

CONTROLE SUAVE A ESTRUTURA VARIÁVEL E FILTRO DE KALMAN
PARA ATENUAR RUÍDO DE MEDIÇÃO

Alessandro Jacoud Peixoto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA EM
ENGENHARIA ELÉTRICA

Aprovada por:

Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat

Prof. Fernando Cesar Lizarralde, D.Sc.

Prof. Ramon Romankevicius Costa, D.Sc.

Prof. Fábio Gonçalves Jota, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2002

PEIXOTO, ALESSANDRO JACOUD

Controle Suave a Estrutura Variável e
Filtro de Kalman para Atenuar Ruído de
Medição [Rio de Janeiro] 2002

X, 126 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Elétrica, 2002)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Estrutura variável, modos deslizantes,
controle adaptativo, filtro de *Kalman*, sis-
temas não-lineares, quantização.

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciência (M.Sc.)

CONTROLE SUAVE A ESTRUTURA VARIÁVEL E FILTRO DE KALMAN
PARA ATENUAR RUÍDO DE MEDIÇÃO

Alessandro Jacoud Peixoto

Abril de 2002

Orientadores: Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat
Prof. Fernando Cesar Lizarralde, D.Sc.

Programa: Engenharia Elétrica

Esta tese aborda aspectos relacionados à análise teórica, projeto e implementação prática de um esquema de controle por modos deslizantes, proposto recentemente, para sistemas linear desconhecidos (*SISO*) com grau relativo arbitrário e que não apresenta *chattering* resultando em sinais de controle suaves. Para evitar *chattering*, o esquema proposto utiliza um malha de erro de predição, em conjunto com uma filtragem do sinal de controle, sem utilizar o conceito de camada de fronteira.

O sistema completo do erro é globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual. Além disso, através de hipóteses adicionais, o sistema apresenta modos de deslizamento ideal. O caso de plantas lineares com grau relativo arbitrário, considerando perturbação de entrada e dinâmicas não-modeladas, é completamente analisado.

Neste trabalho, verifica-se ser necessário uma filtragem adequada do sinal medido para obter desempenhos satisfatórios. O sinal medido está contaminado por um ruído de quantização devido ao sensor de posição. Um filtro de Kalman adequado, projetado utilizando um modelo simples para o sinal medido, independente da planta, mostrou resultados práticos satisfatórios obtidos em um experimento com um helicóptero com 1 grau de liberdade.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SMOOTH SLIDING CONTROL AND KALMAN FILTER APPLIED FOR
OUTPUT NOISE FILTERING

Alessandro Jacoud Peixoto

Abril de 2002

Advisors: Prof. Liu Hsu, Docteur d'Etat
Prof. Fernando Cesar Lizarralde, D.Sc.

Department: Electrical Engineering

This thesis addresses the design, implementation and experimental evaluation of a recently proposed sliding mode control scheme for uncertain linear systems (SISO) with arbitrary relative degree, which is free of chattering and results in smooth control signals. Instead of using a boundary layer to avoid chattering, the proposed approach relies on an appropriate prediction error loop and the use of an averaging filter to smooth the control signal.

The complete error system is globally exponentially stable with respect to some small residual set which is independent of the initial conditions. Under certain assumptions the system further achieves the ideal sliding mode. The case of linear plants of arbitrary relative degree, considering input disturbance and unmodeled dynamics, is completely analysed.

It is shown that, in practice, successful performance of the sliding mode controller requires adequate filtering of the measured signal. The measured signal is contaminated with quantization noise due to the position sensor. A particular Kalman-filter, designed using only a simple *signal model*, independent of the plant itself, is shown to yield very satisfactory experimental results obtained on a 1 *d.o.f.* helicopter-like mechanism driven by twin propellers.

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Notações e definições	5
1.2 Organização da Tese	6
2 Sistemas a estrutura variável	8
2.1 Sistema de controle descontínuo	9
2.1.1 Existência de modo deslizante	9
2.2 Descrição matemática de modos deslizantes	11
2.2.1 Método de <i>Filippov</i>	12
2.2.2 Método da regularização	14
2.2.3 Método do controle equivalente	15
2.2.3.1 Interpretação física do controle equivalente	16
2.2.3.2 Controle equivalente estendido	16
2.3 Caso linear: projeto da lei de controle	17
2.3.1 Realimentação de estados	19
2.3.2 Realimentação de saída	21
3 O controlador adaptativo por modelo de referência (<i>MRAC</i>)	23
3.1 Esquema de controle do <i>I/O MRAC</i>	25
3.2 Equação de casamento	28
3.3 Equação do erro de saída e_0	29
3.4 Parametrização do controle	30
3.5 Lei de adaptação - Caso: grau relativo $n^* = 1$	32
4 Controlador suave a estrutura variável (<i>SSC</i>)	35
4.1 Definição do problema	36
4.2 <i>SSC</i> - Caso: grau relativo $n^* = 1$	38
4.2.1 Análise de estabilidade	42
4.2.1.1 Dinâmica não-modelada	43
4.3 <i>SSC</i> - Caso: grau relativo $n^* \geq 1$	46
4.3.1 Análise de estabilidade	49
4.3.1.1 Dinâmica não-modelada	51

