência é resumido pelo seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Com θ_1^* , θ_2^* , θ_3^* e θ_4^* satisfazendo (3.10) e $\theta_1 = \theta_1^*$, $\theta_2 = \theta_2^*$, $\theta_3 = \theta_3^*$ e $\theta_4 = \theta_4^*$, o controlador (3.8) assegura que todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados e o erro de rastreamento é tal que,*

$$e_0(t) = y(t) - y_m(t) = \epsilon_0(t), \quad (3.11)$$

para alguma condição inicial com decaimento exponencial $\epsilon_0(t)$.

Prova: (Tao 2003). Multiplicando ambos os lados de (3.10) por $y(t)$, teremos

$$\begin{aligned} \theta_1^{*T} a(s)P(s)[y](t) + (\theta_2^{*T} a(s) + \theta_3^* \Lambda(s)) k_p Z(s)[y](t) &= \\ = \Lambda(s) (P(s) - k_p \theta_4^* Z(s) P_m(s)) [y](t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Substituindo $y(t)$ de (3.2) em (3.12), e rearranjando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \theta_1^{*T} a(s)k_p Z(s)[u](t) + (\theta_2^{*T} a(s) + \theta_3^* \Lambda(s)) k_p Z(s)[y](t) &= \\ = \Lambda(s)k_p Z(s)[u](t) - \Lambda(s)k_p \theta_4^* Z(s) P_m(s)[y](t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dado que $\Lambda(s)$ e $Z(s)$ são estáveis, a equação (3.13) pode ser expressa como

$$u(t) = \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [u](t) + \theta_2^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [y](t) + \theta_3^* y(t) + \theta_4^* P_m(s) [y](t). \quad (3.14)$$

Com $\theta_1 = \theta_1^*$, $\theta_2 = \theta_2^*$, $\theta_3 = \theta_3^*$ e $\theta_4 = \theta_4^*$, o controlador (3.8) torna-se

$$u^*(t) = \theta_1^{*T} w_1(t) + \theta_2^{*T} w_2(t) + \theta_3^* y(t) + \theta_4^* r(t). \quad (3.15)$$

Usando (3.6) e (3.9), e fixando, no caso ideal, $u(t) = u^*$ dados em (3.14) e (3.15), respectivamente, teremos

$$\theta_4^* P_m [y - y_m](t) = 0. \quad (3.16)$$

Visto que $P_m(s)$ é estável, por (3.16) provamos (3.11), o que implica $y(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Usando (3.2), (3.16), resulta

$$\theta_4^* P_m(s) [y](t) = \theta_4^* P_m(s) k_p \frac{Z(s)}{P(s)} [u](t) = \theta_4^* P_m(s) [y_m](t). \quad (3.17)$$

De onde tiramos

$$u(t) = \frac{P(s)}{k_p P_m(s) Z(s)} r(t), \quad (3.18)$$

a qual implica $u(t) \in \mathcal{L}_\infty$ porque $\frac{P(s)}{k_p P_m(s) Z(s)}$ são estáveis e $r(t)$ é limitado. Visto que $y(t)$ e $u(t)$ são limitados, as saídas dos filtros $w_1(t)$ e $w_2(t)$ são limitadas. ■

A existência dos parâmetros ideais é suficiente para o desenvolvimento das estratégias de controle adaptativo quando os parâmetros da planta são desconhecidos (Tao 2003, p.200).

3.1.2 Parametrização do erro de rastreamento

Quando os parâmetros da planta são desconhecidos, não podemos resolver (3.10) com θ_1^* , θ_2^* , θ_3^* e θ_4^* e o controlador ideal (3.15) não pode ser implementado. Então é necessário encontrar uma lei de adaptação para atualizar os parâmetros de (3.8) para resolver este problema.

Considerando $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$ e $\theta_4(t)$, as estimativas variantes no tempo de θ_1^* , θ_2^* ,

θ_3^* e θ_4^* , definimos a versão adaptativa do controlador (3.8) como

$$u(t) = \theta_1^T(t)w_1(t) + \theta_2^T(t)w_2(t) + \theta_3(t)y(t) + \theta_4(t)r(t). \quad (3.19)$$

Para parametrizar o erro de rastreamento definimos,

o vetor de parâmetros ideais

$$\theta^* = [\theta_1^{*T}, \theta_2^{*T}, \theta_3^*, \theta_4^{*T}]^T, \quad (3.20)$$

o vetor de parâmetros adaptativos

$$\theta(t) = [\theta_1^T(t), \theta_2^T(t), \theta_3(t), \theta_4(t)]^T, \quad (3.21)$$

o vetor regressor

$$w(t) = [w_1^T(t), w_2^T(t), y(t), r(t)]^T, \quad (3.22)$$

a lei de controle ideal

$$u^*(t) = \theta^{*T}w(t), \quad (3.23)$$

a lei de controle adaptativa

$$u(t) = \theta^T(t)w(t), \quad (3.24)$$

o erro paramétrico

$$\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - \theta^*, \quad (3.25)$$

o erro do sinal de controle

$$\tilde{u}(t) = \tilde{\theta}^T(t)w(t), \quad (3.26)$$

e o erro de rastreamento

$$e_0(t) = y(t) - y_m(t). \quad (3.27)$$

Substituindo (3.14) em (3.19) e ignorando o efeito do decaimento exponencial da condição inicial, obtemos a equação do erro

$$e_0(t) = k_p W_m(s) [\tilde{\theta}^T w](t) = -k_p \left(\theta^{*T} \frac{1}{P_m(s)} [w](t) - \frac{1}{P_m(s)} [\theta^T w](t) \right), \quad (3.28)$$

a qual é a base do desenvolvimento da lei de adaptação para a atualização dos parâmetros $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\theta_3(t)$, e $\theta_4(t)$ do controlador.

3.1.3 Análise de estabilidade do MRAC

Considere uma realização mínima de $W_m(s)$, em (3.28), descrita pela equação dinâmica

$$\dot{e}_0(t) = -a_m e_0(t) + b\nu(t), \quad (3.29)$$

onde, $\nu(t) = k_p \tilde{\theta}^T(t) w(t)$ é a entrada. Escolhendo a seguinte função positiva definida

$$2V(e_0, \tilde{\theta}) = e_0^2(t) + \gamma^{-1} |k_p| \tilde{\theta}^T(t) \tilde{\theta}(t), \quad (3.30)$$

e derivando no tempo (3.30), ao longo da trajetória do sistema (3.29), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_0(t) \dot{e}_0(t) + \gamma^{-1} |k_p| \tilde{\theta}^T(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \\ &= -e_0^2(t) + e_0(t) k_p \tilde{\theta}^T(t) w(t) + \gamma^{-1} |k_p| \tilde{\theta}^T(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \\ &= -e_0^2(t) + |k_p| \tilde{\theta}^T(t) \gamma^{-1} \left(\gamma \text{sign}(k_p) e_0(t) w(t) + \dot{\tilde{\theta}}(t) \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

De (3.31), definimos a lei de adaptação

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma \text{sign}(k_p) w(t) e_0(t), \quad (3.32)$$

onde, $\gamma > 0$ é o ganho de adaptação e $\tilde{\theta}(0)$ é uma estimativa inicial (arbitrária) de θ^* , tal que substituindo (3.32) em (3.31),

$$\dot{V}(t) = -e_0^2(t) \quad (3.33)$$

é seminegativa definida.

Visto que a lei de adaptação assegura que $\dot{V}(t) \leq 0$, para todo $e(t)$, $\tilde{\theta}(t)$, com $V(t) > 0$, conclui-se que $V(e_0(t), \tilde{\theta}(t))$ não cresce com t , isto é $V(e_0(t), \tilde{\theta}(t)) \leq V(e_0(0), \tilde{\theta}(0))$, $\forall t \geq 0$. Portanto, $e_0(t)$ e $\tilde{\theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, ou seja, existe uma constante $\gamma_0 > 0$ tal que $|e_0(t)| \leq \gamma_0$ e $|\tilde{\theta}(t)| \leq \gamma_0$. Como θ^* é constante, de (3.25), $\theta(t)$ é também uniformemente limitado. Dado que, $r(t) \in \mathcal{L}_\infty$ implica $y_m(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Portanto, da definição

do erro de rastreamento (3.27), $y(t)$ e conseqüentemente $w_2(t)$, em (3.9), são também uniformemente limitados. Operando ambos os lados da planta (3.2) por $\frac{a(s)}{\Lambda(s)}$ obtemos (Tao 2003),

$$\frac{a(s)}{\Lambda(s)}[u](t) = \frac{P(s)}{k_p Z(s)} \frac{a(s)}{\Lambda(s)}[y](t). \quad (3.34)$$

Dado que a função de transferência $\frac{P(s)}{k_p Z(s)} \frac{a(s)}{\Lambda(s)}$ é estável e própria pela hipótese **(A3)**, então a saída do filtro em (3.9) $w_1(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Sendo $w_1(t), w_2(t), y(t), r(t) \in \mathcal{L}_\infty$, o vetor regressor $w(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e $\theta(t) \in \mathcal{L}_\infty$, então $u(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e pela lei de adaptação $\dot{\theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Por fim, de (3.29) $\dot{e}_0(t)$ é uniformemente limitado. Pelo exposto, concluímos que todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados.

Agora, integrando (3.33) verificamos que a energia de $e_0(t)$ é finita,

$$\int_0^\infty e_0^2(t) dt = \left(V(e_0(0), \tilde{\theta}(0)) - V(e_0(\infty), \tilde{\theta}(\infty)) \right) < \infty, \quad (3.35)$$

logo $e_0(t) \in \mathcal{L}_2$, então $e_0(t) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$. Visto que $\dot{e}_0(t) \in \mathcal{L}_\infty$, pelo lema de Barbalat (Sastry & Bodson 1989) concluímos que $\lim_{t \rightarrow \infty} e_0(t) = 0$ e, conseqüentemente, de (3.32), $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}(t) = 0$. A análise apresentada acima pode ser resumida no seguinte teorema:

Teorema 3.2 *O controlador (3.19) com a lei de adaptação (3.32) aplicado à planta (3.2) satisfazendo as hipóteses **(A1)** a **(A4)**, garante que todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados e o erro de rastreamento $e_0(t)$ e tende assintoticamente a zero quando $t \rightarrow \infty$.*

Cabe ressaltar que $V(e_0(t), \tilde{\theta}(t))$ contém apenas o erro paramétrico $\tilde{\theta}(t)$ e o erro de rastreamento $e_0(t)$, portanto, não considera todos os estados da dinâmica do sistema do erro de rastreamento (3.28). Esta função é denominada função parcial de Lyapunov. Pelo exposto, foi provada a convergência assintótica do erro de rastreamento para zero, e assegurada a propriedade de estabilidade do sistema em malha fechada, usando a lei de controle (3.19), e a lei de adaptação (3.32).

3.2 Algoritmo α -MRAC

Nesta seção, é descrita a modificação do esquema de controle adaptativo MRAC, a qual corresponde à introdução de um filtro de avanço *Lead* no sinal do erro de rastreamento, como mostrado na figura 3.1, e o sinal resultante é incorporado à lei de adaptação. Esta nova estrutura leva a uma significativa melhoria do transitório do sinal do erro de rastreamento, quando comparado com a estrutura do MRAC padrão. O algoritmo foi denominado α -MRAC SISO (Costa 1999).

Para apresentar o algoritmo, primeiro é mostrada a idéia básica supondo que a derivada do erro de rastreamento pode ser medida. Em seguida esta restrição é eliminada, visto que em geral este sinal não é disponível para medição. Para fundamentar o algoritmo, a propriedade de estabilidade e o comportamento transitório do erro de rastreamento são analisados. Simulações mostram a eficiência do algoritmo em reduzir drasticamente as oscilações do transitório do erro de rastreamento.

Considere a princípio que a derivada do erro ($\dot{e}_0(t)$) pode ser medida. Então, da equação (3.28) podemos obter o sinal

$$f(t) := k_p \tilde{\theta}^T(t) w(t) = W_m^{-1}[e_0](t) = \dot{e}_0(t) + a_m e_0(t), \quad (3.36)$$

o qual não depende do conhecimento de k_p , visto que a função $W_m(s)$ é conhecida. Agora, tendo em vista a função $\dot{V}(e, \tilde{\theta})$ em (3.31), foi proposta por (Costa 1999) a seguinte modificação em (3.32), a qual caracteriza a lei de adaptação do algoritmo α -MRAC SISO,

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma \text{sign}(k_p)[e_0(t) + \alpha f(t)]w(t), \quad (3.37)$$

onde α é uma constante positiva.

Substituindo a lei de adaptação (3.37) em (3.31) resulta,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -e_0^2(t) + |k_p| \tilde{\theta}^T(t) \gamma^{-1} \left(\gamma \text{sign}(k_p) e_0(t) w(t) + \dot{\tilde{\theta}}(t) \right) \\ &= -e_0^2(t) + |k_p| \tilde{\theta}^T(t) \gamma^{-1} (\gamma \text{sign}(k_p) e_0(t) w(t) - \gamma \text{sign}(k_p) [e_0(t) + \alpha f(t)] w(t)) \\ &= -e_0^2(t) - |k_p| \tilde{\theta}^T(t) \gamma^{-1} \gamma \text{sign}(k_p) \alpha f(t) w(t) \\ &= -e_0^2(t) - \alpha k_p \tilde{\theta}^T(t) w(t) f(t). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Substituindo a expressão do sinal $f(t)$ em (3.38) obtemos a função seminegativa definida,

$$\dot{V}(t) = -e^2(t) - \alpha \left(k_p \tilde{\theta}^T(t) w(t) \right)^2. \quad (3.39)$$

Portanto, a lei de adaptação (3.37) garante $\dot{V}(t) \leq 0$ e que o sistema é no mínimo globalmente uniformemente estável.

De (3.39) observamos que, enquanto a lei de adaptação do algoritmo MRAC (3.32) elimina o termo que contém o vetor de erros paramétricos $\tilde{\theta}(t)$ forçando o seu cancelamento, a lei de adaptação do algoritmo α -MRAC SISO o mantém na análise, completando o seu quadrado (Costa 1999). A propriedade de estabilidade do sistema e o comportamento do erro de rastreamento são enunciados no seguinte teorema.

Teorema 3.3 *O controlador (3.19) com a lei de adaptação (3.37) aplicados à planta (3.2) garante que todos os sinais em malha fechada sejam uniformemente limitados, e*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_0(t) = 0 \quad e \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}^T(t) w(t) = 0. \quad (3.40)$$

Prova: (Costa 1999) Integrando (3.39), obtemos

$$\int_0^\infty e_0^2(t) dt + \alpha k_p \int_0^\infty (\tilde{\theta}^T(t) w(t))^2 dt = \frac{1}{2} \left(V(e_0(0), \tilde{\theta}(0)) - V(e_0(\infty), \tilde{\theta}(\infty)) \right) < \infty, \quad (3.41)$$

de onde verificamos que a energia de $e_0(t)$ e $\tilde{\theta}^T(t) w(t)$ são finitas,

$$\int_0^\infty e_0^2(t) dt \leq \infty \quad e \quad \int_0^\infty (\tilde{\theta}^T(t) w(t))^2 dt \leq \infty. \quad (3.42)$$

Então, $e_0(t) \in \mathcal{L}_2$ e $\tilde{\theta}^T w \in \mathcal{L}_2$.

Seguindo os mesmos argumentos usados na análise do controle adaptativo MRAC, temos que $e_0(t)$, $\tilde{\theta}(t)$, $y(t)$, $\theta(t)$ e $w(t) \in \mathcal{L}_\infty$. De (3.42), $e_0(t)$ e $\tilde{\theta}^T(t) w(t) \in \mathcal{L}_2$. Então, $e_0(t)$ e $\tilde{\theta}^T(t) w(t) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$. De (3.29), $\dot{e}_0(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e de (3.34), $u(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Portanto, pelo lema de Barbalat concluímos que $\lim_{t \rightarrow \infty} e_0(t) = 0$ que implica $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\theta}}(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}^T(t) w(t) = 0$. ■

Da análise acima, é importante observar que $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}^T(t) w(t) = 0$ independentemente de persistência de sinal. Esta característica introduzida pelo algoritmo α -MRAC SISO é fundamental no comportamento do transitório do sistema e como esperado, a

convergência de $\tilde{\theta}(t)$ para zero depende de $w(t)$.

Para contornar o problema da indisponibilidade da medida de $\dot{e}_0(t)$ usamos um filtro de primeira ordem para observá-lo, tal que

$$\tau \dot{\hat{e}}_0(t) = -\hat{e}_0(t) + e_0(t), \quad (3.43)$$

onde $\hat{e}_0(t)$ é uma estimativa de $e_0(t)$. Então, substituindo $e_0(t)$, dado em (3.36), pela sua estimativa $\hat{e}_0(t)$, obtemos a estimativa $\hat{f}(t)$ de $f(t)$ como

$$\hat{f}(t) = \frac{W_m^{-1}(s)}{\tau s + 1} [e_0](t) = W_m^{-1}(s) [\hat{e}_0](t) = \dot{\hat{e}}_0(t) + a_m \hat{e}_0(t). \quad (3.44)$$

Substituindo $f(t)$, de (3.37), pela sua estimativa $\hat{f}(t)$, teremos a seguinte lei de adaptação

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma \text{sign}(k_p) [e_0(t) + \alpha \hat{f}(t)] w(t). \quad (3.45)$$

De (3.45), definimos o erro de rastreamento filtrado como

$$e_f(t) = e_0(t) + \alpha \hat{f}(t), \quad (3.46)$$

e substituindo (3.44) em (3.46), obtemos

$$e_f(t) = \left(1 + \alpha \frac{W_m^{-1}}{\tau s + 1} \right) [e_0](t) = Q(s) [e_0](t), \quad (3.47)$$

onde

$$Q(s) = \left(1 + \alpha \frac{W_m^{-1}}{\tau s + 1} \right). \quad (3.48)$$

Expandindo $Q(s)$, teremos

$$Q(s) = \left(\frac{\tau + \alpha}{\tau} \right) \left(\frac{s + \frac{1 + \alpha a_m}{\tau + \alpha}}{s + \frac{1}{\tau}} \right). \quad (3.49)$$

$Q(s)$ é uma função própria, estável e SPR pois satisfaz as condições dadas na Seção 1.5. A Figura 3.1 mostra o diagrama de blocos do algoritmo α -MRAC SISO.

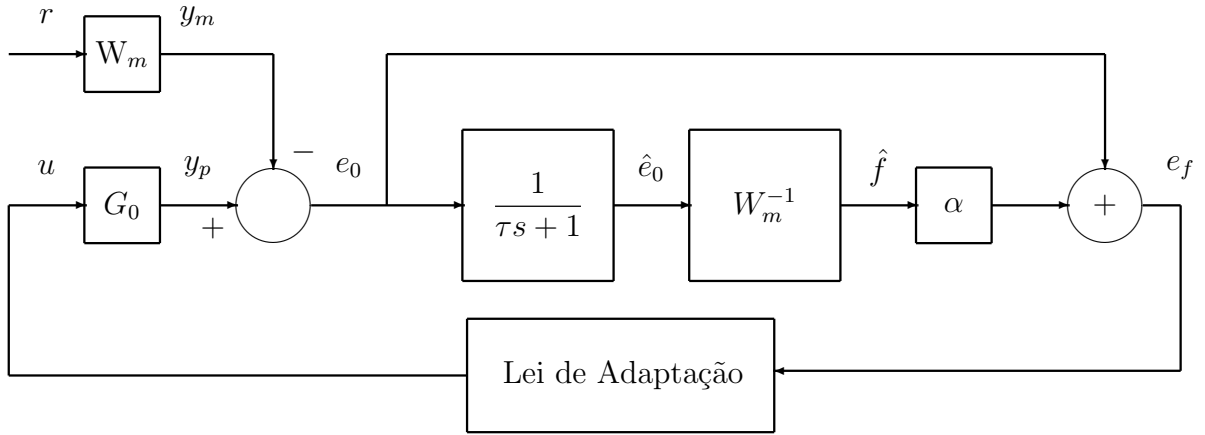


FIGURA 3.1: Diagrama de blocos do α -MRAC SISO.

De (3.44) podemos verificar que

$$\hat{f}(t) = \frac{\tau \dot{\hat{e}}_0(t) + \tau a_m \hat{e}_0(t)}{\tau} = \frac{e_0(t) + (\tau a_m - 1) \hat{e}_0(t)}{\tau}. \quad (3.50)$$

Então, se escolhermos $\tau a_m = 1$, o filtro em avanço de fase é cancelado,

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\tau} e_0(t) = a_m e_0(t),$$

e a lei de adaptação (3.37) torna-se igual a do MRAC padrão, isto é,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}(t) &= -\gamma \text{sign}(k_p) (1 + \alpha a_m) e_0(t) w(t) \\ &= -\gamma' \text{sign}(k_p) e_0(t) w(t). \end{aligned}$$

onde $\gamma' = \gamma(1 + \alpha a_m)$.

3.3 Análise de estabilidade

Considere a dinâmica do erro de rastreamento (3.36), a estimativa \hat{e}_0 (3.43) e o filtro em avanço, (3.44). A figura 3.2 mostra o diagrama de blocos correspondente, de onde podemos observar que,

$$\hat{f}(t) = T(s)f(t), \quad (3.51)$$

onde,

$$T(s) = \frac{1}{\tau s + 1}. \quad (3.52)$$

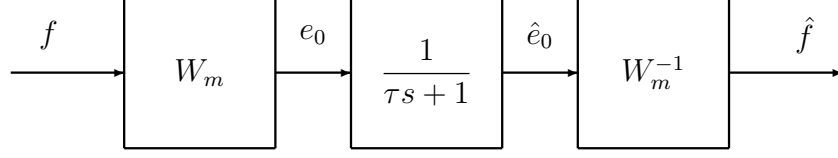


FIGURA 3.2: Diagrama de blocos mostrando a relação entre f e \hat{f} .

Agora, escrevemos o conjunto de equações que descrevem o sistema

$$\dot{e}_0(t) = -a_m e_0(t) + f(t), \quad (3.53)$$

$$\tau \dot{\hat{f}}(t) = -\hat{f}(t) + f(t), \quad (3.54)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma \text{sign}(k_p) [e_0(t) + \alpha \hat{f}(t)] w(t), \quad (3.55)$$

e definimos uma função positiva definida como

$$2V(e_0, \hat{f}, \tilde{\theta}) = e_0^2(t) + \alpha \tau \hat{f}^2(t) + \gamma^{-1} |k_p| \tilde{\theta}^T(t) \tilde{\theta}(t). \quad (3.56)$$

Derivando $V(t)$, em (3.56), ao longo da trajetória do sistema (3.53)-(3.55), resulta

$$2\dot{V}(t) = 2e_0(t)\dot{e}_0(t) + 2\alpha\tau\hat{f}(t)\dot{\hat{f}}(t) + 2\gamma^{-1}|k_p|\tilde{\theta}^T(t)\dot{\tilde{\theta}}(t).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_0(t)(-a_m e_0(t) + f(t)) + \alpha \hat{f}(t)(-\hat{f}(t) + f(t)) + \\ &+ \gamma^{-1} |k_p| \tilde{\theta}^T(t) (-\gamma \text{sign}(k_p) [e_0(t) + \alpha \hat{f}(t)] w(t)) \\ &= -a_m e_0^2(t) - \alpha \hat{f}^2(t) + e_0(t)f(t) + \alpha \hat{f}(t)f(t) - k_p \tilde{\theta}^T(t) e_0(t) w(t) - \\ &- k_p \tilde{\theta}^T(t) \alpha \hat{f}(t) w(t) \\ &= -a_m e_0^2(t) - \alpha \hat{f}^2(t) + e_0(t)f(t) + \alpha \hat{f}(t)f(t) - e_0(t)f(t) - \alpha \hat{f}(t)f(t) \\ &= -a_m e_0^2(t) - \alpha \hat{f}^2(t), \end{aligned} \quad (3.57)$$

a qual é negativa semidefinida no espaço $(e_0, \hat{f}, \tilde{\theta})$. Portanto, o algoritmo α -MRAC é

no mínimo globalmente uniformemente estável para $\tau > 0$, $\alpha \geq 0$ e $\gamma > 0$. Seguindo a mesma sequência lógica usada na análise de estabilidade quando o sinal \dot{e}_0 é medido, concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_0(t) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{f}(t) = 0. \quad (3.58)$$

Dado que $\tilde{\theta}(t)$ e $w(t) \in \mathcal{L}_\infty$, da definição de $f(t)$, em (3.36), implica $f(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e $\dot{e}_0(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Consequentemente, de (3.54), $\dot{f}(t)$ é limitado. Considerando $\dot{r}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, obtemos $\dot{y}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, o que implica em $\dot{w}_2(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e $\dot{w}_1(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Consequentemente $\dot{w}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, então $\dot{u}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e $\dot{f}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Portanto, pelo lemma(1.2) (Barbalat), obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}^T(t)w(t) = 0. \quad (3.59)$$

3.4 Análise do transitório

Para analisar o comportamento da resposta transitória do sistema não linear em malha fechada (3.53)-(3.55) usamos o *Método das Perturbações Singulares* (Kokotović et al. 1986). O Método das perturbações singulares identifica escalas de tempo diferentes para sistemas dinâmicos caracterizados pela presença de dois tipos de comportamento transitório, um lento e outro rápido, quando excitados por entradas externas.

As respostas lentas são aproximadas pelo modelo reduzido ou *quasi-steady-state*, o qual, em muitas aplicações, são dominantes e governam a dinâmica do sistema em regime permanente. A discrepância entre a resposta do modelo reduzido e o modelo completo corresponde ao transitório das dinâmicas rápidas do sistema. O objetivo principal desta análise é obter um modelo reduzido do erro de rastreamento. Para validar esta aproximação, analisamos os estados com transitórios rápidos durante a camada limite. Espera-se que a correção da camada limite (desvio) decaia exponencialmente para zero.

3.4.1 Modelo reduzido

O conjunto de equações diferenciais que descrevem o sistema considerado nesta análise é o mesmo usado no estudo da estabilidade da Seção 3.3,

$$\dot{e}_0(t) = -a_m e_0(t) + f(t), \quad (3.60)$$

$$\tau \dot{\hat{f}}(t) = -\hat{f}(t) + f(t), \quad (3.61)$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = -\gamma \text{sign}(k_p) [e_0(t) + \alpha \hat{f}(t)] w(t), \quad (3.62)$$

considerando o $\text{sign}(k_p) > 0$ (**A4**), para simplificar. Reescrevendo (3.62) como

$$\gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}(t) = -(e_0(t) + \alpha \hat{f}(t)) w(t), \quad (3.63)$$

o conjunto de equações diferenciais, abaixo, se encontra na forma adequada, para aplicarmos o método das perturbações singulares,

$$\dot{e}_0(t) = -a_m e_0(t) + f(t), \quad (3.64)$$

$$\tau \dot{\hat{f}}(t) = -\hat{f}(t) + f(t), \quad (3.65)$$

$$\gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}(t) = -[e_0(t) + \alpha \hat{f}(t)] w(t).. \quad (3.66)$$

Os sistemas físicos, em geral, são representados por equações diferenciais cujos coeficientes são combinações dos parâmetros do sistema. Neste caso, para as equações diferenciais (3.64)-(3.66), o parâmetro ε corresponde aos coeficientes de $\dot{\hat{f}}(t)$ e $\dot{\hat{\theta}}(t)$, tal que $\varepsilon = \tau = \frac{1}{\gamma}$. Portanto,

$$\tau \gamma = 1. \quad (3.67)$$

Esta equação introduz uma relação importante entre os parâmetros do projeto do algoritmo α -MRAC, onde um ε pequeno, tanto quanto possível, corresponde a uma constante de tempo suficientemente pequena e a um ganho de adaptação suficientemente grande.

Substituindo ε no sistema, teremos

$$\dot{e}_0(t) = -a_m e_0(t) + f(t), \quad (3.68)$$

$$\varepsilon \dot{\hat{f}}(t) = -\hat{f}(t) + f(t), \quad (3.69)$$

$$\varepsilon \dot{\hat{\theta}}(t) = -[e_0(t) + \alpha \hat{f}(t)]w(t). \quad (3.70)$$

Substituindo $\varepsilon = 0$ o sistema torna-se

$$\dot{\bar{e}}_0(t) = -a_m \bar{e}_0(t) + \bar{f}(t), \quad (3.71)$$

$$0 = -\tilde{f}(t) + \bar{f}(t), \quad (3.72)$$

$$0 = \bar{e}_0(t) + \alpha \tilde{f}(t), \quad (3.73)$$

onde a barra superior indica que as variáveis pertencem ao sistema com $\varepsilon = 0$, e as equações diferenciais (3.69)-(3.70) degeneram-se em equações algébricas ou transcendentais (3.72) e (3.73).

Uma das hipóteses básicas deste método diz que no domínio de interesse de (3.72) e (3.73) existam $k \geq 1$ raízes reais e distintas. Neste caso, tem-se

$$\bar{f}(t) = -\frac{1}{\alpha} \bar{e}_0(t), \quad (3.74)$$

cujas soluções são reais e distintas, o que implica $k = 1$.

Esta hipótese assegura que para cada raiz obtida do conjunto de equações (3.72) e (3.73), existe um modelo reduzido com a dimensão da equação (3.68). Se a hipótese é satisfeita, o sistema (3.68)-(3.70) é dito estar na forma padrão (*standard form*).

Para obter o modelo reduzido substituímos (3.74) em (3.71), tal que

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_0(t) &= -a_m \bar{e}_0(t) - \frac{1}{\alpha} \bar{e}_0(t) \\ &= -(a_m + \frac{1}{\alpha}) \bar{e}_0(t), \end{aligned} \quad (3.75)$$

com a condição inicial do estado $\bar{e}_0(t)$ igual a do estado original $e_0(t)$, isto é, $\bar{e}_0(t_0) = e_0(t_0) = e_0^0$. Definindo $a_0 = a_m + \frac{1}{\alpha}$ e substituindo em (3.75), obtemos o modelo

reduzido do sistema como

$$\dot{\bar{e}}_0(t) = -a_0 \bar{e}_0(t), \quad \bar{e}_0(t_0) = e_0^0. \quad (3.76)$$

A solução de (3.76) é

$$\bar{e}_0(t) = -\bar{e}_0(t_0)e^{-a_0(t-t_0)}, \quad (3.77)$$

de onde concluímos que o modelo reduzido do erro de rastreamento converge exponencialmente para zero, quando $t \rightarrow \infty$, se $a_0 > 0$. A taxa de convergência depende da escolha apropriada dos parâmetros a_m e α .

Agora, substituindo a definição de a_0 em (3.77), e $\bar{e}_0(t)$ em (3.74), obtemos

$$\bar{f}(t) = k_1 \bar{e}_0(t_0) e^{-(am + \frac{1}{\alpha})t}, \quad (3.78)$$

onde

$$k_1 = \frac{1}{\alpha}. \quad (3.79)$$

Considerando a aproximação do modelo reduzido o sinal $f(t)$, dada em (3.36), pode ser redefinido como

$$\bar{f}(t) = k_p \bar{\theta}^T(t) w(t). \quad (3.80)$$

De (3.80) definimos $\bar{u}(t) = \bar{\theta}^T(t) w(t)$, o qual decai exponencialmente para zero. Isto significa que no modelo reduzido o erro do sinal de controle $\tilde{u}(t) \rightarrow 0$, o que implica $u(t) \rightarrow u^*$ de forma exponencial, onde u^* é o sinal de controle ideal. Portanto, o algoritmo α -MRAC SISO pode estimar u^* (exponencialmente), quando $\varepsilon \approx 0$, sem ter que identificar os parâmetros ideais θ^* .

3.4.2 Comportamento da camada limite

Para analisar o regime transitório rápido vamos estudar o comportamento do estado do sistema (3.71)-(3.73) durante a camada limite.

Os estados $\hat{f}(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$ foram excluídos do modelo reduzido (3.76) e substituídos, no sistema com $\varepsilon = 0$, pelos estados quase estáticos $\bar{\hat{f}}(t)$ e $\bar{\tilde{\theta}}(t)$. Em contraste com os estados originais $\hat{f}(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$, se iniciarmos o sistema em t_0 com as condições iniciais $\hat{f}(t_0) = \hat{f}^0$ e $\tilde{\theta}(t_0) = \tilde{\theta}^0$ as variáveis quase estáticas $\bar{\hat{f}}(t_0)$ e $\bar{\tilde{\theta}}(t_0)$ não iniciam em \hat{f}^0

e $\tilde{\theta}^0$ e pode haver uma grande discrepância entre o valor inicial de $\hat{f}(t_0)$ e $\tilde{\theta}(t_0)$, que satisfazem as equações transcendentais (3.72) e (3.73), reescrita de forma compacta como

$$0 = g(\bar{e}_0(t_0), \hat{f}(t_0), \tilde{\theta}(t_0), t_0), \quad (3.81)$$

e o valor das condições iniciais de $\hat{f}(t_0)$ e $\tilde{\theta}(t_0)$.

Então, $\hat{f}(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$ não podem ser uma aproximação uniforme de $\hat{f}(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$. O melhor que se pode esperar é que a aproximação,

$$\hat{f}(t) = \tilde{f}(t) + O(\varepsilon), \quad (3.82)$$

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(t) + O(\varepsilon), \quad (3.83)$$

se mantenham no intervalo $t \in [t_1, T]$, onde $t_1 > t_0$, e $O(\varepsilon)$ é a ordem de grandeza do erro de aproximação de $\hat{f}(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$ para $\tilde{f}(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$, respectivamente.

Por outro lado, considere que a variável quase estática $\bar{e}_0(t)$ inicie em t_0 com a condição inicial e_0^0 , então uma aproximação de $e_0(t)$ por $\bar{e}_0(t)$ pode ser uniforme, tal que

$$e_0(t) = \bar{e}_0(t) + O(\varepsilon), \quad (3.84)$$

e mantenha ao longo do intervalo $[t_0, T]$.

A aproximação (3.82) e (3.83) considera que durante o intervalo inicial $[t_0, t_1]$, que corresponde ao período de existência da camada limite, as variáveis originais $\hat{f}(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$ tendam para $\tilde{f}(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$, respectivamente, e mantenham-se em $\tilde{f}(t)$ e $\tilde{\theta}(t)$, até o fim do intervalo $[t_1, T]$.

Para iniciar a análise durante a camada limite, o tempo é parametrizado por ε , tal que a nova variável para o tempo é dada por,

$$\tilde{\tau} = \frac{t - t_0}{\varepsilon}, \quad \tilde{\tau} = 0 \quad \text{para} \quad t = t_0. \quad (3.85)$$

A variável $\tilde{\tau}$ corresponde ao período virtualmente dilatado (*stretch*) da camada limite, isto é, se ε tende a zero, $\tilde{\tau}$ tende a infinito mesmo para um incremento infinitesimal de t maior que t_0 . Agora, enquanto $\hat{f}(t)$, $\tilde{\theta}(t)$ e $\tilde{\tau}$ variam quase instantaneamente, $e_0(t)$ mantém-se muito próxima do valor inicial e_0^0 .

Para descrever o comportamento de $\hat{f}(\tilde{\tau})$ e $\hat{\theta}(\tilde{\tau})$ como função de $\tilde{\tau}$ usamos a correção da camada limite definida por $\hat{f}(\tilde{\tau}) = \bar{f} - \bar{f}(t_0)$ e $\hat{\theta}(\tilde{\tau}) = \bar{\theta} - \bar{\theta}(t_0)$ que satisfazem o sistema da camada limite

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d\hat{f}}{dt} &= g_1(e_0^0, \hat{f}(\tilde{\tau}) + \bar{f}(t_0), \hat{\theta}(\tilde{\tau}) + \bar{\theta}(t_0), \varepsilon, t_0), \\ \varepsilon \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= g_2(e_0^0, \hat{f}(\tilde{\tau}) + \bar{f}(t_0), \hat{\theta}(\tilde{\tau}) + \bar{\theta}(t_0), \varepsilon, t_0).\end{aligned}\quad (3.86)$$

Para o sistema dado em (3.68)-(3.70), definimos as funções g_1 e g_2 para aplicar a correção da camada limite como

$$\varepsilon \dot{\hat{f}}(t) = -\hat{f}(t) + f(t) = g_1(e_0^0, \hat{f}(\tilde{\tau}) + \bar{f}(t_0), \hat{\theta}(\tilde{\tau}) + \bar{\theta}(t_0), \varepsilon, t_0), \quad (3.87)$$

$$\varepsilon \dot{\hat{\theta}}(t) = -e_0(t)w_1(t) - \alpha w_1(t)\hat{f}(t) = g_2(e_0^0, \hat{f}(\tilde{\tau}) + \bar{f}(t_0), \hat{\theta}(\tilde{\tau}) + \bar{\theta}(t_0), \varepsilon, t_0). \quad (3.88)$$

Considere

$$\varepsilon \frac{d\hat{f}}{dt} = \varepsilon \frac{d\hat{f}}{d\tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{dt} \quad e \quad \varepsilon \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \varepsilon \frac{d\hat{\theta}}{d\tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{dt}, \quad (3.89)$$

onde $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{d\tilde{\tau}}{dt}$. Então,

$$\varepsilon \frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{d\hat{f}}{d\tilde{\tau}} \quad e \quad \varepsilon \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{d\tilde{\tau}}, \quad (3.90)$$

com $\tilde{\tau} = 0$ como condição inicial em $t = t_0$. Substituindo em (3.90) a correção da camada limite de $\hat{f}(t)$ teremos

$$\varepsilon \frac{d\hat{f}}{dt} = \varepsilon \frac{d\hat{f}}{d\tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{dt} + \varepsilon \frac{d\bar{f}}{dt_0} \frac{dt_0}{dt} = \varepsilon \frac{d\hat{f}}{d\tilde{\tau}} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{d\hat{f}}{d\tilde{\tau}}. \quad (3.91)$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento para $\hat{\theta}$, obtemos

$$\varepsilon \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{d\tilde{\tau}}. \quad (3.92)$$

Então, o sistema da camada limite pode ser descrito como

$$\frac{d\hat{f}}{d\tilde{\tau}} = g_1(e_0^0, \hat{f}(\tilde{\tau}) + \bar{f}(t_0), \hat{\theta}(\tilde{\tau}) + \bar{\theta}(t_0), \varepsilon, t_0), \quad (3.93)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\tilde{\tau}} = g_2(e_0^0, \hat{f}(\tilde{\tau}) + \bar{f}(t_0), \hat{\theta}(\tilde{\tau}) + \bar{\theta}(t_0), \varepsilon, t_0), \quad (3.94)$$

onde $\frac{d\hat{f}}{d\tilde{\tau}} \in \mathbb{R}$ e $\frac{d\hat{\theta}}{d\tilde{\tau}} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Agora, substituindo os argumentos de (3.93) em (3.87),

$$\frac{d\hat{f}}{d\tilde{\tau}} = -\hat{f}(\tilde{\tau}) - \bar{f}(t_0) + f(t_0), \quad (3.95)$$

introduzindo o valor inicial de (3.74) em (3.95),

$$\frac{d\hat{f}}{d\tilde{\tau}} = -\hat{f}(\tilde{\tau}) + \frac{1}{\alpha}\bar{e}_0(t_0) + f(t), \quad (3.96)$$

e substituindo (3.68) em (3.96) teremos,

$$\frac{d\hat{f}}{d\tilde{\tau}} = -\hat{f}(\tilde{\tau}) + \frac{1}{\alpha}\bar{e}_0(t_0) + \dot{\bar{e}}_0(t_0) + a_m\bar{e}_0(t_0). \quad (3.97)$$

Sendo $e_0(t_0) = \bar{e}_0(t_0) = e_0^0$, implica que durante a camada limite $e_0(t)$ mantém-se muito próxima ao valor inicial e_0^0 . Então, e substituindo (3.76) em (3.97),

$$\frac{d\hat{f}}{d\tilde{\tau}} = -\hat{f}(\tilde{\tau}) + \frac{1}{\alpha}\bar{e}_0(t_0) - a_0\bar{e}_0(t_0) + a_m\bar{e}_0(t_0), \quad (3.98)$$

de onde rearranjando os termos resulta,

$$\frac{d\hat{f}}{d\tilde{\tau}} + \hat{f}(\tilde{\tau}) = \left(\frac{1}{\alpha} - a_0 + a_m\right)e_0^0. \quad (3.99)$$

Introduzindo a_0 , anteriormente definido, obtemos a dinâmica do estado $\hat{f}(\tilde{\tau})$ na camada limite,

$$\frac{d\hat{f}}{d\tilde{\tau}} + \hat{f}(\tilde{\tau}) = 0. \quad (3.100)$$

Resolvendo a equação diferencial (3.100) determinamos a trajetória do estado $\hat{f}(\tilde{\tau})$ durante a camada limite pela expressão,

$$\hat{f}(\tilde{\tau}) = \hat{f}(t_0) e^{-\tilde{\tau}}. \quad (3.101)$$

Como esperado, o estado $\hat{f}(\tilde{\tau})$ decai para zero quando $\tilde{\tau} \rightarrow \infty$.

Agora, para o vetor $\hat{\theta}$, substituímos os argumentos de (3.94) em (3.88) tal que

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\tilde{\tau}} = -w_1(t_0)e_0(t_0) - \alpha w_1(t_0)(\hat{f}(\tilde{\tau}) + \bar{f}(t_0)), \quad (3.102)$$

Introduzindo $e_0(t_0) = \bar{e}_0(t_0) = e_0^0$ e (3.74) em (3.102) obtemos

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\tilde{\tau}} = -w_1(t_0)e_0^0 + \alpha w_1(t_0)\frac{\bar{e}_0(t_0)}{\alpha} - \alpha w_1(t_0)\hat{f}(\tilde{\tau}), \quad (3.103)$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\tilde{\tau}} = -\alpha w_1(t_0)\hat{f}(\tilde{\tau}), \quad (3.104)$$

e finalmente, substituindo (3.101) em (3.104) resulta,

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\tilde{\tau}} = \alpha w_1(t_0)\hat{f}(t_0)e^{-\tilde{\tau}}. \quad (3.105)$$

Integrando (3.105) em relação a $\tilde{\tau}$ obtemos a trajetória de $\hat{\theta}(\tilde{\tau})$ durante a camada limite como,

$$\hat{\theta}(\tilde{\tau}) = -\alpha w_1(t_0)\hat{f}(t_0)e^{-\tilde{\tau}}. \quad (3.106)$$

Agora, para analisar a camada limite de $e_0(t)$ ao longo do transitório rápido, vamos usar a seguinte correção da camada limite,

$$\hat{e}_0(\tilde{\tau}) = e_0 - \bar{e}_0(t_0). \quad (3.107)$$

Substituindo (3.107) em (3.68) obtemos,

$$\varepsilon \dot{\hat{e}}_0(t) + \frac{d\hat{e}_0(\tilde{\tau})}{d\tilde{\tau}} = \varepsilon h(\hat{e}_0(\tilde{\tau}) + \bar{e}_0(t), \hat{f}(\tilde{\tau}) + \bar{f}(t), \varepsilon, t). \quad (3.108)$$

onde $h(\hat{e}_0(\tilde{\tau}) + \bar{e}_0(t), \hat{f}(\tilde{\tau}) + \bar{f}(t), \varepsilon, t) = -a_m(\hat{e}_0(\tilde{\tau}) + \bar{e}_0(t)) + f(t)$.

Visto que, $\bar{e}_0(t)$ satisfaz o modelo reduzido, substituindo (3.76) em (3.108), teremos

$$\frac{d\hat{e}_0(\tilde{\tau})}{d\tilde{\tau}} = \varepsilon h(\hat{e}_0(\tilde{\tau}) + \bar{e}_0(t), \hat{f}(\tilde{\tau}) + \bar{f}(t), \varepsilon, t) + \varepsilon a_0 \bar{e}_0(t), \quad (3.109)$$

De (3.109), $\frac{d\hat{e}_0(\tilde{\tau})}{d\tilde{\tau}} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, $\hat{e}_0(\tilde{\tau})$ é constante para $\varepsilon = 0$, Quando $\tilde{\tau} = 0$ implica $t = t_0$ e das condições iniciais (3.68) e (3.76) resulta $e_0(t_0) = \bar{e}_0(t_0) = e_0^0$,

então podemos afirmar que $e_0(\check{\tau}) = e_0(t_0) - \bar{e}_0(t_0) = e_0^0 - \bar{e}_0^0 = 0$. Portanto, se $e_0(\check{\tau}) = 0$ durante a camada limite, concluimos que $e_0(t, \varepsilon) \rightarrow \bar{e}_0(t)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pelo exposto, verificamos que se a correção da camada limite $\hat{f}(\check{\tau})$ e $\hat{\theta}(\check{\tau})$ decaem para zero, $\bar{f}(t)$ tende a $\hat{f}(t)$ e $\bar{\theta}(t)$ tende a $\hat{\theta}(t)$, e se a correção da camada limite $\hat{e}_0(\check{\tau})$ é nula implica $e_0 = \bar{e}_0$. Concluimos que a correção da camada limite $\hat{e}_0(\check{\tau}) = 0$ e a convergência exponencial de $\hat{f}(\check{\tau}) \rightarrow 0$ e $\hat{\theta}(\check{\tau}) \rightarrow 0$ são fundamentais para validar as aproximações (3.82) e (3.84), e garantir que o erro de aproximação dos estados do sistema real com os estados do modelo reduzido sejam da ordem de grandeza $O(\varepsilon)$.

Se ε for suficientemente pequeno, o erro de rastreamento pode ser aproximado pelo modelo reduzido (3.77). Algumas simulações são apresentadas para confirmar o decaimento exponencial do erro de rastreamento, ditada pelo modelo reduzido, quando no sistema real ajustamos ε pequeno.

3.5 Resultados das simulações

Nesta seção, apresentamos os resultados de algumas simulações para ilustrar a notável melhoria do comportamento transitório obtido com o algoritmo α -MRAC SISO comparado com o algoritmo MRAC padrão. Verificamos também, os resultados teóricos obtidos nas análises desenvolvidas.

3.5.1 Simulações do α -MRAC monovariável

As simulações foram realizadas para os seguintes casos:

Caso 1: Planta de primeira ordem com um parâmetro desconhecido (k_p):

$$G_0(s) = \frac{k_p}{s+1} = \frac{0.5}{s+1}. \quad (3.110)$$

Parâmetros ideais: $\theta^* = 2$; $k_p = 0.5$.

Caso 2: Planta de primeira ordem com dois parâmetros desconhecidos (k_p e a_p):

$$G_0(s) = \frac{k_p}{s + a_p} = \frac{0.5}{s}. \quad (3.111)$$

Parâmetros ideais: $\theta^{*T} = [-2 \quad 2]$; $\|\theta^*\| = 2.828$; $k_p = 0.5$.

Caso 3: Planta de segunda ordem com quatro parâmetros desconhecidos (k_p , a_0 , a_1 e b_0):

$$G_0(s) = \frac{k_p(s + b_0)}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{(s + 6)}{s(s - 1)}. \quad (3.112)$$

Parâmetros ideais: $\theta^{*T} = [-5 \quad -3 \quad 2 \quad 1]$; $\|\theta^*\| = 6.245$; $k_p = 1$.

Caso 4: Planta de terceira ordem com seis parâmetros desconhecidos (k_p , a_0 , a_1 , a_2 , b_0 e b_1):

$$G_0(s) = \frac{k_p(s^2 + b_1s + b_0)}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} = \frac{(s + 0.5)(s + 2)}{(s - 0.1)^3}. \quad (3.113)$$

Parâmetros ideais: $\theta^{*T} = [0 \quad -0.5 \quad -3.3 \quad 2.3 \quad 3.63 \quad 1]$; $\|\theta^*\| = 5.532$; $k_p = 1$.

Em todos os casos o modelo de referência adotado foi

$$W_m(s) = \frac{1}{s + a_m} = \frac{1}{s + 1}. \quad (3.114)$$

Simulação 1 - Caso 1 com o algoritmo MRAC padrão

Os seguintes dados foram usados:

$$e_0(0) = 2, \quad \theta(0) = 0, \quad \gamma = 10, 100, \quad r(t) = 1.$$

Os resultados desta simulação são apresentados na figura 3.3. Este é o exemplo mais simples de controle adaptativo, onde o ganho de alta frequência k_p é o único parâmetro da planta desconhecido. Entretanto, mesmo assim grandes oscilações em $e_0(t)$ e $\theta(t)$ são observadas para o MRAC. É conveniente achar a solução analítica do sistema para mostrar os efeitos dos parâmetros de projeto no comportamento transitório. Visto que o sinal de referência $r(t)$ é um degrau unitário, a dinâmica do sistema é descrita pelo

sistema de equações diferenciais lineares

$$\begin{aligned}\dot{e}_0(t) &= -e_0(t) + 0.5\tilde{\theta}(t), \\ \dot{\tilde{\theta}}(t) &= -\gamma e_0(t)r(t) = -\gamma e_0(t).\end{aligned}$$

Usando a transformada de Laplace, obtemos a seguinte solução

$$e_0(s) = \frac{e_0(0)s + 0.5\theta(0) - 1}{s^2 + s + 0.5\gamma}. \quad (3.115)$$

Os pólos do sistema são $-0.5 \pm 0.5\sqrt{1 - 2\gamma}$. Então o ganho de adaptação γ somente influencia a frequência de oscilação, como confirma a simulação. Verifica-se também que a atenuação é definida pelo parâmetro do modelo $a_m = 1$.

Nota-se que o sistema oscila mesmo para $e_0(0) = 0$. Neste caso, teoricamente, uma simples medida de e_0 seria suficiente para estimar k_p corretamente. Entretanto, o esquema de adaptação não utiliza esta informação.

Simulação 2 - Caso 1 com o algoritmo α -MRAC

Exceto para os parâmetros introduzidos pelo algoritmo α -MRAC, os dados usados são os mesmos da simulação 1:

$$\begin{aligned}e_0(0) &= 2, & \theta(0) &= 0, & \gamma &= 10, 100, & r(t) &= 1, \\ \hat{e}_0(0) &= 2, & \alpha &= 1, & \tau &= 0.1, 0.01, & \varepsilon &= 0.1, 0.01.\end{aligned}$$

A figura 3.4 mostra os resultados obtidos com o algoritmo α -MRAC, para dois conjuntos de parâmetros de projeto: $\{\tau = 0.1, \gamma = 10\}$ e $\{\tau = 0.01, \gamma = 100\}$ ou $\varepsilon = 0.1, 0.01$.

A melhora da resposta transitória do erro do rastreamento é notável, em ambos os casos, quando comparado com os resultados da simulação 1 com o algoritmo MRAC.

Para ajudar na compreensão dos efeitos dos parâmetros de projeto do α -MRAC no comportamento transitório, podemos novamente obter a solução analítica do sistema.

O sistema é ainda linear e as equações dinâmicas são,

$$\begin{aligned}\dot{e}_0(t) &= -e_0(t) + 0.5\tilde{\theta}(t), \\ \dot{\tilde{\theta}}(t) &= -\gamma e_0(t) - \gamma f(t), \\ \tau \dot{f}(t) &= -f(t) + 0.5\tilde{\theta}(t).\end{aligned}$$

Usando a transformada de Laplace obtemos a seguinte solução,

$$e_0(s) = \frac{[\tau e_0(0)]s^2 + [e_0(0) + 0.5\tau\theta(0) - \tau]s + [0.5\theta(0) + 0.5\gamma(1 - \tau)\hat{e}_0(0) - 1]}{\tau s^3 + (\tau + 1)s^2 + (1 + 0.5\tau\gamma + 0.5\gamma)s + \gamma}, \quad (3.116)$$

a qual é muito mais complexa que no exemplo anterior. Note que, um grau de liberdade extra foi introduzido pelos novos parâmetros. O efeito de aumentar γ é agora totalmente diferente. Verifica-se facilmente que quando $\gamma \rightarrow \infty$, dois pólos e dois zeros tendem a infinito, logo a dinâmica lenta do sistema é descrita pela função,

$$e_0(s) = \frac{0.5(1 - \tau)\hat{e}_0(0)}{0.5(1 + \tau)s + 1}, \quad (3.117)$$

a qual confirma os resultados teóricos desenvolvidos na subseção 3.4.1.

Simulação 3 - Caso 1 com o algoritmo α -MRAC: Efeito do ganho α

Todos os dados são os mesmos da simulação 2, exceto pelo valor alto atribuído para o ganho α :

$$\begin{aligned}e_0(0) &= 2, & \theta(0) &= 0, & \varepsilon &= 0.1, 0.01, & r(t) &= 1, \\ \hat{e}_0(0) &= 2, & \alpha &= 100.\end{aligned}$$

Lembrar que $\varepsilon = \tau = \gamma^{-1}$.

Com o aumento do ganho α , o coeficiente k_1 , dado em (3.79) tende a zero, e consequentemente o sinal de erro do controle $\bar{\theta}^T(t)w(t)$ em (3.78), aproxima-se de zero. Visto que neste caso somente um parâmetro é adaptado, então a solução é obtida com $\theta \cong \theta^*$, isto é, a identificação de k_p pode ser feita rapidamente aumentando α . Os resultados

desta simulação são mostrados na figura 3.5. O efeito de uma alta constante de tempo τ do filtro é não reduzir o comportamento oscilatório de θ , como pode ser observado no gráfico. A resposta transitória do erro de rastreamento, neste caso, é pouco afetada pelo parâmetro τ .

Simulação 4 - Caso 2 com MRAC padrão

Os seguintes dados foram usados nesta simulação:

$$e_0(0) = 2, 10, \quad \theta(0) = 0, \quad \gamma = 1, \quad r(t) = -\text{sqw}(t/100) + \sin(t).$$

onde $\text{sqw}(t/T)$ é uma onda quadrada de amplitude 1 e período T . A figura 3.6 mostra os resultados obtidos com o MRAC padrão. Mesmo neste caso simples, baseado em uma planta de primeira ordem, podemos observar a não uniformidade do transitório em relação às condições iniciais. Para $e_0(0) = 2$, o transitório é mais rápido e os parâmetros são praticamente identificados após 10 segundos. Entretanto, para $e_0(0) = 10$, o transitório é drasticamente degenerado mesmo com persistência de excitação.

Simulação 5 - Caso 2 com o α -MRAC

Os dados usados são:

$$\begin{aligned} e_0(0) &= 2, 10, & \theta(0) &= 0, & \varepsilon &= 0.1, & r(t) &= -\text{sqw}(t/100) + \sin(t), \\ \hat{e}_0(0) &= 2, 10, & \alpha &= 1. \end{aligned}$$

Esta simulação foi realizada nas mesmas condições da simulação 4. A figura 3.7 mostra os resultados. Mesmo para um ganho de adaptação baixo e $\tau = 0.1$, a melhoria do comportamento transitório obtido pelo algoritmo α -MRAC é significativo.