4.4	Aspectos de implementação prática	53
4.4.1	Análise durante o deslizamento ideal	55
4.4.2	Análise durante o deslizamento real - (análise de alto ganho)	57
4.4.3	Sintonia do controlador <i>SSC</i>	59
5	Efeitos da Quantização	66
5.1	O problema	67
5.2	Possíveis soluções	69
5.3	Filtro de <i>Kalman</i>	71
5.3.1	Filtro de <i>Kalman</i> discreto	72
5.3.2	Filtro de <i>Kalman</i> discreto - versão estacionária	75
5.3.3	Modelo do sinal	77
5.3.4	Projeto e implementação do filtro de <i>Kalman</i>	82
5.3.4.1	Análise discreta	85
5.3.4.2	Análise contínua	86
5.3.5	Estimativas do filtro de <i>Kalman</i>	87
5.4	Comparação com filtro de 1ª ordem	88
6	Simulações Numéricas	92
6.1	Resultados de simulações numéricas	93
6.1.1	Controlador a estrutura variável <i>VSC</i> ($n^* = 1$)	94
6.1.2	Controlador suave a estrutura variável <i>SSC</i> ($n^* = 1$)	101
6.1.3	Controlador suave a estrutura variável <i>SSC</i> ($n^* = 2$)	108
6.1.3.1	<i>SSC</i> ($n^* = 2$) utilizando filtro de <i>Kalman</i>	110
6.2	Comparações	112
7	Resultados experimentais	115
7.1	Modelagem e Identificação	116
7.2	Implementação do controlador	122
7.3	Resultados experimentais	123
7.3.1	Comparações	128
8	Discussão e Conclusões Gerais	133
	Apêndices	135
A	Desenvolvimento da equação do erro de saída do <i>MRAC</i>	135
A.1	Abordagem: espaço de estados	135
A.2	Equivalência entre as abordagens	138
B	Controlador suave a estrutura variável <i>SSC</i>	142
B.1	Demonstração da Proposição 1	142
B.2	Demonstração do Teorema 4.1	142
C	Filtro de <i>Kalman</i>	145
C.1	Filtro de <i>Kalman</i> contínuo	145
C.2	Amostragem de sistemas aleatórios	147
C.3	Modelo do sinal	149
C.4	Modelagem do <i>encoder</i> - análise do erro de quantização	151

Lista de Figuras

2.1	Campos vetoriais. Condição de deslizamento.	10
2.2	Diagrama em blocos representativo do Lema 2.1.	22
3.1	Estrutura do controlador adaptativo por modelo de referência (<i>MRAC</i>), planta desconhecida.	27
3.2	Esquema equivalente da estrutura do controlador por modelo de referência (<i>MRC</i>), parâmetros ideais, planta conhecida e $k^* := \frac{K_p}{K_m}$	28
3.3	<i>MRAC</i> , planta desconhecida, parametrização do controle.	31
4.1	Diagrama em blocos representativo do Lema 4.1.	39
4.2	<i>VS-MRAC</i> para $n^* = 1$	39
4.3	Controlador suave a estrutura variável (<i>SSC</i>) para $n^* = 1$	41
4.4	Controlador suave a estrutura variável (<i>SSC</i>) utilizando um operador $L(p)$ para compensação de grau relativo.	47
4.5	Controlador suave a estrutura variável (<i>SSC</i>) utilizando um filtro $L(p)/F(\tau_F p)$ para aproximar o operador diferencial $L(p)$	47
4.6	Filtro <i>lead</i> a estrutura variável (<i>VSLF</i>) utilizado para implementar a aproximação $L(p)/F(\tau_F p)$ do operador diferencial $L(p)$	48
4.7	Equivalente linear para o controlador suave a estrutura variável (<i>SSC</i>) durante o regime deslizante. O controlador possui ação integral com alto ganho.	57
4.8	Lugar das raízes (exemplo 4.1) do sistema de malha fechada. Análise de alto ganho. $F^{-1}(\tau_F p) = 1/(\tau_F p + 1)$	59
4.9	Lugar das raízes (exemplo 4.1) do sistema de malha fechada. Análise de alto ganho. $F^{-1}(p) = 1/(\frac{1}{k_{c2}}p^2 + \frac{k_{c1}}{k_{c2}}p + 1)$	60
4.10	Lugar das raízes (exemplo 4.2) do sistema de malha fechada considerando a dinâmica do atuador. Análise de alto ganho com $F^{-1}(\tau_F p) = 1/(\tau_F p + 1)$	61
4.11	Lugar das raízes (exemplo 4.2) do sistema de malha fechada considerando a dinâmica do atuador. Análise de alto ganho com $F^{-1}(p) = 1/(\frac{1}{k_{c2}}p^2 + \frac{k_{c1}}{k_{c2}}p + 1)$	62
4.12	Equivalente linear para o controlador suave a estrutura variável (<i>SSC</i>) em alto ganho. O relé é substituído por um ganho constante g	63

4.13	Influência do parâmetro τ . Controlador (<i>SSC</i>) para $n^* = 2$ (exemplo 4.3). Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $k^{nom} = 40$, $\tau_F = 1/100$. Sinal de controle u em p.u. e erro de saída e_0 em graus. a) $\tau = 1/300$, b) $\tau = 1/200$, c) $\tau = 1/100$	64
4.14	Influência de k^{nom} . Resultados simulados (exemplo 4.4) do controlador (<i>SSC</i>) para $n^* = 2$. Passo de integração 10^{-4} , $\tau = 1/300$, $\tau_F = 1/100$. Erro de rastreamento e_0 em graus e sinal de controle u em p.u.. a) $k^{nom} = 30$, b) $k^{nom} = 40$, a) $k^{nom} = 80$	64
4.15	Influência do parâmetro τ_F . Atraso no sistema de controle. Controlador <i>SSC</i> (exemplo 4.5) e ruído de quantização (passo de $2\pi/4000rad$), $k^{nom} = 70$, $\tau = 1/300$. Sinal de controle u em p.u. e erro de saída e_0 em graus. a) $\tau_F = 1/40$, b) $\tau_F = 1/80$, c) $\tau_F = 1/200$	65
5.1	Controlador PD.	68
5.2	Resultados simulados (exemplo 5.1) do controlador PD sob condições ideais. a) y e y_m em graus, b) erro de saída e_0 em graus, c) sinal de controle u em p.u.	69
5.3	Resultados simulados (exemplo 5.1) do controlador PD sob ruído de quantização (passo de 0.00157 rad). a) y e y_m em graus, b) erro de saída e_0 em graus, c) sinal de controle u em p.u..	70
5.4	Modelo de processo aleatório.	78
5.5	ω é um substituto para \ddot{y}_p	80
5.6	ω é um substituto para $\ddot{y}_p - \ddot{y}_m$	80
5.7	Topologia para o projeto do ganho de <i>Kalman</i>	83
5.8	Topologia para a implementação do filtro de <i>Kalman</i>	84
5.9	Projeto do ganho, ajusta-se Q_c até a estimativa passar por entre a “escada” (y em graus).	85
5.10	Disposição dos pólos e do zero do filtro de <i>Kalman</i> contínuo estacionário.	87
5.11	Estimativa do filtro de <i>Kalman</i> , sem quantização. $y(t) = 10sen(2\pi t/T)$ com y , \hat{y} e erro em graus. $T = 1$ (a,b), $T = 10$ (c,d) e $T = 100$ (e,f).	88
5.12	Estimativa do filtro de <i>Kalman</i> , com quantização ($\theta = 0.09^\circ$). Sinal quantizado dado por: $y(t) = 10sen(2\pi t/T)$, com y , \hat{y} e erro em graus. $T = 1$ (a,b), $T = 10$ (c,d) e $T = 100$ (e,f).	89
5.13	Resposta em frequência do filtro de <i>Kalman</i> contínuo estacionário - Magnitude e Fase.	90
5.14	Comparação entre a estimativa do filtro de <i>Kalman</i> e a estimativa de um filtro de 1ª ordem. Sinal quantizado dado por: $10sen(2\pi t/10)$ com passo de quantização $\theta = 0.09^\circ$	90
5.15	Comparação entre o filtro de <i>Kalman</i> (-) e o filtro de 1ª ordem (o). Diagrama de <i>Bode</i>	91
6.1	Exemplo 6.1. Resultados simulados do controlador <i>VSC</i> . Deslizamento ideal. Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$. a) y e y_m b) erro de saída e_0 c) sinal de controle u	95
6.2	<i>Chattering</i> numérico. Resultados simulados (exemplo 6.1) do controlador <i>VSC</i> . Erro de saída e_0 ($f = 1$). Passo de integração: a) 10^{-3} , b) 10^{-4} , c) 10^{-5}	96

6.3	Exemplo 6.2. Rejeição a perturbação de entrada ($d_e(t) = 0.7\mathbb{I}(t - 3)$). Controlador <i>VSC</i> . Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$. a) y e y_m b) erro de saída e_0 c) perturbação de entrada d_e	97
6.4	Dinâmica não-modelada ($G_m(p) = \frac{10}{p+10}$). Controlador <i>VSC</i> (exemplo 6.2). Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$. a) y e y_m b) erro de saída e_0 c) sinal de controle u	98
6.5	Zona linear δ_0 para atenuar <i>chattering</i> . Controlador <i>VSC</i> (exemplo 6.3). Sinal de controle u e erro de saída e_0 . Passo de integração 10^{-4} . Perturbação de entrada ($d_e = 0.7\mathbb{I}(t - 3)$). a) u : $\delta_0 = 0$, b) e_0 : $\delta_0 = 0$, c) u : $\delta_0 = 0.05$, d) e_0 : $\delta_0 = 0.05$, e) u : $\delta_0 = 0.1$, f) e_0 : $\delta_0 = 0.1$	100
6.6	Filtro da média para atenuar <i>chattering</i> . Resultados simulados (exemplo 6.3) do controlador <i>VSC</i> . Passo de integração 10^{-4} , $\delta_0 = 0$. a) u : $\tau = 0$, b) y, y_m : $\tau = 0$, c) u : $\tau = 1/100$, d) y, y_m : $\tau = 1/100$, e) u : $\tau = 1/40$, f) y, y_m : $\tau = 1/40$	100
6.7	Exemplo 6.4. Resultados simulados do controlador <i>SSC</i> caso $n^* = 1$. Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $\delta_0 = 0$, $\tau = 1/300$, $k_{nom} = 0.4$. a) y e y_m b) erro de saída e_0 c) sinal de controle. u	102
6.8	Erros auxiliares. Resultados simulados (exemplo 6.4) do controlador <i>SSC</i> caso $n^* = 1$. Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $\delta_0 = 0$, $\tau = 1/300$, $k_{nom} = 0.4$. a) erro de predição \hat{e}_0 e \bar{e}_0 c) erro na predição (ou erro auxiliar) ε_0 c) saída U_0 do relé.	103
6.9	<i>Chattering</i> numérico. Controlador suave <i>SSC</i> caso $n^* = 1$ (exemplo 6.4). Sinal de controle u e erro de saída e_0 . a) u : Passo de integração 10^{-4} , b) e_0 : Passo de integração 10^{-4} , c) u : Passo de integração 10^{-5} , d) e_0 : Passo de integração 10^{-5}	104
6.10	Zona linear δ_0 para aliviar <i>chattering</i> numérico. Resultados simulados (exemplo 6.4) do controlador suave <i>SSC</i> caso $n^* = 1$. Sinal de controle u e erro de saída e_0 . a) u : $\delta_0 = 0$, b) e_0 : $\delta_0 = 0$, c) u : $\delta_0 = 1 \times 10^{-5}$, d) e_0 : $\delta_0 = 1 \times 10^{-5}$, e) u : $\delta_0 = 2 \times 10^{-5}$, f) e_0 : $\delta_0 = 2 \times 10^{-5}$	104
6.11	Rejeição a perturbação de entrada. Resultados simulados (exemplo 6.5) do controlador <i>SSC</i> caso $n^* = 1$. Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $\delta_0 = 0$, $\tau = 1/300$, $k_{nom} = 0.4$. a) y e y_m b) erro de saída e_0 c) sinal de controle u	105
6.12	Perturbação de entrada (erros auxiliares). Resultados simulados (exemplo 6.5) do controlador <i>SSC</i> caso $n^* = 1$. Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $\delta_0 = 0$, $\tau = 1/300$, $k_{nom} = 0.4$. a) erro de predição \hat{e}_0 e \bar{e}_0 b) erro na predição (ou erro auxiliar) ε_0 c) saída U_0 do relé.	106
6.13	Dinâmica não-modelada. Controlador <i>SSC</i> caso $n^* = 1$ (exemplo 6.5). Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $\delta_0 = 0$, $\tau = 1/300$, $k_{nom} = 2$, $\mu = 1/10$. a) y e y_m b) erro de saída e_0 c) sinal de controle u	106
6.14	Dinâmica não-modelada (erros auxiliares). Resultados simulados (exemplo 6.5) do controlador <i>SSC</i> caso $n^* = 1$. Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $\delta_0 = 0$, $\tau = 1/300$, $k_{nom} = 2$, $\mu = 1/10$. a) erro de predição \hat{e}_0 e \bar{e}_0 b) erro na predição (ou erro auxiliar) ε_0 c) saída U_0 do relé.	107
6.15	Resultados simulados (exemplo 6.6) do controlador <i>SSC</i> para $n^* = 2$. a) y e y_m em graus, b) erro de saída e_0 em graus, c) sinal de controle u em p.u.	109