Simulação 6 - Caso 3 com o MRAC padrão

Os dados usados são:

$$e_0(0) = 2, \quad \theta(0) = 0, \quad \gamma = 10, 100, \quad r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10).$$

A figura 3.8 mostra os resultados. Neste caso, o algoritmo tem que adaptar quatro parâmetros. Aqui, podemos também observar que com o aumento do ganho de adaptação γ , a norma $\|\theta\|$ estabiliza num valor acima de $\|\theta^*\|$ no estágio inicial do transitório.

Simulação 7 - Caso 3 com o α -MRAC

Os dados usados são:

$$\begin{aligned} e_0(0) &= 2, & \theta(0) &= 0, & \varepsilon &= 0.1, 0.01, & r(t) &= 0.5 + \text{sqw}(t/10), \\ \hat{e}_0(0) &= 2, & \alpha &= 1. \end{aligned}$$

A figura 3.9 mostra os resultados. O α -MRAC, neste caso, também apresenta uma considerável melhoria do transitório, mesmo na ausência de riqueza de sinal para a entrada externa de referência. O sinal oscilatório mostrado na figura foi obtido com os parâmetros de projeto $\gamma = 10$ e $\tau = 0.1$. Para $\gamma = 100$ e $\tau = 0.01$, isto é $\varepsilon = 0.01$, o comportamento transitório resultante é muito próximo ao previsto na subseção 3.4.1.

Simulação 8 - Caso 3 com o α -MRAC: Efeito da condição inicial

$\hat{e}_0(0)$

Os dados usados são:

$$\begin{aligned} e_0(0) &= 2, & \theta(0) &= 0, & \varepsilon &= 0.1, & r(t) &= 0.5 + \text{sqw}(t/10), \\ \hat{e}_0(0) &= 2, 2, 3, & \alpha &= 1. \end{aligned}$$

A figura 3.10 mostra os resultados. O objetivo deste exemplo é ilustrar o efeito da condição inicial do filtro de avanço $\hat{e}_0(0)$, no comportamento transitório. Para cada valor de $\hat{e}_0(0)$ é exibida a curva correspondente de $e_0(t)$ e $\bar{e}_0(t)$.

Simulação 9: Caso 4 com o MRAC padrão

Os dados usados são:

$$e_0(0) = 2, \quad \theta(0) = 0, \quad \gamma = 10, 100, \quad r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10) + 1.5 \sin(10t).$$

A figura 3.11 mostra os resultados desta simulação. Neste exemplo, a resposta transitória obtida com o MRAC padrão é muito oscilatória.

Simulação 10: Caso 4 com α -MRAC

Os dados usados são:

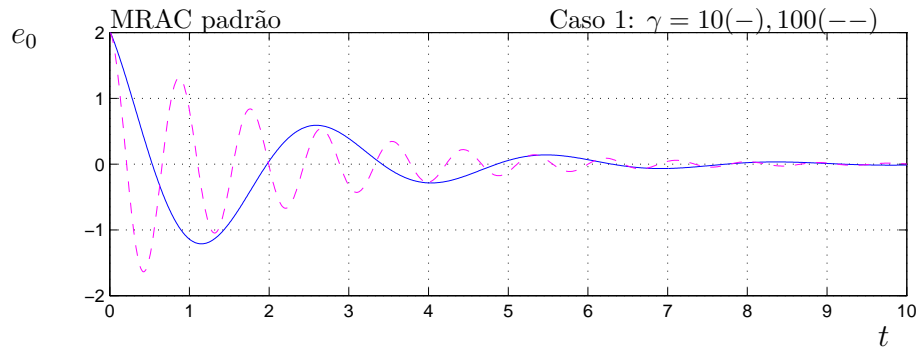
$$e_0(0) = 2, \quad \theta(0) = 0, \quad \varepsilon = 0.1, 0.01, \quad r(t) = 0.5 + \text{sqw}(t/10) + 1.5 \sin(10t)$$
$$\hat{e}_0(0) = 2, \quad \alpha = 1.$$

Os resultados são apresentados na figura 3.12. Novamente, algoritmo α -MRAC mostra um comportamento transitório muito superior ao obtido pelo algoritmo MRAC, mesmo para um ganho de adaptação relativamente baixo $\gamma = 10$ ($\tau = 0.1$).

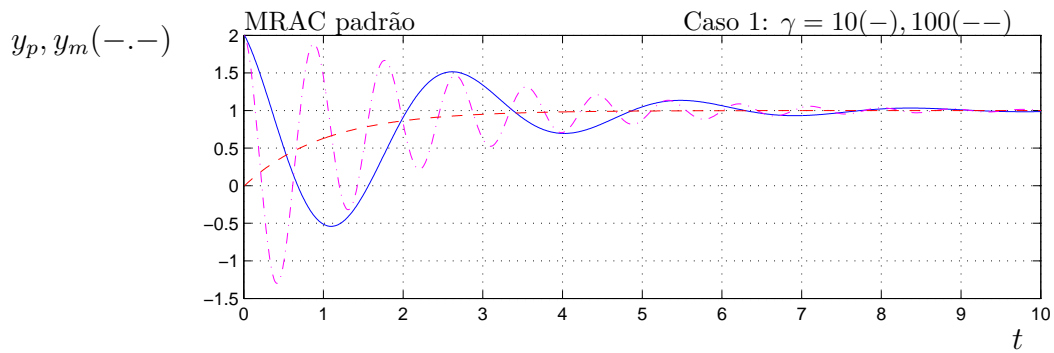
3.6 Conclusões

Neste capítulo foi revisto o algoritmo α -MRAC para plantas SISO e analisada a sua estabilidade, usando o método de Lyapunov, bem como o seu comportamento durante o transitório, usando o método das Perturbações Singulares. O resultado mais importante apresentado pelo algoritmo α -MRAC SISO foi que, se ajustarmos convenientemente os parâmetros τ e γ , isto é, ε suficientemente pequeno, o erro de rastreamento decai exponencialmente para zero quando $t \rightarrow \infty$, apresentando um comportamento transitório pouco oscilatório e suave. A convergência exponencial do erro de rastreamento, no caso limite, quando $\varepsilon = 0$, é governado pela dinâmica do modelo reduzido, cuja taxa de decaimento depende apenas dos parâmetros de projeto a_m e α . O comportamento do erro de rastreamento durante o transitório, do sistema usando o algoritmo α -MRAC, apresentou uma notável melhora em comparação ao transitório do algoritmo MRAC convencional, mesmo para valores de ε da ordem de 10^{-1} a 10^{-2} , usados nas

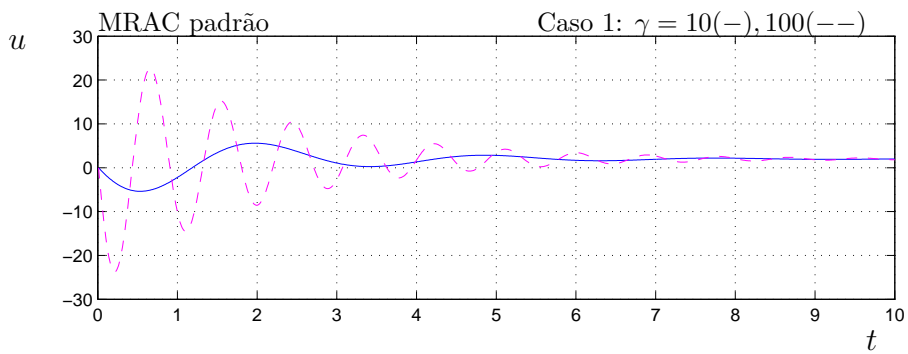
simulações. Para o caso limite, em que o erro de rastreamento é aproximado pelo seu modelo reduzido, foi mostrado que o sinal de controle ideal u^* é estimado sem identificar o vetor de parâmetros ideais θ^* .



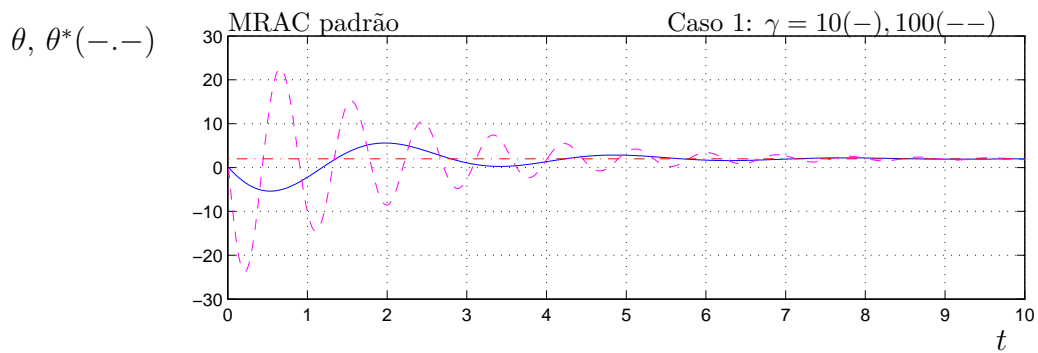
(a)



(b)

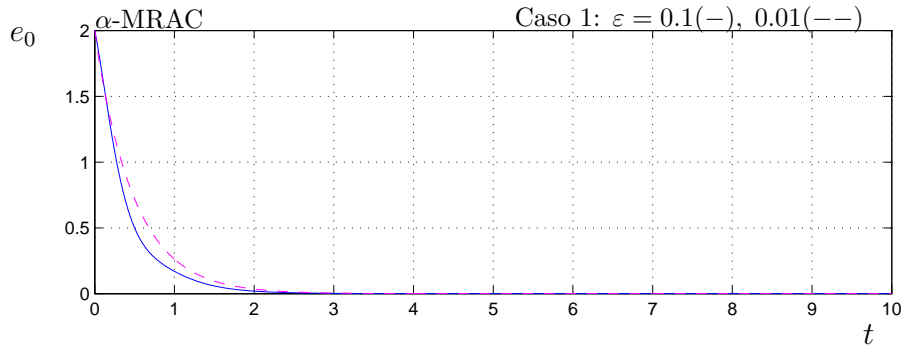


(c)

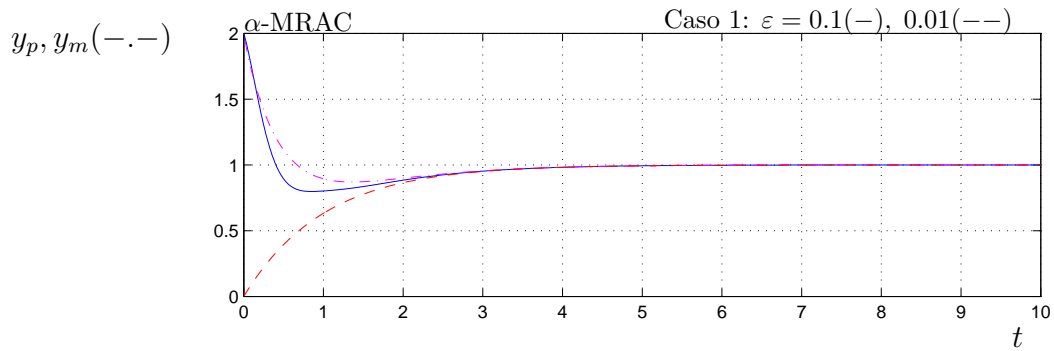


(d)

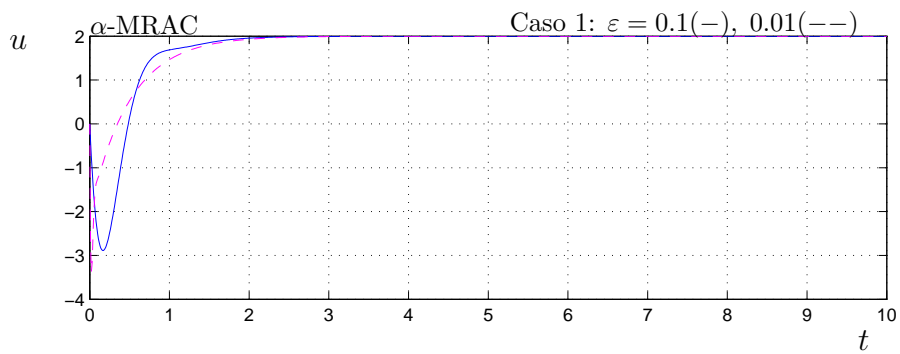
FIGURA 3.3: Simulação para o caso 1 com o MRAC padrão.



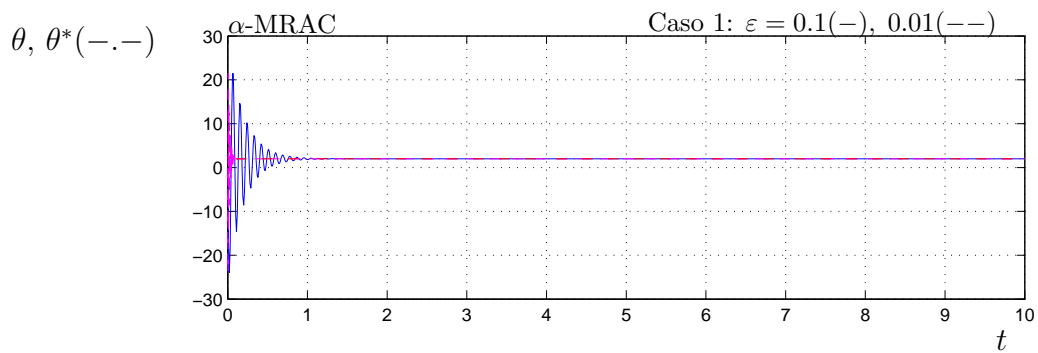
(a)



(b)

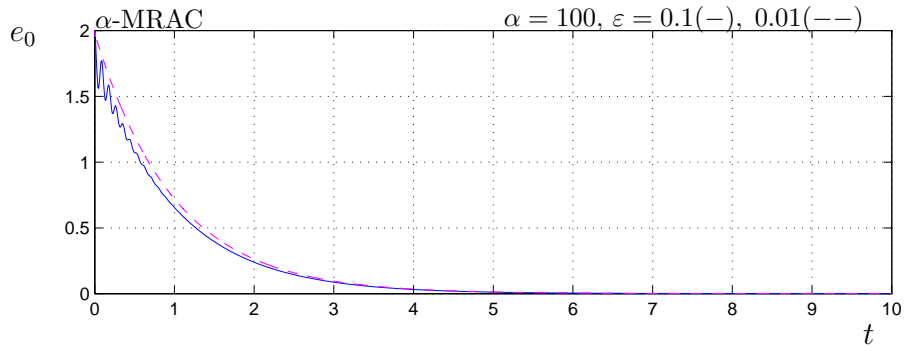


(c)

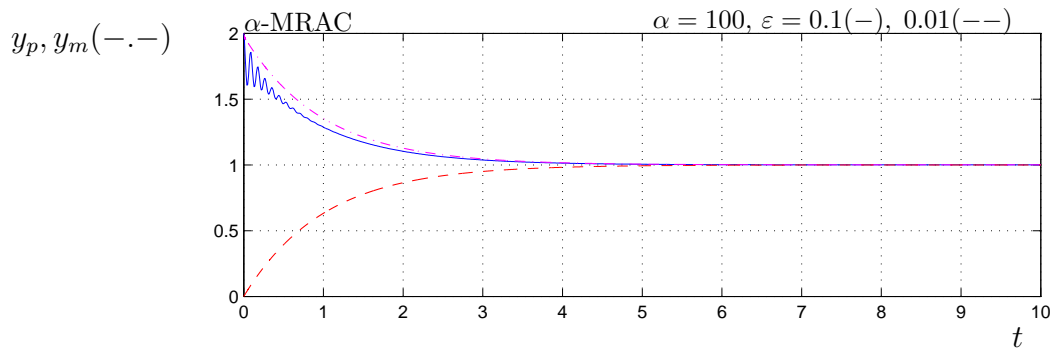


(d)

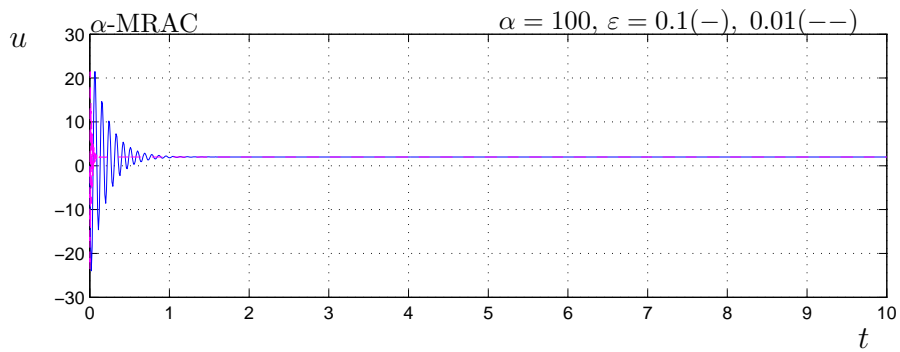
FIGURA 3.4: Simulação para o caso 1 com o α -MRAC.



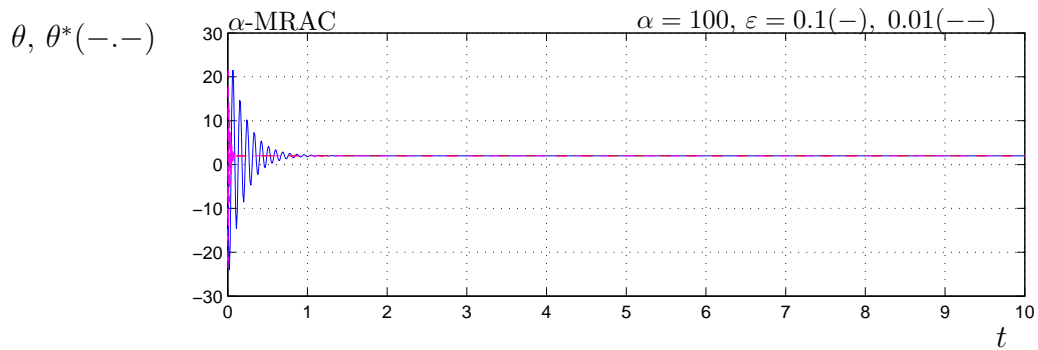
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 3.5: Simulação para o caso 1 com o α -MRAC. Efeito do ganho α alto.

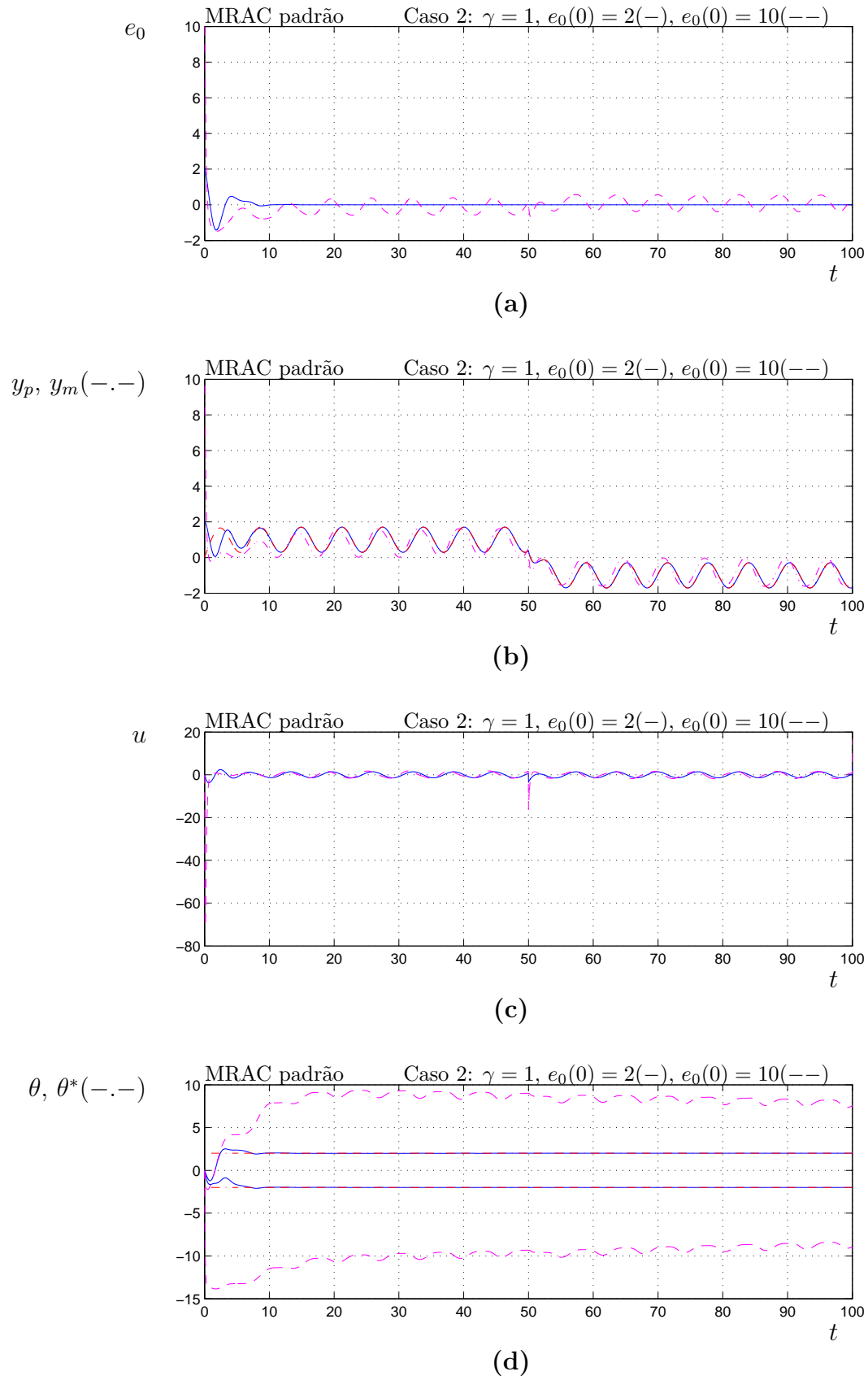
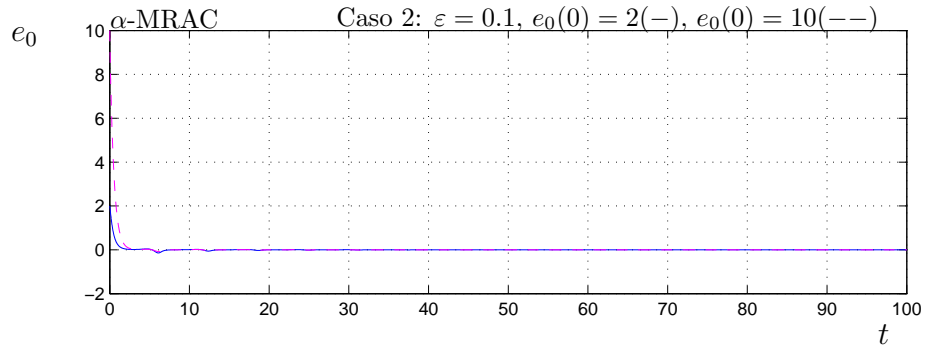
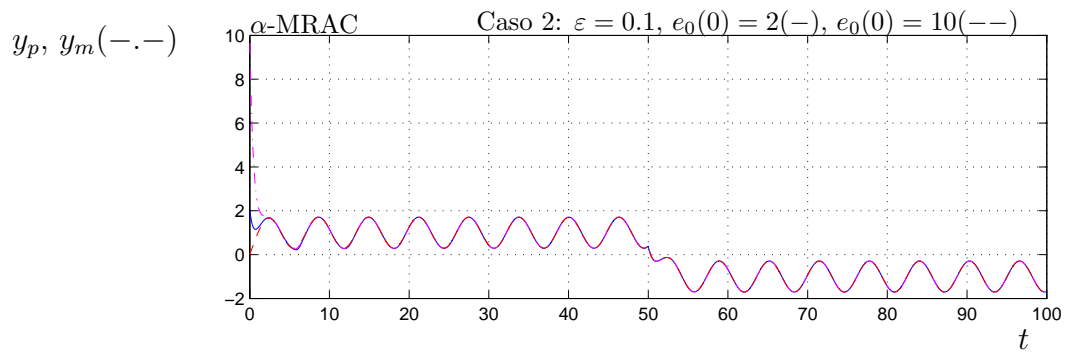


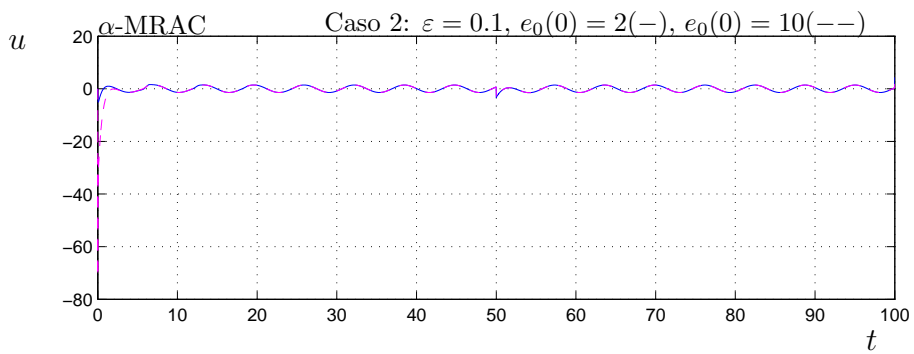
FIGURA 3.6: Simulação para o caso 2 com o MRAC padrão.



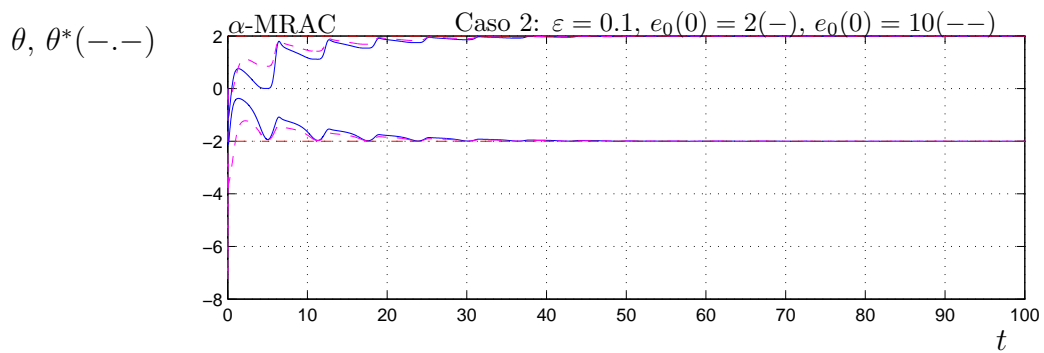
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 3.7: Simulação para o caso 2 com o α -MRAC.

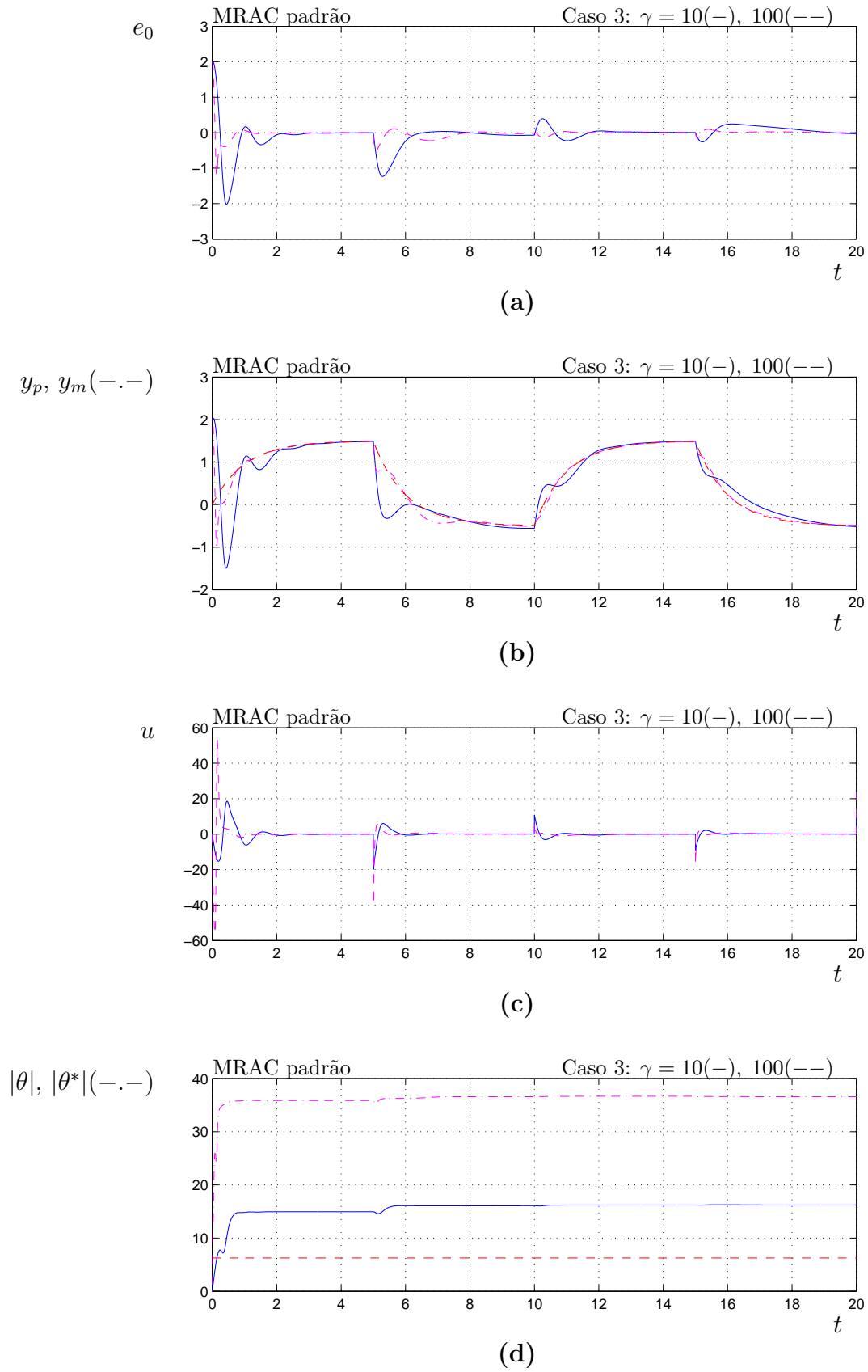


FIGURA 3.8: Simulação para o caso 3 com o MRAC padrão.

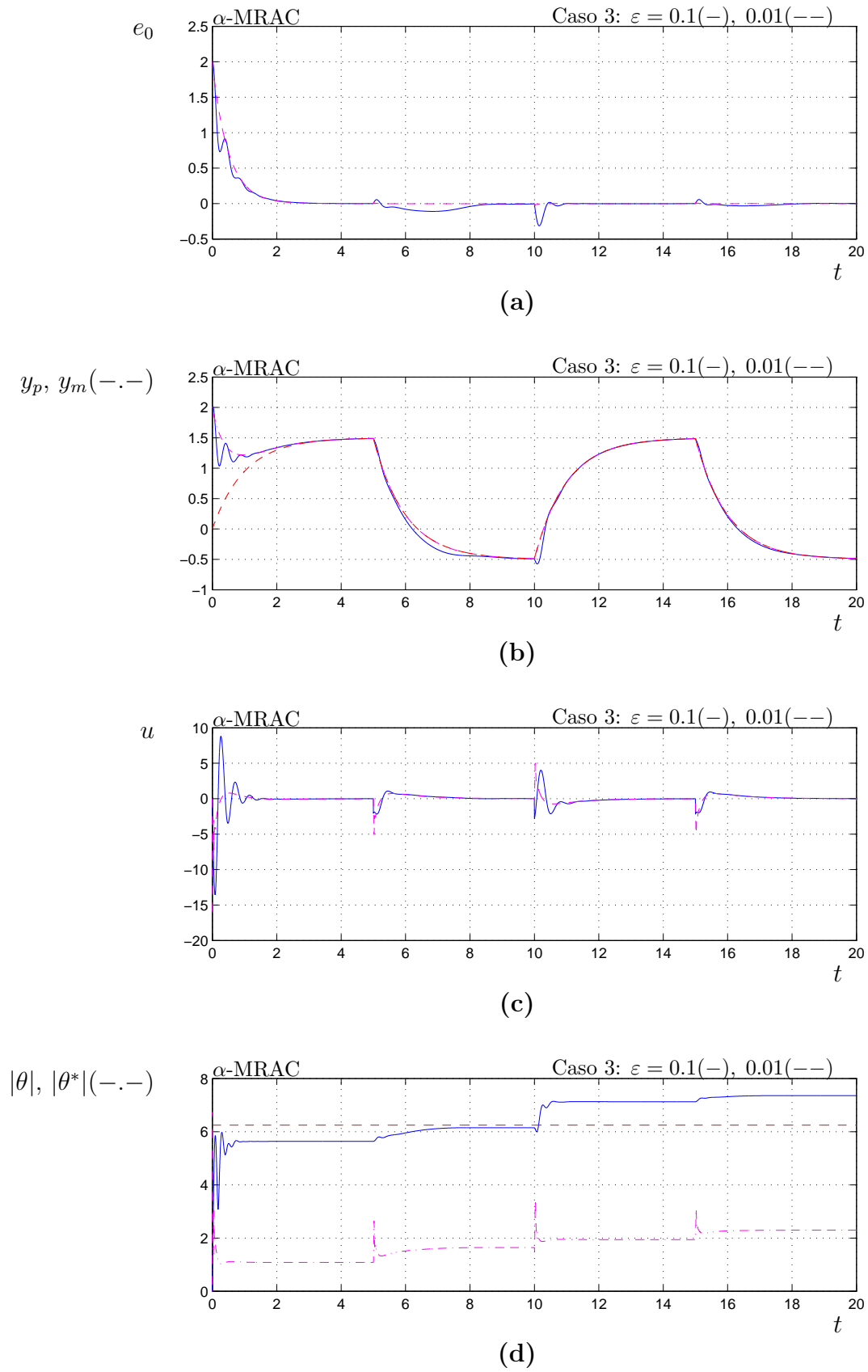
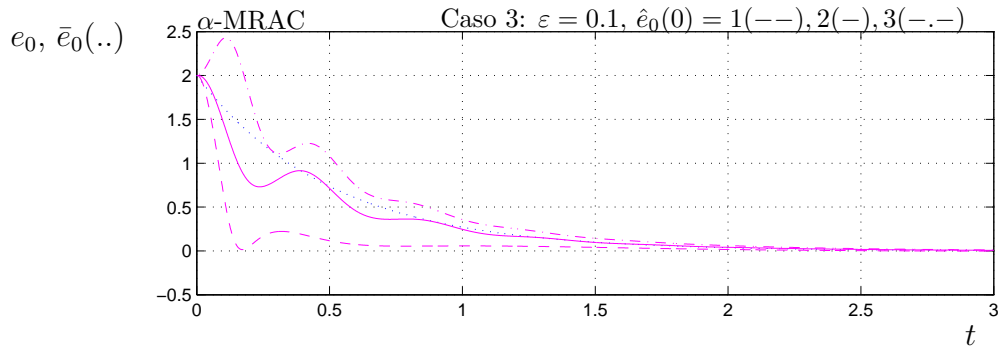
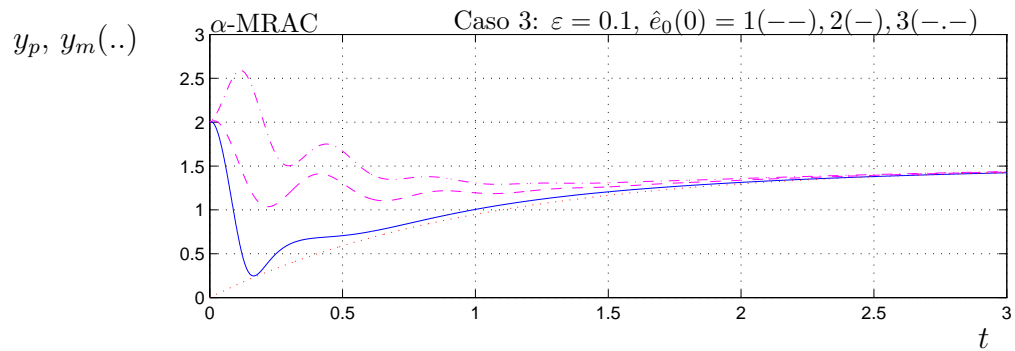


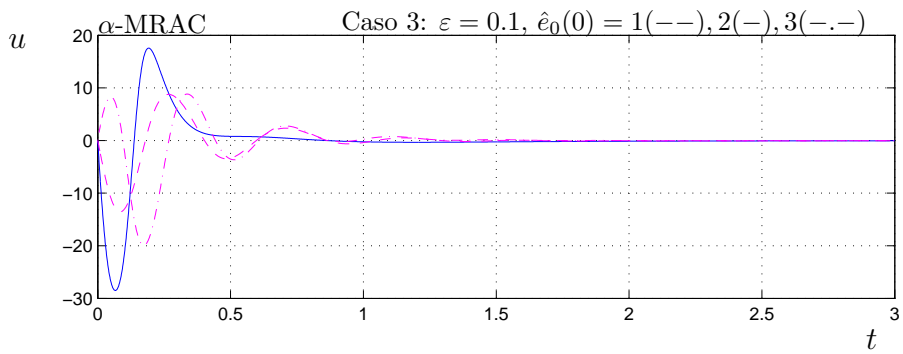
FIGURA 3.9: Simulação para o caso 3 com o α -MRAC.



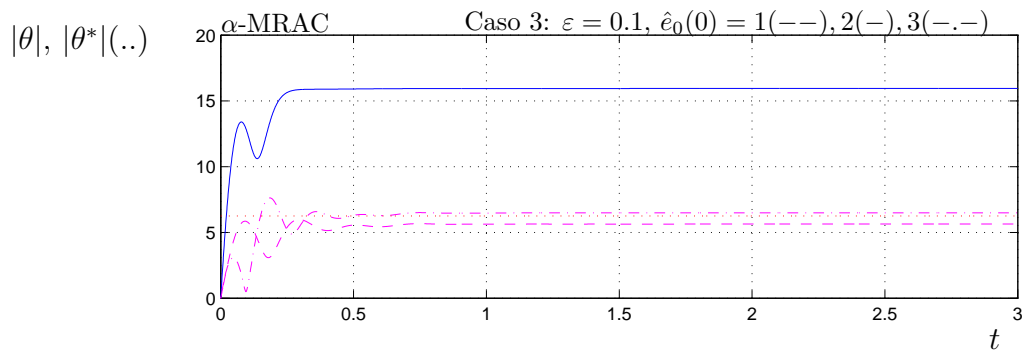
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 3.10: Simulação para o caso 3 com o α -MRAC. Efeito de $\hat{e}_0(0)$.

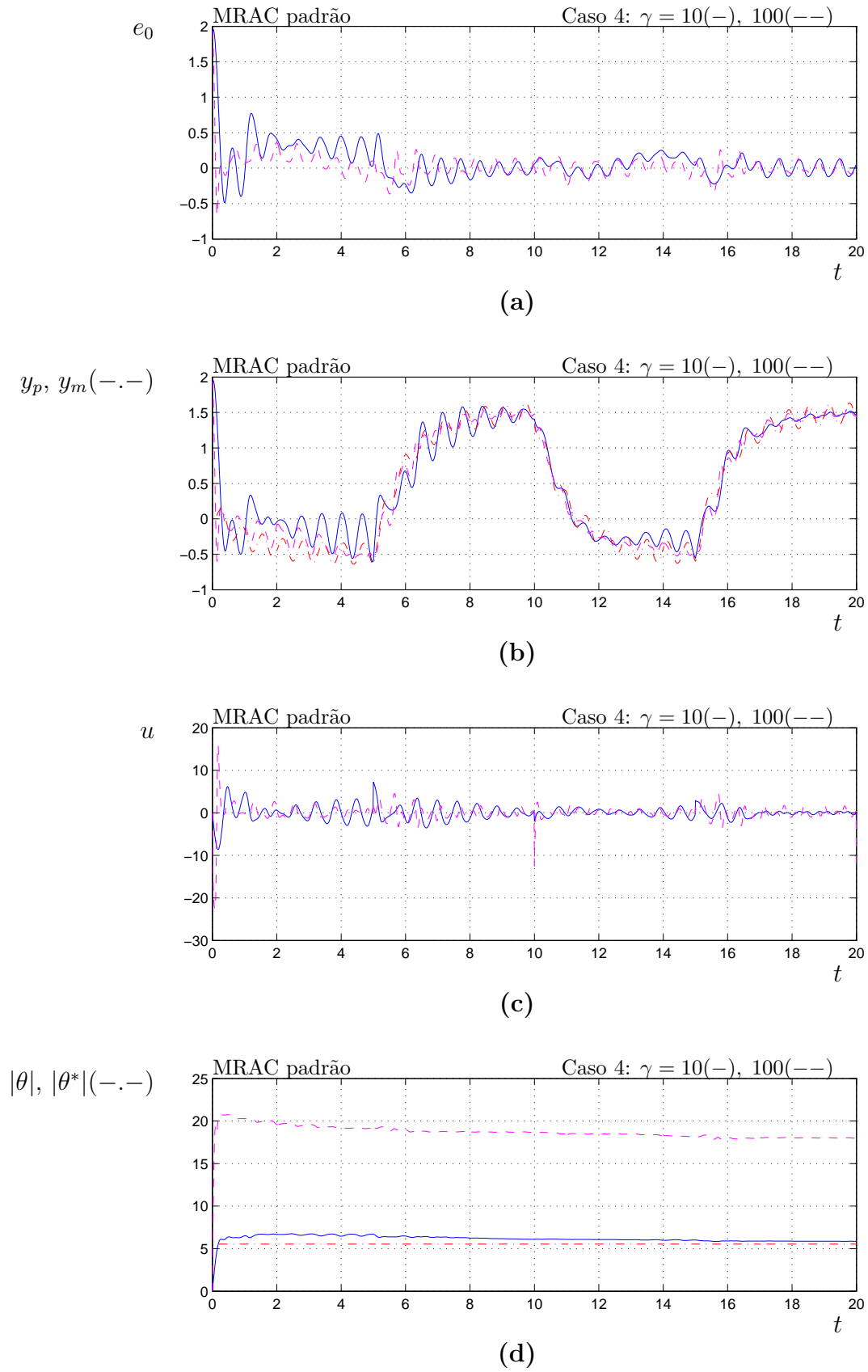


FIGURA 3.11: Simulação para o caso 4 com o MRAC padrão.

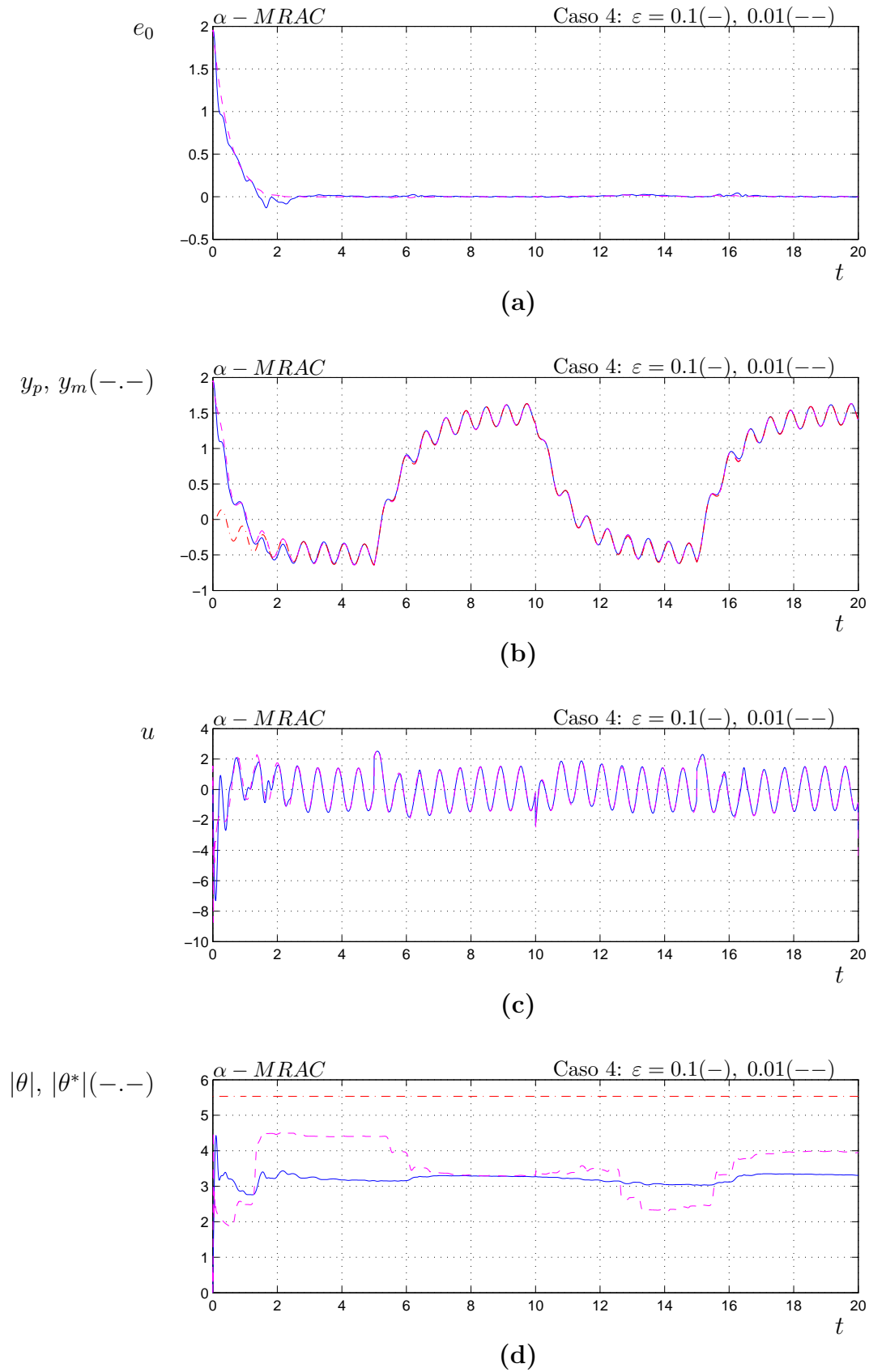


FIGURA 3.12: Simulação para o caso 4 com o α -MRAC.

Capítulo 4

Algoritmo α -MRAC SISO robusto

Uma propriedade importante que se deseja no controle adaptativo é a robustez do sistema. No capítulo 3 foi visto que quando não há erros de modelagem na planta, o algoritmo α -MRAC SISO é capaz de garantir estabilidade e rastreamento exponencial da saída do modelo de referência com transitório bem comportado. Entretanto, este algoritmo ainda carece de ser analisado em situações onde a planta contenha erros de modelagem. Dessa forma, este capítulo descreve um reprojeto da lei de adaptação do algoritmo α -MRAC SISO para assegurar a estabilidade e rastreamento, do sistema em malha fechada, cuja planta possua dinâmicas não modeladas aditivas e multiplicativas, resultando num novo algoritmo robusto.

Várias modificações da lei de adaptação foram propostas para garantir estabilidade na presença de erros de modelagem. As leis de adaptação com zona-morta ou σ fixo, chaveamento- σ , modificação- ϵ e projeção de parâmetros são algumas das modificações frequentemente usadas para garantir robustez (Tao 2003). No caso das modificações zona-morta (Ioannou & Sun 1996), (Narendra & Annaswamy 1986) e modificação- ϵ existem condições adicionais que dependem do conhecimento da planta nominal $G_0(s)$, além da norma do vetor de parâmetros ideais, $\|\theta^*\|$. Por outro lado, a projeção dos parâmetros (Naik, Kumar & Ydstie 1992), (Lu & Hadaegh 1997), assim como o chaveamento- σ (Ioannou & Tsakalis 1986), (Ioannou & Tsakalis 1988a), podem ser adotados para assegurar a estabilidade do sistema, usando somente um limitante superior para $\|\theta^*\|$. Neste trabalho é usada a modificação *chaveamento- σ* (Tao 2003).

Este capítulo está organizado como segue. A Seção 4.1 apresenta a formulação do

problema e hipóteses com base no capítulo 3. A lei de adaptação robusta é descrita na Seção 4.2 e a estabilidade do sistema é analisada na Seção 4.3. A Seção 4.4 mostra o resultado de algumas simulações e a Seção 4.5 conclui o capítulo.

4.1 Formulação do problema

Neste capítulo consideramos plantas com erros de modelagem descritas por:

$$y(t) = G(s)[u](t), \quad (4.1)$$

$$G(s) = G_0(s)(1 + \mu\Delta_m(s)) + \mu\Delta_a(s), \quad (4.2)$$

onde, $G(s)$ é a função de transferência da planta, $u(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}$ é o sinal de saída, $G_0(s)$ corresponde a parte nominal de $G(s)$, $\mu\Delta_a(s)$ e $\mu\Delta_m(s)$ são funções de transferência das dinâmicas não modeladas aditivas e multiplicativas, respectivamente. A figura 4.1 mostra o diagrama de blocos da planta.

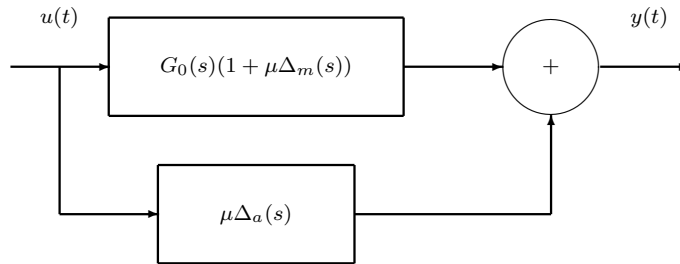


FIGURA 4.1: Planta $G(s)$ com dinâmica não modelada.

Os parâmetros da função de transferência $G_0(s)$ são desconhecidos. Entretanto, as informações disponíveis a priori do sistema são reunidas nas hipóteses básicas **(A1)**-**(A5)** assumidas na Seção 3.1. O modelo de referência (3.5) e os filtros (3.9) serão usados neste capítulo.

Para o controle adaptativo robusto é necessário fazer as seguintes hipóteses adicionais com relação às dinâmicas não modeladas $\mu\Delta_a(s)$, $\mu\Delta_m(s)$, de modo a caracterizar os erros de modelagem a que o sistema pode ser submetido neste estudo:

A6: $\Delta_a(s)$, $\frac{1}{P_m(s)}\Delta_m(s)$ são funções de transferências estritamente próprias;

A7: Para $d_m = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{P_m(s)}\Delta_m(s)$ e $d_a = \lim_{s \rightarrow \infty} s\Delta_a(s)$ existe uma constante conhecida $q_\delta > 0$ independente de μ e uma constante $a > q_\delta$ tal que as funções resposta

ao impulso $h_m(t)$ e $h_a(t)$ de $\left(\frac{(s+a-q_\delta)}{P_m(s-q_\delta)}\Delta_m(s-q_\delta) - d_m\right)s$ e $((s+a-q_\delta)\Delta_a(s-q_\delta) - d_a)s$ satisfazem a $\|h_m(t)\|_1 = \int_0^\infty |h_m(t)|dt \leq c$ e $\|h_a(t)\|_1 = \int_0^\infty |h_a(t)|dt \leq c$ respectivamente, com $|d_m| \leq c$ e $|d_a| \leq c$, para uma constante $c > 0$ independente de μ ;

A8: As funções resposta ao impulso $\bar{h}_m(t)$ e $\bar{h}_a(t)$ das funções de transferência própria $\frac{s}{P_m(s-q_\delta)}\Delta_m(s-q_\delta)$ e $s\Delta_a(s-q_\delta)$ satisfazem a $\|\bar{h}_m(t)\|_1 = \int_0^\infty |\bar{h}_m(t)|dt \leq c$ e $\|\bar{h}_a(t)\|_1 = \int_0^\infty |\bar{h}_a(t)|dt \leq c$, respectivamente, para a constante $c > 0$ independente de μ .

O controle adaptativo apresentado no capítulo 3 foi desenvolvido para $\mu = 0$ e pode não assegurar estabilidade em malha fechada quando $\mu \neq 0$. Então, modificações na lei de adaptação são necessárias para garantir a robustez e a convergência do erro de rastreamento do sistema adaptativo na presença dos erros $\mu\Delta_a(s)$ e $\mu\Delta_m(s)$.

Portanto, o objetivo é encontrar uma lei de adaptação robusta para os parâmetros do controlador, tal que a saída da planta (4.1), sujeita às dinâmicas não modeladas, satisfazendo as hipóteses (A6) a (A8) e condição inicial arbitrária, rastreie o sinal de saída de um modelo de referência (3.5).

4.2 Lei de adaptação robusta

Para a planta $G_0(s)$ ser robusta na presença dos erros $\mu\Delta_a(s)$ e $\mu\Delta_m(s)$ modificamos a lei de adaptação do algoritmo α -MRAC, dada em (3.45). A nova lei da adaptação é resultado da substituição do erro de rastreamento filtrado $e_f(t)$, definido em (3.47), por uma estimativa, e pela adição de um sinal chaveado obtido pela técnica *chaveamento- σ* .

O esquema de chaveamento, dado por (Ioannou & Tsakalis 1986), (Ioannou & Tsakalis 1988a) (ver (Tao 2003), pg.132) é descrito abaixo,

$$\sigma_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|\theta(t)\|_2 < M_1, \\ \sigma_{01}\left(\frac{\|\theta(t)\|_2}{M_1} - 1\right) & \text{se } M_1 \leq \|\theta(t)\|_2 < 2M_1, \\ \sigma_{01} & \text{se } \|\theta(t)\|_2 \geq 2M_1, \end{cases} \quad (4.3)$$

onde, $M_1 > \|\theta^*\|_2$ e $\sigma_{01} > 0$. Para implementar $\sigma_1(t) > 0$ precisamos conhecer M_1 .

Inicialmente, a equação do erro de rastreamento (3.28) é reparametrizada levando em conta os erros de modelagem, conforme o apêndice B.1 , tal que

$$e_0(t) = k_p W_m(s) [\tilde{\theta}^T w](t) + \mu \Delta(s) [u](t), \quad (4.4)$$

onde,

$$\Delta(s) = k_p (1 - F_1(s)) \frac{1}{P_m(s)} \Delta_m(s) + \left(1 + \frac{k_p}{P_m(s)} F_2(s)\right) \Delta_a(s), \quad (4.5)$$

$$F(s) = \frac{a(s)}{\Lambda(s)}, \quad (4.6)$$

$$F_1(s) = \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)}, \quad (4.7)$$

$$F_2(s) = \theta_2^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} + \theta_3^*. \quad (4.8)$$

Considere a estimativa do erro de rastreamento filtrado, $\epsilon_f(t)$, definido como

$$\epsilon_f(t) = e_f(t) - Q(s) W_m(s) \kappa m^2(t) \epsilon_f(t), \quad (4.9)$$

onde, $e_f(t)$ é dado em (3.46), $\kappa > 0$, e $m(t)$ é um sinal normalizante definido, conforme (Ioannou & Tsakalis 1986) e (Praly 1984), a partir do sistema dinâmico

$$\dot{m}(t) = -\delta_0 m(t) + \delta_1 (|u(t)| + |y(t)|) + \delta_2, \quad m(0) > 0, \quad (4.10)$$

onde, $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ e $0 < \delta_0 < q_\delta$, com $q_\delta > 0$ sendo a margem de estabilidade de $\Delta_a(s)$ e $\Delta_m(s)$, segundo as hipóteses **(A7)** e **(A6)**. A figura 4.2 mostra o diagrama de blocos das operações sobre o sinal $e_0(t)$.