6.16	Resultados simulados (exemplo 6.6) do controlador <i>SSC</i> para $n^* = 2$. Erros auxiliares. a) \bar{e}_0 e \hat{e}_0 b) erro na predição ε_0 c) saída U_0 do relé em p.u..	109
6.17	Resultados simulados (exemplo 6.7) do controlador <i>SSC</i> sob condições ideais (a,c,e) e sob ruído de quantização (b,d,f) (passo de 0.00157 rad), com filtragem de <i>Kalman</i> . a) e b) y e y_m em graus, c) e d) erro de saída e_0 em graus, e) e f) sinal de controle u em p.u.	111
6.18	Erros auxiliares (exemplo 6.7) do controlador <i>SSC</i> sob condições ideais (a,c,e) e sob ruído de quantização (b,d,f) (passo de 0.00157 rad), com filtragem de <i>Kalman</i> . a) e b) \bar{e}_0 e \hat{e}_0 , c) e d) erro na predição ε_0 , e) e f) saída U_0 do relé em p.u..	111
6.19	Controlador <i>SSC</i> (exemplo 6.8) utilizando um filtro de 1 ^a ordem (a,c,e) para atenuar ruído de quantização em comparação com o filtro de <i>Kalman</i> (b,d,f). a) e b) y e y_m em graus, c) e d) erro de saída e_0 em graus, e) e f) sinal de controle u em p.u.	112
6.20	Resultados de simulação. Comparação entre o controlador <i>SSC</i> (a,c,e) e o controlador <i>VSC</i> (b,d,f). a) e b) y e y_m em graus, c) e d) erro de saída e_0 em graus, e) e f) sinal de controle u em p.u.	113
6.21	Resultados de simulação. a) <i>SSC</i> : y, y_m ; b) <i>PD</i> : y, y_m ; c) <i>SSC</i> : e_0 ; d) <i>PD</i> : e_0 ; e) <i>SSC</i> : u ; f) <i>PD</i> : u . Erro de saída e_0 em graus, sinal de controle u em p.u. e y, y_m em graus.	114
7.1	Helicóptero com 1 grau de liberdade (1 <i>d.o.f.</i>).	116
7.2	Relação estática entre sinal de controle u (em p.u.) e a velocidade angular ω (em <i>rad/s</i>). Característica do empuxo da hélice.	119
7.3	Resposta experimental de velocidade do motor (ω em <i>rad/s</i>) devido a um degrau de 0.03 p.u. no sinal de controle u (constante de tempo $\tau_m = 0.22s$).	120
7.4	Relação estática entre sinal de controle u (em p.u.) e ângulo de <i>pitch</i> θ_p (em <i>rad</i>).	120
7.5	Relação estática entre sinal de controle u (em p.u.) e força u_F (em <i>N</i>), aproximada por um ganho de 0.45.	121
7.6	Validação do modelo linear $G(p) = \frac{5.22}{(p^2 - (3.1)^2)} \frac{1}{(0.22p + 1)}$ para o helicóptero com um grau de liberdade. a) <i>EXP</i> : y ; b) <i>SIM</i> : y ; c) <i>EXP</i> : e_0 ; d) <i>SIM</i> : e_0 ; e) <i>EXP</i> : u ; f) <i>SIM</i> : u . Sinal de controle u em p.u., erro de saída e_0 em graus e saída da planta y em graus.	122
7.7	Exemplo 7.1. Resultados experimentais do controlador (<i>SSC</i>) para $n^* = 2$. a) y e y_m em graus, b) erro de saída e_0 em graus, c) sinal de controle u em p.u.	124
7.8	Exemplo 7.1. Erros auxiliares. Resultados experimentais do controlador (<i>SSC</i>) para $n^* = 2$. a) \bar{e}_0 e \hat{e}_0 em graus, b) erro na predição ε_0 em graus, c) saída U_0 do relé em p.u..	125
7.9	Exemplo 7.2. Resultados experimentais do controlador (<i>SSC</i>) utilizando filtro de <i>Kalman</i> para atenuar o ruído de quantização. a) y e y_m em graus, b) erro de saída e_0 em graus, c) sinal de controle u em p.u.	127

7.10	Erros auxiliares (exemplo 7.2). Resultados experimentais do controlador (<i>SSC</i>) utilizando filtro de <i>Kalman</i> para atenuar o ruído de quantização. a) \bar{e}_0 e \hat{e}_0 , b) erro na predição ε_0 , c) saída U_0 do relé em p.u.	127
7.11	Controlador <i>SSC</i> (exemplo 7.3) utilizando um filtro de 1ª ordem (b,d,f) para atenuar ruído de quantização em comparação com o filtro de <i>Kalman</i> (a,c,e). a) e b) y e y_m em graus, c) e d) erro de saída e_0 em graus, e) e f) sinal de controle u em p.u.	129
7.12	Resultados experimentais. a) <i>SSC</i> - $\delta_0 = 10^{-5}$: u ; b) <i>SSC</i> - $\delta_0 = 10^{-5}$: e_0 ; c) <i>VSC</i> - $\delta_0 = 0.07$: u ; d) <i>VSC</i> - $\delta_0 = 0.07$: e_0 ; e) <i>SSC</i> - $\delta_0 = 0.007$: u ; f) <i>SSC</i> - $\delta_0 = 0.007$: e_0 . Erro de saída e_0 em graus, sinal de controle u em p.u. e sinal de referência $r(t) = 0.17 \text{ sqw}(t/20)$	130
7.13	Exemplo 7.5. Resultados experimentais. a) <i>SSC</i> : y, y_m ; b) <i>PD</i> : y, y_m ; c) <i>SSC</i> : e_0 ; d) <i>PD</i> : e_0 ; e) <i>SSC</i> : u ; f) <i>PD</i> : u . Erro de saída e_0 em graus, sinal de controle u em p.u. e y, y_m em graus.	132
C.1	Modelo $\frac{1}{p^2}$ com saída \bar{y}_p e entrada ω (ruído branco com intensidade $Q_c = 1$).	150
C.2	Modelo $\frac{1}{p^2+2}$ com saída \bar{y}_p e entrada ω (ruído branco com intensidade $Q_c = 1$).	151
C.3	Modelo do <i>encoder</i> óptico.	152
C.4	Modelo do erro de quantização.	152
C.5	Modelo do erro de quantização simplificado.	152

Lista de Tabelas

7.1	Parâmetros do controlador <i>SSC</i> com filtro <i>lead</i>	124
7.2	Parâmetros do controlador <i>SSC</i> com filtro de Kalman.	126
7.3	Parâmetros do controlador <i>SSC</i>	128
7.4	Parâmetros dos controladores <i>SSC</i> e <i>PD</i>	131

Capítulo 1

Introdução

O projeto de sistemas de controle automáticos está baseado no princípio de controle através de sinais de erro, ou princípio da realimentação negativa. Sabe-se, de longa data, ver (Tsytkin 1955), que o aumento dos ganhos do controlador do sistema em malha fechada pode reduzir a influência de distúrbios externos e de variações dos parâmetros do objeto controlado (planta).

Porque, então, a realimentação de alto ganho não pode sempre ser utilizada para atenuar a influência de distúrbios externos e/ou variações na planta ?. A resposta para esta pergunta é conhecida e reside no fato de que essas propriedades marcantes da realimentação de alto ganho só podem ser aplicadas a sistemas em que a estabilidade em malha fechada está assegurada mesmo com o aumento dos ganhos do controlador. Entretanto, isso nem sempre é atendido.

A presença de atrasos, inércias, não-linearidades e ruídos de medição, impossibilita o aumento irrestrito dos ganhos do controlador sem destruir, ao mesmo tempo, a estabilidade do sistema.

Uma tentativa de contornar este problema é a introdução de algum tipo de compensação. Entretanto, isso confronta-se com outro problema: o conhecimento exato das características da planta a qual, freqüentemente, é desconhecida. Além disso, ao se considerar que as características da planta podem variar com o tempo, é fácil conceber as dificuldades de aplicar estratégias de controle tradicionais.

Nestes caso, em que se tem insuficiente (ou nenhuma) informação *a priori* a respeito das características da planta, os métodos clássicos de controle não são aplicáveis, o que

leva o projetista de controle a buscar soluções dentro do contexto de controle robusto, ver (Zhou, Doyle & Glover 1994), ou soluções baseadas em adaptação, ver (Ioannou & Sun 1996). Por outro lado, deve ser mencionado que, em algumas aplicações, a adaptação é utilizada para se obter informações a respeito da planta (identificação), para que em um passo seguinte, seja utilizado algum método clássico de controle.

Neste trabalho é apresentado um esquema de controle adaptativo que utiliza estrutura variável como mecanismo de adaptação. O efeito de uma realimentação de alto ganho pode ser obtido tanto diretamente, através do aumento direto dos ganhos, quanto, indiretamente, criando os chamados modos deslizantes em sistemas de controle automático a relé e em sistemas a estrutura variável.

Por um longo tempo, controle a relé foi utilizado em aplicações de engenharia de controle, devido principalmente a sua simplicidade. Entretanto, a comunidade ocidental de controle tem direcionado sua atenção para a teoria de sistemas a estrutura variável (*VSS - variable structure systems*), especialmente na forma conhecida por controle por modos deslizantes (*SMC - sliding mode control*), a partir dos trabalhos de (Emelyanov & Taran 1963*a*), (Emelyanov & Taran 1963*b*) de (Taran 1964*a*) e (Taran 1964*b*) e, posteriormente, com os trabalhos de (Emelyanov 1970), (Itkis 1976) e (Utkin 1978).