Introduzindo (3.46) em (4.9) teremos,

$$\epsilon_f(t) = Q(s) [e_0](t) - Q(s) W_m(s) \kappa m^2(t) \epsilon_f(t), \quad (4.11)$$

e substituindo (4.4) em (4.11) obtemos,

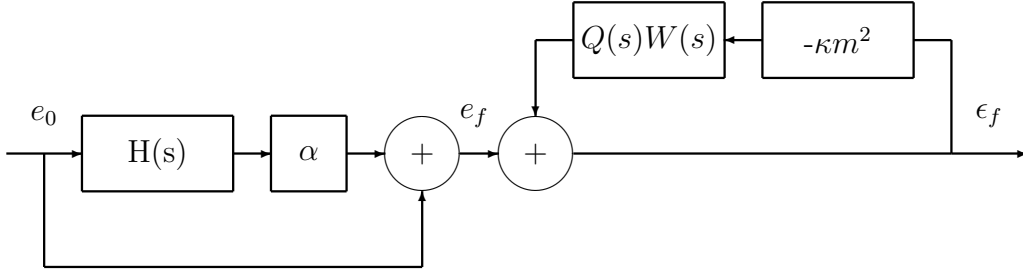


FIGURA 4.2: Diagrama de blocos das operações sobre $e_0(t)$.

$$\begin{aligned}\epsilon_f(t) &= Q(s)[k_p W_m(s)[\tilde{\theta}^T w]](t) + Q(s)\mu\Delta(s)[u](t) - Q(s)W_m(s)\kappa m^2(t)\epsilon_f(t) \\ &= Q(s)W_m(s)[k_p \tilde{\theta}^T w - \kappa m^2(t)\epsilon_f](t) + Q(s)\mu\Delta(s)[u].\end{aligned}\quad (4.12)$$

Rearranjando os termos de (4.5), tal que

$$\Delta(s) = \frac{k_p}{P_m(s)} \left((1 - F_1(s))\Delta_m(s) + \left(F_2(s) + \frac{P_m(s)}{k_p} \right) \Delta_a(s) \right), \quad (4.13)$$

e substituindo a relação definida em (B.11), no apêndice (B1),

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= \frac{k_p}{P_m(s)} \left((1 - F_1(s))\Delta_m(s) + (1 - F_1(s))G_0^{-1}(s)\Delta_a(s) \right) \\ &= W_m(s)k_p(1 - F_1(s)) \left(\Delta_m(s) + G_0^{-1}(s)\Delta_a(s) \right).\end{aligned}\quad (4.14)$$

Denominando $\bar{\Delta}(s) = (1 - F_1(s))(\Delta_m(s) + G_0^{-1}(s)\Delta_a(s))$, e usando em (4.14), a expressão é simplificada para $\Delta(s) = W_m(s)k_p\bar{\Delta}(s)$.

Agora, substituindo $\Delta(s)$ em (4.12), obtemos

$$\begin{aligned}\epsilon_f(t) &= Q(s)W_m(s)[k_p \tilde{\theta}^T w - \kappa m^2(t)\epsilon_f](t) + Q(s)\mu W_m(s)k_p\bar{\Delta}(s)[u] \\ &= Q(s)W_m(s)[k_p \tilde{\theta}^T w - \kappa m^2(t)\epsilon_f + \mu k_p\bar{\Delta}(s)[u]](t).\end{aligned}\quad (4.15)$$

Definindo o sinal,

$$\bar{\eta}(t) = k_p\bar{\Delta}(s)[u], \quad (4.16)$$

obtemos a expressão final de $\epsilon_f(t)$ como

$$\epsilon_f(t) = Q(s)W_m(s)[k_p \tilde{\theta}^T w - \kappa m^2(t)\epsilon_f + \mu\bar{\eta}](t), \quad (4.17)$$

onde $Q(s)W_m(s) = \left(\frac{\tau+\alpha}{\tau}\right) \left(\frac{s+\frac{1+\alpha am}{\tau+\alpha}}{s+\frac{1}{\tau}}\right) \frac{1}{(s+am)}$ é estritamente própria, estável e SPR, visto que satisfaz as condições definidas na Seção 1.5.

Com base nas definições acima, formulamos a lei de adaptação robusta como

$$\dot{\theta}(t) = -\gamma \text{sign}(k_p)w(t)\epsilon_f(t) - \gamma\sigma_1(t)\theta(t), \quad (4.18)$$

onde $\gamma > 0$ é o ganho de adaptação, bem como, o controlador

$$u(t) = \theta^T(t)w(t). \quad (4.19)$$

4.3 Análise de robustez do sistema

Nesta seção, é analisada a estabilidade do sistema em malha fechada, usando a lei de adaptação proposta (4.18) e a lei de controle (4.19).

Teorema 4.1 *A lei de adaptação (4.18) e o controlador (4.19) garantem que existe um $\mu^* > 0$ tal que, para algum $\mu \in [0, \mu^*)$, $\theta(t)$, $\epsilon_f(t)$ são uniformemente limitados e $\epsilon_f(t)$ e $\epsilon_f(t)m(t) \in B^{2, \bar{k}_0 \mu^2}$ para alguma constante $\bar{k}_0 > 0$.*

Prova: A prova a seguir segue os passos apresentados por (Tao 2003, p.233). A equação (4.17) tem uma realização não mínima $\{A, b, c\}$ descrita pelo sistema,

$$\begin{aligned} \dot{e}_\epsilon(t) &= Ae_\epsilon(t) + b\nu(t), \\ \epsilon_f(t) &= ce_\epsilon(t), \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $e_\epsilon(t)$ é o estado e $\nu(t) = k_p \tilde{\theta}^T(t)w(t) - \kappa \epsilon_f(t)m^2(t) + \mu \bar{\eta}(t)$ a entrada.

Visto que $Q(s)W_m(s)$ é SPR, pelo lema de Lefschetz-Kalman-Yakubovich, existem matrizes $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$ e $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T > 0$, tal que

$$A^T \mathcal{P} + \mathcal{P} A = -\mathcal{Q}, \quad (4.21)$$

$$\mathcal{P} b = c^T. \quad (4.22)$$

Agora, escolhendo a função positiva definida,

$$V(e_\epsilon, \tilde{\theta}) = e_\epsilon^T(t) \mathcal{P} e_\epsilon(t) + |k_p| \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T(t) \tilde{\theta}(t), \quad (4.23)$$

e derivando no tempo ao longo do sistema (4.20), teremos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{e}_\epsilon^T(t) \mathcal{P} e_\epsilon(t) + e_\epsilon^T(t) \mathcal{P} \dot{e}_\epsilon(t) + |k_p| \gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}^T(t) \tilde{\theta}(t) + |k_p| \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \\ &= (Ae_\epsilon(t) + b\nu(t))^T \mathcal{P} e_\epsilon(t) + e_\epsilon^T(t) \mathcal{P} (Ae_\epsilon(t) + b\nu(t)) + 2|k_p| \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \\ &= e_\epsilon^T(t) A^T \mathcal{P} e_\epsilon(t) + e_\epsilon^T(t) \mathcal{P} A e_\epsilon(t) + 2\nu(t) b^T \mathcal{P} e_\epsilon(t) + 2|k_p| \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \\ &= e_\epsilon^T(t) (A^T \mathcal{P} + \mathcal{P} A) e_\epsilon(t) + 2\nu(t) c e_\epsilon(t) + 2|k_p| \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \\ &= -e_\epsilon^T(t) \mathcal{Q} e_\epsilon(t) + 2\nu(t) \epsilon_f(t) + 2|k_p| \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T(t) \dot{\tilde{\theta}}(t). \end{aligned}$$

Substituindo $\nu(t)$ e a lei de adaptação (4.18) em $\dot{V}(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -e_\epsilon^T(t) \mathcal{Q} e_\epsilon(t) + 2(k_p \tilde{\theta}^T(t) w(t) - \kappa \epsilon_f(t) m^2(t) + \mu \bar{\eta}(t)) \epsilon_f(t) + 2|k_p| \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \\ &= -e_\epsilon^T(t) \mathcal{Q} e_\epsilon(t) + 2k_p \tilde{\theta}^T(t) w(t) \epsilon_f(t) - 2\kappa \epsilon_f(t) m^2(t) \epsilon_f(t) + 2\mu \bar{\eta}(t) \epsilon_f(t) + \\ &\quad + 2|k_p| \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T(t) \dot{\tilde{\theta}}(t) \\ &= -e_\epsilon^T(t) \mathcal{Q} e_\epsilon(t) + 2k_p \tilde{\theta}^T(t) w(t) \epsilon_f(t) - 2\kappa \epsilon_f^2(t) m^2(t) + 2\mu \bar{\eta}(t) \epsilon_f(t) + \\ &\quad + 2|k_p| \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T(t) (-\gamma \text{sign}(k_p) w(t) \epsilon_f(t) - \gamma \sigma_1(t) \theta(t)) \\ &= -e_\epsilon^T(t) \mathcal{Q} e_\epsilon(t) + 2k_p \tilde{\theta}^T(t) w(t) \epsilon_f(t) - 2\kappa \epsilon_f^2(t) m^2(t) + 2\mu \bar{\eta}(t) \epsilon_f(t) - \\ &\quad - 2|k_p| \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T(t) \gamma \text{sign}(k_p) w(t) \epsilon_f(t) - 2|k_p| \gamma^{-1} \tilde{\theta}^T(t) \gamma \sigma_1(t) \theta(t) \\ &= -e_\epsilon^T(t) \mathcal{Q} e_\epsilon(t) + 2k_p \tilde{\theta}^T(t) w(t) \epsilon_f(t) - 2\kappa \epsilon_f^2(t) m^2(t) + 2\mu \bar{\eta}(t) \epsilon_f(t) - \\ &\quad - 2k_p \tilde{\theta}^T(t) w(t) \epsilon_f(t) - 2|k_p| \sigma_1(t) \tilde{\theta}^T(t) \theta(t) \\ &= -e_\epsilon^T(t) \mathcal{Q} e_\epsilon(t) - 2\kappa \epsilon_f^2(t) m^2(t) + 2\mu \bar{\eta}(t) \epsilon_f(t) - 2|k_p| \sigma_1(t) \tilde{\theta}^T(t) \theta(t). \quad (4.24) \end{aligned}$$

De (4.24) observamos que os termos $2|k_p| \sigma_1(t) \tilde{\theta}^T(t) \theta(t)$ e $2\mu \bar{\eta}(t) \epsilon_f(t)$ não tem sinal definido. Portanto, não podemos afirmar que $\dot{V}(t)$ seja negativo semidefinido. Então, a equação (4.24) requer uma análise destes termos para garantir $\dot{V}(t) \leq 0$.

Começamos a análise pelo termo $2|k_p|\sigma_1\tilde{\theta}^T(t)\theta(t)$, o qual satisfaz a seguinte igualdade,

$$2|k_p|\sigma_1\tilde{\theta}^T(t)\theta(t) = |k_p|\sigma_1 \left(\theta^T(t)\theta(t) + (\theta(t) - \theta^*)^T(\theta(t) - \theta^*) - \theta^{*T}\theta^* \right). \quad (4.25)$$

Pelo esquema de chaveamento, quando $\sigma_1(t) > 0$ implica $M_1 < \|\theta(t)\|_2$. Como $M_1 > \|\theta^*\|_2$ então $\|\theta(t)\|_2 > \|\theta^*\|_2$. Portanto,

$$2|k_p|\sigma_1\tilde{\theta}^T(t)\theta(t) = |k_p|\sigma_1 \left(\|\theta(t)\|_2^2 + \|(\theta(t) - \theta^*)\|_2^2 - \|\theta^*\|_2^2 \right) \geq 0. \quad (4.26)$$

Em seguida, analisamos os termos $-2\kappa\epsilon_f^2(t)m^2(t)$ e $2\mu\bar{\eta}(t)\epsilon_f(t)$, os quais satisfazem a seguinte relação,

$$-2\kappa\epsilon_f^2(t)m^2(t) + 2\mu\bar{\eta}(t)\epsilon_f(t) = -\kappa\epsilon_f^2(t)m^2(t) - \kappa \left(\epsilon_f(t)m(t) - \frac{\mu\bar{\eta}(t)}{\kappa m(t)} \right)^2 + \frac{\mu^2\bar{\eta}^2(t)}{\kappa m^2(t)}. \quad (4.27)$$

De (4.27) podemos afirmar que a desigualdade abaixo é verdadeira,

$$-2\kappa\epsilon_f^2(t)m^2(t) + 2\mu\bar{\eta}(t)\epsilon_f(t) \leq -\kappa\epsilon_f^2m^2(t) + \frac{\mu^2\bar{\eta}^2(t)}{\kappa m^2(t)}. \quad (4.28)$$

Agora, substituindo (4.28) em (4.24), obtemos

$$\dot{V}(t) \leq -e_\epsilon^T(t)\mathcal{Q}e_\epsilon(t) - \kappa\epsilon_f^2(t)m^2(t) - 2|k_p|\sigma_1(t)\tilde{\theta}^T(t)\theta(t) + \frac{\mu^2\bar{\eta}^2(t)}{\kappa m^2(t)}, \quad (4.29)$$

onde o último termo da inequação é positivo. Então, uma análise mais detalhada se faz necessária com o objetivo de se encontrar um limite superior para este termo.

Seguindo o desenvolvimento apresentado no apêndice B.4 obtemos (B.65), o qual substituindo em (4.28), resulta

$$\frac{\mu^2\bar{\eta}^2(t)}{\kappa m^2(t)} \leq 2\mu^2\frac{k_3^2}{\kappa} + 2\mu^2\frac{k_3^2}{\kappa}\bar{\eta}_1^2\|\theta(t)\|^2. \quad (4.30)$$

Em seguida, substituindo (4.30) em (4.29), teremos

$$\dot{V}(e_\epsilon, \tilde{\theta}) = -e_\epsilon^T(t)\mathcal{Q}e_\epsilon(t) - \kappa\epsilon_f^2(t)m^2(t) + 2\mu^2\frac{k_3^2}{\kappa} + 2\mu^2\frac{k_3^2}{\kappa}\bar{\eta}_1^2\|\theta(t)\|^2 - 2|k_p|\sigma_1(t)\tilde{\theta}^T(t)\theta(t). \quad (4.31)$$

De (4.31), eliminando o termo chaveado, a seguinte desigualdade é satisfeita,

$$\dot{V}(e_\epsilon, \tilde{\theta}) \leq -\lambda_{\min}(\mathcal{Q})e_\epsilon^T(t)e_\epsilon(t) - 2\kappa m^2(t)\epsilon_f^2(t) + \frac{2\mu^2 k_3^2}{\kappa}(1 + \bar{\eta}_1^2 \|\theta(t)\|^2). \quad (4.32)$$

Integrando ambos os lados de (4.32), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \dot{V}(e_\epsilon(t), \tilde{\theta}(t))dt &\leq -\lambda_{\min}(\mathcal{Q}) \int_{t_1}^{t_2} e_\epsilon^T(t)e_\epsilon(t)dt - 2\kappa \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon_f(t)m(t))^2 dt \\ &\quad + \frac{2\mu^2 k_3^2}{\kappa} \int_{t_1}^{t_2} dt + \frac{2\mu^2 k_3^2}{\kappa} \bar{\eta}_1^2 \int_{t_1}^{t_2} \|\theta(t)\|^2 dt. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Considerando a norma de $\|\theta(t)\|$ limitada, isto é $\theta(t) \in \mathcal{L}_2$, podemos definir um limite superior tal que,

$$\|\theta(t)\|^2 \leq \theta_{max}. \quad (4.34)$$

Substituindo θ_{max} em (4.33), teremos

$$\begin{aligned} V(e_\epsilon(t_2), \tilde{\theta}(t_2)) - V(e_\epsilon(t_1), \tilde{\theta}(t_1)) &\leq -\lambda_{\min}(\mathcal{Q}) \int_{t_1}^{t_2} e_\epsilon^T(t)\epsilon(t)dt - \\ &\quad - 2\kappa \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon_f(t)m(t))^2 dt + \frac{2\mu^2 k_3^2}{\kappa}(1 + \bar{\eta}_1^2 \theta_{max})(t_2 - t_1), \\ \lambda_{\min}(\mathcal{Q}) \int_{t_1}^{t_2} \|e_\epsilon(t)\|^2 dt + 2\kappa \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon_f(t)m(t))^2 dt &\leq \\ V(e_\epsilon(t_1), \tilde{\theta}(t_1)) - V(e_\epsilon(t_2), \tilde{\theta}(t_2)) + \frac{2\mu^2 k_3^2}{\kappa}(1 + \bar{\eta}_1^2 \theta_{max})(t_2 - t_1), \end{aligned} \quad (4.35)$$

definindo $\gamma_0 = V(e_\epsilon(t_1), \tilde{\theta}(t_1)) - V(e_\epsilon(t_2), \tilde{\theta}(t_2))$, $k_0 = \frac{2k_3^2}{\kappa}(1 + \bar{\eta}_1^2 \theta_{max})$ e introduzindo em (4.35), obtemos

$$\lambda_{\min}(\mathcal{Q}) \int_{t_1}^{t_2} \|e_\epsilon(t)\|^2 dt + 2\kappa \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon_f(t)m(t))^2 dt \leq \gamma_0 + \mu^2 k_0 (t_2 - t_1), \quad (4.36)$$

definindo $\beta = \min\{\lambda_{\min}(\mathcal{Q}), 2\kappa\}$ teremos,

$$\beta \int_{t_1}^{t_2} \|e_\epsilon(t)\|^2 dt + \beta \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon_f(t)m(t))^2 dt \leq \gamma_0 + \mu^2 k_0 (t_2 - t_1), \quad (4.37)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\|e_\epsilon(t)\|^2 + (\epsilon_f(t)m(t))^2) dt \leq \frac{\gamma_0}{\beta} + \mu^2 \frac{k_0}{\beta} (t_2 - t_1), \quad (4.38)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\|e_\epsilon(t)\|_2^2 + \|\epsilon_f(t)m(t)\|_2^2) dt \leq \mu^2 \bar{k}_0 (t_2 - t_1) + \bar{\gamma}_0, \quad (4.39)$$

onde $\bar{\gamma} = \frac{\gamma_0}{\beta} > 0$, $\bar{k}_0 = \frac{k_0}{\beta} > 0$.

De (4.31), observamos que para algum $\mu \in [0, \mu^*)$, onde $\mu = \sqrt{\phi} \mu^* = \sqrt{\frac{\phi |K_p| \sigma_{01} k}{k_3^2 \bar{\eta}_1^2}}$, com $0 < \phi$, obtido do apêndice (B.3), existe a constante $\theta_0 > 0$ que garante $\dot{V} \leq 0$ sempre que $\|\theta(t)\| > \theta_0$. Então $V(t)$ é não crescente ao longo da trajetória do sistema (4.20), uniformemente limitado acima por $V(0)$ e abaixo por 0. Logo, $\theta(t) \in \mathcal{L}_\infty$, $e_\epsilon(t) \in \mathcal{L}_\infty$. De (4.39) $e_\epsilon(t)$ e $\epsilon_f(t)m(t) \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$. Então, pelo sistema (4.20), $\epsilon_f \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$, e de (4.9) implica $e_f(t) \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$ e $m(t) \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$. Visto que, $Q(s)$ é própria e estável implica $Q(s)^{-1}$ própria e estável. Então, de (3.47) teremos $e_0(t) \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$. Do apêndice B.5 concluímos que $y(t)$, $w_1(t)$ e $w_2(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Pela lei de adaptação verificamos que $u(t)$ é uniformemente limitado. Dado $r(t) \in \mathcal{L}_\infty$ implica $y_m(t)$ uniformemente limitado. Então, pela definição do erro de rastreamento $e_0(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Pela lei de adaptação $\dot{\tilde{\theta}}(t)$ e $\dot{\theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. De (B.55) e (B.54) obtemos $\bar{\eta}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, e de (4.20) obtemos $\dot{e}_\epsilon(t)$ e $\dot{\epsilon}(t)$ uniformemente limitados. Desta análise podemos afirmar que todos os sinais do sistema são uniformemente limitados. ■

Cabe ressaltar que, se o chaveamento for eliminado, isto é, $\sigma_1(t) = 0$, a função $\dot{V}(t)$ pode não ser negativa semidefinida, quando $|\epsilon_f(t)|$ e $|\epsilon_f(t)m(t)|$ forem pequenos, devido a presença dos erros de modelagem contidos no sinal $\bar{\eta}(t)$. Consequentemente, $\tilde{\theta}(t)$ pode crescer sem limite (Tao 2003).

4.4 Resultados das simulações

Para ilustrar desempenho do algoritmo α -MRAC robusto e a melhoria da resposta transitória do sistema, foram realizadas cinco simulações. Considerando uma planta nominal de primeira ordem $G_0(s) = \frac{2}{s+1}$ e de segunda ordem $G_1(s) = \frac{s+6}{s(s+1)}$, com todos os parâmetros desconhecidos, na presença das dinâmicas não modeladas multiplicativas $\mu \Delta_m = \mu \frac{-20s^2 - 600s}{s^2 + 30s + 229}$ e aditivas $\mu \Delta_a = \mu \frac{229}{s^2 + 30s + 229}$, para $\mu = 0.05$. O modelo de referência usado foi $W_m(s) = \frac{1}{s+3}$. Para $G_0(s)$ e $G_1(s)$ o algoritmo α -MRAC robusto foi comparado com o algoritmo MRAC padrão usando as mesmas modificações na lei de adaptação.

O primeiro e o segundo exemplos simulam os algoritmos MRAC padrão, com a lei de adaptação modificada, e o algoritmo α -MRAC robusto, com a lei de adaptação definida em (4.18), respectivamente, para a planta $G_0(s)$. Em seguida, simulamos os efeitos da variação de μ no erro de rastreamento do sistema, usando a planta $G_0(s)$ para ambos os algoritmos. Para a planta $G_1(s)$ a robustez dos algoritmos MRAC e α -MRAC robusto, são mostradas no quarto e no quinto exemplo, respectivamente

Simulação 1 - MRAC padrão com a lei de adaptação modificada

Os dados usados foram:

condições iniciais dos erros de modelagem $\bar{\eta}(0) = 0$, da planta $y(0) = 10$ e dos parâmetros do controlador $\theta(0) = (0, 0)^T$;

ganho de adaptação $\gamma = 10$;

parâmetros do chaveamento $M1 = 2$ e $\sigma_1 = 4$;

sinal normalizante $\kappa = 1$, $\delta_0 = 5$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $m(0) = 1$ e

a entrada $r(t) = 2 + 2\text{sen}(2\pi 1.7t)$.

Os resultados são mostrados na figura 4.3.

Simulação 2 - Algoritmo α -MRAC robusto

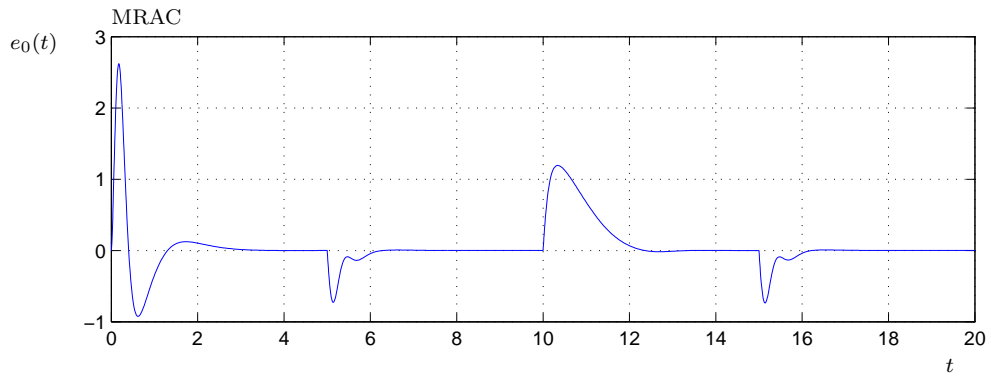
Os dados usados foram: $\alpha = 1$, $\gamma = 10$, $\tau = 0.01$ e $y(0) = \hat{e}_0(0) = 10$, e os demais dados são os mesmos da simulação anterior.

Os resultados são mostrados na figura 4.4.

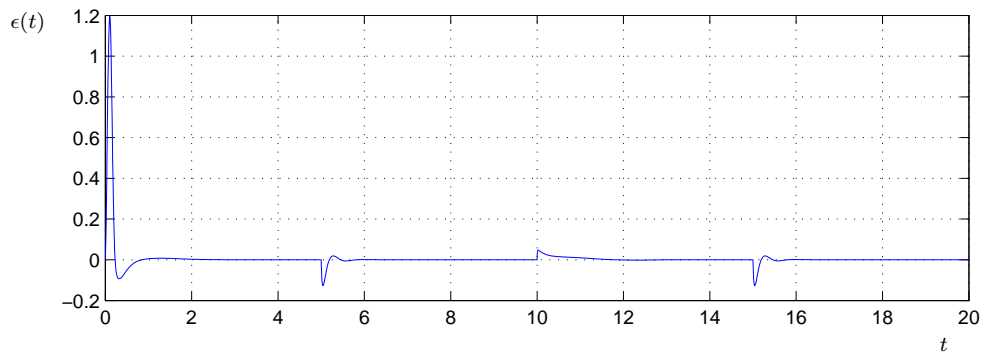
A figura 4.3 e 4.4 mostram que o novo algoritmo é robusto na presença dos erros de modelagem dinâmicas da planta e os sinais do sistema, em malha fechada, se mantêm uniformemente limitados. A estimativa do erro de rastreamento $\epsilon(t)$ apresentou convergência para a vizinhança $B^{2, \bar{k}_0 \mu^2}$, da ordem da perturbação da planta (Tao 2003). O erro é uniformemente limitado e apresenta uma ligeira melhoria do comportamento transitório quando comparado com o controle robusto MRAC.

Simulação 3 - Efeitos da variação de μ no erro de rastreamento

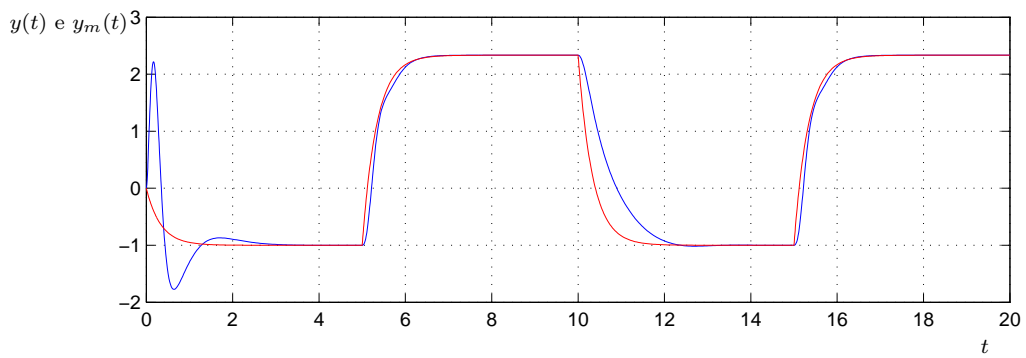
A seguir, os gráficos (4.5)-(4.7) mostram a influência da variação de μ no erro de rastreamento do sistema, usando o algoritmo MRAC e o algoritmo α -MRAC robusto,



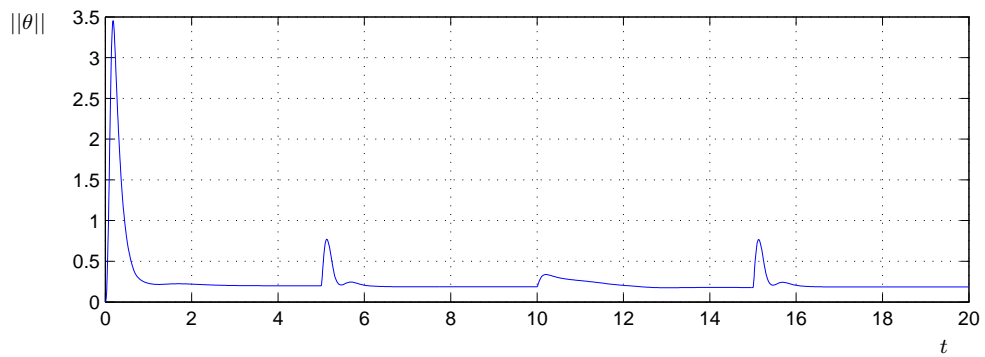
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 4.3: Algoritmo MRAC para $G_0(S)$. (a) e_0 , (b) ϵ , (c) y e y_m e (d) $\|\theta\|$.

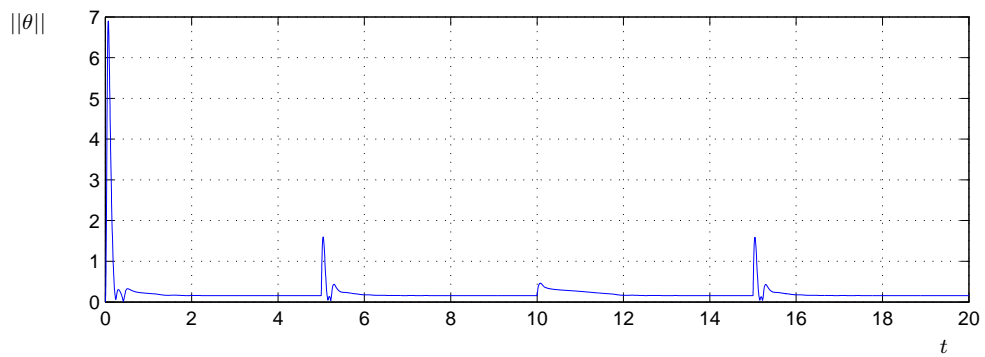
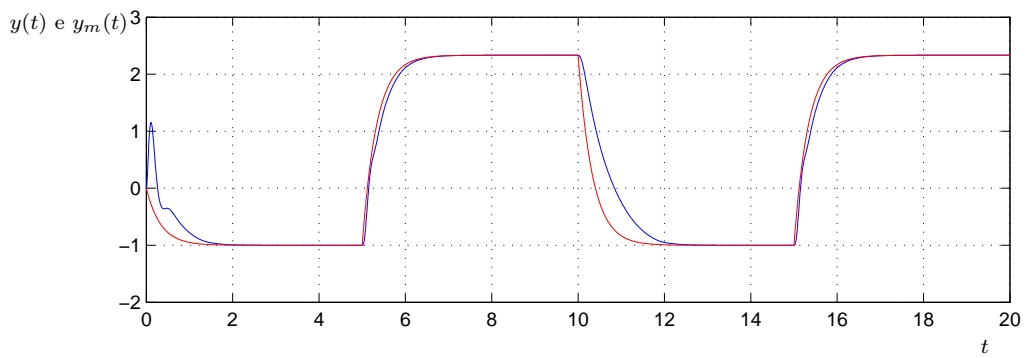
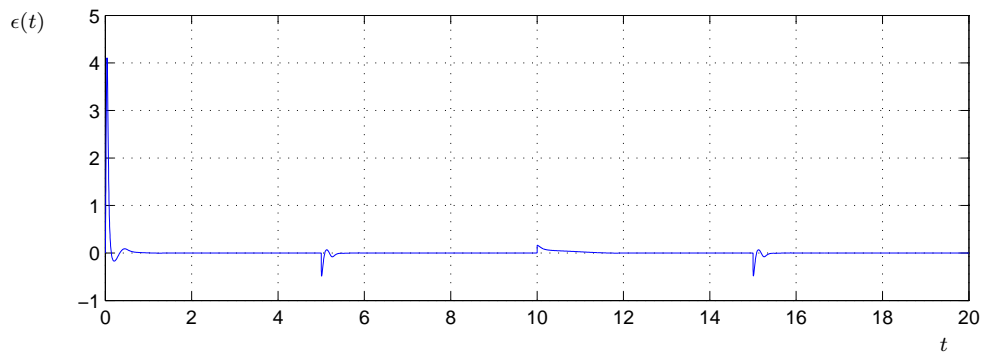
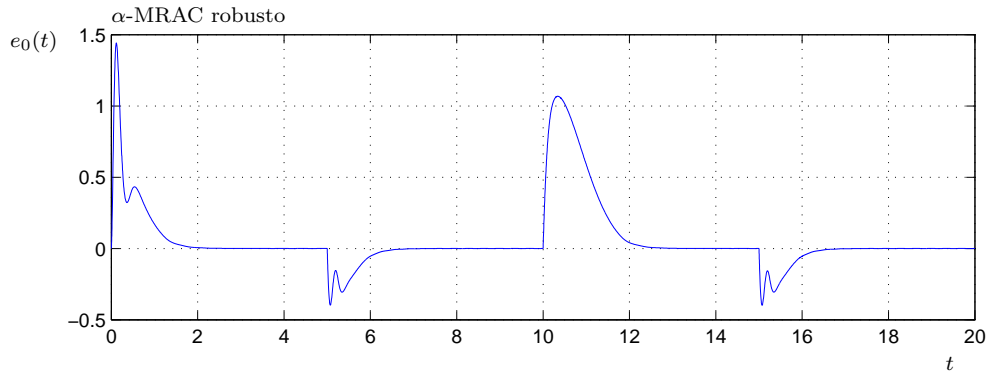


FIGURA 4.4: Algoritmo α -MRAC robusto para $G_0(S)$. (a) e_0 , (b) ϵ , (c) y e y_m e (d) $\|\theta\|$.

para a planta $G_0(s)$.

Para esta simulação foram usados os seguintes valores de $\mu = 0.08, 0.05,$ e 0.005 .

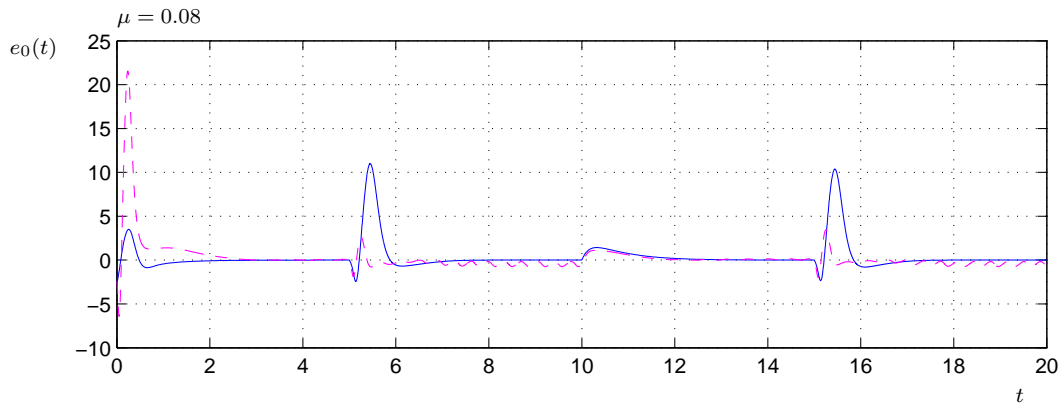


FIGURA 4.5: Erro: MRAC(—) e α -MRAC robusto(---) .

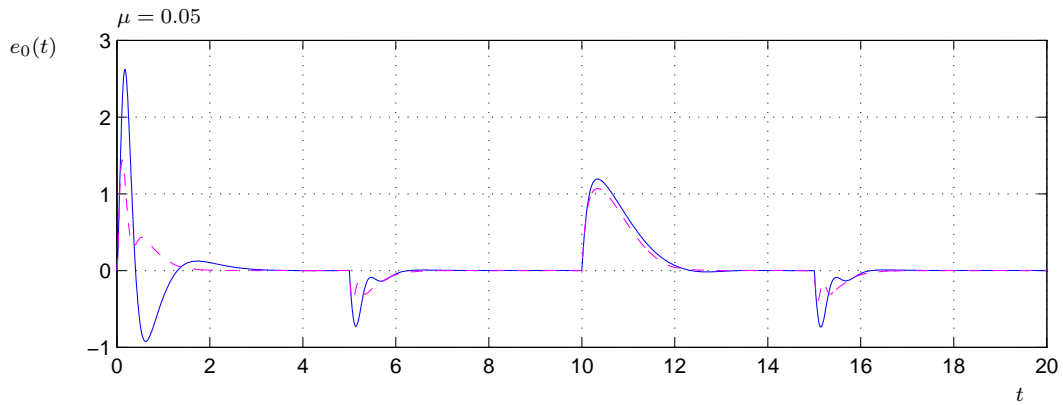


FIGURA 4.6: Erro: MRAC(—) e α -MRAC robusto(---).

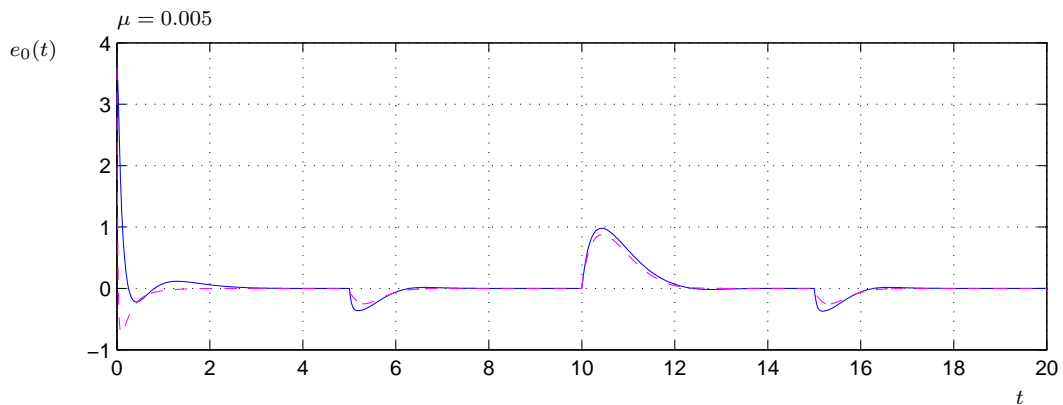


FIGURA 4.7: Planta $G_0(S)$. Erro: MRAC (—) e α -MRAC robusto (---).

Como esperado, se μ diminui a estimativa do erro converge para uma vizinhança $B^{2,\mu^2\bar{k}_0}$ menor. A melhoria no comportamento transitório do erro é pouco significativa, em

relação ao algoritmo MRAC padrão. Se μ aumenta, as dinâmicas não modeladas passam a ser dinâmicas que descrevem o sistemas e não podem ser desconsideradas na modelagem da planta. O custo de se desprezar tais dinâmicas é a instabilidade do sistema em malha fechada.

Simulação 4 - MRAC padrão com a lei de adaptação modificada

Os dados usados foram:

condições iniciais dos erros de modelagem $\bar{\eta}(0) = 0$, da planta $y(0) = 7$ e dos parâmetros do controlador $\theta(0) = (0, 0)^T$;

ganho de adaptação $\gamma = 100$;

parâmetros do chaveamento $M1 = 0.2$ e $\sigma = 1$;

sinal normalizante $\kappa = 20$, $\delta_0 = 5$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $m(0) = 1$ e

a entrada $r(t) = 2 + 2sqw(0.1t)$.

Os resultados são mostrados na figura 4.6.

Simulação 5 - α -MRAC robusto

Os dados usados foram:

condições iniciais dos erros de modelagem $\bar{\eta}(0) = 0$, da planta $y(0) = 7$ e dos parâmetros do controlador $\theta(0) = (0, 0)^T$;

ganho de adaptação $\gamma = 100$;

parâmetros do chaveamento $M1 = 0.2$ e $\sigma = 1$;

sinal normalizante $\kappa = 20$, $\delta_0 = 5$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $m(0) = 1$ e

a entrada $r(t) = 2 + 2sqw(0.1t)$.

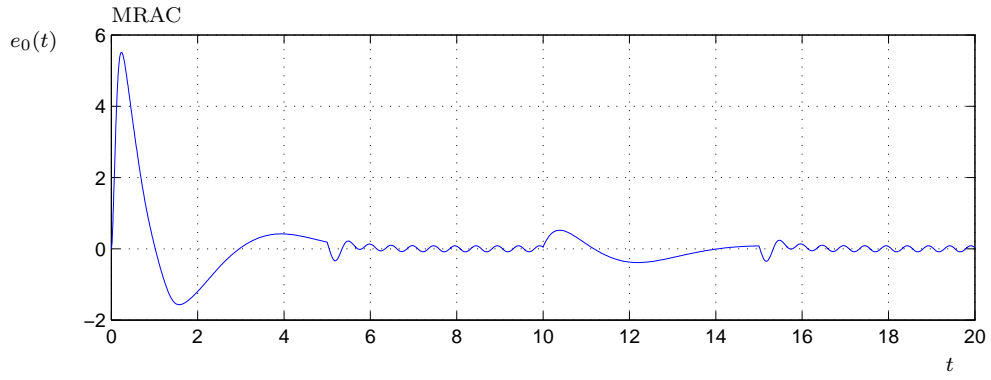
Os resultados são mostrados na figura 4.7.

4.5 Conclusões

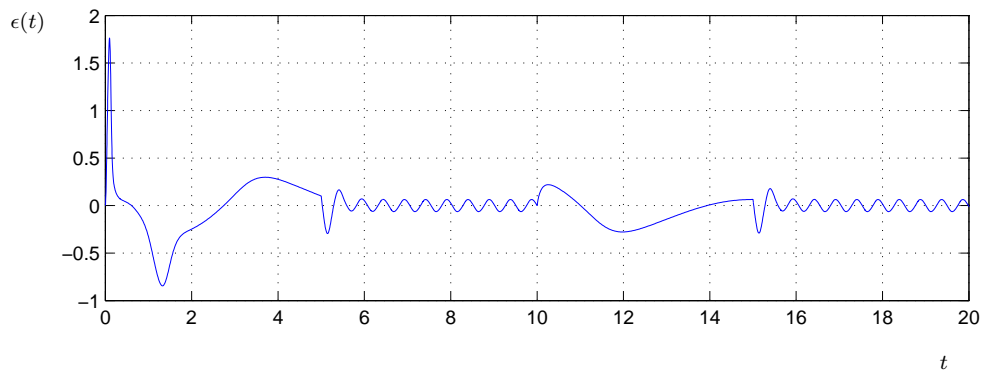
Neste capítulo, o problema da robustez de sistemas foi resolvido para plantas com erros de modelagem dinâmica multiplicativa e aditiva, satisfazendo as hipóteses (A6)-(A8), usando o novo algoritmo robusto resultado do modificação proposta para a lei de adaptação do algoritmo α -MRAC. As modificações da lei de adaptação (4.18), foram a

substituição do sinal de erro filtrado $e_f(t)$ pela sua estimativa $\epsilon_f(t)$, e a introdução de um sinal chaveado, cujo esquema de chaveamento foi definido em (4.3). O sinal filtrado do erro de rastreamento $e_f(t)$ é resultado da operação do filtro de avanço $Q(s)$ sobre o erro de rastreamento, e a sua estimativa, $\epsilon_f(t)$, foi definida em (4.17).

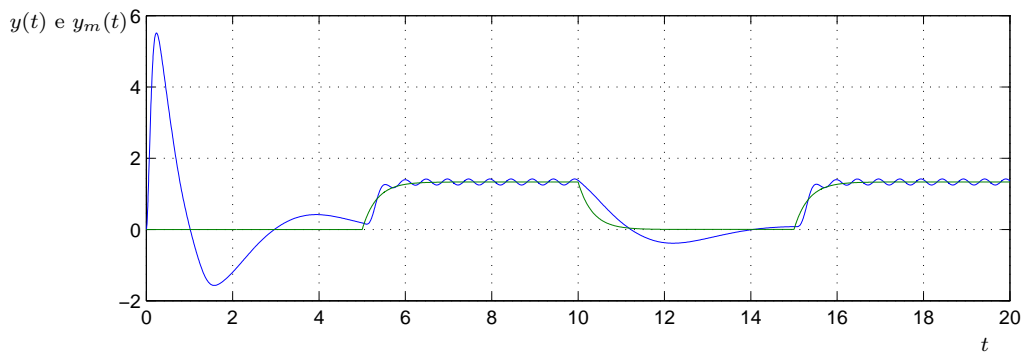
Portanto, para a planta (4.1), sujeita a erros de modelagem dinâmicas, satisfazendo as hipóteses (A6)-(A8), o controlador (4.19), atualizado pela lei de adaptação (4.18), existe $\mu \in [0, \mu^*)$, tal que todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados, e o erro de rastreamento converge para uma região definida por $B^{2, \bar{k}_0 \mu^2}$, com $\bar{k}_0 > 0$, com erro da ordem da perturbação da planta. Assim sendo, apesar das modificações implementadas para tolerar os erros de modelagem, o principal vantagem do algoritmo α -MRAC se conserva no novo algoritmo robusto, isto é, contribuir para a melhoria do comportamento transitório do sistema. Vale ressaltar que $\lim_{t \rightarrow \infty} e_0(t) = 0$, quando $\mu = 0$.



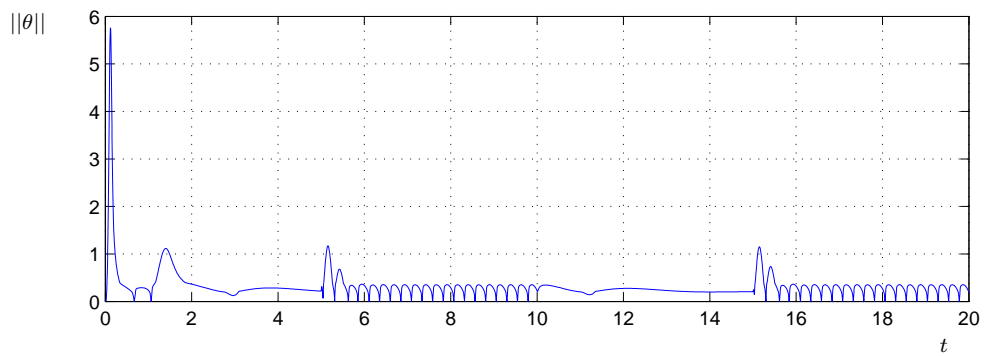
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 4.8: Planta $G_1(S)$ com o algoritmo MRAC. (a) e_0 , (b) ϵ , (c) y e y_m e (d) $\|\theta\|$.

Capítulo 5

Controle adaptativo multivariável

Neste capítulo apresentamos uma revisão do controle adaptativo por modelo de referência para sistemas MIMO, de fase mínima e grau relativo 1, desenvolvida recentemente por (Costa et al. 2003), baseado na fatoração SDU da matriz de ganhos de alta frequência K_p , introduzida por (Morse 1993). A introdução da fatoração SDU permite fazer uma generalização da hipótese do conhecimento do sinal do ganho de alta frequência, no caso SISO, para o conhecimento dos sinais dos menores principais da matriz K_p no caso MIMO. A fatoração $K_p = SDU$, onde S é simétrica positiva definida, D é diagonal e U é triangular superior unitária, é conveniente por causa dos efeitos bem definidos de cada matriz na equação do erro de rastreamento e na lei de controle. A influência de S é assegurar que $W_M(s)S$ seja SPR, visto que é provada a existência de ao menos uma matriz S que garante a condição SPR. A influência de D é a mais importante para a utilização desta fatoração, pois permite a extensão direta da hipótese (A4), do caso SISO (cap.3), em relação ao conhecimento do sinal do ganho k_p , para o conhecimento dos sinais dos elementos de D . Finalmente, a influência de U é eliminar a possibilidade de recursividade algébrica do algoritmo e garantir uma lei de controle bem definida. A nova parametrização do controlador usando a fatoração SDU reduz o projeto do MRAC multivariável, para sistemas com m entradas e m saídas, para m projetos MRACs monovariáveis, o que implica na completa analogia do MRAC MIMO com o MRAC SISO, e resulta num ganho de simplicidade e compreensão das propriedades do algoritmo MRAC para sistemas MIMO.

O objetivo desta revisão é facilitar a compreensão do algoritmo α -MRAC multi-

variável, que será introduzido no Capítulo 6, uma vez que o seu desenvolvimento é baseado na generalização obtida com a fatoração SDU .

Como contribuição desta tese foi desenvolvido o estudo da propriedade de robustez do algoritmo MRAC MIMO com a fatoração SDU , para a planta (2.1) na presença de dinâmicas não modeladas. Para isso, o erro de rastreamento foi reparametrizado para levar em conta os erros de modelagem, e em seguida, para garantir a robustez do sistema, a lei de adaptação foi modificada. O teorema 5.2 resume a robustez atingida.

5.1 Revisão do projeto MRAC multivariável

Para a planta multivariável (2.1), com $\mu = 0$, satisfazendo as hipóteses (H1) a (H6), e para o modelo de referência (2.5), faremos uma revisão da estrutura do controle adaptativo por modelo de referência para sistemas MIMO, sem a fatoração $K_p = SDU$, dada em (Ioannou & Sun 1996), (Narendra & Annaswamy 1989) e (Sastry & Bodson 1989). De (2.2) com $\mu = 0$, se $G_0(s)$ é conhecida, então a lei de controle ideal que garante o rastreamento perfeito da saída da planta $y(t)$ para a saída do modelo de referência $y_M(t)$, com o sistema em malha fechada, i.é,

$$y(t) = G_0(s)[u^*](t) = W_M(s)[r](t) = y_M(t), \quad (5.1)$$

é dada por,

$$u^*(t) = \theta_1^{*T} w_1(t) + \theta_2^{*T} w_2(t) + \theta_3^* y(t) + \theta_4^* r(t) = \theta^{*T} \omega(t), \quad (5.2)$$

onde, a matriz de parâmetros ideais $\theta^* = [\theta_1^{*T} \theta_2^{*T} \theta_3^* \theta_4^*]^T$ e o vetor regressor,

$\omega(t) = [w_1^T(t) w_2^T(t) y^T(t) r^T(t)]$ são definidos como

$$\theta_1^*, \theta_2^* \in \mathbb{R}^{m(\nu-1) \times m}, \quad \theta_3^* \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \theta_4^* = K_p^{-1},$$

$$w_1(t) = F(s)[u](t), \quad w_2(t) = F(s)[y](t), \quad F(s) = \frac{A(s)}{\Lambda(s)}, \quad w_1(t), w_2(t) \in \mathbb{R}^{m(\nu-1)}, \quad (5.3)$$

$$A(s) = [I \quad Is \quad \dots \quad Is^{\nu-2}]^T, \quad I \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

e $\Lambda(s) = \lambda_0 + \lambda_1 s + \dots + s^{\nu-1}$ é estável (Hurwitz),

onde ν é o índice de observabilidade de $G_0(s)$.

Para o sistema em malha fechada na condição ideal fixamos $u(t) = u^*(t)$.

Quando $w_1(t)$, $w_2(t)$, $y(t)$ e $r(t)$ em (5.2) são expressos em termos de $u^*(t)$,

$$u^*(t) = \theta_1^{*T} \frac{A(s)}{\Lambda(s)} u^* + \theta_2^{*T} \frac{A(s)}{\Lambda(s)} G_0(s) u^* + \theta_3^* G_0(s) u^* + \theta_4^* W_M^{-1}(s) G_0(s) u^*, \quad (5.4)$$

a equação ideal ou *matching equation* torna-se,

$$I - \theta_1^{*T} \frac{A(s)}{\Lambda(s)} - \theta_2^{*T} \frac{A(s)}{\Lambda(s)} G_0(s) - \theta_3^* G_0(s) = \theta_4^* W_M^{-1}(s) G_0(s). \quad (5.5)$$

Multiplicando à direita ambos os lados da equação ideal por $u(t)$, e substituindo $\theta_4^* = K_p^{-1}$, resulta

$$u(t) = \theta^{*T} \omega(t) - K_p^{-1} r(t) + K_p^{-1} W_M^{-1}(s) G_0(s) [u](t). \quad (5.6)$$

Finalmente, operando à direita (5.6) por $W_M(s) K_p$, rearranjando os termos, e usando $e_0(t) = y(t) - y_M$, $y(t) = G_0(s) [u](t)$ e $y_M(t) = W_M(s) [r](t)$, obtemos a equação do erro (Tao 2003),

$$e_0(t) = W_M(s) K_p [u - \theta^{*T} \omega](t). \quad (5.7)$$

Exceto pelo fato de $W_M(s)$ e K_p serem matrizes e $e(t) \in \mathbb{R}^m$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$, a equação do erro (5.7) tem a mesma forma que a correspondente equação para o caso SISO (3.28).

5.2 Fatoração SDU

Para obter a nova parametrização vamos apresentar a fatoração *SDU* da matriz K_p introduzida por (Morse 1993).

Lema 5.1 *Toda matriz K_p real $m \times m$ com menores principais não nulos $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$ pode ser fatorada como*

$$K_p = SDU, \quad (5.8)$$

onde, S é simétrica positiva definida, D é diagonal e U é triangular superior unitária.

Prova: (Costa et al. 2003) Visto que $\Delta_i \neq 0$, existe uma única fatoração (Strang 1988),

$$K_p = L_1 D_p L_2^T, \quad (5.9)$$

onde, L_1 e L_2 são triangulares inferiores unitárias e

$$D_p = \text{diag} \left\{ \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}} \right\}. \quad (5.10)$$

Fatorando D_p como,

$$D_p = D_+ D,$$

onde D_+ é uma matriz diagonal cujos elementos são positivos, reescrevemos (5.9) como,

$$K_p = L_1 D_+ L_1^T L_1^{-T} D L_2^T, \quad (5.11)$$

tal que (5.8) é satisfeita por,

$$S = L_1 D_+ L_1^T, \quad D = D_+^{-1} D_p \quad \text{e} \quad U = D^{-1} L_1^{-T} D L_2^T. \quad (5.12)$$

■

Observação 1 : *Em (Morse 1993), os elementos da diagonal principal da matriz D podem ser $+1$ ou -1 . A fatoração SDU não é única porque a matriz diagonal positiva D^+ é um parâmetro livre.*

Exemplo 5.1 *Considere a matriz*

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}.$$

A fatoração LDU em (5.9) corresponde a

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_p = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

onde, $l_1 = \frac{k_{21}}{\Delta_1}$ e $l_2 = \frac{k_{12}}{\Delta_1}$, e para

$$D_+ = \begin{bmatrix} d_1^+ & 0 \\ 0 & d_2^+ \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

a fatoração *SDU* (5.12) gera,

$$D = D_+^{-1} D_p, \quad (5.15)$$

$$S = \begin{bmatrix} d_1^+ & d_1^+ l_1 \\ d_1^+ l_1 & d_2^+ + d_1^+ l_1^2 \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

e

$$U = \begin{bmatrix} 1 & l_2 + \frac{d_1^+ l_1 \Delta_2}{d_2^+ \Delta_1^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

5.3 Parametrização do controle com fatoração *SDU*

Empregando a fatoração *SDU* na equação do erro, substituímos $K_p = SDU$ em (5.7), e usando (5.2), obtemos

$$\begin{aligned} e_0 &= W_M(s)SDU[u - \theta^{*T}\omega](t), \\ &= W_M(s)SD[Uu - U\theta_1^{*T}w_1 - U\theta_2^{*T}w_2 - U\theta_3^*y - U\theta_4^*r](t). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Com a decomposição,

$$Uu(t) = u(t) - (I - U)u(t) \quad (5.19)$$

onde $(I - U)$ é estritamente triangular superior, é possível definir o vetor de controle $u(t)$ como função de $(I - U)u(t)$. Nenhum "loop" estático ocorrerá, pois esta estrutura permite definir cada componente do sinal de controle u_i , ($i = 1, \dots, m$), em função dos sinais u_j , ($i + 1 < j \leq m$). Portanto, $u_1(t)$ depende somente de $u_2(t), u_3(t), \dots, u_m(t)$, $u_2(t)$ só depende de $u_3(t), u_4(t), \dots, u_m(t)$, e assim sucessivamente. Os elementos da matriz desconhecida U são incorporados à parametrização pela definição das matrizes $K_1 = U\theta_1^{*T}$, $K_2 = U\theta_2^{*T}$, $K_3 = U\theta_3^*$ e $K_4 = U\theta_4^*$, e substituindo em (5.18), teremos

$$e_0(t) = W_M(s)SD[u - K_1w_1 - K_2w_2 - K_3y - K_4r - (I - U)u](t). \quad (5.20)$$

Agora, introduzimos o vetor de parâmetros ideais Θ_i^* usando a identidade,

$$\begin{bmatrix} \Theta_1^{*T} \Omega_1(t) \\ \Theta_2^{*T} \Omega_2(t) \\ \vdots \\ \Theta_m^{*T} \Omega_m(t) \end{bmatrix} \equiv K_1 w_1(t) + K_2 w_2(t) + K_3 y(t) + K_4 r(t) + (I - U)u(t), \quad (5.21)$$

onde, os vetores Θ_i^{*T} são obtidos pela concatenação das correspondentes linhas (i) das matrizes K_1, K_2, K_3, K_4 e $(I - U)u(t)$, e os correspondentes vetores regressores são

$$\begin{aligned} \Omega_1^T(t) &= [\omega^T(t) \quad u_2(t) \quad u_3(t) \quad \dots u_m(t)], \\ \Omega_2^T(t) &= [\omega^T(t) \quad u_3(t) \quad \dots u_m(t)], \\ &\vdots \\ \Omega_m^T(t) &= \omega^T(t). \end{aligned} \quad (5.22)$$

A equação (5.20) é reescrita da seguinte forma,

$$e_0(t) = (W_M(s)S)D[u - [\Theta_1^{*T} \Omega_1 \quad \Theta_2^{*T} \Omega_2 \dots \Theta_m^{*T} \Omega_m]^T](t). \quad (5.23)$$

Para simplificar a notação definimos,

$$\Omega^T(t) = \begin{bmatrix} \Omega_1^T & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \Omega_2^T & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots \Omega_m^T \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta^* = \begin{bmatrix} \Theta_1^* \\ \Theta_2^* \\ \vdots \\ \Theta_m^* \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

e substituindo em (5.23) a parametrização da equação do erro de rastreamento torna-se,

$$e_0(t) = W_M(s)SD[u - \Omega^T \Theta^*](t), \quad (5.25)$$

e a lei de controle,

$$u(t) = \Omega^T(t)\Theta(t). \quad (5.26)$$

onde $\Theta(t)$ é uma estimativa de Θ^* .

A principal característica da equação do erro, parametrizada com a fatoração SDU , está na substituição da matriz K_p , de (5.7), pela matriz diagonal D em (5.23), onde o conhecimento dos sinais dos seus elementos, generaliza a hipótese (A4) sobre o conhecimento do sinal do ganho k_p no caso SISO. Embora seja necessário o conhecimento desta informação, a parametrização da lei de controle obtida resulta em um projeto mais simples para o MRAC no caso MIMO. Por outro lado, a nova parametrização requer que a condição SPR seja satisfeita pela matriz de transferência $W_M(s)S$ ao invés de $W_M(s)$ (Costa et al. 2003). Pode-se provar que para todo $W_M(s)$, dado em (2.5), existe ao menos uma matriz $S = S^T$, tal que $W_M(s)S$ é SPR (Morse 1993).

Lema 5.2 *Para toda matriz diagonal $A = \text{diag}\{-a_1, -a_2, \dots, -a_m\}$, $a_i > 0$, ($i = 1, \dots, m$), e toda matriz triangular inferior unitária $m \times m$ L_1 , existe uma matriz $D_+ = \text{diag}\{d_1^+, d_2^+, \dots, d_m^+\}$, $d_i^+ > 0$, tal que,*

$$W_M(s)S = (sI - A)^{-1}L_1D_+L_1^T \quad (5.27)$$

é SPR .

Prova: Ver prova em (Costa et al. 2003) ■

5.4 Controle adaptativo

Combinando os estados da planta $x(t) \in \mathbb{R}^n$ (2.1), para $\mu = 0$, com os estados dos filtros $w_1(t)$ e $w_2(t)$ (5.3), definimos $X(t) = [x^T(t) w_1^T(t) w_2^T(t)]^T \in \mathbb{R}^{n+m(\nu-1)}$, e denominando $\mathcal{X}_M(t)$ os estados correspondentes a uma realização não mínima $\mathcal{C}_M(sI - \mathcal{A}_M)^{-1}\mathcal{B}_M$ de $W_M(s)S$, sendo $\mathcal{C}_M\mathcal{B}_M = S$, então o erro de estados,

$$\mathcal{Z}(t) = X(t) - \mathcal{X}_M(t), \quad (5.28)$$

e o erro de saída $e_0(t)$, dado em (5.23), satisfazem,

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{Z}}(t) &= \mathcal{A}_M\mathcal{Z}(t) + \mathcal{B}_M D(u(t) - \Omega^T\Theta^*), \\ e_0(t) &= \mathcal{C}_M\mathcal{Z}(t). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Visto que $W_M(s)S$ é SPR, então existem matrizes $\mathcal{P}_M = \mathcal{P}_M^T > 0$ e $\mathcal{Q}_M = \mathcal{Q}_M^T > 0$ que satisfazem,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_M^T \mathcal{P}_M + \mathcal{P}_M \mathcal{A}_M &= -2\mathcal{Q}_M \\ \mathcal{P}_M \mathcal{B}_M &= \mathcal{C}_M^T.\end{aligned}\tag{5.30}$$

Defina as seguintes matrizes,

$$\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1 I_1, d_2 I_2, \dots, d_m I_m\},\tag{5.31}$$

e

$$\Gamma = \text{diag}\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m\},\tag{5.32}$$

onde, d_i são os elementos da diagonal da matriz D e Γ_i são submatrizes diagonais positivas e simétricas da matriz de ganhos de adaptação, cujos elementos da sua diagonal são os ganhos γ_i . \mathcal{D} e $\Gamma \in \mathbb{R}^{(2n+m-i) \times (2n+m-i)}$. Agora, escolhendo a função positiva definida,

$$2V(\mathcal{Z}(t), \tilde{\Theta}(t)) = \mathcal{Z}^T(t) \mathcal{P}_M \mathcal{Z}(t) + \tilde{\Theta}^T(t) |\mathcal{D}| \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}(t),\tag{5.33}$$

onde,

$$\tilde{\Theta}(t) = \Theta(t) - \Theta^*.\tag{5.34}$$

e derivando (5.33) ao longo da trajetória do sistema (5.29), obtemos

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathcal{Z}(t), \tilde{\Theta}(t)) &= -\mathcal{Z}^T(t) \mathcal{Q}_M \mathcal{Z}(t) + \mathcal{Z}^T(t) \mathcal{P}_M \mathcal{B}_M D \Omega^T(t) \tilde{\Theta}(t) + \tilde{\Theta}^T(t) |\mathcal{D}| \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}(t) \\ &= -\mathcal{Z}^T(t) \mathcal{Q}_M \mathcal{Z}(t) + \tilde{\Theta}^T(t) \Omega D e_0(t) + \tilde{\Theta}^T(t) |\mathcal{D}| \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}(t).\end{aligned}\tag{5.35}$$

Observe que $D \Omega^T(t) = \Omega^T(t) \mathcal{D}$, então de (5.35) o termo $\tilde{\Theta}^T(t) \Omega D e_0(t) = \tilde{\Theta}^T(t) \mathcal{D} \Omega(t) e_0(t)$, e substituindo em (5.35) teremos,

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathcal{Z}(t), \tilde{\Theta}(t)) &= -\mathcal{Z}^T(t) \mathcal{Q}_M \mathcal{Z}(t) + \tilde{\Theta}^T(t) \mathcal{D} \Omega(t) e_0(t) + \tilde{\Theta}^T(t) |\mathcal{D}| \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}(t) \\ &= -\mathcal{Z}^T(t) \mathcal{Q}_M \mathcal{Z}(t) + \tilde{\Theta}^T(t) |\mathcal{D}| \Gamma^{-1} [\Gamma \text{sign}(\mathcal{D}) \Omega(t) e_0(t) + \dot{\tilde{\Theta}}(t)].\end{aligned}\tag{5.36}$$

Definindo $\dot{\tilde{\Theta}}(t)$ de modo a cancelar o segundo termo de (5.36), obtemos a lei de

adaptação,

$$\dot{\tilde{\Theta}}(t) = -\Gamma \text{sign}(\mathcal{D})\Omega(t)e_0(t), \quad (5.37)$$

a qual garante

$$\dot{V}(\mathcal{Z}(t), \tilde{\Theta}(t)) = -\mathcal{Z}^T(t)\mathcal{Q}_M\mathcal{Z}(t) \leq 0. \quad (5.38)$$

A lei de adaptação (5.37) é completamente análoga à lei de adaptação (??) do caso SISO.

Portanto, $\dot{V}(t) \leq 0$, implica em $\mathcal{Z}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e $\tilde{\Theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Visto que $Z(t) = X(t) - \mathcal{X}_M(t)$ e $\mathcal{X}_M(t) \in \mathcal{L}_\infty$ implica $X(t) \in \mathcal{L}_\infty$, e conseqüentemente $y(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e por (5.3) $w_2(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Dado que $r(t) \in \mathcal{L}_\infty$, então $y_M(t) \in \mathcal{L}_\infty$, logo pela definição do erro de rastreamento obtemos $e_0(t) \in \mathcal{L}_\infty$.

Agora, reescrevendo a planta (2.1) como

$$P_0(s)Z_0^{-1}(s)[y(t)] = u(t), \quad (5.39)$$

e operando $\frac{A(s)}{\Lambda(s)}$ pela esquerda em ambos os lados de (5.39), teremos

$$\frac{A(s)}{\Lambda(s)}P_0(s)Z_0^{-1}(s)[y(t)] = \frac{A(s)}{\Lambda(s)}u(t) = w_1(t). \quad (5.40)$$

Visto que a matriz de transferência $\frac{A(s)}{\Lambda(s)}P_0(s)Z_0^{-1}(s)$ é própria e estável (os zeros do $\det[Z_0(s)]$ são estáveis, conforme (H2)) e $y(t) \in \mathcal{L}_\infty$ implica $w_1(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Portanto, para $w_1(t)$, $w_2(t)$, $y(t)$ e $r(t) \in \mathcal{L}_\infty$ obtemos $\omega(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Da estrutura triangular de (5.22), resultado da parametrização do controle, permite mostrar que, sendo $\Omega_m(t) = \omega^T(t) \in \mathcal{L}_\infty$ implica $u_m(t) = \Theta_m^T(t)\omega(t)$ uniformemente limitado. Então $\Omega_{m-1}(t) = [\omega^T(t) \ u_m(t)]$ é uniformemente limitado. Repetindo este procedimento mostramos que $\Omega(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Da lei de controle (5.26) concluímos que $u(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Portanto, todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados. Isto implica que $\dot{\mathcal{Z}}(t)$, $\dot{e}_0(t)$ e $\dot{\tilde{\Theta}}(t) = \dot{\Theta}(t)$ e, conseqüentemente, $\ddot{V}(t)$ são uniformemente limitados. Finalmente, de (5.38), $\mathcal{Z}(t) \in \mathcal{L}_2$, logo $e_0(t) \in \mathcal{L}_2$ e concluímos, pelo Lema de Barbalat, que $\mathcal{Z}(t)$ e $e_0(t)$ convergem assintoticamente para zero, i.e., $\mathcal{Z}(t), e_0(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ (Costa et al. 2003). O resultado acima pode ser resumido no seguinte teorema.

Teorema 5.1 *Considere a planta (2.1), com $\mu = 0$, e o modelo de referência (2.5)*

satisfazendo as hipóteses (H1) a (H6). Se $r(t)$ é contínuo por partes e limitado, então a lei de controle (5.26) com a lei de adaptação (5.37) assegura que todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados e o erro de rastreamento $e_0(t)$ converge assintoticamente para zero, quando $t \rightarrow \infty$.

5.5 Análise de robustez do sistema

Nesta seção, é analisada a robustez do algoritmo MRAC MIMO (Costa et al. 2003), para a planta (2.1), sujeita às dinâmicas não modeladas aditivas e multiplicativas, isto é, com $\mu \neq 0$ em (2.2). Para isso, uma modificação da lei de adaptação é proposta. Basicamente, a modificação consiste na substituição do erro de rastreamento $e_0(t)$, o qual é reparametrizado considerando as dinâmicas não modeladas, pela sua estimativa $\epsilon(t)$, a ser definida. Além disso, um sinal chaveado $\sigma(t)$ é incorporado. Este esquema de modificação da lei de adaptação é baseado em (Tao 2003), e assegura que todos os sinais do sistema MIMO em malha fechada permanecem uniformemente limitados, e $\epsilon(t) \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$.

5.5.1 Parametrização do erros com dinâmicas não modeladas

Quando $\mu \neq 0$, as dinâmicas não modeladas se manifestam em (2.2) e devem ser levadas em conta na equação do erro. Então, uma nova expressão para a equação de erro é desenvolvida.

Operando ambos os lados de (5.5), sobre $u(t)$ e substituindo $\theta_4^* = K_p^{-1}$, teremos

$$\begin{aligned} u(t) - \theta_1^{*T} F(s)[u](t) - (\theta_2^{*T} F(s) + \theta_3^*) G_0(s)[u](t) &= K_p^{-1} W_M^{-1}(s) G_0(s)[u](t), \\ (I - \theta_1^{*T} F(s))[u](t) &= (\theta_2^{*T} F(s) + \theta_3^*) G_0(s)[u](t) + K_p^{-1} W_M^{-1}(s) G_0(s)u(t), \\ (I - \theta_1^{*T} F(s))[u](t) &= (\theta_2^{*T} F(s) + \theta_3^* + K_p^{-1} W_M^{-1}) G_0(s)u(t). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Reescrevendo (2.1) como

$$G_0(s)[u](t) = y(t) - \mu G_0(s) (\Delta_m(s) + G_0^{-1}(s) \Delta_a(s)) [u](t) \quad (5.42)$$

e substituindo em (5.41), obtemos

$$\begin{aligned}
u(t) - \theta_1^{*T} F(s)[u](t) - \theta_2^{*T} F(s)[y](t) - \theta_3^* y(t) = \\
- \mu (\theta_2^{*T} F(s) + \theta_3^* + K_p^{-1} W_M^{-1}(s)) G_0(s) (\Delta_m(s) + G_0^{-1}(s) \Delta_a(s)) [u](t) + \\
+ K_p^{-1} W_M^{-1}(s)[y](t).
\end{aligned} \tag{5.43}$$

De (5.41), verificamos que,

$$I - \theta_1^{*T} F(s) = (\theta_2^{*T} F(s) + \theta_3^* + K_p^{-1} W_M^{-1}(s)) G_0(s). \tag{5.44}$$

Substituindo as definições dadas em (5.2) e (5.3), a equação ideal (5.5) e a relação (5.44) em (5.43), e subtraindo $\Theta_4^* r(t)$ de ambos os lados, obtemos

$$\begin{aligned}
u(t) - \theta_1^{*T} w_1(t) - \theta_2^{*T} w_2(t) - \theta_3^* y(t) - \theta_4^* r(t) = \\
- \theta_4^* r(t) - \mu (I - \theta_1^{*T} F(s)) (\Delta_m(s) + G_0^{-1}(s) \Delta_a(s)) [u](t) + K_p^{-1} W_M^{-1}(s)[y](t), \\
u(t) - \theta^{*T} \omega(t) = K_p^{-1} W_M^{-1}(s)[y - y_M](t) - \\
- \mu (I - \theta_1^{*T} F(s)) (\Delta_m(s) + G_0^{-1}(s) \Delta_a(s)) [u](t), \\
y(t) - y_M(t) = W_M(s) K_p [u - \theta^{*T} \omega](t) + \\
+ \mu W_M(s) K_p (I - \theta_1^{*T} F(s)) (\Delta_m(s) + G_0^{-1}(s) \Delta_a(s)) [u](t)
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Denominando

$$\begin{aligned}
\Delta(s) &= (I - \theta_1^{*T} F(s)) (\Delta_m(s) + G_0^{-1}(s) \Delta_a(s)), \\
\Delta_1(s) &= W_M(s) K_p \Delta(s) = W_M(s) S D U \Delta(s), \\
\eta(t) &= \Delta_1(s)[u](t),
\end{aligned} \tag{5.46}$$

e substituindo em (5.45), obtemos a reparametrização do erro de rastreamento na presença dos erros de modelagem,

$$e_0(t) = W_M(s) K_p [u - \theta^{*T} \omega](t) + \mu \eta(t) \tag{5.47}$$

Em seguida, empregando a fatoração SDU na reparametrização do erro de rastreamento, substituímos $K_p = SDU$ em (5.46) e (5.47), tal que

$$e_0(t) = W_M(s)SDU[u - \theta^{*T}\omega](t) + \mu W_M(s)SDU(I - \theta_1^{*T}F(s))(\Delta_m(s) + G_0^{-1}(s)\Delta_a(s))[u](t). \quad (5.48)$$

Usando os mesmos passos da Subseção (5.3) definidos pelas equações (5.18) a (5.23) e usando a notação (5.24) no primeiro termo de (5.48), a equação de erro de rastreamento (5.48) é reescrita em termos das dinâmicas não modeladas como

$$e_0(t) = W_M(s)SD[u - \Omega^T\Theta^*](t) + \mu W_M(s)SD(U - K_1F(s))(\Delta_m(s) + G_0^{-1}(s)\Delta_a(s))[u](t). \quad (5.49)$$

Definindo

$$\begin{aligned} \Delta_2(s) &= U\Delta(s) = (U - K_1F(s))(\Delta_m(s) + G_0^{-1}(s)\Delta_a(s)), \\ \Delta_3(s) &= D\Delta_2(s), \\ \bar{\eta}(t) &= \Delta_3(s)[u](t), \end{aligned} \quad (5.50)$$

e considerando (5.26) e (5.34), obtemos de (5.49) a reparametrização da equação do erro com dinâmicas não modeladas,

$$e_0(t) = W_M(s)S[D\Omega^T\tilde{\Theta} + \mu\bar{\eta}](t). \quad (5.51)$$

5.5.2 Estimativa do erro de rastreamento

Definimos a estimativa do erro, dado em (5.51), como

$$\epsilon(t) = e_0(t) - W_M(s)S[S^{-1}\kappa\epsilon m^2](t). \quad (5.52)$$

Exceto pelo fato de $\epsilon(t)$ e $e_0(t)$ serem vetores e $W_M(s)$ e S serem matrizes, a equação (5.52) tem a mesma forma sugerida por (Tao 2003, p.231) para o caso SISO. Em (5.52) é introduzido o sinal $m(t)$ denominado sinal normalizante, definido em (Ioannou & Tsakalis 1986), (Praly 1984) e apresentado em (Tao 2003, p.397), a partir do sistema

dinâmico,

$$\dot{m}(t) = -\delta_0 m(t) + \delta_1(|u(t)| + |y(t)|) + \delta_2, \quad m(0) > 0, \quad (5.53)$$

onde $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ e $0 < \delta_0 < q$, com $q > 0$ definido em (H8). Este sinal é fundamental na análise de estabilidade robusta.

De (5.53),

$$m(t) = m(0)e^{-\delta_0 t} + \frac{\delta_1}{s + \delta_0} [|u| + |y|](t) + \frac{\delta_2}{\delta_0} (1 - e^{-\delta_0 t}), \quad m(0) > 0, \quad (5.54)$$

e analisando (5.54) verificamos que,

$$m(t) \geq \frac{\delta_1}{s + \delta_0} [|u| + |y|](t). \quad (5.55)$$

Substituindo (5.51) em (5.52), resulta

$$\epsilon(t) = W_M(s)S[D\Omega^T \tilde{\Theta} - \kappa m^2 S^{-1} \epsilon + \mu \bar{\eta}](t). \quad (5.56)$$

5.5.3 Controlador robusto

O projeto de um controlador adaptativo robusto para $G_0(s)$ desconhecido requer a atualização dos parâmetros, dados em (5.56), por uma lei de adaptação, que garanta robustez em relação às dinâmicas não modeladas $\mu \Delta_a(s)$ e $\mu \Delta_m(s)$.

Definindo o estado $Z(t)$ e uma realização não mínima $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$ para a matriz de transferência $W_M(s)S$, descrevemos o sistema dinâmico (5.56) como

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \mathcal{A}Z + \mathcal{B}v, \\ \epsilon &= \mathcal{C}Z, \end{aligned} \quad (5.57)$$

onde, $v(t) = D\Omega^T(t)\tilde{\Theta}(t) - \kappa S^{-1}\epsilon(t)m^2 + \mu\bar{\eta}(t)$.

Visto que $W_M(s)S$ é SPR, o lema de Lefschetz-Kalman-Yakubovich assegura que existem matrizes $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$ e $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T > 0$, tal que

$$\mathcal{A}^T \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A} = -\mathcal{Q}, \quad (5.58)$$

$$\mathcal{P} \mathcal{B} = \mathcal{C}^T. \quad (5.59)$$

Relembramos as definições das matrizes \mathcal{D} e Γ em (5.31) e (5.32),

$$\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1 I_1, d_2 I_2, \dots, d_m I_m\}, \quad (5.60)$$

$$\Gamma = \text{diag}\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m\}. \quad (5.61)$$

Agora, considere a função de positiva definida

$$V(Z, \tilde{\Theta}) = Z^T(t) \mathcal{P} Z(t) + \tilde{\Theta}^T(t) \Gamma^{-1} |\mathcal{D}| \tilde{\Theta}(t). \quad (5.62)$$

Derivando no tempo $V(Z, \tilde{\Theta})$, ao longo da trajetória do sistema (7.5), e usando (5.58), teremos

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) &= -Z^T(t) \mathcal{Q} Z(t) + 2\tilde{\Theta}^T(t) \Omega(t) D^T \epsilon(t) - 2\kappa m^2 \epsilon^T(t) S^{-T} \epsilon(t) + 2\mu \bar{\eta}^T(t) \epsilon(t) + \\ &+ 2\tilde{\Theta}^T(t) \Gamma^{-1} |\mathcal{D}| \dot{\tilde{\Theta}}(t). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Visto que $D\Omega^T(t) = \Omega^T(t)\mathcal{D}$ e substituindo em (5.63), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) &= -Z^T(t) \mathcal{Q} Z(t) + 2\tilde{\Theta}^T(t) \mathcal{D} \Omega(t) \epsilon(t) - 2\kappa m^2 \epsilon^T(t) S^{-1} \epsilon(t) + 2\mu \bar{\eta}^T(t) \epsilon(t) + \\ &+ 2\tilde{\Theta}^T(t) \Gamma^{-1} |\mathcal{D}| \dot{\tilde{\Theta}}(t) \\ &= -Z^T(t) \mathcal{Q} Z(t) + 2\tilde{\Theta}^T(t) |\mathcal{D}| \Gamma^{-1} (\Gamma \Omega(t) \epsilon(t) + \dot{\tilde{\Theta}}(t)) - 2\kappa m^2 \epsilon^T(t) S^{-1} \epsilon(t) + \\ &+ 2\mu \bar{\eta}^T(t) \epsilon(t). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Em vista de (5.64), define-se a seguinte lei de adaptação robusta,

$$\dot{\tilde{\Theta}}(t) = -\Gamma \text{sign}(\mathcal{D}) \Omega(t) \epsilon(t) - \sigma(t) \Gamma \tilde{\Theta}(t), \quad (5.65)$$

onde, $\sigma(t)$ é um sinal chaveado introduzido na lei de adaptação e definido em (Tao 2003, p.399), como

$$\sigma_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|\Theta(t)\| < M_1, \\ \sigma_{01} \left(\frac{\|\Theta(t)\|}{M_1} - 1 \right) & \text{se } M_1 \leq \|\Theta(t)\| < 2M_1, \\ \sigma_{01} & \text{se } \|\Theta(t)\| \geq 2M_1, \end{cases} \quad (5.66)$$

onde, $M_1 > \|\Theta^*\|$ e $\sigma_{01} > 0$. Para implementar $\sigma_1(t) > 0$ precisamos conhecer o valor de M_1 .

5.5.4 Análise de estabilidade

A estabilidade do sistema usando a lei de adaptação proposta pode ser resumida no seguinte teorema:

Teorema 5.2 *Existe uma constante $\mu^* > 0$ tal que para algum $\mu \in [0, \mu^*)$ todos os sinais do sistema em malha fechada composto da planta (2.1), do modelo de referência (2.5), ambos satisfazendo as hipóteses (H1) a (H10), do vetor de entrada de referência contínuo por partes $r(t)$, do controle adaptativo (5.26) usando a lei de adaptação (5.65) com o esquema de chaveamento σ -modificação, são uniformemente limitados, e*

$$\int_{t_1}^{t_2} (\|Z(t)\|_2^2 + \|\epsilon(t)m(t)\|_2^2) dt \leq \mu^2 \bar{k}_0 (t_2 - t_1) + \bar{\gamma}_0, \quad (5.67)$$

como também,

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\epsilon(t)\|_2^2 dt \leq \mu \bar{k}_0 (t_2 - t_1) + \bar{\gamma}_0. \quad (5.68)$$

onde $\bar{\gamma} > 0$ e $\bar{k}_0 > 0$.

Prova: (Tao 2003) Considere a função de positiva definida (5.62) e sua derivada (5.64), reescrita abaixo,

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) &= -Z^T(t) \mathcal{Q} Z(t) + 2\tilde{\Theta}^T(t) \mathcal{D} \Gamma^{-1} (\Gamma \text{sign}(\mathcal{D}) \Omega(t) \epsilon(t) + \dot{\tilde{\Theta}}(t)) - 2\kappa m^2 \epsilon^T(t) S^{-1} \epsilon(t) + \\ &+ 2\mu \bar{\eta}^T(t) \epsilon(t). \end{aligned} \quad (5.69)$$

substituindo a lei de adaptação (5.65) e lembrando que $\lambda_{\min}(\mathcal{Q}) Z^T Z \leq Z^T \mathcal{Q} Z \leq \lambda_{\max}(\mathcal{Q}) Z^T Z$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) &= -Z^T \mathcal{Q} Z - 2\sigma \tilde{\Theta}^T |\mathcal{D}| \Theta - 2\kappa m^2 \epsilon^T S^{-1} \epsilon + 2\mu \epsilon^T \bar{\eta} \\ &\leq -Z^T \lambda_{\min}(\mathcal{Q}) I Z - 2\sigma \tilde{\Theta}^T \lambda_{\min}(|\mathcal{D}|) I \Theta - 2\kappa m^2 \epsilon^T \lambda_{\min}(S^{-1}) I \epsilon + 2\mu \epsilon^T \bar{\eta} \\ &= -\lambda_{\min}(\mathcal{Q}) Z^T Z - 2\sigma \lambda_{\min}(|\mathcal{D}|) \tilde{\Theta}^T \Theta - 2\kappa \lambda_{\min}(S^{-1}) m^2 \epsilon^T \epsilon + 2\mu \epsilon^T \bar{\eta}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Considerando os dois últimos termos de (5.70), e aplicando o artifício sugerido por (Tao 2003, p.222), para o caso SISO, verifica-se que a igualdade, abaixo, é verdadeira

$$\begin{aligned}
& -2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})m^2\epsilon^T\epsilon + 2\mu\epsilon^T\bar{\eta} = -\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})m^2\epsilon^T\epsilon + \frac{\mu^2\bar{\eta}^T}{\kappa m^2\lambda_{\min}(S^{-1})}\bar{\eta} - \\
& -\kappa\left(\left(\sqrt{\lambda_{\min}(S^{-1})}m\epsilon - \frac{\mu\bar{\eta}}{\kappa m\sqrt{\lambda_{\min}(S^{-1})}}\right)^T\left(\sqrt{\lambda_{\min}(S^{-1})}m\epsilon - \frac{\mu\bar{\eta}}{\kappa m\sqrt{\lambda_{\min}(S^{-1})}}\right)\right).
\end{aligned} \tag{5.71}$$

De (5.71), afirmamos que,

$$-2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})m^2\epsilon^T\epsilon + 2\mu\epsilon^T\bar{\eta} \leq -\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})m^2\epsilon^T\epsilon + \frac{\mu^2\bar{\eta}^T}{\kappa m^2\lambda_{\min}(S^{-1})}\bar{\eta}. \tag{5.72}$$

Introduzindo (5.72) em (5.70), teremos

$$\begin{aligned}
\dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) & \leq -\lambda_{\min}(\mathcal{Q})Z^T(t)Z(t) - 2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) - \kappa\lambda_{\min}(S^{-1})m^2\epsilon^T(t)\epsilon(t) + \\
& + \frac{\mu^2\bar{\eta}^T(t)}{\kappa m^2\lambda_{\min}(S^{-1})}\bar{\eta}(t),
\end{aligned} \tag{5.73}$$

onde o último termo da inequação tem a forma quadrática como desejado. Entretanto, este termo é positivo e uma análise de $\frac{\mu^2\bar{\eta}^T(t)}{\kappa m^2\lambda_{\min}(S^{-1})}\bar{\eta}(t)$ é feita em busca de um limite superior. Seguindo o desenvolvimento apresentado no apêndice C.2, de C.80, obtemos

$$\frac{\mu^2\bar{\eta}^T(t)}{\kappa m^2\lambda_{\min}(S^{-1})}\bar{\eta}(t) \leq 2\mu^2\frac{k_4^2}{\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})} + 2\mu^2\frac{k_4^2}{\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})}\|\Theta(t)\|^2. \tag{5.74}$$

Substituindo em (5.73), teremos

$$\begin{aligned}
\dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) & \leq -\lambda_{\min}(\mathcal{Q})Z^T(t)Z(t) - 2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) - 2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})m^2\epsilon^T(t)\epsilon(t) + \\
& + 2\mu^2\frac{k_4^2}{\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})} + 2\mu^2\frac{k_4^2}{\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})}\|\Theta(t)\|^2.
\end{aligned} \tag{5.75}$$

Em seguida, de (5.75) é importante analisar o sinal do termo $2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T\Theta$ para assegurar $\dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) \leq 0$. Dada a seguinte relação:

$$2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) = \sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\left(\Theta^T(t)\Theta(t) + (\Theta(t) - \Theta^*)^T(\Theta(t) - \Theta^*) - \Theta^{*T}\Theta^*\right), \tag{5.76}$$

e aplicando o esquema de chaveamento (5.66), em 5.76, obtemos

$$\sigma \lambda_{\min}(|\mathcal{D}|) (\Theta^T(t)\Theta(t) + (\Theta(t) - \Theta^*)^T(\Theta(t) - \Theta^*) - \Theta^{*T}\Theta^*) > 0, \quad (5.77)$$

logo, $2\sigma \lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) > 0$ é positivo definido.

Definimos $\mu^* = \sqrt{\frac{\kappa \lambda_{\min}(\mathcal{D}) \lambda_{\min}(S^{-1}) \sigma}{k_4^2}}$. Dado que $\mu < \mu^*$, consideramos $\mu = \sqrt{v} \mu^*$, onde $0 < v < 1$ é uma constante. Então, substituindo μ em (5.75), teremos

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) \leq & -\lambda_{\min}(\mathcal{Q})Z^T(t)Z(t) - 2\sigma \lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) - 2\kappa \lambda_{\min}(S^{-1})m^2 \epsilon^T(t)\epsilon(t) + \\ & + 2\sigma \lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)v + 2\sigma \lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)v \|\Theta(t)\|^2. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Analisando os termos que contém $\sigma(t)$ e sabendo que a expressão deve ser negativa, teremos

$$\begin{aligned} 2\sigma \lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)v + 2\sigma \lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)v \|\Theta(t)\|^2 - 2\sigma \lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) &< 0, \\ v + v \|\Theta(t)\|^2 - \tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) &< 0, \\ v + v \|\Theta(t)\|^2 - \|\Theta(t)\|^2 + \Theta^{*T}\Theta(t) &< 0, \\ (v - 1)\|\Theta(t)\|^2 &< -v - \Theta^{*T}\Theta(t), \\ -|v - 1|\|\Theta(t)\|^2 &< -v - \Theta^{*T}\Theta(t), \\ \|\Theta(t)\|^2 &> \frac{v + \Theta^{*T}\Theta(t)}{|v - 1|}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

De (5.79) podemos concluir que existe um $\mu \in [0, \mu^*)$ e a constante $\Theta_0 > 0$, os quais garantem $\dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) \leq 0$ sempre que $\|\Theta(t)\| > \Theta_0$.

De (5.75), retirando o termo chaveado, a desigualdade ainda é satisfeita, tal que

$$\dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) \leq -\lambda_{\min}(Q)Z^T Z - 2\kappa \lambda_{\min}(S^{-1})m^2 \epsilon^T \epsilon + \frac{2\mu^2}{\kappa \lambda_{\min}(S^{-1})}(k_4^2 + k_4^2 \|\Theta(t)\|^2). \quad (5.80)$$

Em seguida, integrando ambos os lados de (5.80), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \dot{V}(Z(t), \tilde{\Theta}(t)) dt \leq & - \int_{t_1}^{t_2} \lambda_{\min}(Q)Z^T(t)Z(t) dt - 2\kappa \lambda_{\min}(S^{-1}) \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon(t)m(t))^T (\epsilon(t)m(t)) dt \\ & + \frac{2\mu^2}{\kappa \lambda_{\min}(S^{-1})} k_4^2 \int_{t_1}^{t_2} dt + k_4^2 \int_{t_1}^{t_2} \|\Theta(t)\|^2 dt. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Considerando a norma de $\|\theta(t)\|$ limitada, isto é $\Theta(t) \in \mathcal{L}_2$, podemos definir um limite superior tal que,

$$\|\Theta(t)\|^2 \leq \Theta_{max}. \quad (5.82)$$

Substituindo Θ_{max} em (5.81), teremos

$$\begin{aligned} V(Z(t_2), \tilde{\Theta}(t_2)) - V(Z(t_1), \tilde{\Theta}(t_1)) &\leq - \int_{t_1}^{t_2} \lambda_{min}(Q) Z^T(t) Z(t) dt - \\ &- 2\kappa \lambda_{min}(S^{-1}) \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon(t)m(t))^T (\epsilon(t)m(t)) dt + \frac{2\mu^2}{\kappa} k_4^2 (1 + \Theta_{max})(t_2 - t_1), \\ \lambda_{min}(Q) \int_{t_1}^{t_2} Z^T(t) Z(t) dt + 2\kappa \lambda_{min}(S^{-1}) \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon(t)m(t))^T (\epsilon(t)m(t)) dt &\leq \\ V(Z(t_1), \tilde{\Theta}(t_1)) - V(Z(t_2), \tilde{\Theta}(t_2)) + \frac{2\mu^2}{\kappa \lambda_{min}(S^{-1})} k_4^2 (1 + \Theta_{max})(t_2 - t_1). \end{aligned} \quad (5.83)$$

Definindo $\gamma_0 = V(Z(t_1), \tilde{\Theta}(t_1)) - V(Z(t_2), \tilde{\Theta}(t_2))$, $k_0 = \frac{2}{\kappa \lambda_{min}(S^{-1})} k_4^2 (1 + \Theta_{max})$ e introduzindo em (5.83), obtemos

$$\lambda_{min}(Q) \int_{t_1}^{t_2} Z^T(t) Z(t) dt + 2\kappa \lambda_{min}(S^{-1}) \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon(t)m(t))^T (\epsilon(t)m(t)) dt \leq \gamma_0 + \mu^2 k_0 (t_2 - t_1). \quad (5.84)$$

Denominando $\beta = \min\{\lambda_{min}(Q), 2\kappa \lambda_{min}(S^{-1})\}$, teremos

$$\beta \int_{t_1}^{t_2} Z^T(t) Z(t) dt + \beta \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon(t)m(t))^T (\epsilon(t)m(t)) dt \leq \gamma_0 + \mu^2 k_0 (t_2 - t_1), \quad (5.85)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (Z^T(t) Z(t) + (\epsilon(t)m(t))^T (\epsilon(t)m(t))) dt \leq \frac{\gamma_0}{\beta} + \mu^2 \frac{k_0}{\beta} (t_2 - t_1), \quad (5.86)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\|Z(t)\|_2^2 + \|\epsilon(t)m(t)\|_2^2) dt \leq \mu^2 \bar{k}_0 (t_2 - t_1) + \bar{\gamma}_0, \quad (5.87)$$

onde $\bar{\gamma} = \frac{\gamma_0}{\beta} > 0$ e $\bar{k}_0 = \frac{k_0}{\beta} > 0$.

Portanto, de (5.87), completamos a prova do teorema 5.2 e verificamos $Z(t)$ e $\epsilon(t)m(t) \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$, conforme a definição (1.14), para $\bar{k}_0 > 0$ e $\bar{\gamma}_0 > 0$. Consequentemente, de (7.5) $\epsilon(t) \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$, o que implica $m(t) \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$. De (5.52), $e_0(t) \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$. Então, o erro de rastreamento $e_0(t)$ e a estimativa do erro $\epsilon(t)$ convergem para uma região definida por $B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$ da ordem de $\mu > 0$ (Tao 2003). Sendo $\dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) \leq 0$, de

(5.78) $Z(t)$, $\epsilon(t)$ e $\tilde{\Theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Do apêndice C.3, com $m(t) \in \mathcal{L}_\infty$ uniformemente limitado, implica $y(t)$, $w_1(t)$, $w_2(t)$ e $w(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Baseado nos mesmos argumentos da análise da Seção (5.5.4) obtemos $\Omega(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Visto que para $r(t)$ e $y_M(t) \in \mathcal{L}_\infty$, então $e_0(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Assim, todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados.

Finalmente, concluímos que existe uma constante $\mu > 0$ tal que $\mu \in [0, \mu^*)$, onde $\mu^* = \sqrt{\frac{\kappa \lambda_{\min}(D) \lambda_{\min}(S^{-1}) \sigma}{k_4^2}}$, a qual assegura que $\dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) \leq 0$, sempre que $\|\Theta\| > \Theta_0$. Tendo em vista que todos os sinais do sistema são uniformemente limitados, de (7.5) e (5.65) implica $\dot{Z}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, $\dot{\epsilon}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e $\dot{\tilde{\Theta}}(t) = \dot{\Theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Então, $e_0(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e o sinal $\epsilon(t)$ converge para uma região definida por $B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$ da ordem de $\mu > 0$, (Tao 2003). ■

5.6 Simulações

As simulações do algoritmo MRAC com fatoração SDU , para sistemas MIMO, serão apresentados nos Capítulos 6 e 7, para serem comparadas com as simulações do algoritmo α -MRAC, tanto nos sistemas sem erros de modelagem, quanto nos sistemas com tais erros.

5.7 Conclusões

Este capítulo apresentou a fatoração SDU da matriz de ganhos de alta frequência K_p de sistemas multivariáveis, de grau relativo $n^* = 1$, para o MRAC proposto por (Costa et al. 2003). A propriedade de estabilidade foi analisada e a lei de adaptação foi obtida, cuja forma é análoga a do caso SISO. A não unicidade desta fatoração garante que a matriz de transferência da dinâmica do erro de rastreamento $W_M(s)S$ é estritamente real positiva, condição essencial para a estabilidade de um sistema de controle adaptativo. O ponto chave da nova parametrização do controle, consequência direta desta fatoração, está na generalização do conceito do sinal do ganho de alta frequência k_p , no caso SISO, para o sinal dos menores principais da matriz D . Este fato importante fica nítido na equação do erro de rastreamento, onde a matriz K_p é substituída pela matriz diagonal D . Esta informação sobre o sistema é o mínimo necessário para se implementar este projeto, em relação ao enorme ganho de simplicidade que esta meto-

dologia apresenta para o controle adaptativo no caso MIMO, com grau relativo um. A análise de robustez mostrou que o esquema de controle adaptativo proposto mantém-se estável na presença de erros de modelagem que incluem dinâmicas aditivas e multiplicativas. A robustez foi estudada usando o critério de estabilidade de Lyapunov, a qual demonstrou que $\tilde{\Theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e o sinal normalizante $m(t)$, $\epsilon(t)$ e $e_0(t) \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$. Para $r(t)$ contínuo por partes e uniformemente limitado implica o vetor de controle $u(t)$ ser uniformemente limitado e, conseqüentemente, a matriz de regressores $\Omega \in \mathcal{L}_\infty$. Portanto, todos os sinais do sistema em malha fechada do esquema de controle adaptativo são uniformemente limitados. Por fim, conclui-se que, se $\epsilon(t)$, $\epsilon(t)m(t)$ e o erro de rastreamento $e_0(t)$ convergem para uma região definida por $B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$, da ordem de μ .

Cabe ressaltar que se o sinal de chaveamento for desligado nada se pode garantir quanto à estabilidade do sistema, visto que $\dot{V}(t)$ pode ser positivo para pequenos valores de $\epsilon(t)$ e $\epsilon(t)m(t)$ na presença dos erros de modelagem presentes em k_4 (5.75).

Quando $\mu = 0$, os estados $Z(t) \in \mathcal{L}_2$, $\epsilon(t) \in \mathcal{L}_2$ e $e_0(t) \in \mathcal{L}_2$, o que implica em $Z(t) \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$, $\epsilon(t) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$ e $e_0(t) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$. Dado que, $\dot{Z}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e $\dot{\epsilon}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, pelo lema de Barbalat, $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0$. Conseqüentemente, de (5.52), o erro de rastreamento é assintoticamente estável quando $t \rightarrow \infty$, isto é, $\lim_{t \rightarrow \infty} e_0(t) = 0$.

Capítulo 6

Algoritmo α -MRAC MIMO

Neste capítulo, fazemos uma extensão para o caso MIMO dos passos usados no desenvolvimento do algoritmo α -MRAC SISO (Costa 1999), apresentado no Capítulo 3. Desta forma, vamos desenvolver o algoritmo α -MRAC para sistemas MIMO a partir do esquema MRAC multivariável, com a fatoração *SDU* (Costa et al. 2003), visto no capítulo anterior. O novo algoritmo é denominado α -MRAC MIMO (Pinto & Costa 2008).

A lei de adaptação obtida garante estabilidade global, convergência do erro de rastreamento para zero, e exibe uma significativa melhoria na resposta transitória do erro de rastreamento quando comparado com o algoritmo MRAC multivariável.

Para apresentar o algoritmo, primeiro é mostrada a ideia básica supondo que a derivada do erro de rastreamento é mensurável. Em seguida, esta restrição é eliminada observando este vetor por meio de uma matriz diagonal de filtros de primeira ordem. Para fundamentar teoricamente o novo algoritmo, provamos a propriedade de estabilidade e analisamos o comportamento do erro de rastreamento durante o transitório, usando o método das perturbações singulares. Finalmente, a expressão de uma envoltória superior do erro de rastreamento é desenvolvida. Completamos o capítulo com algumas simulações, as quais ilustram a eficiência do algoritmo em contribuir para a melhoria do transitório de sistemas multivariáveis, com $n^* = 1$.

6.1 Algoritmo α -MRAC multivariável

Nesta Seção, estendemos o algoritmo α -MRAC para sistemas MIMO, composto da planta (2.1), satisfazendo as hipóteses **(H1)** a **(H6)**, com $\mu = 0$,

$$y(t) = G_0(s) [u](t), \quad (6.1)$$

e do modelo de referência (2.5),

$$y_M(t) = W_M(s) [r](t), \quad (6.2)$$

onde a matriz de transferência $m \times m$ do modelo $W_M(s)$ é dada por

$$W_M(s) = K_M \text{diag} \left\{ \frac{1}{s + a_1} \dots, \frac{1}{s + a_m} \right\} = K_M \text{diag} \left\{ \frac{1}{s + a_i} \right\}, \quad (6.3)$$

para $a_i > 0$, ($i = 1, \dots, m$).

Iniciamos a análise pela equação dinâmica do erro de rastreamento (5.25), com a fatoração SDU , reescrita abaixo,

$$e_0(t) = W_M(s)SD[u - \Omega^T \Theta^*](t). \quad (6.4)$$

Substituindo o controlador

$$u(t) = \Omega^T(t)\Theta(t), \quad (6.5)$$

em (6.4), teremos

$$e_0(t) = W_M(s)S[D\Omega^T \tilde{\Theta}](t). \quad (6.6)$$

Agora, definindo o sinal $F(t)$, da mesma forma que no caso SISO,

$$F(t) = W_M(s)^{-1}[e_0](t) = SD\Omega^T(t)\tilde{\Theta}(t), \quad (6.7)$$

e substituindo a matriz de transferência do modelo (6.3), resulta

$$\begin{aligned} F(t) &= \text{diag}\{s + a_i\}[e_0](t) \\ &= I_{m \times m}s[e_0](t) + \text{diag}\{a_i\}e_0(t), \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde $a_i > 0$, ($i = 1, \dots, m$), (Pinto & Costa 2008). Utilizando a definição de $F(t)$, uma realização mínima de (6.4), é dada por

$$\dot{e}_0(t) = A_m e_0(t) + F(t), \quad (6.9)$$

onde, $A_m = \text{diag}-a_i$, ($i = 1, \dots, m$).

De (6.9), para obter o sinal $F(t)$ é necessário medir o vetor $\dot{e}_0(t)$. Então, suponha inicialmente que este sinal está disponível para leitura.

De (5.37), definimos a lei de adaptação dos parâmetros introduzindo o sinal $\alpha F(t)$, tal que

$$\dot{\Theta}(t) = -\Gamma \text{sign}(\mathcal{D}) \Omega(t) [e_0(t) + \alpha F(t)], \quad (6.10)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é positivo.

Quando $\dot{e}_0(t)$ não está disponível para medição, $F(t)$ não pode ser calculada a partir de (6.7). Para contornar este problema, utilizamos uma estimativa $\hat{e}_0(t)$, dada por

$$\hat{e}_0(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\tau_i s + 1} \right\} e_0(s) = T(s) e_0(s), \quad (6.11)$$

onde τ_i são as constantes de tempo da matriz de filtros $T(s)$.

Substituindo $e_0(t)$ pela sua estimativa $\hat{e}_0(t)$ em (6.7), teremos

$$\begin{aligned} \hat{F}(t) &= W_M(s)^{-1} [\hat{e}_0](t) \\ &= W_M(s)^{-1} T(s) [e_0](t) \\ &= W_M(s)^{-1} T(s) W_M(s) [F](t), \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde $\hat{F}(t)$ é uma estimativa de $F(t)$.

A figura 6.1 mostra o diagrama de blocos da equação (6.12). A expressão (6.12) pode

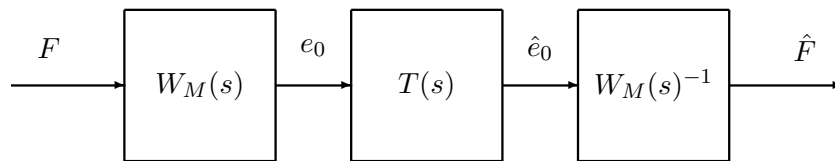


FIGURA 6.1: Diagrama de blocos da equação (6.12).

ainda ser escrita como

$$\hat{F}(t) = H(s)[e_0](t), \quad (6.13)$$

onde

$$H(s) = W_M^{-1}T(s) = \text{diag}\{s + a_i\} \text{diag}\left\{\frac{1}{\tau_i s + 1}\right\} = \text{diag}\left\{\frac{s + a_i}{\tau_i s + 1}\right\}. \quad (6.14)$$

Também podemos expressar $\hat{F}(t)$ como

$$\hat{F}(t) = T(s)[F](t), \quad (6.15)$$

Substituindo $F(t)$ pela sua definição, dada em(6.7), teremos

$$\hat{F}(t) = T(s)[SD\Omega^T\tilde{\Theta}](t). \quad (6.16)$$

Em seguida, substituindo $F(t)$ em (6.10), pela sua estimativa $\hat{F}(t)$, obtemos uma nova lei de adaptação do algoritmo α -MRAC MIMO dada por

$$\dot{\tilde{\Theta}}(t) = -\Gamma \text{sign}(\mathcal{D})\Omega(t)[e_0(t) + \alpha\hat{F}(t)]. \quad (6.17)$$

A estrutura do algoritmo α -MRAC MIMO pode ser vista no diagrama de blocos da figura 6.2.

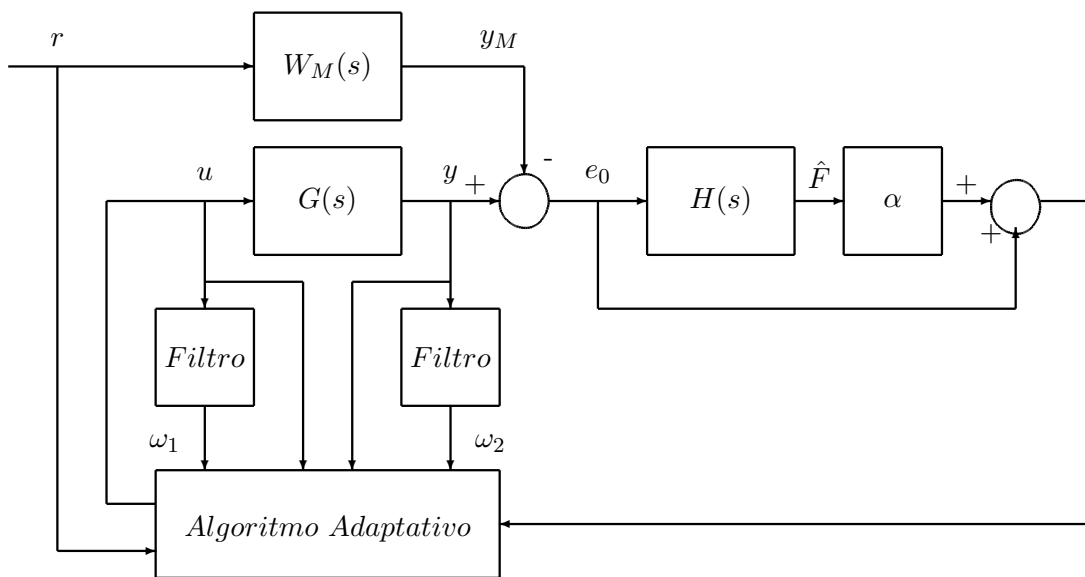


FIGURA 6.2: Diagrama de blocos do algoritmo α -MRAC MIMO.

6.2 Análise de estabilidade

Quando $\dot{e}_0(t)$ é medido, $F(t)$ é conhecido e não há necessidade de sua estimativa $\hat{F}(t)$, o que resulta na redução da matriz de filtros $T(s)$ pela matriz identidade. Então $\hat{F}(t) = F(t)$.

Para simplificar a notação, definimos

$$\mathcal{F}(t) = D\Omega^T(t)\tilde{\Theta}(t). \quad (6.18)$$

Então, (6.7) pode ser reescrita como

$$F(t) = S\mathcal{F}(t). \quad (6.19)$$

Neste caso, o conjunto de equações que representa a dinâmica completa do sistema em malha fechada é dada por (5.29), cuja entrada é $\mathcal{F}(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{Z}(t) &= \mathcal{A}_M Z(t) + \mathcal{B}_M \mathcal{F}(t), \\ e_0(t) &= \mathcal{C}_M Z(t), \end{aligned} \quad (6.20)$$

e pela lei de adaptação (6.10),

$$\dot{\tilde{\Theta}}(t) = -\Gamma \text{sign}(\mathcal{D})\Omega(t)[e_0(t) + \alpha F(t)]. \quad (6.21)$$

Agora, escolhemos a mesma função positiva definida dada em (5.33), e derivando no tempo ao longo das trajetórias do sistema (6.20) e (6.10), teremos

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) &= -Z^T(t)\mathcal{Q}_M Z(t) + \tilde{\Theta}^T(t)|\mathcal{D}|\Gamma^{-1}[\Gamma \text{sign}(\mathcal{D})\Omega(t)e_0(t) + \dot{\tilde{\Theta}}(t)] \\ &= -Z^T(t)\mathcal{Q}_M Z(t) + \tilde{\Theta}^T(t)|\mathcal{D}|\Gamma^{-1}[\Gamma \text{sign}(\mathcal{D})\Omega(t)e_0(t) - \\ &\quad - \Gamma \text{sign}(\mathcal{D})\Omega(t)[e_0(t) + \alpha S\mathcal{F}(t)]] \\ &= -Z^T(t)\mathcal{Q}_M Z(t) - \tilde{\Theta}^T(t)\mathcal{D}\Omega(t)\alpha S\mathcal{F}(t). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Substituindo $\mathcal{F}(t)$, de (6.18), em (6.22), usando (5.30) e as relações $\Omega D = \mathcal{D}\Omega$ ou

$D\Omega^T = \Omega^T D$, obtemos

$$\dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) = -Z(t)^T Q_M Z(t) - \alpha \tilde{\Theta}^T(t) \Omega(t) D S D \Omega^T(t) \tilde{\Theta}(t) \leq 0. \quad (6.23)$$

Note que a matriz DSD é positiva definida, visto que $S = S^T > 0$ e D é diagonal.

Visto que $\dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) \leq 0$, então $\tilde{\Theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e $Z(t) \in \mathcal{L}_\infty$. De (6.20), $e_0(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Então para $r(t)$ e $y_M(t) \in \mathcal{L}_\infty$, pela definição do erro de rastreamento $y(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e, conseqüentemente, $w_2(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Usando os mesmos argumentos da Seção 5.4, $\Omega(t) \in \mathcal{L}_\infty$, logo $u(t) \in \mathcal{L}_\infty$ o que implica $F(t) \in \mathcal{L}_\infty$, e por (6.20) $\dot{Z}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e $\dot{e}_0(t) \in \mathcal{L}_\infty$. De (6.15), $\dot{F}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Pela lei de adaptação $\dot{\Theta}(t)$ é também uniformemente limitado. Então $\ddot{V}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Integrando (6.23) é fácil mostrar que $Z(t) \in \mathcal{L}_2$, $e_0(t) \in \mathcal{L}_2$ e $F(t) \in \mathcal{L}_2$, logo $Z(t)$, $e_0(t)$ e $F(t) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$. Portanto, pelo Lema de Barbalat provamos que $Z(t) \rightarrow 0$, $F(t) \rightarrow 0$ e $e_0(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Pela análise concluímos que o sistema é globalmente uniformemente estável.