Controle a estrutura variável caracteriza-se pela utilização de uma lei de controle que chaveia, seguindo uma dada regra, entre um conjunto de funções possíveis das variáveis de estado da planta, mudando, assim, a estrutura do sistema em malha fechada.

Uma motivação para esta abordagem consiste na possibilidade de combinar propriedades úteis de cada uma das estruturas do sistema realimentado. Além disso, podem ser obtidas novas propriedades que **não são inerentes a nenhuma das estruturas usadas** (por exemplo: um sistema assintoticamente estável pode ser constituído de duas estruturas instáveis). Outro aspecto é a possibilidade adicional de serem obtidas trajetórias que descrevem um novo tipo de movimento (não característico de nenhuma estrutura) denominado de **modo deslizante**. Este tipo de movimento é, sob certas condições, invariante em relação às incertezas da planta, propriedade conhecida como **princípio da invariância**.

Em geral, as funções de chaveamento são projetadas de tal forma que as trajetórias do sistema alcancem e mantenham-se em uma superfície (**superfície de des-**

lizamento), no espaço de estado, que especifica um comportamento desejado para a dinâmica do sistema em malha fechada.

Sistemas a estrutura variável (*VSC*) oferecem significantes vantagens: bom comportamento no transiente, estabilidade exponencial global, capacidade de rejeitar perturbações não-modeladas, insensibilidade a não-linearidades da planta ou variações dos parâmetros e destacável robustez com respeito estabilidade e desempenho. Entretanto, para ser justo, deve-se destacar as duas maiores dificuldades ao se aplicar controladores a estrutura variável:

1. a necessidade geral de ter acesso ao vetor de estados completo para implementar a superfície de chaveamento e,
2. a possível ocorrência do indesejável fenômeno de trepidação (*chattering*) induzido por não-idealidades como pequenos atrasos ou dinâmicas não-modeladas na planta. Isto leva ao conhecido *modo deslizante real* (Utkin 1992).

No *modo deslizante ideal*, o estado permanece na superfície de deslizamento enquanto que o sinal de controle possui frequência infinita (no sentido limite em que as não-idealidades tendem a zero). No deslizamento real, as variáveis de controle oscilam em alta, mas finita, frequência. Este fenômeno é denominado de *chattering*. Certamente, na prática, frequência infinita não pode ser realizada. Sendo assim, o deslizamento ideal será referido quando a frequência de chaveamento for muito maior do que a banda passante do sistema.

Uma abordagem clássica de se obter sinais de controle suaves a partir de sistemas a estrutura variável consiste em realizar aproximações contínuas das funções de chaveamento (Utkin 1992). Entretanto, controle por modos deslizantes com zonas lineares (*boundary layer*) não apresenta um desempenho melhor do que controle proporcional-derivativo (PD) devido ao fato de que o ganho na região linear não pode exceder o ganho do controlador PD, devido ao ruído e a discretização (Glatzl, Murphy, Wen & Kopacek 1993).

Uma maneira de se preservar modos deslizantes ideais foi apresentada em (Bondarev, Bondareva, Kostyleva & Utkin 1985) onde a idéia principal era a utilização de observadores de estado assintóticos. A restrição principal desta abordagem é que um bom

conhecimento do modelo da planta, incluindo perturbações externas, é necessário para uma estimação razoável.

Outro desafio a ser superado é a necessidade geral de ter acesso ao vetor de estados completo para implementar a superfície de chaveamento. Para evitar a necessidade de medir todos os estados, uma técnica é introduzir conceitos de controle adaptativo por modelo de referência (Narendra & Valavani 1978, Narendra, Lin & Valavani 1980, Sastry 1984) em controle a estrutura variável (Ambrosino, Celentano & Garofalo 1984, Bartolini & Zolezzi 1988). Seguindo este conceito o *VS-MRAC* (*Variable Structure Model-Reference Control*) foi proposto em (Hsu 1990). O controlador pode ser implementado utilizando apenas medidas de entrada e saída (*I/O*).

Em (Hsu, Araújo & Costa 1994) (Hsu, Lizarralde & Araújo 1997) verifica-se que, de fato, o *VS-MRAC* é baseado em um erro de predição. Pode-se obter vantagem deste fato para evitar o fenômeno de *chattering*, ver (Hsu 1997a, Hsu 1997b). A vantagem da abordagem baseada em erro de predição é que o controlador não é baseado em observadores de estado e pode ser potencialmente aplicado a sistema com grandes incertezas.

Este trabalho aborda aspectos relacionados a análise teórica, ao projeto e implementação prática do controlador suave a estrutura variável (*SSC - Smooth Sliding Controller*), proposto em (Hsu 1997a) e baseado no *VS-MRAC*. Este controlador é utilizado para controlar sistemas desconhecidos monovariáveis (*SISO*) com grau relativo arbitrário. Visando obter um sinal de controle suave, evitando o fenômeno conhecido por *chattering*, sem utilizar o conceito de “camada de fronteira “ (*boundary layer*), o esquema proposto utiliza um erro de predição definido apropriadamente em conjunto com uma filtragem do sinal de controle. O sistema completo do erro é globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual, ver (Peixoto, Lizarralde & Hsu 2002). Além disso, através de hipóteses adicionais, o sistema apresenta modos de deslizamento ideais. O caso de plantas com grau relativo $n^* \geq 1$, considerando perturbação de entrada e dinâmicas não-modeladas, é analisado completamente.