De (6.23), observamos que enquanto a lei de adaptação do algoritmo MRAC elimina o termo em $\tilde{\Theta}(t)$ forçando o seu cancelamento, a lei de adaptação do algoritmo α -MRAC MIMO o mantém na análise completando o seu quadrado. Agora, podemos enunciar a propriedade de estabilidade do sistema pelo seguinte teorema:

Teorema 6.1 *Considere a planta (6.1) e o modelo de referência (6.2) satisfazendo as hipóteses (H1)-(H6) e o vetor de entrada $r(t)$ contínuo por partes e uniformemente limitado, então o controlador (6.5) com a lei de adaptação (6.10) assegura que todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados, e $e_0(t)$ e $F(t)$ convergem para zero assintoticamente quando $t \rightarrow \infty$.*

Portanto, pelo teorema acima,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega^T(t) \tilde{\Theta}(t) = 0, \quad (6.24)$$

independentemente de persistência de sinal. Esta característica do algoritmo α -MRAC MIMO é fundamental no comportamento do transitório do sistema. Como esperado, a convergência de $\tilde{\Theta}(t)$ para zero depende de $\Omega(t)$.

A seguir, vamos analisar a estabilidade de (6.17), isto é, o caso em que uma estimativa $\hat{F}(t)$ é utilizada no lugar do sinal $F(t)$. Sem perda de generalidade, considere

todas as constantes de tempo da matriz diagonal de filtros de avanço, $T(s)$, dado em (6.11) iguais, isto é, $\tau_i = \tau > 0$. Substituindo τ em (6.15) teremos,

$$\begin{aligned}\hat{F}(t) &= T(s)[F](t) \\ &= \text{diag} \left(\frac{1}{\tau s + 1} \right) [F](t).\end{aligned}\tag{6.25}$$

Rearranjando os termos de (6.25), obtemos

$$\tau \dot{\hat{F}}(t) = -\hat{F}(t) + F(t).\tag{6.26}$$

A equação (6.26) é uma realização para a equação (6.25). Substituindo (6.19) em (6.26), teremos

$$\tau \dot{\hat{F}}(t) = -\hat{F}(t) + S\mathcal{F}(t).\tag{6.27}$$

Em seguida, escrevemos o conjunto de equações que regem a dinâmica do sistema,

$$\dot{Z}(t) = \mathcal{A}_M Z(t) + \mathcal{B}_M \mathcal{F}(t),\tag{6.28}$$

$$e_0(t) = \mathcal{C}_M Z(t),\tag{6.29}$$

$$\tau \dot{\hat{F}}(t) = -\hat{F}(t) + S\mathcal{F}(t),\tag{6.30}$$

$$\dot{\tilde{\Theta}}(t) = -\Gamma \text{sign}(\mathcal{D})\Omega(t)[e_0(t) + \alpha \hat{F}(t)].\tag{6.31}$$

onde $\{\mathcal{A}_M, \mathcal{B}_M, \mathcal{C}_M\}$ é uma realização não mínima de $W_M(s)S$, como definido em (5.29).

Agora, considere a seguinte função positiva definida,

$$2V(Z(t), \hat{F}(t), \tilde{\Theta}(t)) = Z^T(t)\mathcal{P}_M Z(t) + \alpha \tau \hat{F}^T(t)S^{-1}\hat{F}(t) + \tilde{\Theta}^T|\mathcal{D}|\Gamma^{-1}\tilde{\Theta}.\tag{6.32}$$

onde \mathcal{P}_M e \mathcal{Q}_M satisfazem a equação (5.30), dada na Seção 5.4. Derivando no tempo

$V(t)$, ao longo da trajetória do sistema (6.28)-(6.31), obtemos

$$\begin{aligned}
2\dot{V}(t) &= \dot{Z}(t)^T \mathcal{P}_M Z(t) + Z(t) \mathcal{P}_M \dot{Z}(t) + \alpha \tau \dot{\hat{F}}^T(t) S^{-1} \hat{F}(t) + \alpha \tau \hat{F}(t)^T S^{-1} \dot{\hat{F}}(t) + \\
&+ \dot{\tilde{\Theta}}^T(t) |\mathcal{D}| \Gamma^1 \tilde{\Theta}(t) + \tilde{\Theta}(t) |\mathcal{D}| \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}(t) \\
&= (\mathcal{A}_M Z(t) + \mathcal{B}_M \mathcal{F}(t))^T \mathcal{P}_M Z(t) + Z^T(t) \mathcal{P}_M (\mathcal{A}_M Z(t) + \mathcal{B}_M \mathcal{F}(t)) + \\
&+ \alpha (-\hat{F}(t) + S \mathcal{F}(t))^T S^{-1} \hat{F}(t) + \alpha \hat{F}(t)^T S^{-1} (-\hat{F}(t) + \\
&+ S \mathcal{F}(t)) + \dot{\tilde{\Theta}}^T(t) |\mathcal{D}| \Gamma^{-1} \tilde{\Theta}(t) + \tilde{\Theta}^T(t) |\mathcal{D}| \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}(t) \\
&= -2Z(t)^T \mathcal{Q}_M Z(t) - 2\alpha \hat{F}(t)^T S^{-1} \hat{F}(t) + \mathcal{F}^T(t) \mathcal{C}_M Z(t) + Z^T(t) \mathcal{C}_M^T \mathcal{F}(t) + \\
&+ \alpha \mathcal{F}^T(t) \hat{F}(t) + \alpha \hat{F}^T(t) \mathcal{F}(t) + 2\tilde{\Theta}^T(t) |\mathcal{D}| \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}(t) \\
&= -2Z(t)^T \mathcal{Q}_M Z(t) - 2\alpha \hat{F}(t)^T S^{-1} \hat{F}(t) + 2\mathcal{F}^T(t) e_0(t) + 2\alpha \mathcal{F}^T(t) \hat{F}(t) + \\
&+ 2\tilde{\Theta}^T(t) |\mathcal{D}| \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\Theta}}(t) \\
&= -2Z(t)^T \mathcal{Q}_M Z(t) - 2\alpha \hat{F}(t)^T S^{-1} \hat{F}(t) + 2\mathcal{F}^T(t) (e_0(t) + \alpha \hat{F}(t)) - \\
&- 2\tilde{\Theta}^T(t) |\mathcal{D}| \Gamma^{-1} ((\mathcal{D}) \Omega(t) (e_0(t) + \alpha \hat{F}(t))) \\
&= -2Z(t)^T \mathcal{Q}_M Z(t) - 2\alpha \hat{F}(t)^T S^{-1} \hat{F}(t) + 2\mathcal{F}^T(t) (e_0(t) + \alpha \hat{F}(t)) - \\
&- 2\mathcal{F}^T(t) (e_0(t) + \alpha \hat{F}(t)).
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Simplificando a expressão acima, obtemos

$$\dot{V}(t) = -Z^T \mathcal{Q}_M Z - \alpha \hat{F}^T S^{-1} \hat{F}. \tag{6.34}$$

Visto que $\dot{V}(Z, \hat{F}, \tilde{\Theta}) \leq 0$ implica que $V(Z, \hat{F}, \tilde{\Theta})$ é uniformemente limitada ao longo da trajetória (6.28)-(6.31) no espaço $(Z, \hat{F}, \tilde{\Theta})$, então, $V(Z, \hat{F}, \tilde{\Theta})$ é uniformemente limitada acima por $V(0)$ e abaixo por 0 e os vetores $Z(t), \hat{F}(t), \tilde{\Theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Visto que $Z(t) = X(t) - \mathcal{X}_M(t)$ e $\mathcal{X}_M(t) \in \mathcal{L}_\infty$, implica $X(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e, conseqüentemente, $y_M(t)$ e $y(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e por (5.3) $w_2(t) \in \mathcal{L}_\infty$, e usando (5.40) obtemos $w_1(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Dado que $r(t), y(t), w_1(t)$ e $w_2(t) \in \mathcal{L}_\infty$ implica, de (5.22), $\Omega_m^T(t) = \omega(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Da estrutura triangular dos vetores regressores $\Omega_i^T(t)$, dada (5.22), e seguindo os mesmos argumentos da análise de estabilidade da Seção 5.4, obtemos $\Omega(t) \in \mathcal{L}_\infty$, e assim pela lei de controle (6.5) $u(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Da definição do vetor $F(t)$, dada em (6.7), implica que $F(t) \in \mathcal{L}_\infty$, e da definição do erro de rastreamento $e_0(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Portanto, todos os sinais do sistema

em malha fechada são uniformemente limitados.

Das equações (6.28) e (6.30) obtemos $\dot{Z}(t)$, $\dot{e}_0(t)$ e $\dot{\hat{F}}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, e pela lei de adaptação em (6.31) deduzimos que $\dot{\tilde{\Theta}}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Então, se os vetores $\dot{Z}(t)$ e $\dot{\hat{F}}(t)$ são contínuos e uniformemente limitados $\ddot{V}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Aplicando o Lema de Barbalat, obtemos

$Z(t), \hat{F}(t) \rightarrow 0$ e de (6.29) $e_0(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{F}(t) = 0. \quad (6.35)$$

Considerando $\dot{r}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ implica $\dot{y}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ seguindo a mesma análise do caso SISO obtemos $\dot{\tilde{\Omega}}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e conseqüentemente $\dot{\hat{F}}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Aplicando o Lema de Barbalat, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0 \quad \text{implica} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega^T(t) \tilde{\Theta}(t) = 0. \quad (6.36)$$

A análise apresentada pode ser resumida no seguinte teorema (Pinto & Costa 2008):

Teorema 6.2 *Considere o sistema composto pela planta (6.1) com o modelo de referência (6.2), a lei de controle (6.5) e a lei de adaptação (6.17). Se satisfazendo as hipóteses (H1) a (H6) e $r(t)$ é contínuo por partes e uniformemente limitado, então todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados e o erro do rastreamento $e_0(t)$ e $\hat{F}(t)$ convergem para zero quando $t \rightarrow \infty$.*

6.3 Análise do comportamento transitório

Para analisar a resposta do sistema multivariável não linear, em malha fechada durante o transitório, usamos o *Método das Perturbações Singulares* (Kokotović et al. 1986) da mesma forma que na Seção 3.4. Desta análise resulta um modelo reduzido para a dinâmica do erro e o comportamento das variáveis durante a camada limite (período transitório) (Pinto & Costa 2008).

6.3.1 Modelo reduzido

Considere as equações definidas em (6.9), (6.17) e (6.27), que descrevem uma realização mínima da dinâmica do sistema. Expressando as equações de forma adequada para

usarmos o método das perturbações singulares teremos,

$$\dot{e}_0(t) = -A_m e_0(t) + F(t), \quad (6.37)$$

$$\tau \dot{\hat{F}}(t) = -\hat{F}(t) + F(t), \quad (6.38)$$

$$\Gamma^{-1} \dot{\hat{\Theta}}(t) = -\text{sign}(\mathcal{D}) \Omega(t) [e_0(t) + \alpha \hat{F}(t)]. \quad (6.39)$$

Sem perda de generalidade, vamos considerar $\text{sign}(\mathcal{D}) > 0$ e a matriz de ganhos da adaptação $\Gamma = \gamma \mathbb{I}$, onde $\gamma \in \mathbb{R}$, tal que $\gamma > 0$, onde $\mathbb{I} \in \mathbb{R}^{(2nm+m^2-m) \times (2nm+m^2-m)}$. O parâmetro $\varepsilon \in \mathbb{R}$ é escolhido como $\varepsilon = \tau = \gamma^{-1}$ que define a mesma relação importante, entre as variáveis de projeto, dada em (3.67), e reescrita abaixo,

$$\tau \gamma = 1. \quad (6.40)$$

Substituindo ε em (6.38) e (6.39), resulta no sistema

$$\dot{e}_0(t) = -A_m e_0(t) + F(t), \quad (6.41)$$

$$\varepsilon \dot{\hat{F}}(t) = -\hat{F}(t) + F(t), \quad (6.42)$$

$$\varepsilon \dot{\hat{\Theta}}(t) = -\Omega e_0 - \Omega \alpha \hat{F}(t), \quad (6.43)$$

com as condições iniciais $e_0(t_0) = e_0^0$, $\hat{F}(t_0) = \hat{F}^0$ e $\hat{\Theta}(t_0) = \hat{\Theta}^0$.

Quando fixamos $\varepsilon = 0$, as equações diferenciais (6.42)-(6.43) degeneram-se em equações algébricas ou transcendentais. Escrevendo as equações algébricas obtidas de (6.42)-(6.43) de forma compacta, obtemos a função g como

$$0 = g(\bar{e}_0, \bar{F}, \bar{\Theta}, \varepsilon, t) = g(\bar{e}_0, \bar{F}, \bar{\Theta}, 0, t), \quad (6.44)$$

onde a barra superior identifica as variáveis pertencentes ao sistema com $\varepsilon = 0$.

Para haver um modelo reduzido basta que as equações transcendentais ou algébricas (6.44) tenham raízes reais e distintas não necessariamente únicas. Então, para $\varepsilon = 0$

as equações (6.42)-(6.43) tornam-se,

$$\bar{F}(t) = \bar{F}(t), \quad (6.45)$$

$$\bar{e}_0(t) = -\alpha \bar{F}(t). \quad (6.46)$$

Substituindo (6.46) em (6.45),

$$\bar{F}(t) = -\alpha^{-1} \bar{e}_0(t), \quad (6.47)$$

e introduzindo (6.47) em (6.41), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_0(t) &= -A_m \bar{e}_0(t) - \alpha^{-1} \bar{e}_0(t) \\ &= -(A_m + \alpha^{-1} I_{m \times m}) \bar{e}_0(t). \end{aligned} \quad (6.48)$$

onde $A_m = \text{diag}\{-a_i\}$.

Denominando $\bar{A} = A_m + \alpha^{-1} I_{m \times m}$ e substituindo em (6.48), obtemos o modelo reduzido do sistema como

$$\dot{\bar{e}}_0(t) = -\bar{A} \bar{e}_0(t), \quad \bar{e}_0(t_0) = e_0^0, \quad (6.49)$$

e resolvendo (6.49), resulta

$$\bar{e}_0(t) = e_0^0 e^{-\bar{A}(t-t_0)}. \quad (6.50)$$

De (6.47), verificamos

$$\bar{F} = \alpha^{-1} e_0^0 e^{-\bar{A}(t-t_0)}. \quad (6.51)$$

De (6.51), análogo ao caso SISO, $\tilde{u}(t) \rightarrow 0$ de forma exponencial, logo $u(t) \rightarrow u^*$ exponencialmente, onde u^* é o controle ideal. Portanto, o algoritmo α -MRAC MIMO pode estimar (exponencialmente rápido) u^* sem ter que identificar o vetor de parâmetros ideais Θ^* . Quando Γ^{-1} e τ são suficientemente pequenos, isto é, ε pequeno, a convergência do erro de rastreamento é exponencial. No caso limite em que $\varepsilon = 0$, o erro de rastreamento $e_0(t)$ se comporta como o modelo reduzido $\bar{e}_0(t)$. Tanto $\bar{e}_0(t)$ como $\bar{F}(t)$ convergem exponencialmente para zero quando $t \rightarrow \infty$, com uma taxa de decaimento que só depende dos parâmetros do projeto.

6.3.2 Comportamento da camada limite

Baseado no breve resumo apresentado na Seção (3.4), nesta Seção vamos descrever o comportamento de \hat{F} e $\tilde{\Theta}$ como função de $\tilde{\tau}$ que corresponde à variável de tempo parametrizada, a qual representa o período dilatado de duração da camada limite, onde os transitórios rápidos decaem para zero. O desenvolvimento segue os passos do caso SISO apresentado na Seção(3.4). Para isso, usamos a correção da camada limite definida por $\hat{F}(\tilde{\tau}) = \hat{F} - \bar{F}(t_0)$ e $\hat{\Theta}(\tilde{\tau}) = \tilde{\Theta} - \bar{\Theta}(t_0)$, as quais satisfazem o sistema da camada limite (Kokotović et al. 1986),

$$\varepsilon \frac{d\hat{F}}{dt} = g_1(e_0^0, \hat{F}(\tilde{\tau}) + \bar{F}(t_0), \hat{\Theta}(\tilde{\tau}) + \bar{\Theta}(t_0), \varepsilon, t_0), \quad (6.52)$$

$$\varepsilon \frac{d\hat{\Theta}}{dt} = g_2(e_0^0, \hat{F}(\tilde{\tau}) + \bar{F}(t_0), \hat{\Theta}(\tilde{\tau}) + \bar{\Theta}(t_0), \varepsilon, t_0). \quad (6.53)$$

Do sistema (6.42)-(6.43) definimos as funções g_1 e g_2 , para aplicar a correção da camada limite, tal que

$$\varepsilon \dot{\hat{F}}(t) = -\hat{F}(t) + F(t) = g_1(e_0^0, \hat{F}(\tilde{\tau}) + \bar{F}(t_0), \hat{\Theta}(\tilde{\tau}) + \bar{\Theta}(t_0), \varepsilon, t_0), \quad (6.54)$$

$$\varepsilon \dot{\hat{\Theta}}(t) = -\Omega e_0 - \Omega \alpha \hat{F}(t) = g_2(e_0^0, \hat{F}(\tilde{\tau}) + \bar{F}(t_0), \hat{\Theta}(\tilde{\tau}) + \bar{\Theta}(t_0), \varepsilon, t_0), \quad (6.55)$$

De (6.54) e lembrando que $\frac{d\tilde{\tau}}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}$, desenvolvemos as derivadas parciais de $\frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}}$ e $\frac{d\hat{\Theta}}{d\tilde{\tau}}$ da seguinte forma,

$$\varepsilon \frac{d\hat{F}}{dt} = \varepsilon \frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{dt} = \varepsilon \frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}}.$$

Substituindo a correção da camada limite de \hat{F} , teremos

$$\varepsilon \frac{d\hat{F}}{dt} = \varepsilon \frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{dt} + \varepsilon \frac{d\bar{F}}{dt_0} \frac{dt_0}{dt} = \varepsilon \frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}} \frac{1}{\varepsilon} = \frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}}. \quad (6.56)$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento para $\hat{\Theta}(t)$, obtemos

$$\varepsilon \frac{d\hat{\Theta}}{dt} = \frac{d\hat{\Theta}}{d\tilde{\tau}}. \quad (6.57)$$

Então, o sistema da camada limite pode ser descrito como

$$\frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}} = g_1(e_0^0, \hat{F}(\tilde{\tau}) + \bar{F}(t_0), \hat{\Theta}(\tilde{\tau}) + \bar{\Theta}(t_0), \varepsilon, t_0), \quad (6.58)$$

$$\frac{d\hat{\Theta}}{d\tilde{\tau}} = g_2(e_0^0, \hat{F}(\tilde{\tau}) + \bar{F}(t_0), \hat{\Theta}(\tilde{\tau}) + \bar{\Theta}(t_0), \varepsilon, t_0). \quad (6.59)$$

Agora, vamos proceder a análise do comportamento de $\hat{F}(t)$ na camada limite. Substituindo os argumentos de (6.58) em (6.54), teremos

$$\frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}} = -\hat{F}(\tilde{\tau}) - \bar{F}(t_0) + F(t_0), \quad (6.60)$$

Introduzindo (6.47) em (6.60),

$$\frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}} = -\hat{F}(\tilde{\tau}) + \alpha^{-1}\bar{e}_0(t_0) + F(t_0), \quad (6.61)$$

e substituindo (6.41) em (6.61) obtemos,

$$\frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}} = -\hat{F}(\tilde{\tau}) + \alpha^{-1}\bar{e}_0(t_0) + \dot{e}_0(t_0) + A_m e_0(t_0). \quad (6.62)$$

Sabendo que $e_0(t_0) = \bar{e}_0(t_0) = e_0^0$, tal que durante a camada limite o valor de e_0 é mantidos muito próximo do valor da condição inicial e_0^0 , segue de (6.62),

$$\frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}} = -\hat{F}(\tilde{\tau}) + \alpha^{-1}\bar{e}_0(t_0) + \dot{\bar{e}}_0(t_0) + A_m \bar{e}_0(t_0). \quad (6.63)$$

Substituindo (6.49) em (6.63),

$$\frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}} = -\hat{F}(\tilde{\tau}) + \alpha^{-1}\bar{e}_0(t_0) - \bar{A}\bar{e}_0(t_0) + A_m \bar{e}_0(t_0), \quad (6.64)$$

então,

$$\frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}} + \hat{F}(\tilde{\tau}) = (\alpha^{-1}I_{m \times m} - \bar{A} + A_m)e_0^0. \quad (6.65)$$

Agora, introduzindo a expressão de \bar{A} , teremos

$$\frac{d\hat{F}}{d\tilde{\tau}} + \hat{F}(\tilde{\tau}) = 0. \quad (6.66)$$

Resolvendo a equação dinâmica (6.66) obtemos o comportamento de $\hat{F}(\tilde{\tau})$ durante a existência da camada limite determinado pela exponencial,

$$\hat{F}(\tilde{\tau}) = \hat{F}(t_0)e^{-\tilde{\tau}}. \quad (6.67)$$

Como esperado, $\hat{F}(\tilde{\tau})$ decai para zero quando $\tilde{\tau} \rightarrow \infty$.

Agora, vamos analisar o comportamento de $\hat{\Theta}(\tilde{\tau})$ na camada limite. Substituindo os argumentos de (6.59) em (6.55), teremos

$$\frac{d\hat{\Theta}}{d\tilde{\tau}} = -\Omega(t_0)e_0(t_0) - \Omega(t_0)\alpha(\hat{F}(\tilde{\tau}) + \bar{F}(t_0)), \quad (6.68)$$

e introduzindo $e_0(t_0) = \bar{e}_0(t_0) = e_0^0$ e (6.47) em (6.68), obtemos

$$\frac{d\hat{\Theta}}{d\tilde{\tau}} = -\Omega(t_0)e_0^0 + \Omega(t_0)\alpha\alpha^{-1}\bar{e}_0(t_0) - \Omega(t_0)\alpha\hat{F}(\tilde{\tau}) \quad (6.69)$$

$$= -\alpha\Omega(t_0)\hat{F}(\tilde{\tau}). \quad (6.70)$$

Finalmente, substituindo (6.67) em (6.70), obtemos

$$\frac{d\hat{\Theta}}{d\tilde{\tau}} = -\alpha\Omega(t_0)\hat{F}(t_0)e^{-\tilde{\tau}}. \quad (6.71)$$

Integrando (6.71) em relação a $\tilde{\tau}$ obtemos o comportamento dos vetores $\hat{\Theta}(\tilde{\tau})$ durante a camada limite descrito pela exponencial,

$$\hat{\Theta}(\tilde{\tau}) = \alpha\Omega(t_0)\hat{F}(t_0)e^{-\tilde{\tau}}. \quad (6.72)$$

Agora, para analisar o comportamento de $e_0(\tilde{\tau})$ durante a camada limite usamos a seguinte correção,

$$e_0 = \hat{e}_0(\tilde{\tau}) + \bar{e}_0(t). \quad (6.73)$$

Substituindo (6.73) em (6.41), teremos

$$\varepsilon \dot{\hat{e}}_0 + \frac{d\hat{e}_0(\check{\tau})}{d\check{\tau}} = \varepsilon h(\hat{e}_0(\check{\tau}) + \bar{e}_0(t), \hat{\Theta}(\check{\tau}) + \bar{\Theta}(t), \varepsilon, t). \quad (6.74)$$

relembrando que \bar{e}_0 satisfaz o modelo reduzido e substituindo (6.49) em (6.74), obtemos

$$\frac{d\hat{e}_0(\check{\tau})}{d\check{\tau}} = \varepsilon h(\hat{e}_0(\check{\tau}) + \bar{e}_0(t), \hat{\Theta}(\check{\tau}) + \bar{\Theta}(t), \varepsilon, t) - \varepsilon \bar{A} \bar{e}_0(t), \quad (6.75)$$

De (6.75), quando $\varepsilon \rightarrow 0$ implica $\frac{d\hat{e}_0(\check{\tau})}{d\check{\tau}} \rightarrow 0$, portanto $\hat{e}_0(\check{\tau})$ é constante. Visto que, para $\varepsilon = 0$ implica $\check{\tau} = \infty$, então $e_0(\infty) = e_0(0)$. Por outro lado, $\check{\tau} = 0$ corresponde a $t = t_0$. Das condições iniciais de (6.41) e (6.49), teremos $e_0(t_0) = \bar{e}_0(t_0) = e_0^0$ o que implica $e_0(\check{\tau}) = e_0(t_0) - \bar{e}_0(t_0) = 0$. Logo, $e_0(\check{\tau}) = 0$ implica que $e_0(t, \varepsilon) \rightarrow \bar{e}_0(t)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Portanto, a correção da camada limite de $\tilde{\Theta}$ decai para zero ($\hat{\Theta}(\check{\tau}) \rightarrow 0$) e consequentemente $\tilde{\Theta}(t) = \bar{\Theta}(t)$, e a correção da camada limite de $e_0(\check{\tau})$ é nula e constante. Então, $e_0(\check{\tau}) = 0$ implica $e_0(t) = \bar{e}_0(t)$. Estes argumentos confirmam as aproximações definidas em (3.82) e (3.84), para o caso SISO na Seção 3.4, e que também são válidas para o caso MIMO. Estas aproximações asseguram a validade do modelo reduzido para o erro de rastreamento, dado em (6.49).

6.4 Limitante superior

A ideia de se ter uma envoltória superior para o erro de rastreamento é conveniente, pois poderíamos obter uma avaliação, mesmo que grosseira, do erro de rastreamento a priori em função dos parâmetros de projeto. Iniciamos pela função de Lyapunov dada em (6.32), a qual é reescrita na forma de inequação usando (1.16), como:

$$V(Z, \hat{F}, \tilde{\Theta}) \leq \tau \frac{\alpha}{2} \lambda_{\max}(S^{-1}) \|\hat{F}\|_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}) \|Z\|_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_{\max}(J) \|\tilde{\Theta}\|_2^2, \quad (6.76)$$

onde $J = |\mathcal{D}| \Gamma^{-1}$ e $\tau > 0$.

Denominando $\gamma = \max\{\tau \lambda_{\max}(S^{-1}), \lambda_{\max}(\mathcal{P}_{\mathcal{M}})\}$, $M > \max_{t \geq 0} \{\|\tilde{\Theta}(t)\|_2^2\}$, e substi-

tuindo em (6.76), teremos

$$V(Z, \hat{F}, \tilde{\Theta}) \leq \frac{\gamma}{2}(\alpha \|\hat{F}\|_2^2 + \|Z\|_2^2) + \frac{1}{2}\lambda_{max}(J)M. \quad (6.77)$$

A derivada da função de Lyapunov, dada em (6.34), pode ser colocada na forma de inequação como

$$\dot{V}(Z, \hat{F}, \tilde{\Theta}) \leq -\alpha\lambda_{min}(S^{-1})\|\hat{F}\|_2^2 - \lambda_{min}(\mathcal{Q}_{\mathcal{M}})\|Z\|_2^2. \quad (6.78)$$

Considere $\beta = \min\{\lambda_{min}(S^{-1}), \lambda_{min}(\mathcal{Q}_{\mathcal{M}})\}$. Reescrevendo (6.78) como

$$\dot{V}(Z, \hat{F}, \tilde{\Theta}) \leq -\beta(\alpha \|\hat{F}\|_2^2 + \|Z\|_2^2), \quad (6.79)$$

e multiplicando e dividindo, a esquerda de (6.79), por $\frac{\gamma}{2}$ e substituindo em (6.77), obtemos

$$\begin{aligned} V(Z, \hat{F}, \tilde{\Theta}) &\leq \frac{\gamma}{2}(\alpha \|\hat{F}\|_2^2 + \|Z\|_2^2) + \frac{1}{2}\lambda_{max}(J)M, \\ &\leq -\frac{\gamma}{2\beta}\dot{V}(Z, \hat{F}, \tilde{\Theta}) + \frac{1}{2}\lambda_{max}(J)M. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Rearranjando os termos de (6.80), tal que

$$\dot{V}(Z, \hat{F}, \tilde{\Theta}) + \frac{2\beta}{\gamma}V(Z, \hat{F}, \tilde{\Theta}) \leq \frac{\beta}{\gamma}\lambda_{max}(J)M, \quad (6.81)$$

resulta na equação diferencial de primeira ordem da função de Lyapunov. Resolvendo a equação (6.81), obtemos

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(0)e^{-2\frac{\beta}{\gamma}t} + \frac{\beta}{\gamma}\lambda_{max}(J)M\frac{\gamma}{2\beta}(1 - e^{-2\frac{\beta}{\gamma}t}) \\ &\leq V(0)e^{-2\frac{\beta}{\gamma}t} + \frac{1}{2}\lambda_{max}(J)M. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Em seguida, de (6.32) expressamos $V(0)$ como a inequação

$$V(0) \leq \lambda_M(\|\hat{F}(0)\|_2^2 + \|Z(0)\|_2^2 + \|\tilde{\Theta}(0)\|_2^2) \leq \lambda_M N_0, \quad (6.83)$$

onde

$$N_0 = \|\hat{F}(0)\|_2^2 + \|Z(0)\|_2^2 + \|\tilde{\Theta}(0)\|_2^2, \quad (6.84)$$

e

$$\lambda_M = \max\left\{\frac{\alpha\tau}{2}\lambda_{\max}(S^{-1}) \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\mathcal{P}_M) \frac{1}{2}\lambda_{\max}(J)\right\} = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\mathcal{P}_M), \quad (6.85)$$

para τ e $\lambda_{\max}(J)$ suficientemente pequenos. Então,

$$V(0) \leq \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\mathcal{P}_M)N_0. \quad (6.86)$$

Da mesma forma, podemos expressar $V(t)$, de 6.32, pela seguinte inequação

$$V(t) \geq \alpha\frac{\tau}{2}\lambda_{\min}(S^{-1})\|\hat{F}(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_{\min}(\mathcal{P}_M)\|Z(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\lambda_{\min}(J)\|\tilde{\Theta}(t)\|_2^2, \quad (6.87)$$

e substituindo (6.86) e (6.87) em (6.82), resulta

$$\|Z(t)\|_2^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(\mathcal{P}_M)}{\lambda_{\min}(\mathcal{P}_M)}N_0e^{-2\frac{\beta}{\gamma}t} + \frac{\lambda_{\max}(J)}{\lambda_{\min}(\mathcal{P}_M)}M - \frac{\lambda_{\min}(J)}{\lambda_{\min}(\mathcal{P}_M)}m_\theta - \alpha\tau\frac{\lambda_{\min}(S^{-1})}{\lambda_{\min}(\mathcal{P}_M)}f, \quad (6.88)$$

onde $m_\theta = \min\{\|\tilde{\Theta}(t)\|_2^2\}$ e $f = \max\{\|\hat{F}(t)\|_2^2\}$. Considerando as condições iniciais de $\Theta(0) = 0$ implica $m_\theta = 0$. De (6.29) e usando (1.16), obtemos $\lambda_{\max}(C_M^T C_M)\|Z(t)\|_2^2 \geq \|e_0(t)\|_2^2$. Denominando $\lambda_{\max}(C_M^T C_M) = c$ e $\bar{\mu} = 2\frac{\beta}{\gamma}$ e substituindo em (6.88), obtemos

A partir desta análise concluímos que $\|e_0(t)\|_2^2$ possui a envoltória descrita em (??), a qual converge exponencialmente com a taxa de convergência determinada pela constante $\bar{\mu}$ até o valor dado por $\frac{\lambda_{\max}(J)}{\lambda_{\min}(\mathcal{P}_M)}cM - \alpha\tau\frac{\lambda_{\min}(S^{-1})}{\lambda_{\min}(\mathcal{P}_M)}cf$ em $t \geq t^*$, enquanto o vetor do erro de rastreamento $e_0(t)$ continua a decair até zero. Entretanto, a expressão encontrada é função das matrizes \mathcal{P}_M e \mathcal{Q}_M da equação algébrica de Lyapunov, as quais são indeterminadas. Portanto, a envoltória é considerada apenas para análise, a qual confirma o resultado obtido do modelo reduzido, onde se afirma que, para $\varepsilon \rightarrow 0$, o erro de rastreamento tem um decaimento exponencial quando $t \rightarrow \infty$.

6.5 Resultados das simulações

Para ilustrar a contribuição do algoritmo α -MRAC MIMO na melhoria do transitório, previsto pela análise, apresentamos duas simulações. Na primeira simulação, consideramos uma planta com a seguinte matriz de transferência:

$$G_1(s) = K_p \text{diag} \left\{ \frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+1} \right\},$$

onde,

$$K_p = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.866 \\ -0.866 & 0.5 \end{bmatrix},$$

é desconhecido, e a matriz de transferência do modelo é definida como

$$W_{1M}(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+1} \right\}.$$

A figura 6.3 mostra os resultados da simulação obtidos quando o algoritmo MRAC MIMO padrão é usado. A figura 6.4 mostra os resultados da simulação com o algoritmo α -MRAC MIMO.

Os dados usados nesta simulação foram: $\Gamma = 5I$, $\tau = 0.05$, $\alpha = 1$, $r(t) = [\sin(3t) - \sin(5.5t)]^T$, e as condições iniciais $y(0) = \hat{e}_0(0) = [2.7 \quad -0.7]^T$. Todas as outras condições iniciais são nulas.

Como esperado, a figura 6.4(a), mostra que a melhoria da resposta transitória do erro de rastreamento é expressiva, como também para as outras variáveis exibidas, mesmo para valores baixos na matriz dos ganhos de adaptação Γ . Além disso, a convergência é mais rápida.

A segunda simulação, considera a matriz de transferência da planta,

$$G_2(s) = K_p \text{diag} \left\{ \frac{(s+6)}{s(s+2)}, \frac{(s+6)}{s(s+3)} \right\},$$

onde K_p é o mesmo da primeira simulação, e o modelo é representado pela matriz de transferência,

$$W_{2M}(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+2} \right\}.$$

Os resultados da simulação realizada com o algoritmo MRAC MIMO padrão é mos-

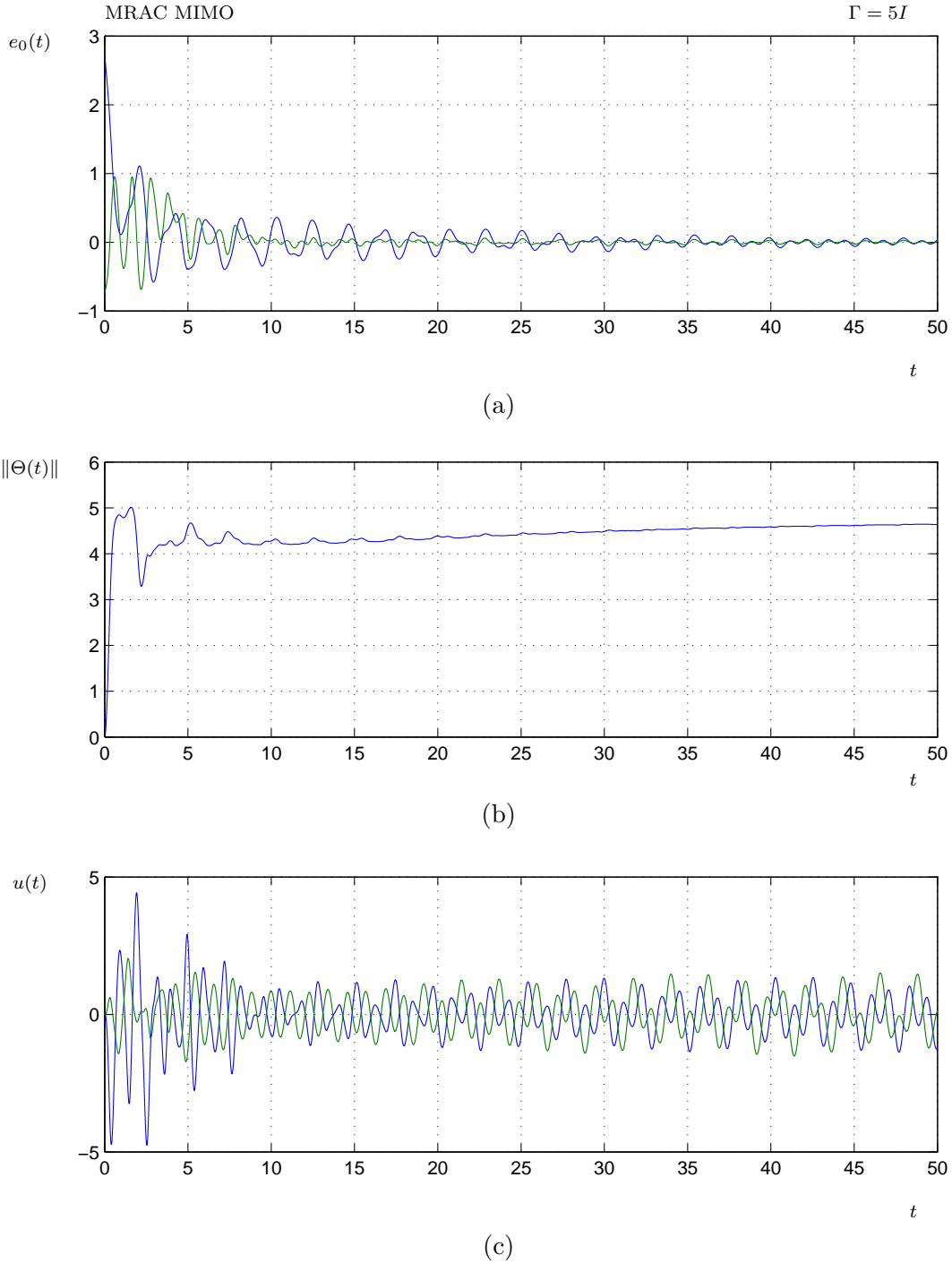


FIGURA 6.3: Simulação da planta $G_1(s)$ usando o MRAC MIMO padrão.

trado na figura 6.5 e com o algoritmo α -MRAC na figura 6.6.

Neste caso os dados usados foram: $\Gamma = 10I$, $\alpha = 1$, $\tau = 0.1$, $r(t) = [\sin(1.1t) \quad -\sin(6t)]^T$, e as condições iniciais $y(0) = \hat{e}_0(0) = [0.956 \quad -0.256]^T$. Com todas as outras condições iniciais nulas.

Os gráficos da figura 6.6 mostram uma notável melhoria do comportamento tran-

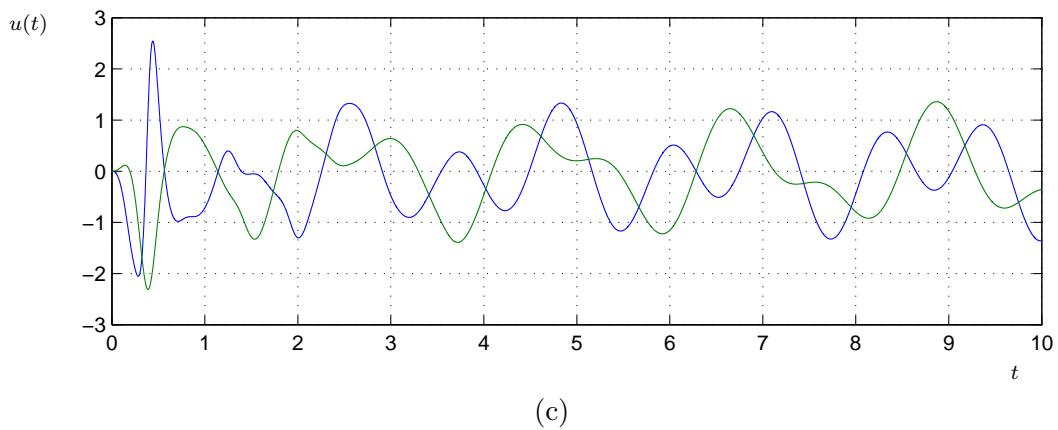
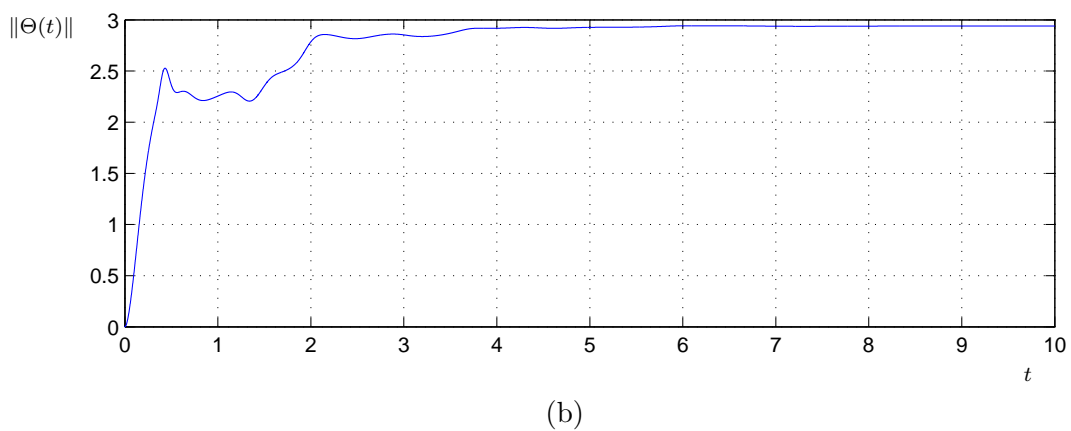
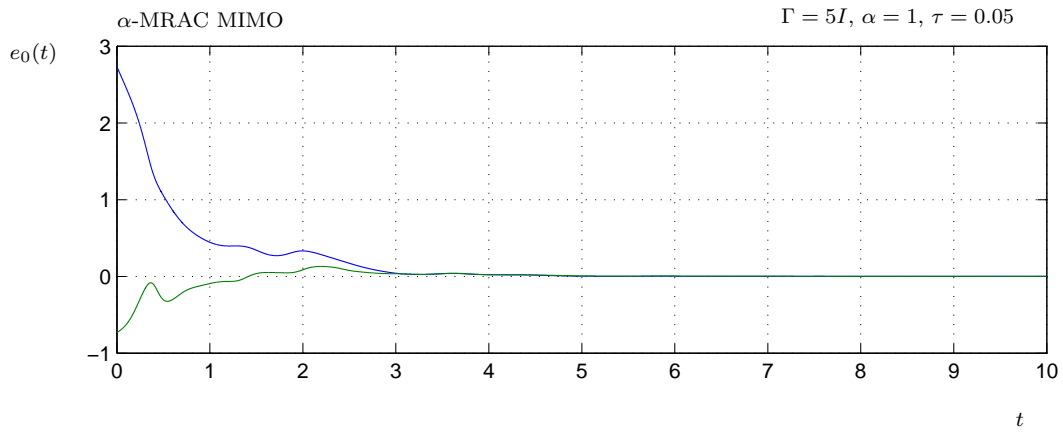
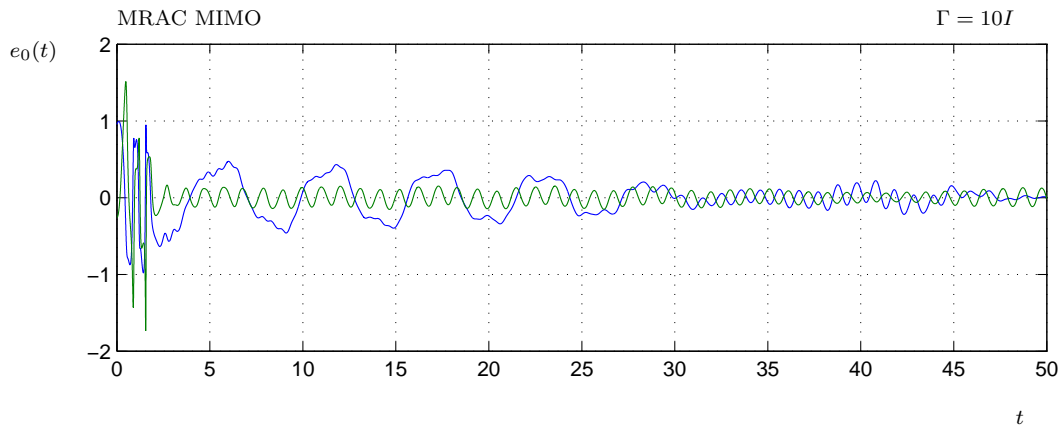


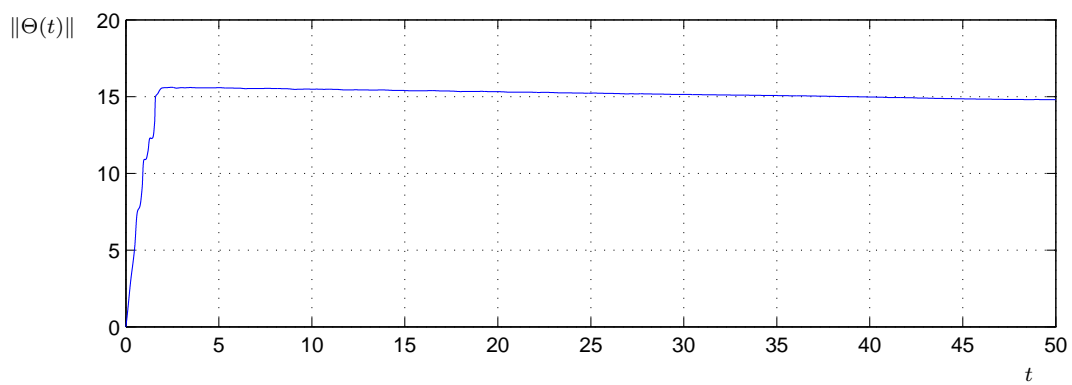
FIGURA 6.4: Simulação da planta $G_1(s)$ usando α -MRAC MIMO.

sitório de todas as variáveis consideradas, e convergência mais rápida, quando comparadas com as respostas obtidas pelo algoritmo MRAC MIMO padrão.

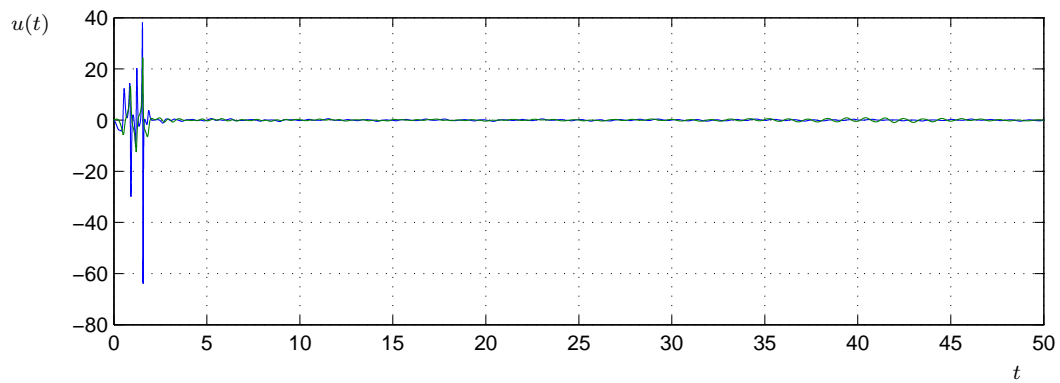
Para finalizar as simulações, comparamos a resposta do modelo reduzido do erro de rastreamento com a resposta do sistema completo, obtidas nas figuras 6.5 e 6.6, para as plantas $G_1(s)$ e $G_2(s)$ usando o algoritmo α -MRAC MIMO. Acrescentamos também



(a)



(b)

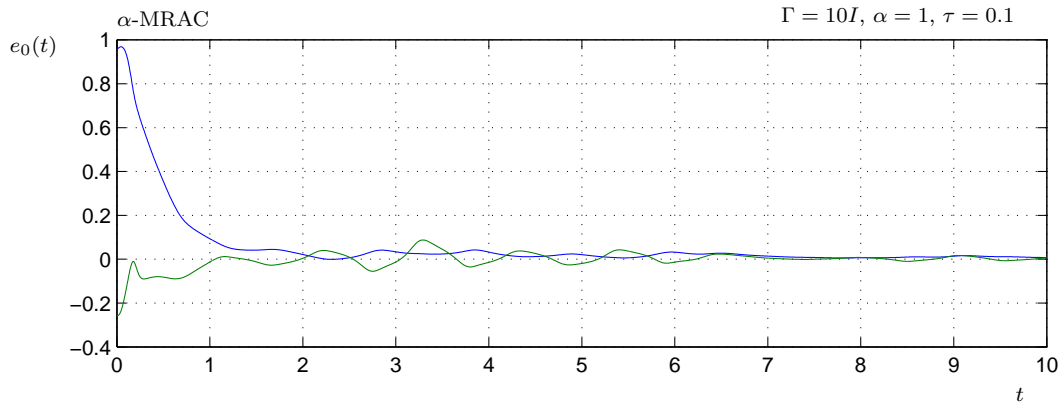


(c)

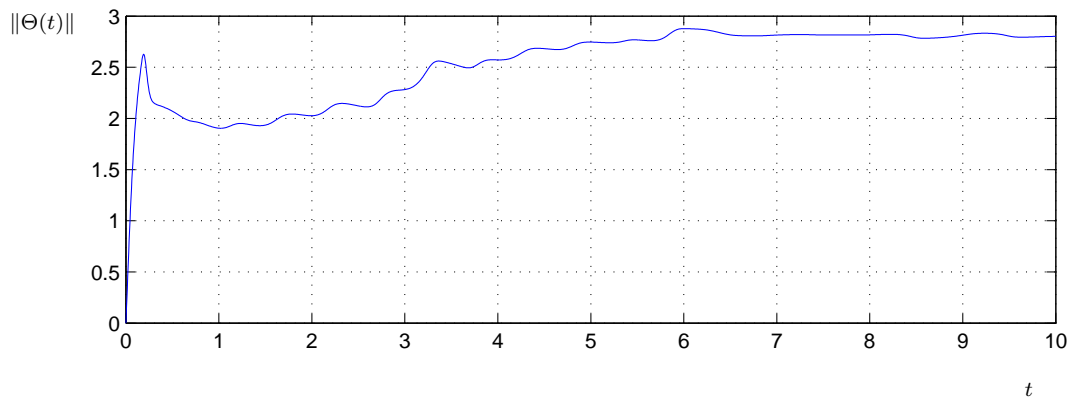
FIGURA 6.5: Simulação da planta $G_2(s)$ usando MRAC MIMO.

a comparação entre os vetores de controle para ambos os sistemas.

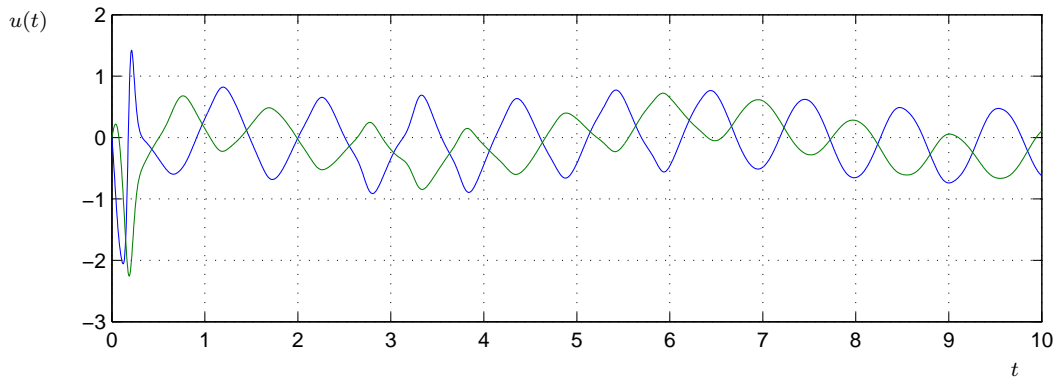
Das figuras 6.7 e 6.8 observamos a discrepância entre o modelo reduzido e o modelo completo que correspondem aos transitórios rápidos eliminados do modelo reduzido.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 6.6: Resultados da simulação da planta $G_2(s)$ usando o α -MRAC MIMO.

6.6 Conclusões

O principal resultado apresentado foi a melhoria do comportamento transitório do erro do rastreamento, usando a lei de adaptação α -MRAC MIMO com o sistema em malha fechada. Esta nova lei de adaptação garante estabilidade global e a convergência assintótica do erro de rastreamento para zero quando $t \rightarrow \infty$. Este resultado é resumido

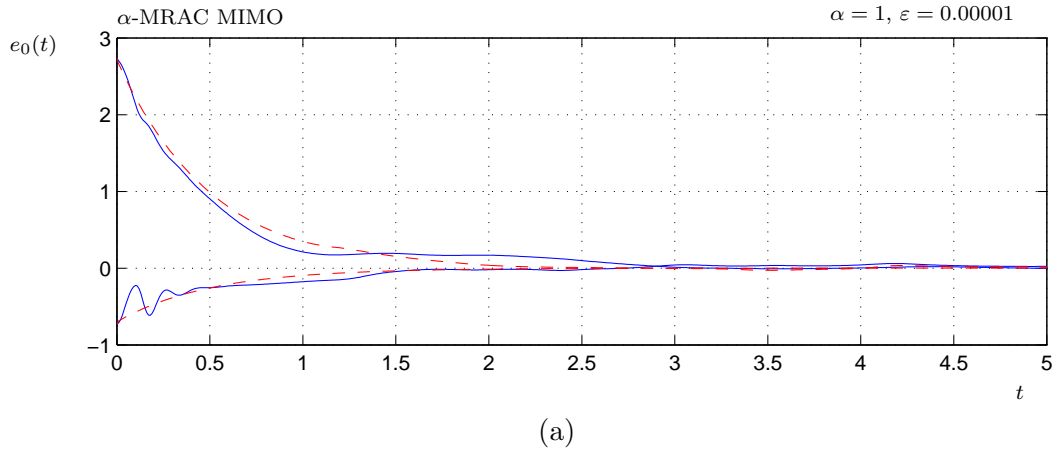


FIGURA 6.7: Modelo reduzido (—) e completo (—) do sistema para a planta $G_1(s)$.

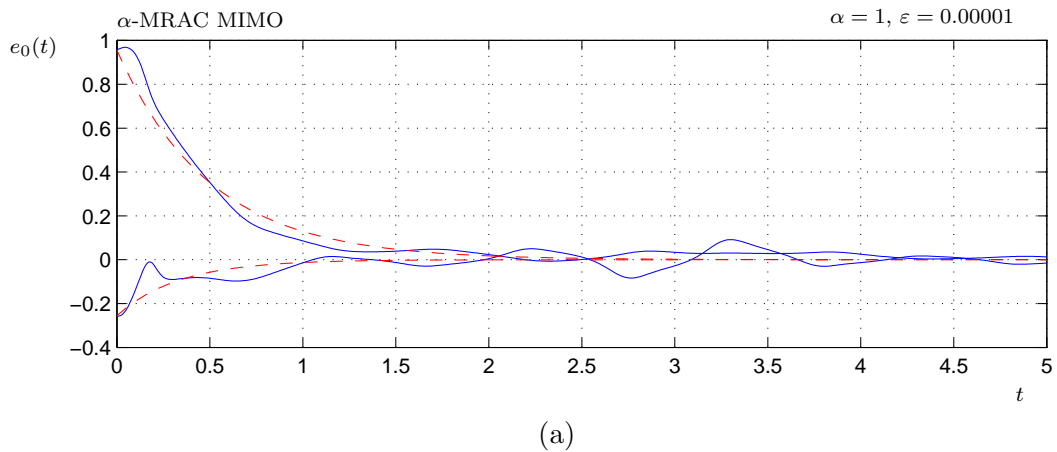


FIGURA 6.8: Modelo reduzido (—) e completo (—) do sistema para a planta $G_2(s)$.

no teorema (6.1) quando $\dot{e}_0(t)$ pode ser medido e no teorema (6.2) quando $\dot{e}_0(t)$ é estimado.

Um importante resultado foi obtido, usando o método das perturbações singulares, no qual foi possível deduzir o modelo reduzido exponencial do erro de rastreamento, quando a matriz de ganhos de adaptação Γ tende a infinito e a constante de tempo τ tende a zero, isto é $\varepsilon \rightarrow 0$. Entretanto, para valores suficientemente pequenos de ε , o comportamento transitório do erro de rastreamento decai exponencialmente, como previsto pelo modelo reduzido, cuja taxa de decaimento é determinada pelos parâmetros do projeto.

A expressão de uma envoltória para $e_0(t)$ confirma a aproximação do modelo reduzido, no caso limite (τ e $\Gamma^{-1} \rightarrow 0$).

Outro resultado vem da observação da expressão de $\dot{V}(t)$ (6.34), onde o termo que

contém o vetor \hat{F} não foi eliminado, ao invés disso, a lei de adaptação o manteve na expressão completando seus quadrados. Pela análise de estabilidade, a consequência direta da presença deste termo é que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega^T(t) \tilde{\Theta}(t) = 0$ independente de persistência de sinal.

Para finalizar, verificamos que o bom comportamento do transitório do rastreamento se deve também à correta inicialização do filtro de avanço. Isto é, se inicializarmos o filtro $\hat{e}_0(0) = 0$ o vetor de parâmetros $\Theta(t)$ salta repentinamente para valores altos e o comportamento transitório se deteriora. Portanto, a condição inicial do filtro $\hat{e}_0(0) = y(0)$ permite a suavização de $\Theta(t)$. Cabe ressaltar, que o sinal $y(0)$ é disponível e pode ser transmitido para inicializar o filtro.

Capítulo 7

Algoritmo α -MRAC MIMO robusto

Este capítulo analisa a propriedade de robustez de um novo algoritmo adaptativo baseado no algoritmo α -MRAC MIMO. A análise desenvolvida é uma extensão da apresentada no capítulo 4. O novo algoritmo é resultado da modificação do α -MRAC MIMO, onde substitui-se o erro filtrado por uma estimativa (Tao 2003), introduz-se um sinal normalizante e adiciona-se um sinal chaveado (Ioannou & Tsakalis 1986), (Ioannou & Tsakalis 1988a). O algoritmo garante a estabilidade do sistema em malha fechada para plantas com dinâmicas não modeladas aditivas e multiplicativas.

7.1 Equação do erro

Da equação (5.51), definimos o erro do rastreamento filtrado como

$$e_f(t) = Q(s)[e_0](t), \quad (7.1)$$

onde a matriz diagonal $Q(s) = (I + \alpha H(s)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é própria e estável e $H(s)$ é uma matriz diagonal de filtros de avanço, dada em (6.14) e $e_f \in \mathbb{R}^m$.

A estimativa do erro filtrado é definida como

$$\epsilon_f(t) = e_f(t) - \kappa Q(s)W_M(s)[\epsilon_f m^2](t), \quad (7.2)$$

onde $\epsilon_f(t) \in \mathbb{R}^m$ e $m(t)$ é um sinal normalizante, dado em (5.53).

Substituindo (7.1) em (7.2) e introduzindo a matriz S , teremos

$$\epsilon_f(t) = Q(s)[e_0](t) - \kappa Q(s)W_M(s)S[S^{-1}\epsilon_f m^2](t). \quad (7.3)$$

Substituindo (5.51) em (7.3) obtemos a expressão desejada de $\epsilon_f(t)$ para a análise da estabilidade robusta,

$$\begin{aligned} \epsilon_f(t) &= Q(s)W_M(s)S[D\Omega^T\tilde{\Theta} + \mu\tilde{\eta}](t) - Q(s)W_M(s)S[\kappa S^{-1}\epsilon_f m^2](t) \\ &= Q(s)W_M(s)S[D\Omega^T\tilde{\Theta} + \mu\tilde{\eta} - \kappa S^{-1}\epsilon_f m^2](t), \end{aligned} \quad (7.4)$$

7.2 Lei de adaptação robusta

Definindo o estado $Z(t)$ de uma realização não mínima $\{A, B, C\}$, da matriz de transferência $Q(s)W_M(s)S$, dada em (7.4), temos o sistema dinâmico

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= AZ + Bv, \\ \epsilon_f &= CZ, \end{aligned} \quad (7.5)$$

onde $v(t) = D\Omega^T(t)\tilde{\Theta}(t) - \kappa S^{-1}\epsilon_f(t)m^2(t) - \mu\tilde{\eta}(t)$. Para $Q(s)W_M(s)S$ estritamente real positiva (ver Lema 5.2), pelo lema de Lefschetz-Kalman-Yakubovich, existem matrizes $P = P^T > 0$ e $Q = Q^T > 0$ tal que

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= -Q, \\ P B &= C^T. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Agora, relembro a definição das matrizes \mathcal{D} e Γ em (5.31) e (5.32),

$$\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1 I_1, d_2 I_2, \dots, d_m I_m\}, \quad (7.7)$$

$$\Gamma = \text{diag}\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m\}, \quad (7.8)$$

e escolhendo a seguinte função positiva definida,

$$V(Z, \tilde{\Theta}) = Z^T(t)PZ(t) + \tilde{\Theta}^T(t)|\mathcal{D}|\Gamma^{-1}\tilde{\Theta}(t), \quad (7.9)$$

efetuamos a derivada no tempo de $V(Z, \tilde{\Theta})$, ao longo da trajetória do sistema (7.5), e juntamente com (7.6), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) = & -Z^T(t)QZ(t) + 2\tilde{\Theta}^T(t)\Omega D(t)\epsilon_f(t) - 2\kappa m^2(t)\epsilon_f^T(t)S^{-1}\epsilon_f(t) - \\ & - 2\mu\bar{\eta}^T(t)\epsilon_f(t) + 2\tilde{\Theta}^T(t)|\mathcal{D}|\Gamma^{-1}\dot{\tilde{\Theta}}(t). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Dado $D\Omega^T = \Omega^T\mathcal{D}$ e substituindo em (7.10), resulta

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) = & -Z^T(t)QZ(t) + 2\tilde{\Theta}^T(t)\mathcal{D}\Omega(t)\epsilon_f(t) - \\ & - 2\kappa m^2(t)\epsilon_f^T(t)S^{-1}\epsilon_f(t) - 2\mu\bar{\eta}^T(t)\epsilon_f(t) + 2\tilde{\Theta}^T(t)|\mathcal{D}|\Gamma^{-1}\dot{\tilde{\Theta}}(t) \\ = & -Z^T(t)QZ(t) + 2\tilde{\Theta}^T(t)|\mathcal{D}|\Gamma^{-1}(\Gamma\text{sign}(\mathcal{D})\Omega(t)\epsilon_f(t) + \dot{\tilde{\Theta}}(t)) - \\ & - 2\kappa m^2(t)\epsilon_f^T(t)S^{-1}\epsilon_f(t) - 2\mu\bar{\eta}^T(t)\epsilon_f(t). \end{aligned} \quad (7.11)$$

De (7.11), escolhemos a lei de adaptação robusta como

$$\dot{\tilde{\Theta}}(t) = -\Gamma\text{sign}(\mathcal{D})\Omega(t)\epsilon_f(t) - \sigma(t)\Gamma\tilde{\Theta}(t), \quad (7.12)$$

e a lei de controle

$$u(t) = \Omega^T(t)\tilde{\Theta}(t), \quad (7.13)$$

onde $\sigma(t)$ é um sinal chaveado, dado por (Tao 2003, p.399)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|\Theta(t)\|_2 < M_1, \\ \sigma_{01}\left(\frac{\|\Theta(t)\|_2}{M_1} - 1\right) & \text{se } M_1 \leq \|\Theta(t)\|_2 < 2M_1, \\ \sigma_{01} & \text{se } \|\Theta(t)\|_2 \geq 2M_1, \end{cases} \quad (7.14)$$

com, $M_1 > \|\Theta^*\|_2$ e $\sigma_{01} > 0$ arbitrário. Para implementar o sinal $\sigma(t)$ precisamos conhecer o valor de M_1 .

7.3 Análise de robustez

Nesta seção é analisada a robustez do sistema em malha fechada usando a nova lei de adaptação, dada em (7.12), e do controlador, dado em (7.13). O principal resultado desta análise pode ser resumida pelo seguinte teorema:

Teorema 7.1 *Para o sistema composto pela planta (2.1), pelo modelo de referência (2.5), pelo controlador (7.13) e pela lei de adaptação (7.12) com o esquema de chaveamento (7.14), se as hipóteses (H1) a (H8) são satisfeitas, então existe uma constante $\mu^* > 0$, tal que para algum $\mu \in [0, \mu^*)$, todos os sinais do sistema em malha fechada são limitados e*

$$\int_{t_1}^{t_2} (\|Z(t)\|_2^2 + \|\epsilon_f(t)m(t)\|_2^2) dt \leq \mu^2 \bar{k}_0 (t_2 - t_1) + \bar{\gamma}_0, \quad (7.15)$$

bem como

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\epsilon_f(t)\|_2^2 dt \leq \mu \bar{k}_0 (t_2 - t_1) + \bar{\gamma}_0, \quad (7.16)$$

para $\bar{\gamma} > 0$ e $\bar{k}_0 > 0$.

Prova: Considere a função de positiva definida (7.9) e sua derivada (7.11),

Substituindo a lei de adaptação (7.12), e lembrando que $\lambda_{\min}(Q)\|Z\|_2^2 \leq Z^T Q Z \leq \lambda_{\max}(Q)\|Z\|_2^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) &= -Z^T(t)QZ(t) - 2\sigma\tilde{\Theta}^T(t)|\mathcal{D}|\Theta(t) - 2\kappa m^2 \epsilon_f^T(t)S^{-1}\epsilon_f(t) - 2\mu\epsilon_f^T(t)\bar{\eta}(t) \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q)\|Z(t)\|_2^2 - 2\sigma(t)\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) - 2\kappa m^2(t)\lambda_{\min}(S^{-1})\|\epsilon_f(t)\|^2 - \\ &\quad - 2\mu\epsilon_f^T(t)\bar{\eta}(t) \\ &= -\lambda_{\min}(Q)\|Z(t)\|_2^2 - 2\sigma(t)\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) - 2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})m^2(t)\|\epsilon_f(t)\|^2 - \\ &\quad - 2\mu\epsilon_f^T(t)\bar{\eta}(t). \end{aligned} \quad (7.17)$$

De (7.17), observamos que o último termo $2\mu\epsilon_f^T(t)\bar{\eta}(t)$ não é definido. Considerando os dois últimos termos de (7.17) e aplicando o artifício sugerido por (Tao 2003, p.222),

para o caso SISO, verifica-se que a igualdade abaixo é verdadeira:

$$\begin{aligned}
& -2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})\|m(t)\epsilon_f(t)\|^2 + 2\mu\epsilon_f^T(t)\bar{\eta}(t) = -\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})m^2(t)\epsilon_f^T(t)\epsilon_f(t) + \\
& + \frac{\mu^2\bar{\eta}^T(t)}{\kappa m^2(t)\lambda_{\min}(S^{-1})}\bar{\eta}(t) - \kappa \left(\sqrt{\lambda_{\min}(S^{-1})}m\epsilon_f(t) - \frac{\mu\bar{\eta}(t)}{\kappa m(t)\sqrt{\lambda_{\min}(S^{-1})}} \right)^T \times \\
& \left(\sqrt{\lambda_{\min}(S^{-1})}m(t)\epsilon_f(t) - \frac{\mu\bar{\eta}(t)}{\kappa m(t)\sqrt{\lambda_{\min}(S^{-1})}} \right). \tag{7.18}
\end{aligned}$$

De (7.18), podemos afirmar que,

$$\begin{aligned}
-2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})\|m(t)\epsilon_f(t)\|^2 + 2\mu\epsilon_f^T(t)\bar{\eta}(t) & \leq -\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})\|m(t)\epsilon_f(t)\|^2 + \\
& + \frac{\mu^2\bar{\eta}^T(t)}{\kappa m^2\lambda_{\min}(S^{-1})}\bar{\eta}(t). \tag{7.19}
\end{aligned}$$

Introduzindo (7.19) em (7.17), teremos

$$\begin{aligned}
\dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) & \leq -\lambda_{\min}(Q)\|Z(t)\|_2^2 - 2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) - \\
& - \kappa\lambda_{\min}(S^{-1})\|m(t)\epsilon_f(t)\|^2 + \frac{\mu^2\bar{\eta}^T(t)}{\kappa m^2\lambda_{\min}(S^{-1})}\bar{\eta}(t), \tag{7.20}
\end{aligned}$$

onde o último termo da inequação tem sinal positivo.

Seguindo o desenvolvimento apresentado no apêndice (C.2) substituímos (C.80) em (7.20), tal que

$$\begin{aligned}
\dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) & \leq -\lambda_{\min}(Q)\|Z(t)\|_2^2 - 2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) - \\
& - 2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})\|m(t)\epsilon_f(t)\|^2 + 2\mu^2\frac{k_4^2}{\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})} + 2\mu^2\frac{k_4^2}{\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})}\|\Theta(t)\|^2. \tag{7.21}
\end{aligned}$$

Em seguida, consideramos o esquema de chaveamento na análise do termo $2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t)$. Temos, então, que

$$2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) = \sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|) (\Theta^T(t)\Theta(t) + (\Theta(t) - \Theta^*)^T(\Theta(t) - \Theta^*) - \Theta^{*T}\Theta^*) > 0.$$

Se $\mu \in [0, \mu^*)$, para $\mu^* = \sqrt{\frac{\sigma\kappa\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\lambda_{\min}(S^{-1})}{k_4^2}}$, substituímos $\mu = \sqrt{\delta}\mu^*$, para $0 < \delta < 1$, em (7.21), tal que

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) \leq & -\lambda_{\min}(Q)\|Z(t)\|_2^2 - 2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) - \\ & - 2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})\|m(t)\epsilon_f(t)\|^2 + 2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\delta + 2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)\delta\|\Theta(t)\|^2. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Da expressão acima mostrando apenas os termos que contém σ , teremos

$$\begin{aligned} & 2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)(-\tilde{\Theta}^T(t)\Theta(t) + \delta + \delta\|\Theta(t)\|^2), \\ & 2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)(-(\Theta(t) - \Theta^*)^T\Theta(t) + \delta + \delta\|\Theta(t)\|^2), \\ & 2\sigma\lambda_{\min}(|\mathcal{D}|)(-\Theta^T(t)\Theta(t) + \Theta^{*T}\Theta(t) + \delta + \delta\|\Theta(t)\|^2). \end{aligned} \quad (7.23)$$

De (7.23), verificamos que

$$(\delta - 1)\Theta^T(t)\Theta(t) + \delta + \delta\Theta^{*T}\Theta(t) < 0. \quad (7.24)$$

Como $(\delta - 1) < 0$, e substituindo acima, teremos

$$\begin{aligned} -|\delta - 1|\Theta^T(t)\Theta(t) + \delta + \delta\Theta^{*T}\Theta(t) & < 0, \\ \Theta^T(t)\Theta(t) & > \frac{\delta + \delta\Theta^{*T}\Theta(t)}{|\delta - 1|}, \\ \|\Theta(t)\|_2^2 & > \frac{\delta + \delta\Theta^{*T}\Theta(t)}{|\delta - 1|}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

De (7.25), concluímos que existe uma constante $\Theta_0 > 0$ tal que $\dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) \leq 0$ sempre que $\|\Theta(t)\|_2 > \Theta_0$.

De (7.21) retirando o termo chaveado, a desigualdade ainda é satisfeita,

$$\begin{aligned} \dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) \leq & -\lambda_{\min}(Q)\|Z(t)\|_2^2 - 2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})m^2\epsilon_f^T(t)\epsilon_f(t) + \\ & + \frac{2\mu^2k_4^2}{\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})}(1 + \|\Theta(t)\|_2^2). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Considere a norma de $\|\theta(t)\|_2$ limitada, isto é $\Theta(t) \in \mathcal{L}_2$, então podemos definir um limite superior tal que,

$$\|\Theta(t)\|_2^2 \leq \Theta_{max}. \quad (7.27)$$

Integrando ambos os lados de (7.26),

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \dot{V}(Z(t), \tilde{\Theta}(t)) dt &\leq - \int_{t_1}^{t_2} \lambda_{\min}(Q) \| Z(t) \|_2^2 dt - \\ &- 2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1}) \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon_f(t)m(t))^T (\epsilon_f(t)m(t)) dt + \frac{2\mu^2 k_4^2}{\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})} (1 + \Theta_{\max}) \int_{t_1}^{t_2} dt, \end{aligned} \quad (7.28)$$

teremos,

$$\begin{aligned} V(Z(t_2), \tilde{\Theta}(t_2)) - V(Z(t_1), \tilde{\Theta}(t_1)) &\leq - \int_{t_1}^{t_2} \lambda_{\min}(Q) \| Z(t) \|_2^2 dt - \\ &- 2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1}) \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon_f(t)m(t))^T (\epsilon_f(t)m(t)) dt + \frac{2\mu^2 k_4^2}{\kappa} (1 + \Theta_{\max}) \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1), \\ \lambda_{\min}(Q) \int_{t_1}^{t_2} \| Z(t) \|_2^2 dt + 2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1}) \int_{t_1}^{t_2} &(\epsilon_f(t)m(t))^T (\epsilon_f(t)m(t)) dt \leq \\ V(Z(t_1), \tilde{\Theta}(t_1)) - V(Z(t_2), \tilde{\Theta}(t_2)) + \frac{2\mu^2 k_4^2}{\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})} &(1 + \Theta_{\max}) \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Definindo $\gamma_0 = V(Z(t_1), \tilde{\Theta}(t_1)) - V(Z(t_2), \tilde{\Theta}(t_2))$, $k_0 = \frac{2k_4^2}{\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})} (1 + \Theta_{\max})$ e introduzindo em (7.29), obtemos

$$\lambda_{\min}(Q) \int_{t_1}^{t_2} \| Z(t) \|_2^2 dt + 2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1}) \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon_f(t)m(t))^T (\epsilon_f(t)m(t)) dt \leq \gamma_0 + \mu^2 k_0 (t_2 - t_1).$$

Denominando $\beta = \min\{\lambda_{\min}(Q), 2\kappa\lambda_{\min}(S^{-1})\}$ e substituindo em (7.30), teremos

$$\beta \int_{t_1}^{t_2} \| Z(t) \|_2^2 dt + \beta \int_{t_1}^{t_2} (\epsilon_f(t)m(t))^T (\epsilon_f(t)m(t)) dt \leq \gamma_0 + \mu^2 k_0 (t_2 - t_1), \quad (7.30)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\| Z(t) \|_2^2 + (\epsilon_f(t)m(t))^T (\epsilon_f(t)m(t))) dt \leq \frac{\gamma_0}{\beta} + \mu^2 \frac{k_0}{\beta} (t_2 - t_1), \quad (7.31)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\| Z(t) \|_2^2 + \| \epsilon_f(t)m(t) \|_2^2) dt \leq \mu^2 \bar{k}_0 (t_2 - t_1) + \bar{\gamma}_0, \quad (7.32)$$

onde $\bar{\gamma} = \frac{\gamma_0}{\beta} > 0$, $\bar{k}_0 = \frac{k_0}{\beta} > 0$. ■

Portanto, de (7.32) verificamos que $Z(t)$ e $\epsilon_f(t)m(t)$ pertencem $B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$, conforme a definição (1.14), para qualquer $\bar{k}_0 > 0$ e $\bar{\gamma}_0 > 0$ e, conseqüentemente, de (7.5), $\epsilon_f(t) \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$. De (7.2), para $Q(s)W_M(s)$ estritamente própria e estável, $e_f(t) \in B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$.

Concluimos que existe uma constante $\mu > 0$ tal que $\mu \in [0, \mu^*)$ a qual assegura que $\dot{V}(Z, \tilde{\Theta}) \leq 0$, sempre que $\|\Theta\| > \Theta_0$, e sendo $V(Z, \tilde{\Theta}) \geq 0$ implica $Z(t) \in \mathcal{L}_\infty$, $\tilde{\Theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, logo por (7.5), $\epsilon_f(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e, conseqüentemente, $m(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Do apêndice (C.3) sendo $m(t) \in \mathcal{L}_\infty$ implica $y(t)$, $w_2(t)$ e $u(t) \in \mathcal{L}_\infty$ logo $\bar{\eta}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ e por (5.3) $w_2(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Baseado nos mesmos argumentos da análise da subseção (5.5.4), devido à estrutura triângular dos vetores regressores, concluimos que Ω_i , ($i = 1, \dots, m$) são uniformemente limitados, o que implica a matriz de regressores $\Omega(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Visto que, $r(t)$ é uniformemente limitado $y_M(t) \in \mathcal{L}_\infty$, logo $e_0(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Pela lei de adaptação (7.12), $\dot{\tilde{\Theta}}(t)$ e $\dot{\Theta}(t)$ são uniformemente limitados. Portanto, todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados.

Pelo exposto, $\dot{Z}(t)$, $\dot{\epsilon}_f(t) \in \mathcal{L}_\infty$, então $\ddot{V}(t) \in \mathcal{L}_\infty$. Se $\mu = 0$ concluimos que $Z(t)$ e $\epsilon_f(t) \rightarrow 0$ e, conseqüentemente, $e_0(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

7.4 Resultados das simulações

Nesta seção, apresentamos o resultado de dois exemplos que ilustram a robustez do novo algoritmo, e comparamos com o algoritmo MRAC padrão com as mesmas modificações introduzidas na lei de adaptação do algoritmo *alpha*-MRAC robusto. Em seguida, simulamos os efeitos da variação de μ no erro de rastreamento do sistema, usando os dois algoritmos, para a planta $G_{01}(s)$.

O primeiro exemplo considera uma planta com a seguinte matriz de transferência:

$$G_{01}(s) = K_p \text{diag} \left\{ \frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+1} \right\}, \quad (7.33)$$

onde,

$$K_p = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.866 \\ -0.866 & 0.5 \end{bmatrix}. \quad (7.34)$$

O correspondente modelo de referência é

$$W_{1M}(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s+3}, \frac{1}{s+2} \right\}. \quad (7.35)$$

As dinâmicas não modeladas aditiva $\mu\Delta_a(s) = \mu \frac{-20s^2 - 600s}{s^2 + 30s + 229} I$ e multiplicativa $\mu\Delta_m(s) =$

$\mu \frac{229}{s^2+30s+229}I$, com $\mu = 0.05$.

Neste exemplo todos os parâmetros são desconhecidos.

Os dados usados foram:

Para o α -MRAC MIMO: $\Gamma = 100I$, $\alpha = 1$, $\tau = 0.01$, $k = 10$, $\delta_0 = 10$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $m(0) = 1$, $M_1 = 1$, $\sigma_{01} = 4$.

Para o MRAC padrão: $\Gamma = 100I$, $k = 50$, $\delta_0 = 5$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $m(0) = 1$, $M_1 = 1$, $\sigma_{01} = 4$.

Entrada externa: $r(t) = \begin{bmatrix} 2 + sqw(0.1t) & -2 - sqw(0.2t) \end{bmatrix}^T$.

Condições iniciais: planta $y(0) = [2 \ 2]$, $\hat{e}_0(0) = [0 \ 0]$, sendo todas as outras nulas.

Os resultados da simulação são mostrados nas figuras 7.1 e 7.2.

O segundo exemplo considera a planta com todos parâmetros desconhecidos cuja matriz de transferência é dada por,

$$G_{02}(s) = K_p \text{diag} \left\{ \frac{(s+6)}{s(s+2)}, \frac{(s+6)}{s(s+3)} \right\}, \quad (7.36)$$

onde K_p é a mesma do primeiro exemplo e o modelo de referência é,

$$W_{2M}(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+2} \right\}. \quad (7.37)$$

As dinâmicas não modeladas aditiva e multiplicativa e suas condições iniciais são iguais à simulação anterior.

Os dados usados neste caso foram:

Para o MRAC: $\Gamma = 100I$, $k = 10$, $\delta_0 = 10$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $m_0 = 1$, $M_1 = 1$, $\sigma_{01} = 4$

Para o α -MRAC: $\Gamma = 10I$, $\tau = 0.01$, $\alpha = 1$, $k = 1$, $\delta_0 = 10$, $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $m(0) = 1$, $M_1 = 4$, $\sigma_{01} = 1$.

Entrada: $r(t) = [5 + 5sqw(0.1t) \quad -5 - 5sqw(0.2t)]^T$.

Condições iniciais: $y(0) = [2 \ 2]$, $\hat{e}_0 = [19.124 \ -5.124]$, sendo todas as outras nulas.

Os resultados da simulação são mostrados na figura 7.3 e 7.4.

Dos gráficos das figuras 7.2 e 7.4 podemos verificar a robustez do novo algoritmo. Como previsto pela análise, a lei de adaptação modificada, garante a estabilidade de todos os sinais para sistemas multivariáveis incertos e sujeitos a erros de modelagem,

bem como, assegura a convergência da estimativa do erro para a vizinhança $B^{2,\mu^2\bar{k}_0}$ com erro da ordem da perturbação da planta (Tao 2003). Observamos também, a melhoria do comportamento transitório do erro em relação ao comportamento do erro obtido pelo algoritmo MRAC MIMO, exibidos nas figuras 7.1 e 7.3.

Os gráficos (7.5)-(??) mostram a influência da variação de μ no erro de rastreamento do sistema, usando o algoritmo MRAC MIMO e o algoritmo α -MRAC robusto para a planta G_{01} .

Para esta simulação foram usados os seguintes valores de $\mu = 0.05$, $\mu = 0.005$ e 0.0005 .

Como esperado, se μ diminui, o erro de rastreamento converge para uma vizinhança $B^{2,\mu^2\bar{k}_0}$ menor. O decaimento do erro, usando o novo algoritmo, é assintótico e o comportamento transitório melhora consideravelmente, em relação ao algoritmo MRAC MIMO.

7.5 Conclusões

A robustez do novo algoritmo, baseado na α -MRAC MIMO, foi analisada para o sistema em malha fechada composto da planta 2.1, do modelo de referência 2.5, do controlador (7.13) e da nova lei de adaptação (7.12). Para tratar as dinâmicas não modeladas aditivas e multiplicativas, modificamos a lei de adaptação (7.12) substituindo o erro de rastreamento filtrado pela sua estimativa e adicionamos um sinal chaveado, usando a técnica σ -modificação. A lei de adaptação robusta(7.12), que atualiza os parâmetros do controlador (7.13), assegura que todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados, garantindo a estabilidade do sistema. Além do mais, a estimativa do erro de rastreamento converge para a vizinhança definida por $B^{2,\mu^2\bar{k}_0}$, quando $t \rightarrow \infty$, usando o esquema de controle adaptativo com o novo algoritmo robusto. Os gráficos apresentados nas figuras 7.2 e 7.4 mostram o comportamento dos sinais de interesse, e ilustram a robustez do novo algoritmo. Completamos a análise observando o efeito da variação de μ sobre o erro do sistema, usando ambos os algoritmos para a planta $G_{01}(s)$. Dos gráficos (7.5)-(??), verificamos que diminuindo o valor de μ o erro também diminui, e converge para uma vizinhança $B^{2,\mu^2\bar{k}_0}$ menor, com erro da ordem

da perturbação da planta (Tao 2003). O comportamento de $e_0(t)$ durante o transitório, usando o algoritmo α -MRAC robusto, é notavelmente melhor quando comparado com o algoritmo MRAC MIMO.

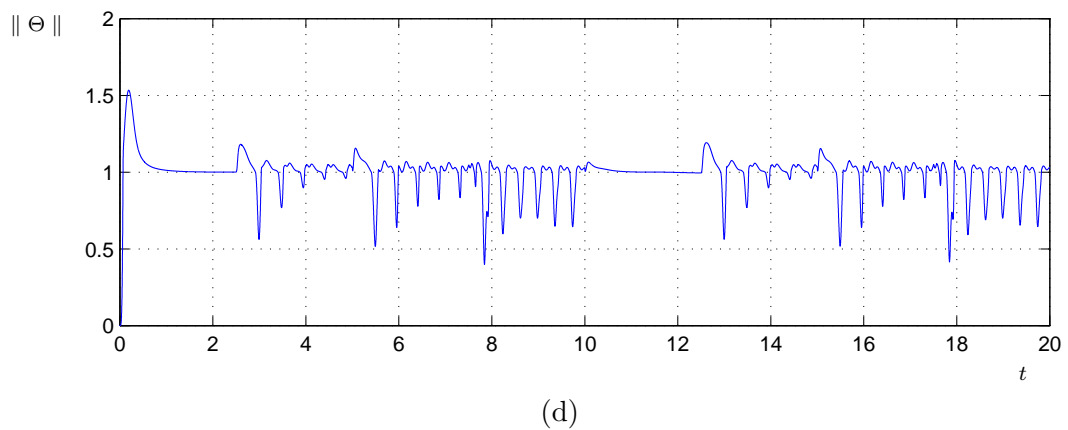
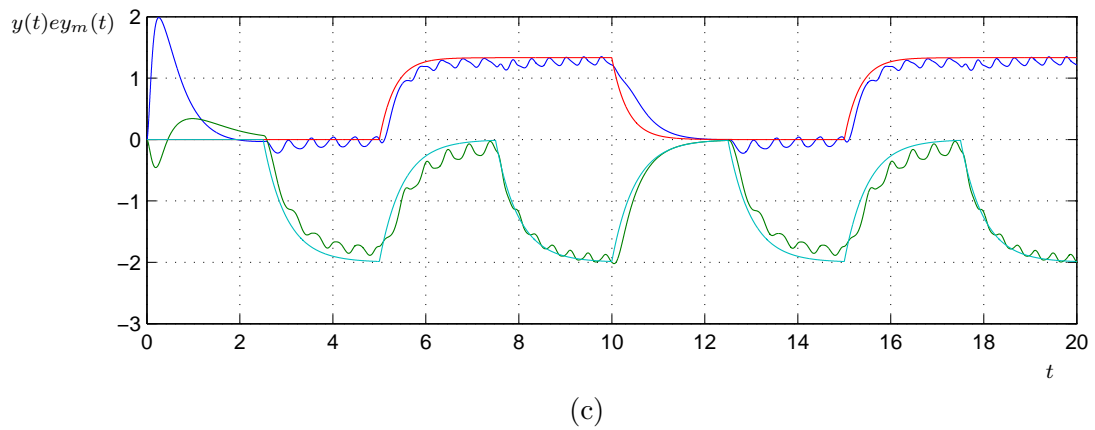
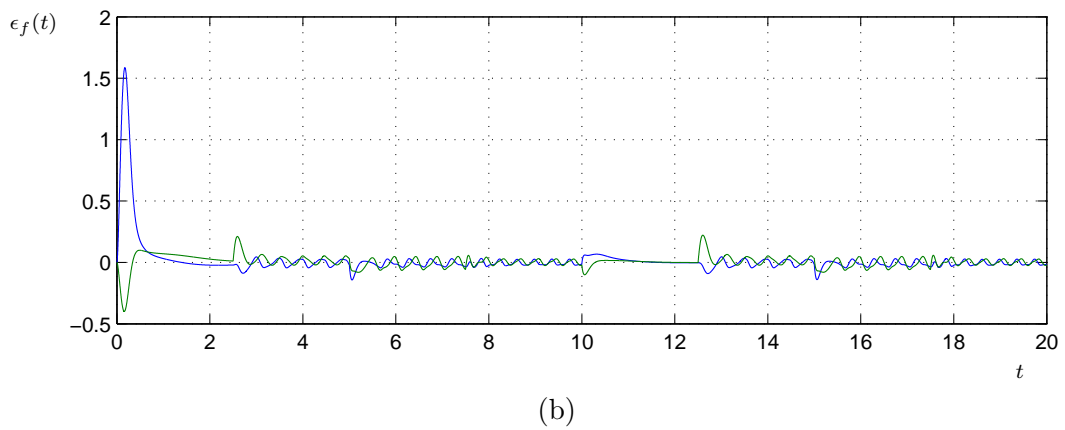
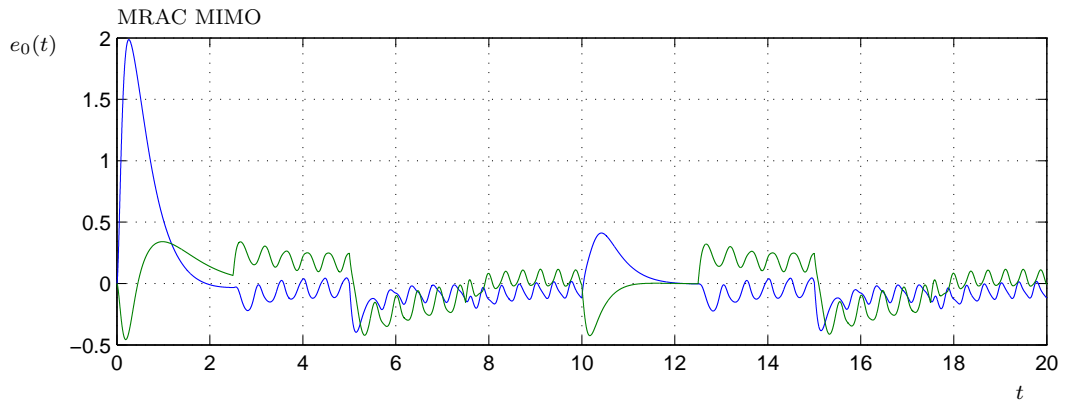
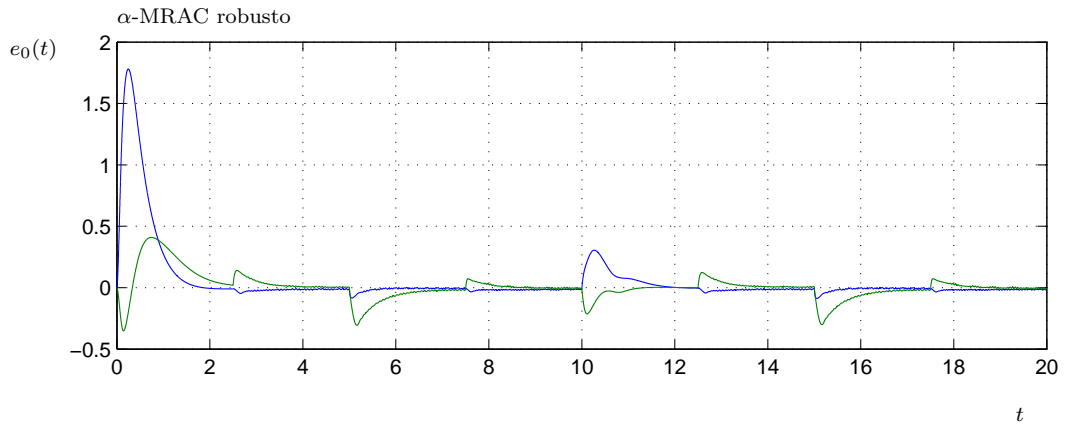
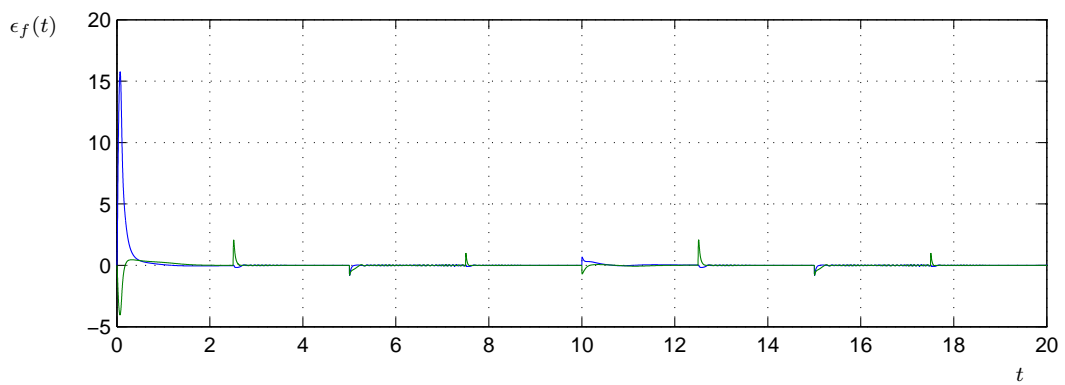


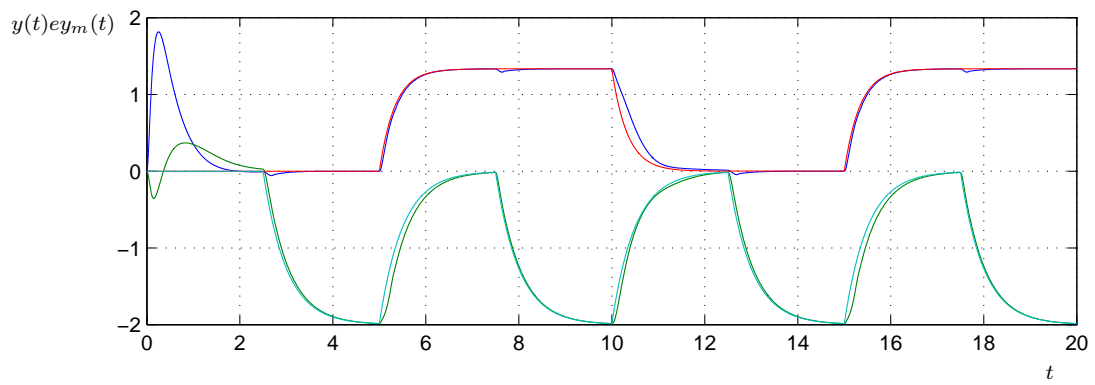
FIGURA 7.1: Algoritmo MRAC MIMO para $G_{01}(s)$.



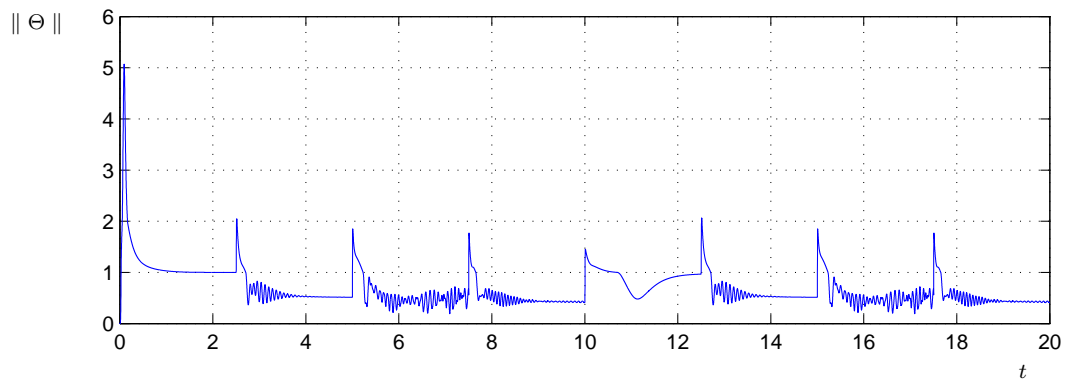
(a)



(b)

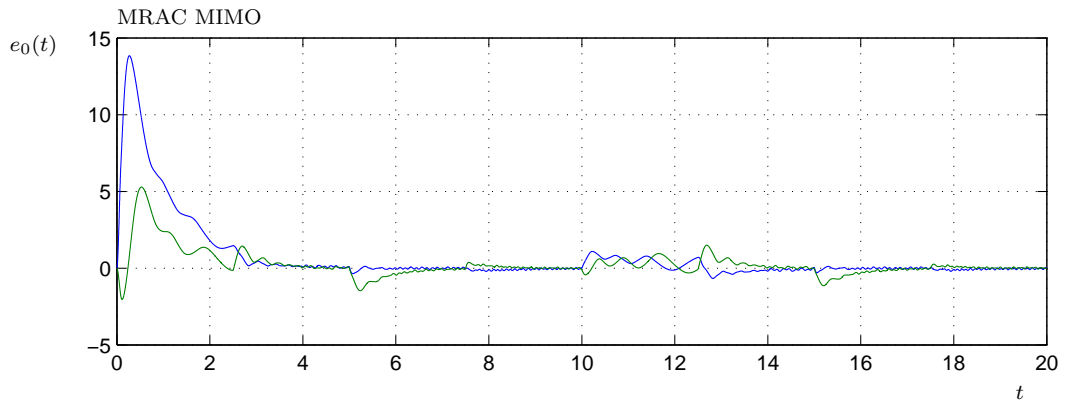


(c)

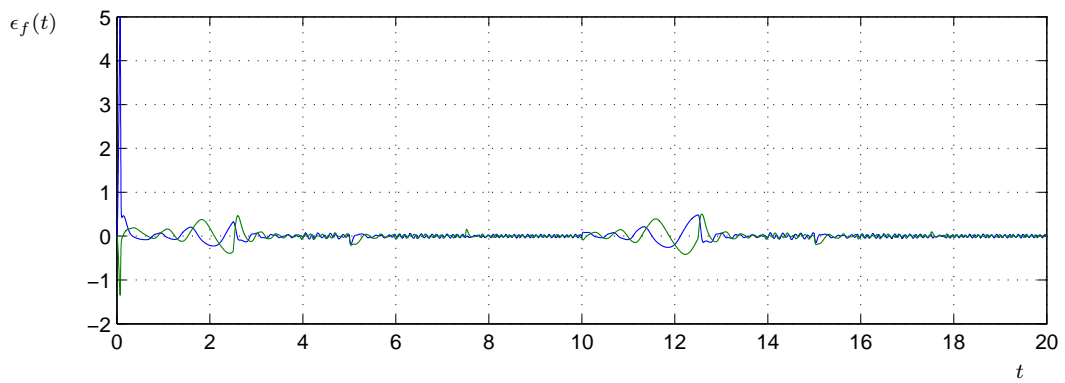


(d)

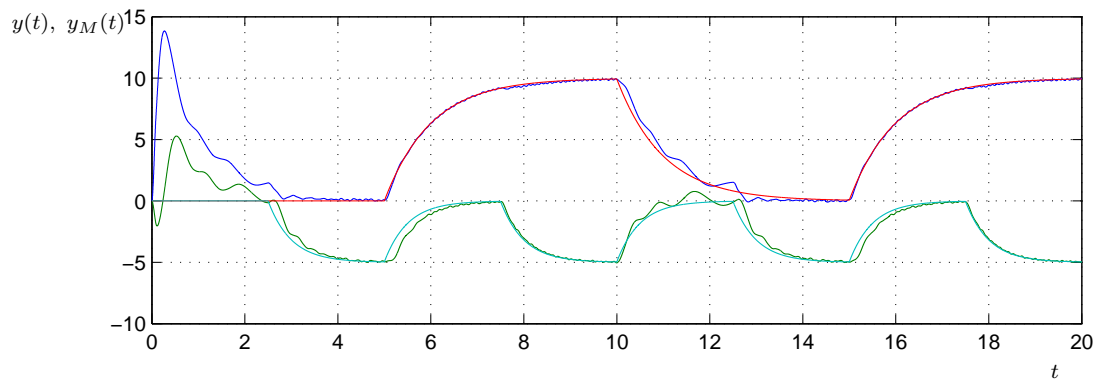
FIGURA 7.2: Algoritmo α -MRAC robusto para $G_{01}(s)$.



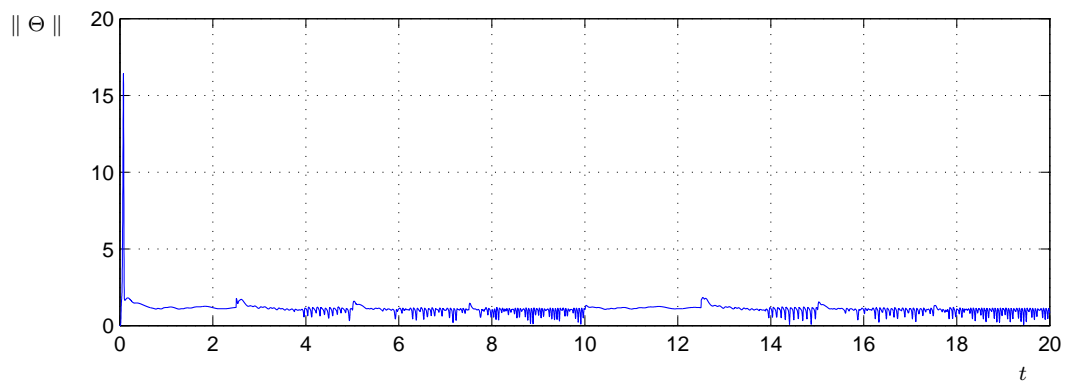
(a)



(b)

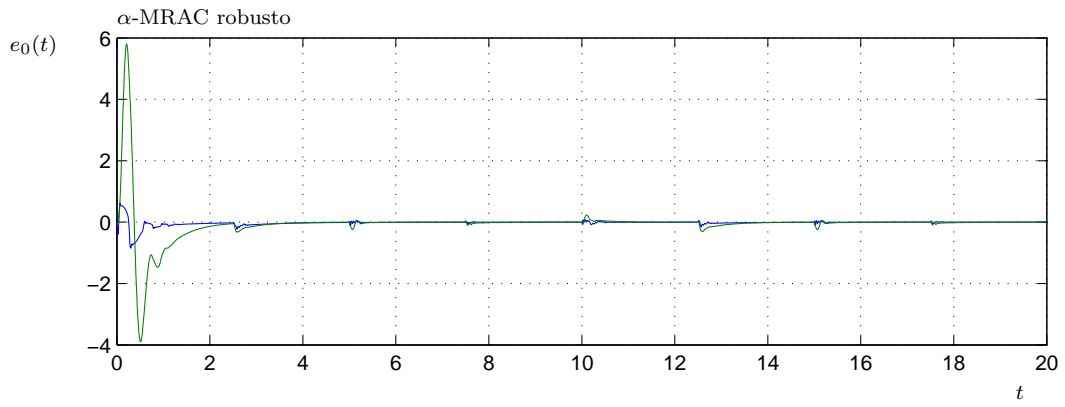


(c)

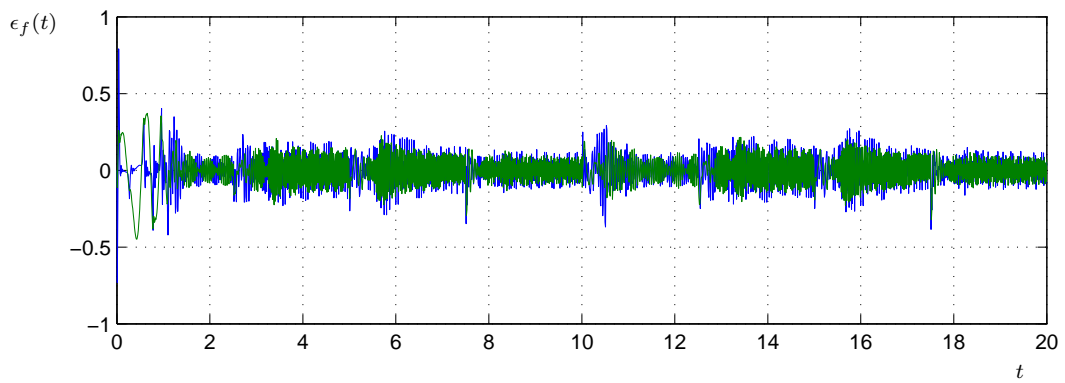


(d)

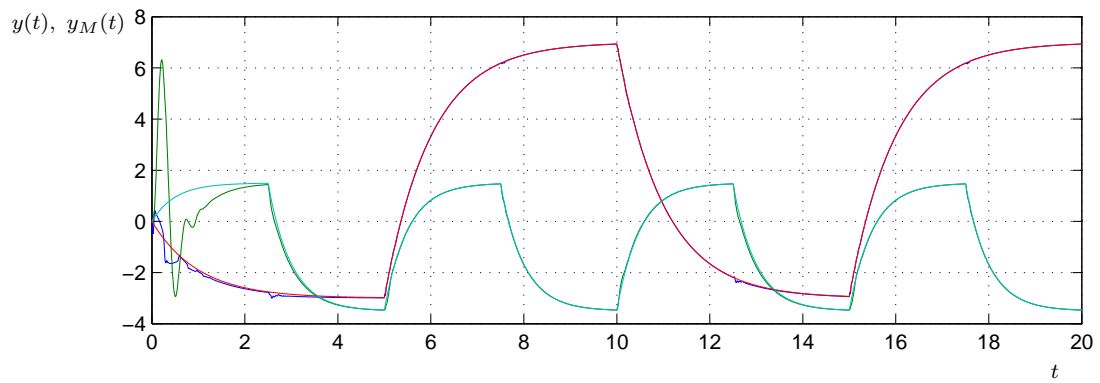
FIGURA 7.3: Algoritmo MRAC MIMO para $G_{02}(s)$.



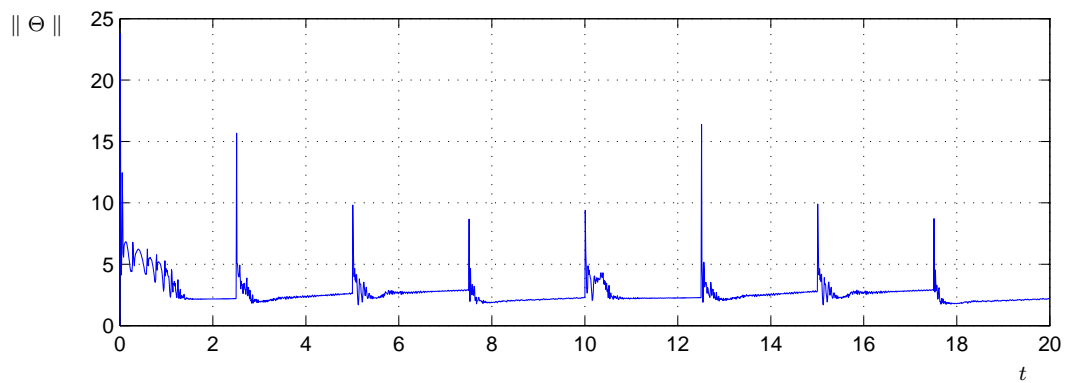
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 7.4: Algoritmo α -MRAC robusto para a planta $G_{02}(s)$.

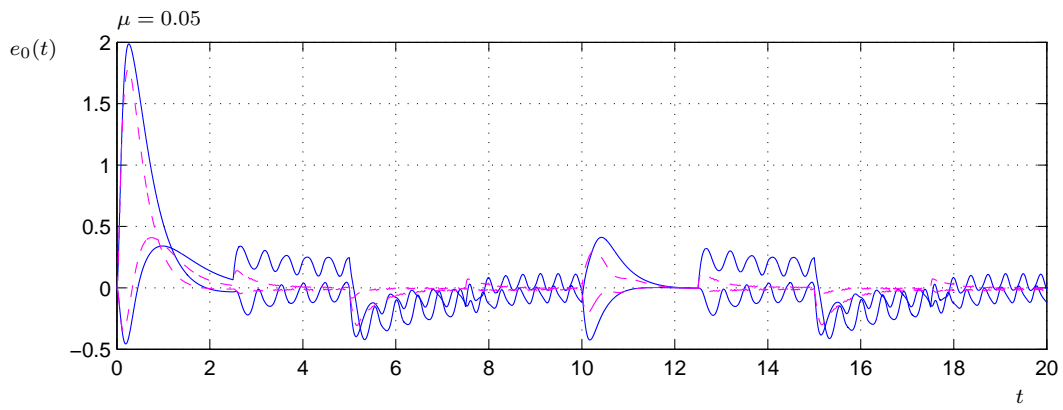


FIGURA 7.5: Norma do erro: MRAC (—) e algoritmo α -MRAC robusto (---).

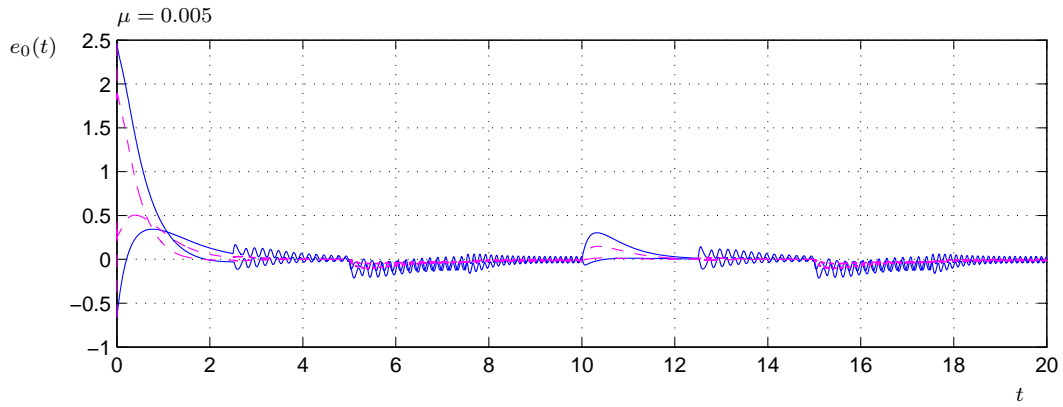


FIGURA 7.6: Erro: MRAC (—) e algoritmo α -MRAC robusto (---).

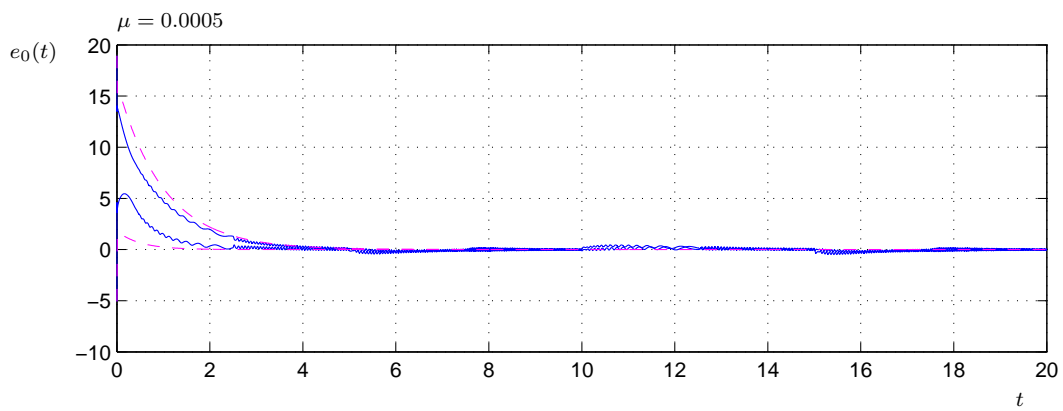


FIGURA 7.7: Erro: MRAC (—) e algoritmo α -MRAC robusto (---).