Resultados experimentais mostraram que a implementação direta do *SSC* não apresenta um desempenho satisfatório, devido a ruído de medição introduzido pela quantização do sinal inerente aos *encoders* ópticos utilizados como sensor de posição, ver

(Peixoto, Lizarralde & Hsu 2001). O efeito da quantização é drasticamente amplificado pela ação derivativa (implícita ou explícita) dos controladores. É apresentado, então, uma solução que atenua o ruído de quantização baseada em uma filtragem ótima, do ponto de vista estatístico, de *Kalman*, utilizada por Bélanger em (Bélanger 1992, Bélanger, Dobrovolny, Helmy & Zhang 1998), veja também (Jaritz & Spong 1996, Janabi-Sharifi, Hayward & Chen 2000). O filtro é projetado utilizando apenas um simples modelo para a saída da planta, independente dos parâmetros da planta, e que é denominado de modelo do sinal. Este modelo está relacionado aos chamados *shaping filters* (Lewis 1986), originalmente utilizados como modelos para ruídos coloridos (sistemas lineares excitados por ruído branco gerando na saída o ruído colorido desejado).

Neste trabalho, o *SSC* é implementado experimentalmente em um helicóptero com um grau de liberdade (*1 d.o.f.*), controlado por uma placa de controle equipada com um processador de sinais digital (*DSP*). Comparações com controladores lineares clássicos (controlador PD) e com controladores a estrutura variável padrão (*VSC*) mostram as vantagens do proposto controlador suave a estrutura variável. Além disso, o sistema mecânico foi identificado, resultando em um modelo não-linear. Este modelo foi validado e sua versão linearizada foi utilizada para gerar resultados através de simulações.

1.1 Notações e definições

1. $\|x\|$ denota a norma *Euclidiana* do vetor x .
2. A norma $L_{\infty e}$ de um sinal $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é definida como em (Ioannou & Sun 1996) por

$$\|x_t\|_{\infty} := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|x(\tau)\|$$

3. O símbolo “ p ” representa tanto a variável de *Laplace* quanto o operador diferencial (d/dt), de acordo com o contexto.
4. Será adotada a representação mista no domínio do tempo (espaço de estados) e no domínio da frequência (transformadas de *Laplace* e operadores). Entretanto,

para dar um significado preciso para tal representação, os seguintes conceitos e notações serão adotados. A saída y de um sistema linear invariante no tempo com função de transferência $H(p)$ e entrada u é denotada por $H(p)u$. Para $H(p)$ estável (estritamente), considere uma arbitrária realização estável, possivelmente não-mínima

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

Seja $h(t)$ a resposta ao impulso de $H(p)$ e y^0 o transiente devido ao estado inicial $x^0(0)$ do sistema homogêneo

$$\dot{x}^0 = Ax^0, \quad y^0 = Cx^0$$

O estado x^0 é denominado de estado transiente. O símbolo $(.)^0$ será utilizado para identificar termos transientes. Desta forma a seguinte notação será adotada:

$$y(t) = H(p)u(t) = h(t) * u(t) + y^0(t)$$

Operadores de convolução serão denotados por

$$H(p) * u (= h(t) * u(t))$$

Logo $Hu = H * u + y^0$.

5. Um operador $H(p)$ é de ordem $\mathcal{O}(\tau)$ se e somente se

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\|H(p)\|}{\tau}$$

existe, onde $\|H(p)\|$ é uma norma induzida do tipo L_∞ .

1.2 Organização da Tese

Este trabalho está organizado da seguinte forma: o capítulo 2 e o capítulo 3 apresentam conceitos básicos de sistemas a estrutura variável e controle por modelo de referência, respectivamente, que serão aplicados no capítulo 4, onde é apresentado o controlador

suave a estrutura variável (*SSC*) incluindo sua análise de estabilidade e aspectos de implementação prática. O capítulo 5 apresenta o filtro de *Kalman* como solução para atenuar o ruído de quantização. Por fim, no capítulo 6 e no capítulo 7 encontram-se resultados obtidos através de simulações e resultados experimentais (obtidos com um helicóptero com 1 grau de liberdade), respectivamente. Conclusões gerais e perspectivas futuras são apresentados no capítulo 8.

Capítulo 2

Sistemas a estrutura variável

Um dos aspectos mais intrigantes do controle por modos deslizantes (*SMC - sliding mode control*), é que a natureza descontínua da ação de controle tem como função principal o chaveamento entre sistemas com estruturas diferentes, gerando um novo tipo de movimento, denominado de **modo deslizante** (ver (Emelyanov 1970), (Itkis 1976) e (Utkin 1978)). Durante este movimento, a trajetória do estado x pode não ser nenhuma das trajetórias que descrevem os sistemas que estão sendo chaveados. A trajetória do estado se desloca por uma superfície denominada **superfície de deslizamento**, denotada por $s(x) = 0$. Por outro lado, no espaço de estados, o chaveamento ocorre em uma superfície denominada de **superfície de chaveamento**. Para o caso particular em que o sinal de controle é escalar, estas superfícies se confundem.

Controle a estrutura variável (*VSC*) baseado em modos deslizantes, ou simplesmente, controle por modos deslizante (*SMC*), pode ser interpretado como um tipo especial de técnica de controle não-linear robusto. A característica principal de controladores a estrutura variável é que, uma vez que o modo deslizante tenha sido alcançado, o desempenho do sistema torna-se insensível a incertezas tanto devido a planta (variações dos seus parâmetros) quanto a perturbações. Esta propriedade é conhecida por **propriedade da invariância**, i.e. quando o regime deslizante é alcançado a dinâmica invariante é regida pela dinâmica correspondente a superfície de deslizamento, que é escolhida pelo projetista.