Capítulo 8

Conclusões, trabalhos futuros e contribuições

Nesta tese, introduzimos o algoritmo α -MRAC MIMO e analisamos teóricamente suas propriedades de estabilidade, robustez e o comportamento da resposta transitória do vetor de erros de rastreamento entre um modelo de referência e uma planta multivariável, incerta de grau relativo $n^* = 1$. A propriedade de estabilidade foi estudada usando o método de Lyapunov e apresentou estabilidade global. Para plantas com erros de modelagem a lei de adaptação foi modificada, e pela análise da robustez o algoritmo mostrou que todos os sinais da malha fechada são uniformemente limitados, desde de que $\mu \in [0, \mu^*)$, conforme o teorema 7.1. Para analisar o comportamento transitório usamos o método de perturbações singulares (Kokotović et al. 1986) considerando a dinâmica completa do sistema, e obtemos o modelo reduzido do erro de rastreamento, bem como o decaimento exponencial de $\Theta(\tilde{\tau})$ e $\hat{F}(\tilde{\tau})$ durante a camda limite, o que valida a aproximação do modelo reduzido. O algoritmo α -MRAC MIMO apresenta os seguintes benefícios, a generalização do algoritmo α -MRAC monovariável (Costa 1999) para o caso multivariável; usa a fatoração SDU da matriz de ganhos de alta frequência K_p , que permite generalizar o sinal do ganho k_p da planta, no caso SISO, para o sinal dos elementos da matriz diagonal D de SDU . O vetor de erros de rastreamento apresenta um melhor comportamento durante o transitório, usando a nova lei de adaptação com o sistema em malha fechada, em comparação com o algoritmo MRAC multivariável padrão.

A melhoria do erro de rastreamento durante o transitório é influenciado pela inicialização da matriz de filtros de avanço (*Leads*). Isto é, a correta inicialização de $\hat{e}_0(0) = y(0)$ é um mecanismo de suavização dos vetores de parâmetros $\Theta(t)$. Cabe ressaltar que o vetor de saída da planta é considerado disponível para ser medido, e transmitido para a inicialização do filtro.

Quando a matriz de ganhos de adaptação $\Gamma \rightarrow \infty$ e a constante de tempo dos filtros $\tau \rightarrow 0$, o vetor de erros de rastreamento é aproximado pelo modelo reduzido, o qual tem decaimento exponencial para zero, com $t \rightarrow \infty$, cuja taxa de convergência só depende dos parâmetros de projeto. Conseqüentemente, se ajustarmos Γ suficientemente alto e τ suficientemente pequeno a convergência é exponencial.

Buscando uma curva limitante superior para a trajetória do erro de rastreamento, usando este algoritmo, uma envoltória superior foi deduzida em função parâmetros de projeto. Entretanto, esta envoltória é função das matrizes indeterminadas da equação algébrica de Lyapunov. No caso limite, quando $\Gamma \rightarrow \infty$ e $\tau \rightarrow 0$, a envoltória torna-se uma exponencial, como no modelo reduzido. A presença do termo $\hat{F}(t)$ na expressão da derivada da função de Lyapunov implica num importante resultado, visto que, se $\hat{F}(t) \rightarrow 0$, então $\Omega^T \tilde{\theta}(t) \rightarrow 0$ sem persistência de sinal. Uma ideia aceita na literatura afirma que, para a classe de controles adaptativos, um bom comportamento transitório é obtido quando se tem uma boa estimação dos parâmetros da planta. Isto não se verifica para o algoritmo α -MRAC. Para tratar os erros de modelagem, a lei de adaptação para plantas com $\mu = 0$ foi modificada, tal que o sistema em malha fechada garante a robustez do sistema quando $\mu \neq 0$. O vetor de erros do rastreamento converge para uma região definida por $B^{2, \mu^2 \bar{k}_0}$ quando $t \rightarrow \infty$. Mesmo na presença de dinâmicas não modeladas o comportamento transitório do erro de rastreamento com o novo algoritmo é superior ao do algoritmo MRAC convencional.

8.1 Trabalhos Futuros

Os seguintes tópicos me parecem ser a continuação imediatas deste trabalho:

- Estudar outras estruturas de filtros, em substituição ao filtro de avanço usado, e analisar a estabilidade, o comportamento transitório e a robustez de sistemas

monovariáveis, na presença de dinâmicas não modeladas e perturbações externas. Em seguida, generalizar para o caso MIMO os resultados obtidos no caso SISO.

- Estender os resultados desta tese para plantas multivariáveis de grau relativo $n^* = 2$. Esta tarefa é um tópico de pesquisa em aberto, e pela eficiência do algoritmo na melhoria do comportamento transitório do sistema, demonstrado nesta tese, indica que este é um caminho que deve ser seguido, em busca de aumentar a classe de sistema onde se possa aplicar o algoritmo α -MRAC MIMO. Em vista disso, algumas simulações preliminares foram desenvolvidas, as quais mostraram que o algoritmo mantém sua principal vantagem de contribuir para a melhoria do transitório do sistema, apontando para futuros trabalhos de pesquisas a serem desenvolvidos.

8.2 Contribuições

As contribuições de caráter inédito desta tese podem ser resumidas a:

- Análise da robustez do sistema, para plantas monovariáveis com erros de modelagem aditivas e multiplicativas, usando um novo algoritmo, baseado no algoritmo α -MRAC SISO, apresentada no capítulo 4.
- Análise de robustez do MRAC, usando a fatoração SDU , para plantas multivariáveis com erros de modelagem aditivas e multiplicativas, apresentada no capítulo 5.
- O conteúdo dos capítulos 6 e 7 que são o foco desta tese.

O artigo *Melhoria do comportamento transitório de sistema adaptativos multivariáveis* (Pinto & Costa 2008) foi apresentado no 17th IFAC World Congress, em julho de 2008 na Coreia do Sul. Este artigo, mostra o algoritmo α -MRAC MIMO sem a análise de robustez e sem a dedução da envoltória superior para o erro de rastreamento.

Apêndice A

Demonstrações do capítulo 3

A.1 Equação Ideal ou *Matching Equation*

Para demonstrar a equação ideal consideramos que não há erros de modelagem ($\mu = 0$) e os parâmetros do controlador já convergiram ($\theta(t) \rightarrow \theta^*$). Logo, o erro de rastreamento é zero e a saída da planta rastreou a saída do modelo de referência, isto é, $y(t) = G_0(s)[u](t) = k_p \frac{Z(s)}{P(s)} = \frac{1}{P_m(s)}[r](t) = y_m(t)$. Iniciamos a demonstração substituindo as equações diferenciais da planta (3.2) e do modelo de referência (3.6), no sinal de controle (3.19), tal que

$$\begin{aligned} u(t) &= \theta_1^T(t)w_1(t) + \theta_2^T(t)w_2(t) + \theta_3(t)y(t) + \theta_4(t)r(t) \\ &= \theta_1^T(t)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}[u](t) + \theta_2^T(t)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}k_p\frac{Z(s)}{P(s)}[u](t) + \theta_3(t)k_p\frac{Z(s)}{P(s)}[u](t) + \\ &\quad + \theta_4(t)P_m(s)[y_m](t) \\ &= \theta_1^T(t)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}[u](t) + \theta_2^T(t)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}k_p\frac{Z(s)}{P(s)}[u](t) + \theta_3(t)k_p\frac{Z(s)}{P(s)}[u](t) + \\ &\quad + \theta_4(t)P_m(s)[y](t) \\ &= \theta_1^T(t)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}[u](t) + \theta_2^T(t)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}k_p\frac{Z(s)}{P(s)}[u](t) + \theta_3(t)k_p\frac{Z(s)}{P(s)}[u](t) + \\ &\quad + \theta_4(t)P_m(s)k_p\frac{Z(s)}{P(s)}[u](t), \end{aligned} \tag{A.1}$$

dividindo a expressão por $u(t)$ e considerando $\theta(t) = \theta^*$, teremos

$$\begin{aligned}
1 &= \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} + \theta_2^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} k_p \frac{Z(s)}{P(s)} + \theta_3^* k_p \frac{Z(s)}{P(s)} + \theta_4^* P_m(s) k_p \frac{Z(s)}{P(s)} \\
1 - \theta_4^* P_m(s) k_p \frac{Z(s)}{P(s)} &= \theta_1^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} + \theta_2^{*T} \frac{a(s)}{\Lambda(s)} k_p \frac{Z(s)}{P(s)} + \theta_3^* k_p \frac{Z(s)}{P(s)}. \tag{A.2}
\end{aligned}$$

Operando ambos os lados de (A.2) por $\Lambda(s)P(s)$, obtemos a equação ideal

$$\begin{aligned}
\Lambda(s)P(s) \left(1 - \theta_4^* P_m(s) k_p \frac{Z(s)}{P(s)} \right) &= \theta_1^{*T} a(s)P(s) + \theta_2^{*T} a(s)k_p Z(s) + \theta_3^* k_p Z(s)\Lambda(s) \\
\theta_1^{*T} a(s)P(s) + (\theta_2^{*T} a(s) + \theta_3^* \Lambda(s))k_p Z(s) &= \Lambda(s)(P(s) - k_p \theta_4^* P_m(s)Z(s)), \tag{A.3}
\end{aligned}$$

a qual é básica para o desenvolvimento da estrutura do controle adaptativo.

A equação ideal tem solução única θ^* quando os polinômios $P(s)$ e $Z(s)$ são coprimos.

Apêndice B

Demonstrações do capítulo 4

B.1 Parametrização do Erro de Rastreamento monovariável

Na condição ideal (*matching*) o sinal de saída da planta $y(t)$ rastreia o sinal de saída do modelo de referência $y_m(t)$, e o controlador $u(t)$ é igual ao controlador ideal $u^*(t)$, dado em (3.15). A equação (??) considera $\mu = 0$. Então, para facilitar a demonstração definimos $y_0(t) = G_0(s)[u](t)$, onde $G_0(s)$ é a função de transferência nominal da planta.

Antes de iniciarmos a demonstração da parametrização do erro de rastreamento reescrevemos a planta (4.1) na presença de dinâmicas não modeladas, como

$$\begin{aligned} y(t) &= G_0(s)(1 + \mu\Delta_m(s))[u](t) + \mu\Delta_a(s)[u](t) \\ &= G_0(s)[u](t) + \mu G_0(s)\Delta_m(s)[u](t) + \mu\Delta_a(s)[u](t). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Escrevendo a planta nominal em função de (B.1) teremos,

$$\begin{aligned} y_0(t) &= G_0(s)(1 + \mu\Delta_m(s))[u](t) + \mu\Delta_a(s)[u](t) - \\ &\quad - \mu(G_0(s)\Delta_m(s) + \Delta_a(s))[u](t) \\ &= y(t) - \mu(G_0(s)\Delta_m(s) + \Delta_a(s))[u](t), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

e relembremos o modelo de referência (3.6) reescrevendo-o na seguinte forma,

$$r(t) = P_m(s)[y_m](t). \quad (\text{B.3})$$

Na condição ideal em que $u(t) = u^*(t)$ teremos,

$$\begin{aligned} \theta_1^T(t)w_1(t) + \theta_2^T(t)w_2(t) + \theta_3(t)y(t) + \theta_4(t)r(t) &= \theta_1^{*T}w_1(t) + \theta_2^{*T}w_2(t) + \\ &+ \theta_3^*y_0(t) + \theta_4^*r(t), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

substituindo o sinal filtrado $w_2(t)$, dados em (3.9) resulta,

$$\begin{aligned} \theta_1^T(t)w_1(t) + \theta_2^T(t)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}[y](t) + \theta_3(t)y(t) + \theta_4(t)r(t) &= \theta_1^{*T}w_1(t) + \theta_2^{*T}\frac{a(s)}{\Lambda(s)}[y_0](t) + \\ &+ \theta_3^*y_0(t) + \theta_4^*r(t). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Agora, usando (B.3), (B.2) e manipulando algebricamente (B.5) obtemos,

$$\begin{aligned} \theta_1^T(t)w_1(t) + \theta_2^T(t)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}[y](t) + \theta_3(t)y(t) + \theta_4(t)r(t) - \theta_4^*r(t) + \theta_4^*r(t) &= \\ = \theta_1^{*T}w_1(t) + \theta_2^{*T}\frac{a(s)}{\Lambda(s)}[y](t) - \theta_2^{*T}\frac{a(s)}{\Lambda(s)}\mu G_0(s)\Delta_m(s)u + \mu\Delta_a(s)u](t) + \\ + \theta_3^*[y](t) - \theta_3^*[\mu G_0(s)\Delta_m(s)u + \mu\Delta_a(s)u](t) + \theta_4^*P_m(s)[y](t). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Rearranjando os termos,

$$\begin{aligned} \theta_1^T(t)w_1(t) + \theta_2^T(t)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}[y](t) + \theta_3(t)y(t) + \theta_4(t)r(t) - \theta_4^*r(t) + \theta_4^*r(t) &= \\ = \theta_1^{*T}w_1(t) + \theta_2^{*T}\frac{a(s)}{\Lambda(s)}[y](t) + \theta_3^*[y](t) + \theta_4^*P_m(s)[y](t) - \\ - \left(\theta_2^{*T}\frac{a(s)}{\Lambda(s)} + \theta_3^* + \theta_4^*P_m(s) \right) (\mu G_0(s)\Delta_m(s) + \mu\Delta_a(s))[u](t). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Substituindo (4.8) e $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - \theta^*$ teremos,

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1^T(t)w_1(t) + \tilde{\theta}_2^T(t)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}[y](t) + \tilde{\theta}_3(t)y(t) + \tilde{\theta}_4(t)r(t) + \theta_4^*r(t) &= \\ \theta_4^*P_m(s)[y](t) - (F_2(s) + \theta_4^*P_m(s)) (\mu G_0(s)\Delta_m(s) + \mu\Delta_a(s))[u](t). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Simplificando e usando (B.3) e $\theta_4^* = \frac{1}{k_p}$ resulta,

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^T(t)\omega(t) &= \\
&= -\theta_4^*r(t) + \theta_4^*P_m(s)[y](t) - (F_2(s) + \theta_4^*P_m(s))\mu(G_0(s)\Delta_m(s) + \Delta_a(s))[u](t) \\
&= \theta_4^*P_m(s)[y - y_m](t) - \mu(F_2(s) + \theta_4^*P_m(s))(G_0(s)\Delta_m(s) + \Delta_a(s))[u](t) \\
&= \frac{P_m(s)}{k_p}[y - y_m](t) - \mu\left(F_2(s) + \frac{P_m(s)}{k_p}\right)(G_0(s)\Delta_m(s) + \Delta_a(s))[u](t). \quad (\text{B.9})
\end{aligned}$$

Visto que $e_0(t) = y(t) - y_m(t)$ e introduzindo em (B.9)

$$\begin{aligned}
e_0(t) &= \frac{k_p}{P_m(s)}\tilde{\theta}^T(t)\omega(t) + \mu\left(\frac{k_p}{P_m(s)}F_2(s) + 1\right)(G_0(s)\Delta_m(s) + \Delta_a(s))[u](t) \\
&= \frac{k_p}{P_m(s)}\tilde{\theta}^T(t)\omega(t) + \mu\left(\frac{k_p}{P_m(s)}F_2(s) + 1\right)G_0(s)\Delta_m(s)[u](t) + \\
&\quad + \mu\left(\frac{k_p}{P_m(s)}F_2(s) + 1\right)\Delta_a(s)[u](t) \\
&= \frac{k_p}{P_m(s)}\tilde{\theta}^T(t)\omega(t) + \mu k_p\left(\frac{P_m(s)}{k_p} + F_2(s)\right)G_0(s)\frac{1}{P_m(s)}\Delta_m(s)[u](t) + \\
&\quad + \mu\left(\frac{k_p}{P_m(s)}F_2(s) + 1\right)\Delta_a(s)[u](t). \quad (\text{B.10})
\end{aligned}$$

Agora, é necessário mostrar que

$$\left(F_2(s) + \frac{P_m(s)}{k_p}\right)G_0(s) = (1 - F_1(s)). \quad (\text{B.11})$$

Então, usando novamente a condição ideal $u(t) = u^*(t)$, teremos,

$$\begin{aligned}
u^*(t) &= \theta_1^{*T}w_1(t) + \theta_2^{*T}w_2(t) + \theta_3^*y_0(t) + \theta_4^*r(t) \\
&= \theta_1^{*T}w_1(t) + \theta_2^{*T}\frac{a(s)}{\Lambda(s)}G_0(s)[u^*](t) + \theta_3^*G_0(s)[u^*](t) + \theta_4^*r(t), \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

e substituindo (4.7), (4.8) e (B.3) resulta,

$$\begin{aligned}
u^*(t) &= \theta_1^{*T}\frac{a(s)}{\Lambda(s)}[u^*](t) + \theta_2^{*T}\frac{a(s)}{\Lambda(s)}G_0(s)[u^*](t) + \theta_3^*G_0(s)[u^*](t) + \theta_4^*G_0(s)[u^*](t) \\
&= F_1(s)[u^*](t) + \left(\theta_2^{*T}\frac{a(s)}{\Lambda(s)} + \theta_3^*\right)G_0(s)[u^*](t) + \theta_4^*G_0(s)[u^*](t) \\
&= F_1(s)[u^*](t) + F_2(s)G_0(s)[u^*](t) + \theta_4^*G_0(s)[u^*](t). \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

Usando $\theta_4^* = \frac{1}{k_p}$ e dividindo a expressão por $u^*(t)$ obtemos a relação desejada,

$$\begin{aligned} 1 &= F_1(s) + F_2(s)G_0(s) + \frac{P_m(s)}{k_p}G_0(s) \\ (1 - F_1(s)) &= \left(F_2(s) + \frac{P_m(s)}{k_p} \right) G_0(s). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Por fim, substituindo (B.14) em (B.10), obtemos,

$$\begin{aligned} e_0(t) &= \frac{k_p}{P_m(s)} \tilde{\theta}^T(t) \omega(t) + \mu k_p (1 - F_1(s)) \frac{1}{P_m(s)} \Delta_m(s) [u](t) + \\ &+ \mu \left(\frac{k_p}{P_m(s)} F_2(s) + 1 \right) \Delta_a(s) [u](t) \\ &= \frac{k_p}{P_m(s)} \tilde{\theta}^T(t) \omega(t) + \\ &+ \mu \left(k_p (1 - F_1(s)) \frac{1}{P_m(s)} \Delta_m(s) + \left(\frac{k_p}{P_m(s)} F_2(s) + 1 \right) \Delta_a(s) \right) [u](t) \\ &= \frac{k_p}{P_m(s)} \tilde{\theta}^T(t) \omega(t) + \mu \Delta(s) [u](t). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Resumindo foi possível demonstrar através do desenvolvimento matemático acima,

- a equação parametrizada do erro de rastreamento com dinâmicas não modeladas multiplicativas e aditivas,

$$e_0(t) = \frac{k_p}{P_m(s)} \tilde{\theta}^T(t) \omega(t) + \mu \Delta(s) [u](t), \quad (\text{B.16})$$

- e a função de transferência $\Delta(s)$,

$$\Delta(s) = k_p (1 - F_1(s)) \frac{1}{P_m(s)} \Delta_m(s) + \left(\frac{k_p}{P_m(s)} F_2(s) + 1 \right) \Delta_a(s), \quad (\text{B.17})$$

B.2 Operadores lineares $T_1(s, t)$, $T_0(s, t)$

Considere o sinal $z_0(t)$, definido abaixo,

$$z_0(t) = \frac{1}{s + a_0} [u](t), \quad (\text{B.18})$$

onde $a_0 > 0$ é uma constante arbitrária, e os filtros $K_1(s)$ e $K(s)$

$$sK_1(s) = 1 - K(s), K(s) = \frac{a^{n^*}}{(s+a)^{n^*}}, \quad (\text{B.19})$$

todos fictícios, onde a resposta ao impulso $K_1(t)$ de $K_1(s)$ é

$$K_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[K_1](s) = e^{-at} \sum_{i=1}^{n^*} \frac{a^{n^*-1}}{(n^*-i)!} t^{n^*-1}, \quad (\text{B.20})$$

a qual satisfaz,

$$\|K_1(t)\|_1 = \int_0^\infty |K_1(t)| dt = \frac{n^*}{a}, \quad (\text{B.21})$$

onde $a > a^0$ é uma constante finita que garante a estabilidade do operador $T_0(s, t)$, a ser definido nesta demonstração.

Em seguida, usando o artifício de somar e diminuir o termo $a_0K_1(s)$ em (B.19) obtemos,

$$(s+a_0)K_1(s) - a_0(s)K_1(s) = 1 - K(s), \quad (\text{B.22})$$

e multiplicando ambos os lados de (B.22) por $z_0(t)$ teremos,

$$\begin{aligned} (s+a_0)K_1(s) - a_0(s)K_1(s) &= 1 - K(s) \\ (s+a_0)K_1(s)[z_0](t) - a_0(s)K_1(s)[z_0](t) &= (1 - K(s))[z_0](t) \\ z_0(t) + a_0K_1(s)[z_0](t) - K_1(s)(s+a_0)[z_0](t) &= K(s)[z_0](t), \text{ notag} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} z_0(t) + a_0K_1(s)[z_0](t) - K_1(s)[u](t) &= K(s)[z_0](t), \\ z_0(t) + a_0K_1(s)[z_0](t) - K_1(s)[u](t) &= K(s) \frac{1}{(s+a_0)} [u](t). \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Rescrevendo a planta (4.1) como,

$$\begin{aligned} y(t) &= G(s)[u](t) \\ &= G_0(s)[u](t) + \mu G_0(s)(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t), \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

e rearranjando os termos explicitando o sinal de controle resulta,

$$u(t) = G(s)^{-1}[y](t) - \mu G_0(s)(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t). \quad (\text{B.26})$$

Substituindo (B.26) no lado direito de (B.23) teremos,

$$\begin{aligned}
z_0(t) + a_0 K_1(s)[z_0](t) - K_1(s)[u](t) &= K(s) \frac{1}{(s + a_0)} G(s)^{-1} [y](t) - \\
&- K(s) \frac{1}{(s + a_0)} \mu G_0(s) (\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1} \Delta_a(s)) [u](t) \\
z_0(t) + a_0 K_1(s)[z_0](t) - K_1(s)[u](t) &= K(s) G(s)^{-1} \frac{1}{(s + a_0)} [y](t) - \\
&- K(s) \mu G_0(s) (\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1} \Delta_a(s)) \frac{1}{(s + a_0)} [u](t) \\
z_0(t) + a_0 K_1(s)[z_0](t) - K_1(s)[u](t) &= K(s) G(s)^{-1} \frac{1}{(s + a_0)} [y](t) - \\
&- K(s) \mu G_0(s) (\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1} \Delta_a(s)) [z_0](t). \tag{B.27}
\end{aligned}$$

Introduzindo (3.9), (3.19) em (B.27) obtemos,

$$\begin{aligned}
z_0(t) + a_0 K_1(s)[z_0](t) - K_1(s) \left[\theta_1^T \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [u] + \theta_2^T \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [y] + \theta_3 [y] - \theta_4 r \right] (t) &= \\
= K(s) G(s)^{-1} \frac{1}{(s + a_0)} [y](t) - \mu K(s) (\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1} \Delta_a(s)) [z_0](t), \tag{B.28}
\end{aligned}$$

e substituindo (B.18) em (B.28),

$$\begin{aligned}
z_0(t) + a_0 K_1(s)[z_0](t) - K_1(s) \left[\theta_1^T \frac{a(s)}{\Lambda(s)} (s + a_0) [z_0] \right] (t) &+ \\
+ \mu K(s) (\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1} \Delta_a(s)) [z_0](t) &= K_1(s) \left[\theta_2^T \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [y] \right] (t) + \\
+ K_1(s) [\theta_3 y](t) + K_1(s) [\theta_4 r](t) + K(s) G(s)^{-1} \frac{1}{(s + a_0)} [y](t). \tag{B.29}
\end{aligned}$$

Definindo,

$$K_1(s) \theta_1^T(\cdot) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} (s + a_0) [z_0](t) = K_1(s) \left[\theta_1^T \frac{a(s)}{\Lambda(s)} (s + a_0) [z_0] \right] (t), \tag{B.30}$$

$$K_1(s) \theta_2^T(\cdot) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [y](t) = K_1(s) \left[\theta_2^T \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [y] \right] (t), \tag{B.31}$$

$$K_1(s) \theta_3(\cdot) [y](t) = K_1(s) [\theta_3 y](t). \tag{B.32}$$

Substituindo as definições em (B.29) teremos,

$$\begin{aligned}
& z_0(t) + a_0 K_1(s) [z_0](t) - K_1(s) \theta_1^T(\cdot) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} (s + a_0) [z_0](t) + \\
& + \mu K(s) (\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1} \Delta_a(s)) [z_0](t) = K_1(s) \theta_2^T(\cdot) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} [y](t) + \\
& + K_1(s) \theta_3(\cdot) [y](t) + K_1(s) [\theta_4 r](t) + K(s) G(s)^{-1} \frac{1}{(s + a_0)} [y](t), \quad (\text{B.33})
\end{aligned}$$

e rearranjando os termos obtemos,

$$\begin{aligned}
& \left(1 + K_1(s) \left(a_0 - \theta_1^T(\cdot) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} (s + a_0) \right) + \mu K(s) (\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1} \Delta_a(s)) \right) [z_0](t) = \\
& = \left(K(s) G(s)^{-1} \frac{1}{(s + a_0)} + K_1(s) \left(\theta_2^T(\cdot) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} + \theta_3(\cdot) \right) \right) [y](t) + K_1(s) [\theta_4 r](t). \quad (\text{B.34})
\end{aligned}$$

De (B.34) extraímos o termo $T_0(s, t)$ o qual é definido como:

$$T_0(s, \cdot) = \left(1 + K_1(s) \left(a_0 - \theta_1^T(\cdot) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} (s + a_0) \right) + \mu K(s) (\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1} \Delta_a(s)) \right)^{-1}. \quad (\text{B.35})$$

Como dito acima, existe um $a_0 > 0$ tal que para $a > a_0$ a existência de $\mu^* > 0$ garante que para algum $\mu \in [0, \mu^*)$, o operador $T_0(s, t)$ é estável e próprio. Substituindo $T_0(s, t)$ em (B.34), teremos

$$\begin{aligned}
& z_0(t) = T_0(s, \cdot) \left(K(s) G(s)^{-1} \frac{1}{(s + a_0)} + K_1(s) \left(\theta_2^T(\cdot) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} + \theta_3(\cdot) \right) \right) [y](t) + \\
& + T_0(s, \cdot) K_1(s) [\theta_4 r](t). \quad (\text{B.36})
\end{aligned}$$

De (B.36) podemos definir,

$$T_1(s, \cdot) = T_0(s, \cdot) \left(K(s) G(s)^{-1} \frac{1}{(s + a_0)} + K_1(s) \left(\theta_2^T(\cdot) \frac{a(s)}{\Lambda(s)} + \theta_3(\cdot) \right) \right), \quad (\text{B.37})$$

$$b_3(t) = T_0(s, \cdot) K_1(s) [\theta_4 r](t). \quad (\text{B.38})$$

onde $T_1(s, t)$ é estritamente estável e própria, assim como, $T_0(s, t) K_1(s)$ e

$T_0(s, t)K(s)G(s)^{-1}\frac{1}{(s+a_0)}$. Finalmente usando estas definições em (B.36) obtemos,

$$z_0(t) = T_1(s, \cdot)[y](t) + b_3(t). \quad (\text{B.39})$$

Portanto, demonstramos os operadores $T_0(s, t)$ em (B.35) e $T_1(s, t)$ em (B.37) e o sinal estável $b_3(t)$ em (B.38).

B.3 Constante μ^*

Conforme dito no teorema 4.1 existe um $\mu^* > 0$ tal que para $\mu \in [0, \mu^*)$ todos os sinais do sistema em malha fechada são limitados e o erro de rastreamento $e_0(t) \in B^{2k_0\mu^2}$, para $k_0 > 0$. Além disso, pela análise de estabilidade o limite $\mu^* = \sqrt{\frac{|K_p\sigma_{01}k|}{k_3^2\eta_1^2}}$ é determinado, tal que define a constante $\theta_0 > 0$ que assegura $\dot{V} \leq 0$ negativa semidefinida sempre que $\|\theta(t)\| > \theta_0$. A seguir procedemos a demonstração de μ^* .

De (4.31) escrita abaixo por conveniência,

$$\begin{aligned} \dot{V}(e_p) = & -e_\epsilon^T(t)\mathcal{Q}e_\epsilon(t) - k\epsilon_f^2(t)m^2 + 2\mu^2\frac{k_3^2}{k} + 2\mu^2\frac{k_3^2}{k}\eta_1^2(t)\|\theta(t)\|^2 - \\ & - 2|k_p|\sigma_1(t)\tilde{\theta}^T(t)\theta(t). \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

escolhemos $\mu^* = \sqrt{\frac{|K_p\sigma_{01}k|}{k_3^2\eta_1^2}}$ e substituindo $\mu = \sqrt{\phi}\mu^* = \sqrt{\frac{\phi|K_p\sigma_{01}k|}{k_3^2\eta_1^2}}$, em (B.40), onde $0 \leq \sqrt{\phi} < 1$ resulta na expressão,

$$\dot{V}(e_p) = -e_\epsilon^T(t)\mathcal{Q}e_\epsilon(t) - k\epsilon_f^2(t)m^2 + \frac{2\phi|k_p|\sigma_1}{\eta_1^2} + 2\phi|k_p|\sigma_1\|\theta(t)\|^2 - 2|k_p|\sigma_1(t)\tilde{\theta}^T(t)\theta(t). \quad (\text{B.41})$$

Excluindo os termos negativos definidos restam,

$$\frac{2\phi|k_p|\sigma_1}{\eta_1^2} + 2\phi|k_p|\sigma_1\|\theta(t)\|^2 - 2|k_p|\sigma_1(t)\tilde{\theta}^T(t)\theta(t) \leq 0. \quad (\text{B.42})$$

os quais devem ser negativos. Simplificando teremos,

$$\begin{aligned}
\frac{\phi}{\eta_1^2} + \phi \|\theta(t)\|^2 - \tilde{\theta}^T(t)\theta(t) &\leq 0, \\
\frac{\phi}{\eta_1^2} + \phi \|\theta(t)\|^2 - (\theta(t) - \theta(t)^*)^T \theta(t) &\leq 0, \\
\frac{\phi}{\eta_1^2} + \phi \|\theta(t)\|^2 - \theta(t)^T \theta(t) + \theta(t)^{*T} \theta(t) &\leq 0, \\
\frac{\phi}{\eta_1^2} + \phi \|\theta(t)\|^2 - \|\theta(t)\|^2 + \theta(t)^{*T} \theta(t) &\leq 0, \\
\frac{\phi}{\eta_1^2} + (\phi - 1) \|\theta(t)\|^2 + \theta(t)^{*T} \theta(t) &\leq 0, \\
\frac{\phi}{\eta_1^2} - \|\phi - 1\| \|\theta(t)\|^2 + \theta(t)^{*T} \theta(t) &\leq 0.
\end{aligned} \tag{B.43}$$

De (B.44) obtemos a seguinte relação para $\|\theta(t)\|^2$,

$$\|\theta(t)\|^2 \geq \frac{\phi + \theta(t)^{*T} \theta(t) \bar{\eta}_1}{\bar{\eta}_1 \|\phi - 1\|}. \tag{B.44}$$

Portanto, $\theta_0 = \sqrt{\frac{\phi + \theta(t)^{*T} \theta(t) \bar{\eta}_1}{\bar{\eta}_1 \|\phi - 1\|}}$ e $\|\theta(t)\| > \theta_0$ para $\mu \in \left[0, \sqrt{\frac{|K_p \sigma_{01} k}{k_3^2 \bar{\eta}_1^2}}\right]$.

B.4 Limite superior para $\bar{\eta}(t)$ - caso monovariável

Dado que, $\bar{\eta}(t) = k_p \bar{\Delta}(s)[u]$ substituindo $\bar{\Delta}(s)$ teremos,

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}(t) &= k_p \bar{\Delta}(s)[u](t), \\
&= k_p (1 - F_1(s)) (\Delta_m(s) + G_0^{-1} \Delta_a(s)) [u](t) \\
&= k_p (1 - F_1(s)) \Delta_m(s) [u](t) + k_p (1 - F_1(s)) G_0^{-1} \Delta_a(s) [u](t) \\
&= k_p \frac{1}{(s+a)} (1 - F_1(s)) (s+a) \Delta_m(s) [u](t) + \\
&+ k_p \frac{1}{(s+a)} (1 - F_1(s)) G_0^{-1} (s+a) \Delta_a(s) [u](t) \\
&= g_1(s) (s+a) \Delta_m(s) [u](t) + g_2(s) (s+a) \Delta_a(s) [u](t),
\end{aligned} \tag{B.45}$$

onde,

$$g_1(s) = k_p \frac{1}{(s+a)} (1 - F_1(s)),$$

$$g_2(s) = k_p \frac{1}{(s+a)} (1 - F_1(s)) G_0^{-1}.$$

Considerando $d_m = \lim_{s \rightarrow \infty} s \Delta_m(s)$, $d_a = \lim_{s \rightarrow \infty} s \Delta_a(s)$ e as hipóteses **(A6)**-**(A8)** reescrevemos (B.45) como,

$$\bar{\eta}(t) = g_1(s)((s+a)\Delta_m(s) + d_m - d_m)[u](t) + g_2(s)((s+a)\Delta_a(s) + d_a - d_a)[u](t) \quad (\text{B.46})$$

$$\text{notag} \quad (\text{B.47})$$

$$= g_1(s)((s+a)\Delta_m(s) - d_m)(s+q_\delta) \frac{1}{(s+q_\delta)} [u](t) + g_1(s)d_m[u](t) +$$

$$+ g_2(s)((s+a)\Delta_a(s) - d_a)(s+q_\delta) \frac{1}{(s+q_\delta)} [u](t) + g_2(s)d_a[u](t). \quad (\text{B.48})$$

Definindo, $\bar{d}_m = \lim_{s \rightarrow \infty} g_1(s)d_m$ e $\bar{d}_a = \lim_{s \rightarrow \infty} g_2(s)d_a$ e substituindo em (B.46) teremos,

$$\bar{\eta}(t) = g_1(s)((s+a)\Delta_m(s) - d_m)(s+q_\delta) \frac{1}{(s+q_\delta)} [u](t) + (g_1(s)d_m - \bar{d}_m + \bar{d}_m)[u](t) +$$

$$+ g_2(s)((s+a)\Delta_a(s) - d_a)(s+q_\delta) \frac{1}{(s+q_\delta)} [u](t) + (g_2(s)d_a - \bar{d}_a + \bar{d}_a)[u](t)$$

$$= g_1(s)((s+a)\Delta_m(s) - d_m)(s+q_\delta) \frac{1}{(s+q_\delta)} [u](t) + (g_1(s)d_m - \bar{d}_m)[u](t) + \bar{d}_m u(t) +$$

$$+ g_2(s)((s+a)\Delta_a(s) - d_a)(s+q_\delta) \frac{1}{(s+q_\delta)} [u](t) + (g_2(s)d_a - \bar{d}_a)[u](t) + \bar{d}_a u(t). \quad (\text{B.49})$$

Rearranjando os termos teremos,

$$\bar{\eta}(t) = (g_1(s)((s+a)\Delta_m(s) - d_m) + g_2(s)((s+a)\Delta_a(s) - d_a)) \frac{(s+q_\delta)}{(s+q_\delta)} [u](t) +$$

$$+ (g_1(s)d_m - \bar{d}_m + g_2(s)d_a - \bar{d}_a)(s+q_\delta) \frac{1}{(s+q_\delta)} [u](t) + (\bar{d}_m + \bar{d}_a)u(t). \quad (\text{B.50})$$

Definindo os seguintes termos

$$\begin{aligned}
\delta_{0m1}(s) &= g_1(s) ((s+a)\Delta_m(s) - d_m)(s+q_\delta), \\
\delta_{0a1}(s) &= g_2(s)((s+a)\Delta_a(s) - d_a)(s+q_\delta), \\
\delta_{0m2}(s) &= (g_1(s)d_m - \bar{d}_m)(s+q_\delta), \\
\delta_{0a2}(s) &= (g_2(s)d_a - \bar{d}_a)(s+q_\delta), \\
\delta_0(s) &= \delta_{0m1}(s) + \delta_{0a1}(s) + \delta_{0m2}(s) + \delta_{0a2}(s),
\end{aligned} \tag{B.51}$$

e substituindo em (B.50) resulta,

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}(t) &= \delta_{0m1}(s) \frac{1}{(s+q_\delta)} [u](t) + \delta_{0a1}(s) \frac{1}{(s+q_\delta)} [u](t) + \delta_{0m2}(s) \frac{1}{(s+q_\delta)} [u](t) + \\
&+ \delta_{0a2}(s) \frac{1}{(s+q_\delta)} [u](t) + (\bar{d}_m + \bar{d}_a)u(t) \\
&= \delta_0(s) \frac{1}{(s+q_\delta)} [u](t) + (\bar{d}_m + \bar{d}_a)u(t).
\end{aligned} \tag{B.52}$$

Usando as hipóteses (A6)-(A8) podemos afirmar que,

$$\begin{aligned}
\|\delta_{0m1}(s - q_\delta)\|_1 &\in \mathcal{L}_1, \\
\|\delta_{0a1}(s - q_\delta)\|_1 &\in \mathcal{L}_1, \\
\|\delta_{0m2}(s - q_\delta)\|_1 &\in \mathcal{L}_1, \\
\|\delta_{0a2}(s - q_\delta)\|_1 &\in \mathcal{L}_1,
\end{aligned} \tag{B.53}$$

logo $\|\delta_0(s - q_\delta)\|_1 \in \mathcal{L}_1$.

Então, $\bar{\eta}(t)$ pode ser colocado na forma final adequada para o cálculo do limite superior desejado,

$$\bar{\eta}(t) = \bar{\eta}_0(t) + \bar{\eta}_1 u(t), \tag{B.54}$$

onde,

$$\bar{\eta}_0(t) = \delta_0(s) \frac{1}{(s+q_\delta)} [u](t) \quad e \quad \bar{\eta}_1 = \bar{d}_m + \bar{d}_a. \tag{B.55}$$

Agora, aplicando o lema (1.11) em $\bar{\eta}_0(t)$ resulta,

$$|\bar{\eta}_0(t)| \leq \|\delta_0(\cdot)\|_1 \frac{1}{(s+q_\delta)} [|u|](t). \tag{B.56}$$

Em seguida, usando os resultados do apêndice (B.5) obtemos,

$$|\bar{\eta}_0(t)| \leq \|\delta_0(t)\|_1 c_0 m(t), \quad (\text{B.57})$$

o que permite determinar a razão,

$$\frac{|\bar{\eta}_0(t)|}{m(t)} \leq \|\delta_0(t)\|_1 c_0 \leq k_1, \quad (\text{B.58})$$

limitada e pertencendo ao espaço de sinais \mathcal{L}_1 , com $k_1 > 0$.

Agora calculando a norma $\|\cdot\|$ em ambos os lados de (B.56) e dividindo pelo sinal normalizante $m(t)$, obtemos,

$$\frac{\|\bar{\eta}(t)\|}{m(t)} = \frac{\|\bar{\eta}_0(t)\|}{m(t)} + \bar{\eta}_1 \frac{\|u(t)\|}{m(t)}. \quad (\text{B.59})$$

a seguir substituindo o limite dado em (B.58) teremos,

$$\frac{\|\bar{\eta}(t)\|}{m(t)} \leq k_1 + \bar{\eta}_1 \frac{\|u(t)\|}{m(t)}. \quad (\text{B.60})$$

Usando a lei de controle $u(t) = \theta(t)^T \zeta(t)$ e substituindo em (B.59)

$$\frac{\|\bar{\eta}(t)\|}{m(t)} \leq k_1 + \bar{\eta}_1 \frac{\|\theta(t)^T \omega(t)\|}{m(t)} = k_1 + \bar{\eta}_1 \frac{\|\omega^T(t)\|}{m(t)} \|\theta(t)\|. \quad (\text{B.61})$$

Do apêndice (B.5) foi concluído que $\frac{\Delta(s)\|u\|(t)}{m(t)}$, $\frac{|w_1(t)|}{m(t)}$, $\frac{|w_2(t)|}{m(t)}$, $\frac{|y(t)|}{m(t)}$ e $\frac{|w(t)|}{m(t)}$ são todos limitados. Portanto, $\frac{\|\zeta^T\|}{m(t)}$ e $\frac{\eta(t)}{m(t)}$ são limitados.

Considerando $\frac{\|w^T\|}{m(t)}$ limitado e menor que uma constante $k_2 > 0$, substituímos em (B.61), tal que,

$$\frac{\|\bar{\eta}(t)\|}{m(t)} \leq k_1 + k_2 \bar{\eta}_1 \|\theta(t)\|. \quad (\text{B.62})$$

mais precisamente,

$$\frac{\|\bar{\eta}(t)\|}{m(t)} \leq k_3 + k_3 \|\Theta(t)\|. \quad (\text{B.63})$$

onde $k_3 > \max\{k_1, k_2\} > 0$.

De (4.29) o termo positivo corresponde a

$$\frac{\mu^2 \bar{\eta}^2}{\kappa m^2} = \frac{\mu^2}{\kappa} \frac{\|\bar{\eta}\|^2}{m^2}, \quad (\text{B.64})$$

logo é necessário elevar ao quadrado ambos os lados de (B.61) para obter o limite superior do termo quadrático em $\bar{\eta}(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{\|\bar{\eta}(t)\|^2}{m(t)^2} &\leq (k_3 + k_3 \bar{\eta}_1 \|\theta(t)\|)^2 \\ &\leq k_3^2 + 2k_3^2 \bar{\eta}_1 \|\theta(t)\| + k_3^2 \bar{\eta}_1^2 \|\theta(t)\|^2 \\ &\leq 2k_3^2 + 2k_3^2 \bar{\eta}_1^2 \|\theta(t)\|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

B.5 Estabilidade dos sinais do sistema com o sinal normalizante

O sinal normalizante é definido pela seguinte equação diferencial (4.10), dada em (Tao 2003, p.237),

$$m(t) = m(0)e^{-\delta_0 t} + \frac{\delta_1}{(s + q_\delta)}[|u| + |y|](t) + \frac{\delta_2}{\delta_0} (1 - e^{-\delta_0 t}), \quad (\text{B.66})$$

para $m(0) > 0$. De (B.66) mostramos que,

$$m(t) \geq \frac{\delta_1}{(s + q_\delta)}[|u| + |y|](t), \quad (\text{B.67})$$

Agora, o sinal correspondente às dinâmicas não modeladas foi definido como,

$$\eta(t) = \Delta(s)[u](t). \quad (\text{B.68})$$

Substituindo acima (4.14), teremos,

$$\begin{aligned}
\Delta(s)[u](t) &= \frac{k_p}{P_m(s)} \left((1 - F_1(s))\Delta_m(s) + \left(F_2(s) + \frac{P_m(s)}{k_p} \right) \Delta_a(s) \right), \\
&= k_p W_m(s) (1 - F_1(s)) \Delta_m(s)[u](t) + (1 + k_p W_m(s) F_2(s)) \Delta_a(s)[u](t), \\
&= k_p W_m(s) (1 - F_1(s)) \Delta_m(s) (s + q) \frac{1}{(s + q)} [u](t) + (1 + k_p W_m(s) F_2(s)) \Delta_a(s) (s + q) \frac{1}{(s + q)} [u](t).
\end{aligned} \tag{B.69}$$

Definindo,

$$H_m(s) = k_p W_m(s) (1 - F_1(s)) \Delta_m(s) (s + q), \tag{B.70}$$

$$H_a(s) = (1 + k_p W_m(s) F_2(s)) \Delta_a(s) (s + q). \tag{B.71}$$

$$\tag{B.72}$$

e substituindo, em (B.73) teremos,

$$\Delta(s)[u](t) = H_m(s) \frac{1}{(s + q)} [u](t) + H_a(s) \frac{1}{(s + q)} [u](t). \tag{B.73}$$

Aplicando (1.11) em (B.73) resulta,

$$\Delta(s)[|u|](t) \leq \|h_m(t)\|_1 \frac{1}{(s + q)} [|u|](t) + \|h_a(t)\|_1 \frac{1}{(s + q)} [|u|](t). \tag{B.74}$$

Denominando, $\|h_m(t)\|_1 = C_m$ e $\|h_a(t)\|_1 = C_a$ e substituindo em (B.74)

$$\Delta(s)[|u|](t) \leq (C_m + C_a) \frac{1}{(s + q)} [|u|](t). \tag{B.75}$$

Agora, usando a inequação do sinal normalizante em (B.67),

$$\frac{1}{(s + q)} [|u|](t) \leq \frac{1}{(s + q_\delta)} [|u|](t) \leq C_0 m(t), \tag{B.76}$$

para $q_\delta < q$.

Substituindo em (B.75) e dividindo pelo sinal normalizante teremos,

$$\frac{\Delta(s)[|u|](t)}{m(t)} \leq C_0. \tag{B.77}$$

Então,

$$\frac{\Delta(s)[|u|](t)}{m(t)} \in \mathcal{L}_\infty. \quad (\text{B.78})$$

A seguir usando a equação do erro com as dinâmicas não modeladas teremos,

$$\begin{aligned} (1 + \theta_1^* F(s))[u](t) - (\theta_2^* F(s) + \theta_3^*)[y](t) &= \mu \Delta(s)[u](t) + k_p^{-1} W_m^{-1}(s)[y](t), \\ y(t) &= k_p W_m(s)(1 + F_1(s))[u](t) - k_p W_m(s) F_2(s)[y](t) + \mu \Delta(s)[u](t). \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

Para $\Delta_m(s)$ e $\Delta_a(s)$, satisfazendo as hipóteses $H6$ a $H10$, e sabendo que $\frac{\Delta(s)[|u|](t)}{m(t)} \leq C_0$, retornamos a (B.79) tal que,

$$y(t) = k_p W_m(s)(1 + F_1(s))(s + q) \frac{1}{(s + q)} [u](t) - k_p W_m(s) F_2(s) \frac{(s + q)}{(s + q)} [y](t) + \mu \Delta(s)[u](t), \quad (\text{B.80})$$

Denominando,

$$\begin{aligned} H_1(s) &= k_p W_m(s)(1 - F_1(s))(s + q), \\ H_2(s) &= (1 + k_p W_m(s) F_2(s))(s + q), \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

$$(\text{B.82})$$

e substituindo, em (B.80) teremos,

$$y(t) = H_1(s) \frac{1}{(s + q)} [u](t) - H_2(s) \frac{1}{(s + q)} [y](t) + \mu \Delta(s)[u](t). \quad (\text{B.83})$$

Aplicando (1.11) em (B.83) resulta,

$$|y(t)| \leq \|h_1(t)\|_1 \frac{1}{(s + q)} [|u|](t) + \|h_2(t)\|_1 \frac{1}{(s + q)} [|y|](t) + \mu \Delta(s)[u](t). \quad (\text{B.84})$$

Denominando, $\|h_1(t)\|_1 = C_1$ e $\|h_2(t)\|_1 = C_2$ e substituindo em (B.74)

$$|y(t)| \leq C_1 \frac{1}{(s + q)} [|u|](t) - C_2 \frac{1}{(s + q)} [|y|](t) + \mu \Delta(s)[u](t). \quad (\text{B.85})$$

Agora, usando a inequação do sinal normalizante em (B.67),

$$|y(t)| \leq C_0 m(t) - C_0 m(t) + \mu \Delta(s)[|u|](t). \leq C_0 m(t) + \mu \Delta(s)[u](t), \quad (\text{B.86})$$

Dividindo por $m(t)$ ambos os lados de (B.86),

$$\frac{|y(t)|}{m(t)} \leq C_0 + \mu \frac{\Delta(s)[|u|](t)}{m(t)}. \quad (\text{B.87})$$

Então,

$$\frac{|y|(t)}{m(t)} \in \mathcal{L}_\infty. \quad (\text{B.88})$$

Consequentemente,

$$\frac{w_2(t)}{m(t)} \in \mathcal{L}_\infty. \quad (\text{B.89})$$

Em seguida, do apêndice (B.2) reescrevendo (B.39) abaixo,

$$z_0(t) = T_1(s, \cdot)[y](t) + b_3(t), \quad (\text{B.90})$$

e substituindo $z_0(t)$ e $b_3(t)$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s + a_0)}[u](t) &= T_1(s, t)[y](t) + T_0(s, t)K_1(s)[\theta_4^*r](t)(t) \\ u(t) &\leq T_1(s, t)(s + a_0)[y](t) + T_0(s, t)K_1(s)(s + a_0)\theta_4^*[r](t)(t). \end{aligned} \quad (\text{B.91})$$

Operando $\frac{a(s)}{\Lambda(s)}$ em ambos os lados de (B.91),

$$\frac{a(s)}{\Lambda(s)}u(t) \leq T_1(s, t)(s + a_0)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}[y](t) + T_0(s, t)K_1(s)(s + a_0)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}\theta_4^*[r](t)(t). \quad (\text{B.92})$$

Denominando,,

$$H(s) = T_1(s, t)(s + a_0)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}, \quad (\text{B.93})$$

$$b(s) = T_0(s, t)K_1(s)(s + a_0)\frac{a(s)}{\Lambda(s)}\theta_4^*, \quad (\text{B.94})$$

e substituindo em (B.92),

$$\begin{aligned} w_1(t) &\leq H(s)[y](t) + b(s)[r](t) \\ &\leq H(s)(s + q)\frac{1}{(s + q)}[y](t) + b(s)(s + q)\frac{1}{(s + q)}[r](t). \end{aligned} \quad (\text{B.95})$$

Definindo,

$$\bar{H}(s) = H(s)(s + q), \quad (\text{B.96})$$

$$\bar{b}(s) = b(s)(s + q), \quad (\text{B.97})$$

e substituindo em (B.95),

$$w_1(t) \leq \bar{H}(s) \frac{1}{(s + q)} [y](t) + \bar{b}(s) \frac{1}{(s + q)} [r](t).$$

Aplicando (1.11) em (B.98) resulta,

$$|w_1(t)| \leq \|\bar{h}_1(t)\|_1 \frac{1}{(s + q)} [|y|](t) + \|\bar{b}(t)\|_1 \frac{1}{(s + q)} [|r|](t). \quad (\text{B.98})$$

Denominando, $\|\bar{h}(t)\|_1 = C_h$ e $\|\bar{b}(t)\|_1 = C_b$ e substituindo em (B.98)

$$\begin{aligned} |w_1(t)| &\leq C_h \frac{1}{(s + q)} [|y|](t) + C_b \frac{1}{(s + q)} [|r|](t) \\ &\leq C_h \frac{1}{(s + q)} [|y|](t) + C_b \bar{r}(t). \end{aligned} \quad (\text{B.99})$$

Como $r(t)$ é limitado então $\bar{r}(t)$ é limitado o que implica $C_b \bar{r}(t) \leq b_c$.

Agora, usando a inequação do sinal normalizante em (B.99),

$$|w_1(t)| \leq C_h \frac{1}{(s + q)} [|y|](t) + b_c \leq C_0 m(t). \quad (\text{B.100})$$

Dividindo por $m(t)$ ambos os lados de (B.100),

$$\frac{|w_1(t)|}{m(t)} \leq C_0. \quad (\text{B.101})$$

Então,

$$\frac{|w_1(t)|}{m(t)} \in \mathcal{L}_\infty. \quad (\text{B.102})$$

Portanto, concluímos que $\frac{\Delta(s)[|u|](t)}{m(t)}$, $\frac{|w_1(t)|}{m(t)}$, $\frac{|w_2(t)|}{m(t)}$ e $\frac{|y(t)|}{m(t)}$ são todos limitados e para $r(t)$ limitado implica $\frac{|w(t)|}{m(t)}$.

Apêndice C

Demonstrações para Estabilidade-multivariável

C.1 Operadores lineares $\bar{H}_1(s)$ e $\bar{H}_2(s)$ - multivariável

Para provar a robustez do esquema de controle adaptativo em malha fechada, é necessário relacionar o vetor de controle $u(t)$ com o vetor de saída da planta $y(t)$ e o vetor de entrada externa $r(t)$. No desenvolvimento a ser apresentado, mostramos primeiro que a saída dos filtros $w_1(t)$ e $w_2(t)$ são funções de $y(t)$, $r(t)$ e $\Omega(t)$.

Em seguida, expressamos a matriz de regressores $\Omega(t)$, dada em (5.24), na forma vetorial $\Omega = (\Omega_1^T \ \Omega_2^T \ \dots \ \Omega_m^T)^T$, e o vetor de erros paramétricos, $\Theta(t)$, na forma matricial, tal que o vetor de controle $u(t)$, dado em (??), seja reescrito como

$$u(t) = \begin{bmatrix} \Theta_1^T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Theta_2^T & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \Theta_m^T \end{bmatrix} \Omega(t) = \Theta(t)^T \Omega(t). \quad (\text{C.1})$$

Para realizar este desenvolvimento introduzimos o filtro fictício $H_i(s)$ e $K_i(s)$, para $i = 1, 2$, ((Tao 2003) pg.405) definido por,

$$sH_i(s) = 1 - K_i(s), \quad K_i(s) = \frac{a_i^{dm}}{(s + a_i)^{dm}}, \quad (\text{C.2})$$

onde dm é o grau de $W_M(s)^{-1}$, neste caso igual a n^* , e $a_i > 0$ é escolhido suficientemente

grande mas finito.

Chamando $h_i(t)$ a resposta ao impulso da função de transferência $H_i(s)$, o operador norma \mathcal{L}_1 de $h_i(t)$ é

$$\| h_i(s) \|_1 = \frac{n^*}{a_i}. \quad (\text{C.3})$$

Para $i = 1$, multiplicando ambos os lados do filtro (C.2) pelo vetor $w_1(t)$, teremos,

$$\begin{aligned} sH_1(s)[w_1](t) &= (1 - K_1(s))[w_1](t), \\ sH_1(s)[w_1](t) &= w_1(t) - K_1(s)[w_1](t), \\ K_1(s)[w_1](t) &= w_1(t) - sH_1(s)[w_1](t), \\ w_1(t) &= K_1^{-1}(s)[w_1 - sH_1(s)[w_1]](t), \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

substituindo (5.3), onde $F(s) = \frac{A(s)}{\Lambda(s)}$, no lado esquerdo de (C.24) obtemos,

$$F(s)[u](t) = K_1^{-1}(s)[w_1 - sH_1(s)[w_1]](t). \quad (\text{C.5})$$

Agora, reescrevendo (2.1) como,

$$\begin{aligned} y(s) &= G_0(s)[u](t) + \mu G_0(s)(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t), \\ G_0(s)^{-1}[y](t) &= u(t) + \mu(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t), \\ u(t) &= G_0(s)^{-1}[y](t) - \mu(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

e colocando (C.6) em (C.5) teremos,

$$\begin{aligned} F(s)G_0(s)^{-1}[y](t) &= K_1^{-1}(s)[w_1 - sH_1(s)[w_1]](t) + \\ &+ F(s)\mu(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Então, multiplicando ambos os lados de (C.7) pelo filtro $K_1(s)$

$$\begin{aligned} K_1(s)F(s)G_0(s)^{-1}[y](t) &= w_1(t) - sH_1(s)[w_1](t) + \\ &+ K_1(s)F(s)\mu(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= K_1(s)F(s)G_0(s)^{-1}[y](t) + H_1(s)[\dot{w}_1](t) - \\
&\quad - \mu K_1(s)F(s)(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t).
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Considere que $w_1(t) = F(s)[u](t)$ tenha um realização controlável (A_{w_1}, B_{w_1}) , isto é,

$$s[w_1](t) = A_{w_1}w_1(t) + B_{w_1}u(t), \tag{C.9}$$

onde $A_{w_1} \in \mathfrak{R}^{m(\nu-1) \times m(\nu-1)}$ é estável e $B_{w_1} \in \mathfrak{R}^{m(\nu-1) \times m}$. Substituindo (C.9) e (C.1) em (C.8),

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= K_1(s)F(s)G_0(s)^{-1}[y](t) + H_1(s)[A_{w_1}w_1](t) + H_1(s)B_{w_1}[\Theta^T\Omega](t) - \\
&\quad - \mu K_1(s)F(s)(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t),
\end{aligned} \tag{C.10}$$

e agrupando os termos $w_1(t)$ no lado direito de (C.10) teremos,

$$\begin{aligned}
(I_{m(\nu-1) \times m(\nu-1)} - H_1(s)A_{w_1})[w_1](t) &= K_1(s)F(s)G_0(s)^{-1}[y](t) + \\
+ H_1(s)B_{w_1}[\Theta^T\Omega](t) - \mu K_1(s)F(s)(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t).
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Definindo $T_1(s, t) = (I_{m(\nu-1) \times m(\nu-1)} - H_1(s)A_{w_1})^{-1}$ e substituindo em (C.11) obtemos,

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= T_1(s, \cdot)K_1(s)F(s)G_0(s)^{-1}[y](t) + T_1(s, \cdot)H_1(s)B_{w_1}[\Theta^T\Omega](t) - \\
&\quad - \mu T_1(s, \cdot)K_1(s)F(s)(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t).
\end{aligned} \tag{C.12}$$

De (C.12) segue,

$$w_1(t) = G_1(s, \cdot)[y](t) + G_2(s, \cdot)[\Omega](t) - \mu G_{\delta_1}(s, \cdot)[u](t), \tag{C.13}$$

onde,

$$G_1(s, t) = T_1(s, t)K_1(s)G_0(s)^{-1}, \tag{C.14}$$

$$G_2(s, t) = T_1(s, t)H_1(s)B_{w_1}\Theta^T(t), \tag{C.15}$$

$$G_{\delta_1}(s, t) = T_1(s, t)K_1(s)F(s)(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s)). \tag{C.16}$$

De (C.13) podemos expandir o termo $G_2(s, \cdot)[\Omega](t)$ em função de $w_1(t)$, $w_2(t)$, $y(t)$, $r(t)$ e $u(t)$ como segue,

$$G_2(s, \cdot)[\Omega](t) = T_1(s, \cdot)H_1(s)B_{w1}\Theta^T(\cdot)[\Omega](t), \quad (\text{C.17})$$

definindo, $\bar{G}_2(s, t) = T_1(s, t)H_1(s)B_{w1}$, efetuando (C.1) e substituindo em (C.23) obtemos,

$$\begin{aligned} G_2(s, \cdot)[\Omega](t) &= \bar{G}_2(s, \cdot) [\Theta_1^T \Omega_1, \Theta_2^T \Omega_2, \dots, \Theta_m^T \Omega_m]^T(t) \\ &= \bar{G}_2(s, \cdot) \begin{bmatrix} \Theta_{11}^T w_1 + \Theta_{12}^T w_2 + \Theta_{13}^T y + \Theta_{14}^T r + \Theta_{15} u_2 + \\ \quad + \Theta_{16} u_3 + \dots + \Theta_{1(4+m-1)} u_m \\ \Theta_{21}^T w_1 + \Theta_{22}^T w_2 + \Theta_{23}^T y + \Theta_{24}^T r + \Theta_{25} u_3 + \\ \quad + \Theta_{26} u_4 + \dots + \Theta_{2(4+m-2)} u_m \\ \vdots \\ \Theta_{m(\nu-1)1}^T w_1 + \Theta_{m(\nu-1)2}^T w_2 + \Theta_{m3}^T y + \Theta_{m4}^T r \end{bmatrix} (t) \quad (\text{C.18}) \end{aligned}$$

Reescrevendo o vetor (C.18) na forma de um somatório em função de $w_1(t)$, $w_2(t)$, $y(t)$, $r(t)$ e $u(t)$, respectivamente, teremos

$$\begin{aligned} G_2(s, \cdot)[\Omega](t) &= \bar{G}_2(s, \cdot) \left[(\Theta_{11}^T, \Theta_{21}^T, \dots, \Theta_{m(\nu-1)1}^T)^T w_1 \right] (t) + \\ &+ \bar{G}_2(s, \cdot) \left[(\Theta_{12}^T, \Theta_{22}^T, \dots, \Theta_{m(\nu-1)2}^T)^T w_2 \right] (t) + \\ &+ \bar{G}_2(s, \cdot) \left[(\Theta_{13}^T, \Theta_{23}^T, \dots, \Theta_{m3}^T)^T y \right] + \\ &+ \bar{G}_2(s, \cdot) \left[(\Theta_{14}^T, \Theta_{24}^T, \dots, \Theta_{m4}^T)^T r \right] (t) + \\ &+ \bar{G}_2(s, \cdot) \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \Theta_{15} & \Theta_{16} & \Theta_{17} & \dots & \Theta_{1m} \\ 0 & 0 & \Theta_{25} & \Theta_{26} & \dots & \Theta_{2m} \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_{35} & \dots & \Theta_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Theta_{(m-1)m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] u \end{bmatrix} (t). \quad (\text{C.19}) \end{aligned}$$

Substituindo (C.19) em (C.13) e rearranjando os termos obtemos,

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= \bar{G}_2(s, \cdot) \left[(\Theta_{11}^T, \Theta_{21}^T \cdots \Theta_{m(\nu-1)1}^T)^T w_1 \right] (t) + \\
&+ \bar{G}_2(s, \cdot) \left[(\Theta_{12}^T, \Theta_{22}^T, \cdots \Theta_{m(\nu-1)2}^T)^T w_2 \right] (t) + \\
&+ \left(G_1(s, \cdot) + \bar{G}_2(s, \cdot) [\Theta_{13}^T, \Theta_{23}^T, \cdots \Theta_{m3}^T]^T \right) [y](t) + \\
&+ \bar{G}_2(s, \cdot) \left[(\Theta_{14}^T, \Theta_{24}^T, \cdots \Theta_{m4}^T)^T r \right] (t) + \\
&+ \bar{G}_2(s, \cdot) \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \Theta_{15} & \Theta_{16} & \Theta_{17} & \cdots & \Theta_{1m} \\ 0 & 0 & \Theta_{25} & \Theta_{26} & \cdots & \Theta_{2m} \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_{35} & \cdots & \Theta_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \Theta_{(m-1)m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] u (t) - \\
&- \mu G_{\delta 1}(s, \cdot)[u](t). \tag{C.20}
\end{aligned}$$

Definindo,

$$\begin{aligned}
R_1(s, t) &= \bar{G}_2(s, t) [\Theta_{11}^T, \Theta_{21}^T, \cdots \Theta_{m(\nu-1)1}^T]^T (t) \\
R_2(s, t) &= \bar{G}_2(s, t) [\Theta_{12}^T, \Theta_{22}^T, \cdots \Theta_{m(\nu-1)2}^T]^T (t) \\
R_3(s, t) &= G_1(s, t) + \bar{G}_2(s, t) [\Theta_{13}^T, \Theta_{23}^T, \cdots \Theta_{m3}^T]^T \\
R_4(s, t) &= \bar{G}_2(s, t) [\Theta_{14}^T(t), \Theta_{24}^T(t), \cdots, \Theta_{m(\nu-1)4}^T]^T (t) \\
R_5(s, t) &= \bar{G}_2(s, t) \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \Theta_{15}(t) & \Theta_{16}(t) & \Theta_{17}(t) & \cdots & \Theta_{1m}(t) \\ 0 & 0 & \Theta_{25} & \Theta_{26} & \cdots & \Theta_{2m} \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_{35} & \cdots & \Theta_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \Theta_{(m-1)m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] (t) \tag{C.21}
\end{aligned}$$

e substituindo em (C.39), teremos

$$\begin{aligned}
w_1(t) &= R_1(s, \cdot)[w_1](t) + R_1(s, \cdot)[w_2](t) + R_3(s, \cdot)[y](t) + R_4(s, \cdot)[r](t) + \\
&+ R_5(s, \cdot)[u](t) - \mu G_{\delta 1}(s, \cdot)[u](t). \tag{C.22}
\end{aligned}$$

Agrupando os termos de $w_1(t)$ no lado esquerdo de (C.22) e definindo $T_3(s, t) = (I - R_1(s, t))^{-1}$ obtemos a expressão desejada para $w_1(t)$ dada por,

$$\begin{aligned} w_1(t) = & T_3(s, \cdot)R_2(s, \cdot)[w_2](t) + T_3(s, \cdot)R_3(s, \cdot)[y](t) + T_3(s, \cdot)R_4(s, \cdot)[r](t) + \\ & + T_3(s, t)R_5(s, \cdot)[u](t) - \mu T_3(s, \cdot)G_{\delta_1}(s, \cdot)[u](t). \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

A metodologia matemática adotada para o vetor $w_1(t)$ é repetida para o vetor $w_2(t)$. Em seguida, apresentamos o mesmo desenvolvimento a partir da multiplicação de $w_2(t)$ em ambos os lados do filtro fictício, dado em (C.2) para $i = 2$,

$$\begin{aligned} sH_2(s)[w_2](t) &= (1 - K_2(s))[w_2](t), \\ sH_2(s)[w_2](t) &= w_2(t) - K_2(s)[w_2](t), \\ K_2(s)[w_2](t) &= w_2(t) - sH_1(s)[w_2](t), \\ w_2(t) &= K_2^{-1}(s)[w_2 - sH_1(s)[w_2]](t), \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

substituindo (5.3), onde $F(s) = \frac{A(s)}{\Lambda(s)}$, no lado esquerdo de (C.24) teremos,

$$F(s)[y](t) = K_2^{-1}(s)[w_2 - sH_2(s)[w_2]](t), \quad (\text{C.25})$$

e introduzindo (2.1) em (C.25) obtemos,

$$\begin{aligned} w_2(t) = & K_2(s)F(s)G_0(s)[u](t) + H_2(s)[\dot{w}_2](t) + \\ & - \mu K_2(s)F(s)G_0(s)(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t). \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Considere que $w_2(t) = F(s)[y](t)$ tenha um realização controlável (A_{w_2}, B_{w_2}) , isto é,

$$s[w_2](t) = A_{w_2}w_2(t) + B_{w_2}u(t), \quad (\text{C.27})$$

onde $A_{w_2} \in \mathfrak{R}^{m(\nu-1) \times m(\nu-1)}$ é estável e $B_{w_2} \in \mathfrak{R}^{m(\nu-1) \times m}$. Substituindo (C.27) e (C.1)

em (C.26),

$$w_2(t) = K_2(s)F(s)G_0(s)[\Theta^T\Omega](t) + H_2(s)[A_{w_2}w_2](t) + H_2(s)B_{w_2}[y](t) + \mu K_2(s)F(s)G_0(s)(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t). \quad (\text{C.28})$$

e agrupando os termos $w_2(t)$ no lado direito de (C.28) teremos,

$$(I_{m(\nu-1)\times m(\nu-1)} - H_2(s)A_{w_2})[w_2](t) = K_2(s)F(s)G_0(s)[\Theta^T\Omega](t) + H_2(s)B_{w_2}[y](t) + \mu K_2(s)F(s)(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t). \quad (\text{C.29})$$

Agora, definindo $T_2(s, t) = (I_{m(\nu-1)\times m(\nu-1)} - H_2(s)A_{w_2})^{-1}$ e substituindo em (C.29) obtemos,

$$w_2(t) = T_2(s, \cdot)K_2(s)F(s)G_0(s)[\Theta^T\Omega](t) + T_2(s, \cdot)H_2(s)B_{w_2}[y](t) + \mu T_2(s, \cdot)K_2(s)F(s)(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s))[u](t). \quad (\text{C.30})$$

De (C.30) segue,

$$w_2(t) = G_3(s, \cdot)[y](t) + G_4(s, \cdot)[\Omega](t) + \mu G_{\delta_2}(s, \cdot)[u](t). \quad (\text{C.31})$$

onde,

$$G_3(s, t) = T_2(s, \cdot)H_2(s)B_{w_2}, \quad (\text{C.32})$$

$$G_4(s, t) = T_2(s, \cdot)K_2(s)F(s)G_0(s)\Theta^T(t), \quad (\text{C.33})$$

$$G_{\delta_2}(s, t) = T_2(s, \cdot)K_2(s)F(s)(\Delta_m(s) + G_0(s)^{-1}\Delta_a(s)). \quad (\text{C.34})$$

De (C.31) podemos expandir o termo $G_4(s, \cdot)[\Omega](t)$ em função de $w_1(t)$, $w_2(t)$, $y(t)$, $r(t)$ e $u(t)$ como segue,

$$G_4(s, \cdot)[\Omega](t) = T_2(s, \cdot)K_2(s)F(s)G_0(s)\Theta^T(\cdot)[\Omega](t), \quad (\text{C.35})$$

definindo, $\bar{G}_4(s, t) = T_2(s, \cdot)K_2(s)F(s)G_0(s)$, efetuando (C.1) e substituindo em (C.41)

obtemos,

$$\begin{aligned}
G_4(s, \cdot)[\Omega](t) &= \bar{G}_4(s, \cdot) \left[\Theta_1^T \Omega_1, \Theta_2^T \Omega_2, \dots, \Theta_m^T \Omega_m \right] (t) \\
&= \bar{G}_4(s, \cdot) \begin{bmatrix} \Theta_{11}^T \omega_1 + \Theta_{12}^T \omega_2 + \Theta_{13}^T y + \Theta_{14}^T r + \Theta_{15} u_2 + \\ \quad + \Theta_{16} u_3 + \dots + \Theta_{1(4+m-1)} u_m \\ \Theta_{21}^T \omega_1 + \Theta_{22}^T \omega_2 + \Theta_{23}^T y + \Theta_{24}^T r + \Theta_{25} u_3 + \\ \quad + \Theta_{26} u_4 + \dots + \Theta_{2(4+m-2)} u_m \\ \vdots \\ \Theta_{m(\nu-1)1}^T \omega_1 + \Theta_{m(\nu-1)2}^T \omega_2 + \Theta_{m3}^T y + \Theta_{m4}^T r \end{bmatrix} (t). \quad (C.36)
\end{aligned}$$

Reescrevendo o vetor de (C.36) na forma de um somatório em funções de $w_1(t)$, $w_2(t)$, $y(t)$, $r(t)$ e $u(t)$ respectivamente, teremos,

$$\begin{aligned}
G_4(s, \cdot)[\Omega](t) &= \bar{G}_4(s, \cdot) \left[(\Theta_{11}^T, \Theta_{21}^T, \dots, \Theta_{m(\nu-1)1}^T)^T w_1 \right] (t) + \\
&+ \bar{G}_4(s, \cdot) \left[(\Theta_{12}^T, \Theta_{22}^T, \dots, \Theta_{m(\nu-1)2}^T)^T w_2 \right] (t) + \\
&+ \bar{G}_4(s, \cdot) \left[(\Theta_{13}^T, \Theta_{23}^T, \dots, \Theta_{m3}^T)^T y \right] + \\
&+ \bar{G}_4(s, \cdot) \left[(\Theta_{14}^T, \Theta_{24}^T, \dots, \Theta_{m4}^T)^T r \right] (t) + \\
&+ \bar{G}_4(s, \cdot) \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \Theta_{15} & \Theta_{16} & \Theta_{17} & \dots & \Theta_{1m} \\ 0 & 0 & \Theta_{25} & \Theta_{26} & \dots & \Theta_{2m} \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_{35} & \dots & \Theta_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \Theta_{(m-1)m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] u \end{bmatrix} (t). \quad (C.37)
\end{aligned}$$

Substituindo (C.37) em (C.31) e rearranjando os termos obtemos,

$$\begin{aligned}
w_2(t) = & \bar{G}_4(s, \cdot) \left[(\Theta_{11}^T, \Theta_{21}^T \cdots \Theta_{m(\nu-1)1}^T)^T w_1 \right] (t) + \\
& + \bar{G}_4(s, \cdot) \left[(\Theta_{12}^T, \Theta_{22}^T, \cdots \Theta_{m(\nu-1)2}^T)^T w_2 \right] (t) + \\
& + \left(G_3(s, \cdot) + \bar{G}_4(s, \cdot) [\Theta_{13}^T, \Theta_{23}^T, \cdots \Theta_{m3}^T]^T \right) [y](t) + \\
& + \bar{G}_4(s, \cdot) \left[(\Theta_{14}^T, \Theta_{24}^T, \cdots \Theta_{m4}^T)^T r \right] (t) + \\
& + \bar{G}_4(s, \cdot) \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \Theta_{15} & \Theta_{16} & \Theta_{17} & \cdots & \Theta_{1m} \\ 0 & 0 & \Theta_{25} & \Theta_{26} & \cdots & \Theta_{2m} \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_{35} & \cdots & \Theta_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \Theta_{(m-1)m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] u (t) - \\
& - \mu G_{\delta 2}(s, \cdot) [u](t). \tag{C.38}
\end{aligned}$$

Definindo,

$$\begin{aligned}
R_6(s, t) &= \bar{G}_4(s, t) [\Theta_{11}^T, \Theta_{21}^T, \cdots \Theta_{m(\nu-1)1}^T]^T (t) \\
R_7(s, t) &= \bar{G}_4(s, t) [\Theta_{12}^T, \Theta_{22}^T, \cdots \Theta_{m(\nu-1)2}^T]^T (t) \\
R_8(s, t) &= G_3(s, t) + \bar{G}_4(s, t) [\Theta_{13}^T, \Theta_{23}^T, \cdots \Theta_{m3}^T]^T \\
R_9(s, t) &= \bar{G}_4(s, t) [\Theta_{14}^T(t), \Theta_{24}^T(t), \cdots, \Theta_{m(\nu-1)4}^T]^T (t) \\
R_{10}(s, t) &= \bar{G}_4(s, t) \left[\begin{array}{cccccc} 0 & \Theta_{15}(t) & \Theta_{16}(t) & \Theta_{17}(t) & \cdots & \Theta_{1m}(t) \\ 0 & 0 & \Theta_{25} & \Theta_{26} & \cdots & \Theta_{2m} \\ 0 & 0 & 0 & \Theta_{35} & \cdots & \Theta_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \Theta_{(m-1)m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] (t), \tag{C.39}
\end{aligned}$$

e substituindo em (??) teremos,

$$\begin{aligned}
w_2(t) = & R_6(s, \cdot) [w_1](t) + R_7(s, \cdot) [w_2](t) + R_8(s, \cdot) [y](t) + R_9(s, \cdot) [r](t) + \\
& + R_{10}(s, \cdot) [u](t) + \mu G_{\delta 2}(s, \cdot) [u](t). \tag{C.40}
\end{aligned}$$

Agrupando os termos de $w_2(t)$ no lado esquerdo de (C.40) e definindo $T_4(s, t) = (I - R_7(s, t))^{-1}$ obtemos a expressão desejada para $w_2(t)$ dada por

$$w_2(t) = T_4(s, t)R_6(s, \cdot)[w_1](t) + T_4(s, t)R_8(s, \cdot)[y](t) + T_4(s, t)R_9(s, \cdot)[r](t) + T_4(s, t)R_{10}5(s, \cdot)[u](t) + \mu T_4(s, t)G_{\delta 2}(s, \cdot)u(t). \quad (\text{C.41})$$

Concatenando os vetores dados em (C.23) e (C.41) em coluna, é possível obter $w_1(t)$ e $w_2(t)$ como função dos vetores $y(t)$, $r(t)$ e $u(t)$ conforme abaixo,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I & -T_3(s, t)R_2(s, \cdot) \\ -T_4(s, t)R_6(s, \cdot) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T_3(s, t)R_3(s, \cdot) \\ T_4(s, t)R_8(s, \cdot) \end{bmatrix} [y](t) + \\ + \begin{bmatrix} T_3(s, t)R_4(s, \cdot) \\ T_4(s, t)R_9(s, \cdot) \end{bmatrix} [r](t) + \begin{bmatrix} T_3(s, t)R_5(s, \cdot) - \mu T_3(s, t)G_{\delta 1}(s, \cdot) \\ T_4(s, t)R_{10}5(s, \cdot)[u](t) + \mu T_4(s, t)G_{\delta 2}(s, \cdot) \end{bmatrix} [u](t), \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

definindo,

$$T_5(s, t) = \begin{bmatrix} I & -T_3(s, t)R_2(s, \cdot) \\ -T_4(s, t)R_6(s, \cdot) & I \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{C.43})$$

$$G_5(s, t) = T_5(s, t) \begin{bmatrix} T_3(s, t)R_3(s, \cdot) \\ T_4(s, t)R_8(s, \cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{C.44})$$

$$G_6(s, t) = T_5(s, t) \begin{bmatrix} T_3(s, t)R_4(s, \cdot) \\ T_4(s, t)R_9(s, \cdot) \end{bmatrix} \quad (\text{C.45})$$

$$G_7(s, t) = T_5(s, t) \begin{bmatrix} T_3(s, t)R_5(s, \cdot) - \mu T_3(s, t)G_{\delta 1}(s, \cdot) \\ T_4(s, t)R_{10}5(s, \cdot)[u](t) + \mu T_4(s, t)G_{\delta 2}(s, \cdot) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.46})$$

e substituindo em (C.42) teremos,

$$\begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = G_5(s, \cdot)[y](t) + G_6(s, \cdot)[r](t) + G_7(s, \cdot)[u](t). \quad (\text{C.47})$$

A partir de (C.47) podemos obter cada um dos vetores regressores dados em (??).

Iniciando por $\Omega_m(t)$ teremos,

$$\begin{aligned}
\Omega_m(t) &= \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ y(t) \\ r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_5(s, \cdot) \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix} [y](t) + \begin{bmatrix} G_6(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix} [r](t) + \begin{bmatrix} G_7(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix} [u](t) \\
\Omega_{m-1}(t) &= \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ y(t) \\ r(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_5(s, \cdot) \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix} [y](t) + \begin{bmatrix} G_6(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix} [r](t) + \begin{bmatrix} G_7(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0 \quad 1 \end{bmatrix} [u](t) \\
\Omega_{m-2}(t) &= \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ y(t) \\ r(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_5(s, \cdot) \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix} [y](t) + \begin{bmatrix} G_6(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix} [r](t) + \begin{bmatrix} G_7(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0 \quad 1 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 1 \end{bmatrix} [u](t) \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\Omega_1(t) &= \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ y(t) \\ r(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_5(s, \cdot) \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ \vdots \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix} [y](t) + \begin{bmatrix} G_6(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ \vdots \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix} [r](t) + \begin{bmatrix} G_7(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times 1} \quad I_{m \times (m-1)} \end{bmatrix} [u](t)
\end{aligned}$$

(C.48)

Então generalizando para $\Omega(t)$ obtemos,

$$\begin{aligned}
\Omega(t) &= (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_j, \dots, \Omega_m)^T, \\
& \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} G_5(s, \cdot) \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{(m-j)m \times m} \end{array} \right)_{j=1} \quad \dots \quad \left(\begin{array}{c} G_5(s, \cdot) \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{array} \right)_{j=m-1} \quad \left(\begin{array}{c} G_5(s, \cdot) \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{array} \right)_{j=m} \end{array} \right]^T [y](t) + \\
& + \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} G_6(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ I_{m \times m} \\ 0_{(m-j)m \times m} \end{array} \right)_{j=1} \quad \dots \quad \left(\begin{array}{c} G_6(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{array} \right)_{j=m-1} \quad \left(\begin{array}{c} G_6(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ I_{m \times m} \end{array} \right)_{j=m} \end{array} \right]^T [r](t) + \\
& + \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} G_7(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m-j \times 1} \quad I_{(m-j) \times (m-j)} \end{array} \right)_{j=1} \quad \dots \quad \left(\begin{array}{c} G_7(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0 \quad 1 \end{array} \right)_{j=m-1} \quad \left(\begin{array}{c} G_7(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{array} \right)_{j=m} \end{array} \right]^T [u](t)
\end{aligned} \tag{C.49}$$

onde $j = 1, \dots, m$.

Definindo,

$$\begin{aligned}
G_8(s, \cdot) &= \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} G_5(s, \cdot) \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{(m-j)m \times m} \end{array} \right)_{j=1} \quad \dots \quad \left(\begin{array}{c} G_5(s, \cdot) \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{array} \right)_{j=m-1} \quad \left(\begin{array}{c} G_5(s, \cdot) \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{array} \right)_{j=m} \end{array} \right]^T, \\
G_9(s, \cdot) &= \left[\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} G_6(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ I_{m \times m} \\ 0_{(m-j)m \times m} \end{array} \right)_{j=1} \quad \dots \quad \left(\begin{array}{c} G_6(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ I_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{array} \right)_{j=m-1} \quad \left(\begin{array}{c} G_6(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ I_{m \times m} \end{array} \right)_{j=m} \end{array} \right]^T,
\end{aligned}$$

$$G_{10}(s, \cdot) = \left[\left(\begin{array}{c} G_7(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m-j \times 1} \quad I_{(m-j) \times (m-1)} \end{array} \right)_{j=1} \cdots \left(\begin{array}{c} G_7(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0 \quad 1 \end{array} \right)_{j=m-1} \left(\begin{array}{c} G_7(s, \cdot) \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \end{array} \right)_{j=m} \right]^T,$$

e substituindo em (C.49) obtemos,

$$\Omega(t) = G_8(s, \cdot)[y](t) + G_9(s, \cdot)[r](t) + G_{10}(s, \cdot)[u](t). \quad (\text{C.50})$$

Agora, substituindo (C.50) em (C.1),

$$u(t) = \Theta(t)^T G_8(s, \cdot)[y](t) + \Theta(t)^T G_9(s, \cdot)[r](t) + \Theta(t)^T G_{10}(s, \cdot)[u](t), \quad (\text{C.51})$$

e agrupando os termos $u(t)$ em (C.51) teremos,

$$u(t) = T(s, \cdot)\Theta(t)^T G_8(s, \cdot)[y](t) + T(s, \cdot)\Theta(t)^T G_9(s, \cdot)[r](t), \quad (\text{C.52})$$

onde $T(s, \cdot) = (I - \Theta(t)^T G_{10}(s, \cdot))^{-1}$.

Finalmente definindo,

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(s, t) &= T(s, t)\Theta(t)^T G_8(s, t), \\ \bar{H}_2(s, t) &= T(s, t)\Theta(t)^T G_9(s, t), \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

e substituindo (C.53) em (C.52) obtemos a expressão desejada,

$$u(t) = \bar{H}_1(s, t)[y](t) + \bar{H}_2(s, t)[r](t). \quad (\text{C.54})$$

C.2 Demonstração do termo $\bar{\eta}(t)$ - multivariável

Dado que,

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}(t) &= D\Delta_2(s)[u](t), \\
&= D(U - K_1F(s))(\Delta_m(s) + G_0^{-1}(s)\Delta_a(s))[u](t) \\
&= D(U - K_1F(s))\Delta_m(s)[u](t) + D(U - K_1F(s))G_0^{-1}(s)\Delta_a(s)[u](t) \\
&= D(U - K_1F(s))\frac{(s+a)}{(s+a)}\Delta_m(s)[u](t) + D(U - K_1F(s))h(s)\frac{(s+a)}{(s+a)}G_0^{-1}(s)\Delta_a(s)[u](t), \\
&= D(U - K_1F(s))\frac{(s+a)}{(s+a)}K_p^{-1}W_M(s)^{-1}W_M(s)K_p\Delta_m(s)[u](t) + \\
&\quad + D(U - K_1F(s))h(s)\frac{(s+a)}{(s+a)}G_0^{-1}(s)\Delta_a(s)[u](t) \\
&= \left(D(U - K_1F(s))\frac{1}{(s+a)}K_p^{-1}W_M(s)^{-1} \right) (s+a)W_M(s)K_p\Delta_m(s)[u](t) + \\
&\quad + \left(D(U - K_1F(s))\frac{1}{(s+a)}G_0^{-1}(s) \right) (s+a)\Delta_a(s)[u](t), \tag{C.55}
\end{aligned}$$

onde $a > 0$, definindo,

$$G_1(s) = D(U - K_1F(s))\frac{1}{(s+a)}K_p^{-1}W_M(s)^{-1}, \tag{C.56}$$

$$G_2(s) = D(U - K_1F(s))\frac{1}{(s+a)}G_0^{-1}(s), \tag{C.57}$$

e substituindo em (C.55), teremos

$$\bar{\eta}(t) = G_1(s)(s+a)W_M(s)K_p\Delta_m(s)[u](t) + G_2(s)(s+a)\Delta_a(s)[u](t), \tag{C.58}$$

onde, $G_1(s)$ e $G_2(s)$ são estáveis e próprias.

Da hipótese **H8** reescrevemos (C.58) como

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}(t) &= G_1(s)((s+a)W_M(s)K_p\Delta_m(s) + D_m - D_m)[u](t) + \\
&+ G_2(s)((s+a)\Delta_a(s) + D_a - D_a)[u](t) \\
&= G_1(s)((s+a)W_M(s)K_p\Delta_m(s) - D_m)[u](t) + G_1(s)D_m[u](t) + \\
&+ G_2(s)((s+a)\Delta_a(s) - D_a)[u](t) + G_2(s)D_a[u](t) \\
&= G_1(s)((s+a)W_M(s)K_p\Delta_m(s) - D_m)\frac{(s+q)}{(s+q)}[u](t) + \\
&+ (G_1(s)D_m + \bar{D}_m - \bar{D}_m)[u](t) + G_2(s)((s+a)\Delta_a(s) - D_a)\frac{(s+q)}{(s+q)}[u](t) + \\
&+ (G_2(s)D_a + \bar{D}_a - \bar{D}_a)[u](t) \\
&= G_1(s)((s+a)W_M(s)K_p\Delta_m(s) - D_m)(s+q)\frac{1}{(s+q)}[u](t) + \\
&+ (G_1(s)D_m - \bar{D}_m)(s+q)\frac{1}{(s+q)}[u](t) + \bar{D}_m u(t) + \\
&+ G_2(s)((s+a)\Delta_a(s) - D_a)(s+q)\frac{1}{(s+q)}[u](t) + \\
&+ (G_2(s)D_a - \bar{D}_a)(s+q)\frac{1}{(s+q)}[u](t) + \bar{D}_a u(t), \tag{C.59}
\end{aligned}$$

onde, $a > q > 0$, $D_m = \lim_{s \rightarrow \infty} sW_M(s)K_p\Delta_m(s)$, $\bar{D}_m = \lim_{s \rightarrow \infty} G_1(s)D_m$, $D_a = \lim_{s \rightarrow \infty} s\Delta_a(s)$ e $\bar{D}_a = \lim_{s \rightarrow \infty} G_2(s)D_a$ e substituindo em (C.59).

Rearranjando os termos,

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}(t) &= (G_1(s)((s+a)W_M(s)K_p\Delta_m(s) - D_m) + \\
&+ G_2(s)((s+a)\Delta_a(s) - D_a))(s+q)\frac{1}{(s+q)}[u](t) + \\
&+ ((G_1(s)D_m - \bar{D}_m) + (G_2(s)D_a - \bar{D}_a))(s+q)\frac{1}{(s+q)}[u](t) + \\
&+ \bar{D}_m u(t) + \bar{D}_a u(t). \tag{C.60}
\end{aligned}$$

Definindo,

$$\Delta_{0m1}(s) = G_1(s)((s+a)W_M(s)K_p\Delta_m(s) - D_m)(s+q), \quad (\text{C.61})$$

$$\Delta_{0a1}(s) = G_2(s)((s+a)\Delta_a(s) - D_a)(s+q), \quad (\text{C.62})$$

$$\Delta_{0m2}(s) = (G_1(s)D_m - \bar{D}_m)(s+q), \quad (\text{C.63})$$

$$\Delta_{0a2}(s) = (G_2(s)D_a - \bar{D}_a)(s+q), \quad (\text{C.64})$$

$$\Delta_0(s) = \Delta_{0m1} + \Delta_{0m2} + \Delta_{0a1} + \Delta_{0a2}, \quad (\text{C.65})$$

$$\bar{\eta}_0(t) = \Delta_0(s) \frac{1}{(s+q)} [u](t), \quad (\text{C.66})$$

$$\bar{\eta}_1 = \bar{D}_m + \bar{D}_a, \quad (\text{C.67})$$

e introduzindo em (C.60), obtemos $\bar{\eta}(t)$ na forma final adequada para o cálculo do limite superior desejado,

$$\bar{\eta}(t) = \bar{\eta}_0(t) + \bar{\eta}_1 u(t). \quad (\text{C.68})$$

Agora retornando a (C.60) e usando as definições (C.61) a (C.67), teremos

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(t) &= \Delta_{0m1} \frac{1}{(s+q)} [u](t) + \Delta_{0a2} \frac{1}{(s+q)} [u](t) + \\ &+ \Delta_{0a1} \frac{1}{(s+q)} [u](t) + \Delta_{0a2} \frac{1}{(s+q)} [u](t) + (\bar{D}_m + \bar{D}_a) u(t). \end{aligned} \quad (\text{C.69})$$

Segundo as hipótese **H7** a **H10** podemos verificar que

$$\|\Delta_{0m1}(s)\|_1 \in \mathcal{L}_1,$$

$$\|\Delta_{0m2}(s)\|_1 \in \mathcal{L}_1,$$

$$\|\Delta_{0a1}(s)\|_1 \in \mathcal{L}_1,$$

$$\|\Delta_{0a2}(s)\|_1 \in \mathcal{L}_1,$$

e para \bar{D}_m, \bar{D}_a limitados implica em $\Delta_0(s) \in \mathcal{L}_1$.

Visto que, $\bar{\eta}_0(t) = \Delta_0(s) \frac{1}{(s+q)} [u](t)$ e aplicando a versão multivariável do lema 2.6 dado em (Tao 2003) (1.11) resulta,

$$|\bar{\eta}_0(t)| = \|\Delta_0(\cdot)\|_1 \frac{1}{(s+q)} [|u|](t). \quad (\text{C.70})$$

Agora usando o sinal normalizante definido em (5.53) e os resultados do apêndice (C.3) é fácil mostrar que,

$$|\bar{\eta}_0(t)| \leq \|\Delta_0(t)\|_1 C_0 m(t). \quad (\text{C.71})$$

Por fim, teremos

$$\frac{|\bar{\eta}_0(t)|}{m(t)} \leq \|\Delta_0(t)\|_1 C_0 \leq k_1, \quad (\text{C.72})$$

limitado e pertencendo a \mathcal{L}_1 para $k_1 > 0$.

De (C.67) verificamos que,

$$\bar{\eta}_1 \leq k_2, \quad (\text{C.73})$$

é limitado para $k_2 > 0$.

Agora calculando a norma $\|\cdot\|$ em ambos os lados de (C.68) e dividindo pelo sinal normalizante $m(t)$, obtemos,

$$\frac{\|\bar{\eta}(t)\|}{m(t)} = \frac{\|\bar{\eta}_0(t)\|}{m(t)} + \bar{\eta}_1 \frac{\|u(t)\|}{m(t)}. \quad (\text{C.74})$$

Em seguida, substituindo os limites de cada termo teremos

$$\frac{\|\bar{\eta}(t)\|}{m(t)} \leq k_1 + k_2 \frac{\|u(t)\|}{m(t)}. \quad (\text{C.75})$$

Usando a lei de controle $u(t) = \zeta^T(t)\Theta(t)$ e substituindo em (C.75)

$$\frac{\|\bar{\eta}(t)\|}{m(t)} \leq k_1 + k_2 \frac{\|\zeta^T(t)\Theta(t)\|}{m(t)} \leq k_1 + k_2 \frac{\|\zeta^T\|}{m(t)} \|\Theta(t)\|. \quad (\text{C.76})$$

Do apêndice (C.3) mostramos que, $\frac{|\eta(t)|}{m(t)}$, $\frac{|y(t)|}{m(t)}$, $\frac{|w_2(t)|}{m(t)}$, $\frac{|u(t)|}{m(t)}$, $\frac{|w_1(t)|}{m(t)}$ e $\frac{|w(t)|}{m(t)}$ são todos limitados, o que implica em $\frac{\|h(s)\Omega^T\|}{m(t)}$ ser limitado e menor que uma constante $k_3 > 0$. Portanto,

$$\frac{\|\bar{\eta}(t)\|}{m(t)} \leq k_1 + k_2 k_3 \|\Theta(t)\|, \quad (\text{C.77})$$

e finalmente,

$$\frac{\|\bar{\eta}(t)\|}{m(t)} \leq k_1 + k_4 \|\Theta(t)\|, \quad (\text{C.78})$$

onde $k_4 = k_2 k_3 > 0$. Agora, segue de (5.73) que o termo positivo corresponde a,

$$\frac{\mu^2 \bar{\eta}^T}{\kappa m^2 \lambda_{\min}(S^{-1})} \bar{\eta} = \frac{\mu^2}{\kappa \lambda_{\min}(S^{-1})} \frac{\|\bar{\eta}\|^2}{m^2}. \quad (\text{C.79})$$

e elevando ao quadrados ambos os lados de (C.78) obtemos o limite superior desejado do termo quadrático de $\bar{\eta}$,

$$\begin{aligned} \frac{\|\bar{\eta}(t)\|^2}{m(t)^2} &\leq (k_1 + k_4 \|\Theta(t)\|)^2 \\ &= k_1^2 + 2k_1 k_4 \|\Theta(t)\|^2 + k_4^2 \|\Theta(t)\|^2 \\ &\leq 2k_1^2 + 2k_4^2 \|\Theta(t)\|^2 \\ &\leq 2k_4^2 + 2k_4^2 \|\Theta(t)\|^2. \end{aligned} \quad (\text{C.80})$$

onde, escolhemos $k_4 > k_1$.

C.3 Estabilidade dos sinais do sistema pelo sinal normalizante - MIMO

O sinal normalizante dado em (5.54) satisfaz a desigualdade,

$$m(t) \geq \frac{\delta_1}{s + \delta_0} [|u| + |y|](t). \quad (\text{C.81})$$

Considere o vetor de erros de modelagem $\eta(t)$, dado em (C.55),

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(t) &= \Delta_3(s)[u](t) \\ &= h(s)D(U - K_1 F(s))(\Delta_m(s) + G_0^{-1}(s)\Delta_a(s))[u](t) \\ &= h(s)D(U - K_1 F(s))(s + q) \frac{1}{(s + q)} \Delta_m(s)[u](t) + \\ &+ h(s)D(U - K_1 F(s))G_0^{-1}(s)(s + q) \frac{1}{(s + q)} \Delta_a(s)[u](t). \end{aligned} \quad (\text{C.82})$$

Denominando,

$$H_m(s) = h(s)D(U - K_1F(s))\Delta_m(s)(s + q), \quad (\text{C.83})$$

$$H_a(s) = h(s)D(U - K_1F(s))G_0^{-1}(s)\Delta_a(s)(s + q), \quad (\text{C.84})$$

$$(\text{C.85})$$

e substituindo em (C.82) teremos,

$$\bar{\eta}(t) = H_m(s)\frac{1}{(s + q)}[u](t) + H_a(s)\frac{1}{(s + q)}[u](t). \quad (\text{C.86})$$

onde $q > \delta_0$.

Aplicando (1.11) em (C.86) resulta

$$|\bar{\eta}(t)| \leq \|h_m(t)\|_1 \frac{1}{(s + q)}[|u|](t) + \|h_a(t)\|_1 \frac{1}{(s + q)}[|u|](t). \quad (\text{C.87})$$

Definindo $\|h_m(t)\|_1 = C_m$, $\|h_a(t)\|_1 = C_a$ e introduzindo em (C.87)

$$|\bar{\eta}(t)| \leq (C_m + C_a) \frac{1}{(s + q)}[|u|](t). \quad (\text{C.88})$$

Considerando a inequação do sinal normalizante em (C.81),

$$\left(\frac{1}{(s + q)}[|u|](t)\right) \leq \frac{1}{(s + \delta_0)}[|u|](t) \leq m(t), \quad (\text{C.89})$$

e aplicando em (C.88), obtemos

$$|\bar{\eta}(t)| \leq C_0 m(t). \quad (\text{C.90})$$

Dividindo ambos os lados por $m(t)$, teremos,

$$\frac{|\bar{\eta}(t)|}{m(t)} \leq C_0. \quad (\text{C.91})$$

Portanto,

$$\frac{|\bar{\eta}(t)|}{m(t)} \in \mathcal{L}_\infty \quad e \quad \frac{\Delta_3(s)[|u|](t)}{m(t)} \in \mathcal{L}_\infty. \quad (\text{C.92})$$

Reescrevendo (5.43) teremos,

$$\begin{aligned}
(I - \theta_1^{*T} F(s))[u](t) - (\theta_2^{*T} F(s)[y](t) + \theta_3^*[y]t) &= -\mu\Delta_1(s)[u](t) + K_p^{-1}W_M^{-1}(s)[y](t), \\
y(t) &= K_p W_M(I - \theta_1^{*T} F(s))[u](t) - (\theta_2^{*T} F(s)[y](t) + \mu\Delta_1(s)[u](t), \\
y(t) &= K_p W_M(I - \theta_1^{*T} F(s))\frac{(s+q)}{(s+q)}[u](t) - (\theta_2^{*T} F(s))\frac{(s+q)}{(s+q)}[y](t) + \mu\Delta_1(s)[u](t).
\end{aligned} \tag{C.93}$$

Definindo,

$$H_1(s) = h(s)D(U - K_1 F(s))\Delta_m(s)(s+q), \tag{C.94}$$

$$H_2(s) = h(s)D(U - K_1 F(s))G_0^{-1}(s)\Delta_a(s)(s+q), \tag{C.95}$$

e substituindo em (C.93)

$$y(t) = H_1(s)\frac{1}{(s+q)}[u](t) - H_2(s)\frac{1}{(s+q)}[y](t) + \mu\Delta_1(s)[u](t). \tag{C.96}$$

Aplicando (1.11) em (C.96) resulta

$$|y(t)| \leq \|h_1(t)\|_1 \frac{1}{(s+q)}[u](t) - \|h_2(t)\|_1 \frac{1}{(s+q)}[y](t) + \mu\Delta_1(s)[|u|](t). \tag{C.97}$$

Definindo $\|h_1(t)\|_1 = C_1$, $\|h_2(t)\|_1 = C_2$ e introduzindo em (C.97)

$$\begin{aligned}
|y(t)| &\leq C_1 \frac{1}{(s+q)}[u](t) - C_2 \frac{1}{(s+q)}[y](t) + \Delta(s)[|u|](t) \leq C_0 m(t) - C_0 m(t) + \\
&+ \mu\Delta_1(s)[|u|](t).
\end{aligned} \tag{C.98}$$

Então,

$$|y(t)| \leq \mu\Delta_1(s)[|u|](t). \tag{C.99}$$

Dividindo por $m(t)$ obtemos

$$\frac{|y(t)|}{m(t)} \leq \mu \frac{\Delta_1(s)[|u|](t)}{m(t)}. \tag{C.100}$$

De (5.46), $\eta(t) = \Delta_1(s)[|u|](t) = W(s)S\Delta_3(s)[u](t) = W(s)S\bar{\eta}(t)$, para $W(s)S$, *SPR* estritamente próprio e estável, e sabendo que $\frac{|\bar{\eta}(t)|}{m(t)} \in \mathcal{L}_\infty$, conclui-se que,

$$\frac{|y(t)|}{m(t)} \in \mathcal{L}_\infty. \quad (\text{C.101})$$

Conseqüentemente,

$$\frac{w_2(t)}{m(t)} \in \mathcal{L}_\infty. \quad (\text{C.102})$$

Agora, considerando (C.54),

$$u(t) = \bar{H}_1(s, t)(s + q) \frac{1}{(s + q)} [y](t) + \bar{H}_2(s, t)(s + q) \frac{1}{(s + q)} [r](t). \quad (\text{C.103})$$

Denominando,

$$\bar{\bar{H}}_1(s) = \bar{H}_1(s, t)(s + q), \quad (\text{C.104})$$

$$\bar{\bar{H}}_2(s) = \bar{H}_2(s, t)(s + q), \quad (\text{C.105})$$

$$(\text{C.106})$$

e substituindo em (C.103) teremos

$$u(t) = \bar{\bar{H}}_1(s) \frac{1}{(s + q)} [y](t) + \bar{\bar{H}}_2(s) \frac{1}{(s + q)} [r](t). \quad (\text{C.107})$$

Aplicando (1.11) em (C.107) resulta

$$|u(t)| \leq \|\bar{\bar{h}}_1(t)\|_1 \frac{1}{(s + q)} [|y|](t) + \|\bar{\bar{h}}_2(t)\|_1 \frac{1}{(s + q)} [|r|](t). \quad (\text{C.108})$$

Definindo $\|\bar{\bar{h}}_1(t)\|_1 = \bar{C}_1$, $\|\bar{\bar{h}}_2(t)\|_1 = \bar{C}_2$ e $\bar{r}(t) = \frac{1}{(s+q)} [|r|](t)$ obtemos

$$|u(t)| \leq \bar{C}_1 \frac{1}{(s + q)} [|y|](t) + \bar{C}_2 [|\bar{r}|](t). \quad (\text{C.109})$$

Em vista de $r(t) \in \mathcal{L}_\infty$ implica $\bar{r}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, então $\bar{C}_2 [|\bar{r}|](t) \leq b$. Considerando a inequação do sinal normalizante em (C.109),

$$|u(t)| \leq \bar{C}_1 \frac{1}{(s + q)} [|y|](t) + b \leq C_0 m(t). \quad (\text{C.110})$$

Dividindo por $m(t)$ obtemos

$$\frac{|u(t)|}{m(t)} \leq C_0. \quad (\text{C.111})$$

Portanto,

$$\frac{|u(t)|}{m(t)} \in \mathcal{L}_\infty. \quad (\text{C.112})$$

Consequentemente,

$$\frac{|w_1(t)|}{m(t)} \in \mathcal{L}_\infty. \quad (\text{C.113})$$

Pelas demonstrações acima concluímos que, $\frac{|\eta(t)|}{m(t)}$, $\frac{|y(t)|}{m(t)}$, $\frac{|w_2(t)|}{m(t)}$, $\frac{|u(t)|}{m(t)}$ e $\frac{|w_1(t)|}{m(t)}$ são todos limitados, o que implica $\frac{|w(t)|}{m(t)}$.

Referências Bibliográficas

- Artega, M. A. & Tang, Y. (2002), ‘Adaptive control of robots with improvement transient performance’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **47**, 1198–1202.
- B. Fidan, Zhang, Y. & Ioannou, P. A. (2002), ‘New robust adaptive control scheme for linear time variant plants’.
- Bodson, M. & Sastry, S. S. (1989), *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice Hall.
- C. E. Rohrs, L. Valavani, M. A. & Stein, G. (1985), ‘Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodelled dynamics’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **30**, 881–889.
- Cao, C. & Hovakimyan, N. (2006a), ‘Design and analysis of a novel \mathcal{L}_1 adaptive control architecture, part I: Control signal and asymptotic stability’, *Proc. American Contr. Conf.* pp. 3397–3402.
- Cao, C. & Hovakimyan, N. (2006b), ‘Design and analysis of a novel \mathcal{L}_1 adaptive control architecture, part II: Guaranteed transient performance’, *Proc. American Contr. Conf.* pp. 3403–3408.
- Cao, C. & Hovakimyan, N. (2007a), ‘Extension of \mathcal{L}_1 adaptive output feedback controller to systems of unknown dimension’, *Proc. American Contr. Conf.* .
- Cao, C. & Hovakimyan, N. (2007b), ‘Guaranteed transient performance with \mathcal{L}_1 adaptive controller for systems with unknown time-varying parameters: Part I’, *Proc. American Contr. Conf.* .
- Cao, C. & Hovakimyan, N. (2007c), ‘ \mathcal{L}_1 adaptive controller for tailless unstable aircraft’, *Proc. American Contr. Conf.* .
- Cao, C. & Hovakimyan, N. (2007d), ‘Stability margins of \mathcal{L}_1 adaptive controller: Part ii’, *Proc. American Contr. Conf.* .
- Cao, C. & Hovakimyan, N. (2007e), ‘Stabilization of cascaded systems via \mathcal{L}_1 adaptive controller with application to a uav path following problem and flight test results’, *Proc. American Contr. Conf.* .
- Costa, R. R. (1999), Improving transient behavior of model-reference adaptive control, in ‘Proc. American Contr. Conf.’, San Diego.

- Costa, R. R., Hsu, L., Imai, A. K. & Kokotović, P. (2003), Lyapunov-based adaptive control of mimo systems, Vol. 39.
- Datta, A. & Ho, M. T. (1994), ‘On modifying model reference adaptive control schemes for performance improvement’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**.
- Datta, A. & Ioannou, P. A. (1994), ‘Performance analysis and improvement in model reference adaptive control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1987), ‘Bursting phenomena in continuous-time adaptive systems with a σ -modification’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **32**(1).
- Ioannou, P. A. & Kokotović, P. V. (1983), *Adaptive systems with reduced models*, Springer-Verlag.
- Ioannou, P. A. & Kokotović, P. V. (1984), ‘Instability analysis and the improvement of robustness of adaptive control’, *Automatica* **20**(5).
- Ioannou, P. A. & Tao, G. (1989), ‘Dominant richness and improvement of performance of robust adaptive control’, *Automatica* **25**(2), 287–291.
- Ioannou, P. A. & Tsakalis, K. (1986), ‘A robust direct adaptive controller’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **31**(11), 1033–1043.
- Ioannou, P. A. & Tsakalis, K. (1988a), ‘The class of unmodeled dynamics in robust adaptive control’.
- Ioannou, P. A. & Tsakalis, K. (1988b), ‘Time and frequency domain bounds in robust adaptive control’.
- Ioannou, P. & Sun, J. (1988), ‘Theory and design of robust direct and indirect adaptive control schemes’, *Int. J. Contr.* **47**(3), 775–813.
- Ioannou, P. & Sun, K. (1996), *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall PTR.
- Kokotović, P. V., Khalil, H. K. & O’Reilly, J. (1986), *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, Academic Press.
- Krause, J. M. P. P. K. & Stein, G. (1992), ‘Robust adaptive control: Stability and asymptotic performance’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **37**(3).
- Krstić, M., Kanellakopoulos, I. & Kokotović, P. V. (1994), ‘Nonlinear design of adaptive controllers for linear systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**, 783–792.
- Lu, W. & Hadaegh, F. Y. (1997), ‘Adaptive h_∞ control problems and parameter projection techniques’.
- Marcelis, I. M. Y. & Bitmead, R. R. (1986), ‘Nonlinear dynamics in adaptive control: Chaotic and periodic stabilization’, *Automatica* **22**, 641–655.
- Morse, A. S. (1980), ‘Global stability of parameter adaptive control systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **25**, 433–439.

- Morse, A. S. (1993), ‘A gain matrix decomposition and some of its applications’, *Systems and Contr. Letters* **21**, 1–10.
- Naik, S. M., Kumar, P. R. & Ydstie, B. E. (1992), ‘Robust continuous-time adaptive control by parameter projection’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **37**(2).
- Narendra, K. & Annaswamy, A. (1986), ‘Robust adaptive control, in the presence of bounded disturbances’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **31**(4), 306–315.
- Narendra, K. & Annaswamy, A. (1989), *Stable Adaptive Systems*, Prentice Hall.
- Narendra, K. & Balakrishnan, J. (1994), ‘Improvement transient response of adaptive control systems using multiple and switching’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**, 1861–1866.
- Narendra, K. S. (1994), Parameter adaptive control—the end ... or the beginning?, in ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Lake Buena Vista.
- Narendra, K. S. & Balakrishnan, J. (1993), Improving transient response of adaptive control systems using multiple models and switching, in ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, San Antonio.
- Narendra, K. S., Lin, Y. H. & Valavani, L. S. (1980), ‘Stable adaptive controller design—part ii: Proof of stability’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **25**, 440–448.
- Papadakis, I. N. M. & Thomopoulos, S. C. A. (1996), ‘Improvement performance MRAC with parameters mismatch compensation’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **41**.
- Pinto, M. & Costa, R. (2008), Improving transient behavior of mimo adaptive systems, in ‘17th IFAC World Congress.’, Seoul.
- Praly, L. (1984), Robust model reference adaptive controllers - part i: stability analysis, in ‘Proc. IEEE Conf. on Decision and Control’, Las Vegas, NV, pp. 1009–1014.
- Rugh, W. J. (1993), *Linear system theory*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice–Hall.
- Sastry, S. S. & Bodson, M. (1989), *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice Hall.
- Strang, G. (1988), *Linear Algebra and Its Applications, 3rd Edition*, Academic Press, Inc.
- Sun, J. (1993), ‘A modified model reference adaptive control scheme for improvement transient performance’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **38**(8).
- Tao, G. (2003), *Adaptive Control Design and Analysis*, John Wiley & Sons.
- Tsakalis, K. S. (1992), ‘Robustness of model reference adaptive controllers: An input-output approach’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **37**(5).
- Weller, S. R., G. C. Goodwin, P. J. R. & Caines, P. E. (1980), ‘Discrete time multivariable adaptive control’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **25**(7), 449–456.

- Weller, S. R. & Goodwin, G. C. (1994), ‘Hysteresis switching adaptive control of linear multivariable systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**(7), 1360–1375.
- Ydstie, B. E. (1986), ‘Bifurcation and complex dynamics in adaptive control systems’.
- Zang, Z. & Bitmead, R. R. (1994), ‘Transient bounds for adaptive control systems’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**(1).
- Zhang & Ioannou (2000), ‘A new linear adaptive controller: design, analysis and performance’, *IEEE Trans. Aut. Contr.* **45**(5), 883–897.