Do ponto de vista matemático, modo deslizante é originalmente concebido para sistemas dinâmicos contínuos no tempo que em malha aberta sejam representados por

uma equação diferencial ordinária. A ação de controle descontínua, referida como controle a estrutura variável (*VSC*) é também definida no domínio do tempo contínuo. O sistema realimentado resultante, sistema a estrutura variável (*VSS*), é, portanto, também definido no domínio do tempo contínuo, e é governado por equações diferenciais com lado direito descontínuo.

2.1 Sistema de controle descontínuo

Considere sistemas de controle do seguinte tipo:

$$\dot{x} = h(x, t, u) \quad (2.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}$, com u sendo uma lei de controle descontínua, e $h(\cdot)$ é um campo vetorial suave (contínuo no sentido de *Lipschitz*).

Suponha que a dinâmica desejada para o sistema é obtida com trajetórias restritas à superfície de deslizamento $s(x) = 0$. Considera-se que a superfície $s(x)$ é contínua em x .

O sinal de controle é descontínuo e dado por:

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{se } s(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{se } s(x) < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $u^+(x, t)$ e $u^-(x, t)$ são funções contínuas.

O sistema formado por (2.1) e (2.2) é um sistema a estrutura variável e pode ser representado por:

$$\dot{x} = \begin{cases} h^+ = h(x, t, u^+) & \text{se } s(x) > 0 \\ h^- = h(x, t, u^-) & \text{se } s(x) < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

2.1.1 Existência de modo deslizante

Para o caso particular de sistemas *SISO*, a superfície de chaveamento é a mesma que a superfície de deslizamento ($s(x) = 0$). A lei de controle pode ser escolhida de tal forma que as trajetórias do sistema permaneçam sobre a própria superfície de chaveamento

durante um intervalo de tempo diferente de zero. Isto ocorrerá se, na vizinhança de $s(x) = 0$, as trajetórias de estado estiverem direcionadas para a superfície. De outra forma, as projeções dos campos vetoriais $h(x, t, u^+)$ e $h(x, t, u^-)$, sobre o gradiente de $s(x)$, devem apontar em sentido contrário como indica a figura 2.1 (para o caso em que $x \in \mathbb{R}^2$).

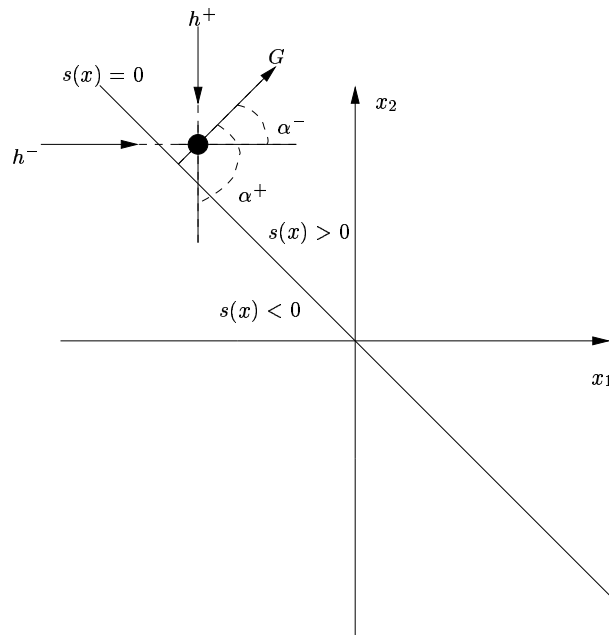


FIGURA 2.1: Campos vetoriais. Condição de deslizamento.

A condição para que exista deslizamento pode ser expressa em função de $s(x)$ da seguinte forma. Considere um instante t^* em que o estado $x(t^*) = x^*$ pertença a alguma trajetória de um dos sistema chaveados, tal que $x(t^*)$ esteja infinitamente próximo e acima da superfície $s(x) = 0$, como mostra a figura 2.1. Nesta condição $s(x^*) > 0$.

Considere a derivada temporal de $s(x, t)$

$$\dot{s} = G\dot{x}$$

onde G é o gradiente de $s(x)$ definido por:

$$G = \frac{\partial}{\partial x}s(x, t) = \nabla_x s \quad (2.4)$$

Note que para $t = t^*$ tem-se:

$$\dot{s} = G\dot{x} = G^*h_+^* \quad (2.5)$$

onde $h_+^* = h(x^*, t^*, u^+)$ e G^* é gradiente G de $s(x)$ em $x = x^*$.

De acordo com (2.5), para o ponto x^* , \dot{s} pode ser interpretado como sendo o produto escalar entre o campo vetorial h_+^* e o gradiente G^* de $s(x)$ em $x = x^*$. Ao mesmo tempo, para que a superfície $s(x) = 0$ seja uma superfície de deslizamento, a projeção do campo vetorial h_+^* deve apontar no sentido da superfície. A figura 2.1 exhibe o gradiente de $s(x)$ em $x = x^*$ (normal a superfície $s(x) = 0$) e o campo vetorial no mesmo ponto.

Repare que o sinal de \dot{s} depende do ângulo α (α^+ e α^-) entre o gradiente e o campo vetorial. Portanto, quando o campo vetorial h_+^* apontar para a superfície o ângulo α^+ será obtuso resultando em $\dot{s} < 0$.

Analogamente para um ponto abaixo, mas infinitamente próximo, de $s(x) = 0$. Neste caso $s(x^*) < 0$ e $G^*h_-^* > 0$, com $h_-^* = h(x^*, t^*, u^-)$. Portanto é válida a seguinte condição, necessária e suficiente, para que $s(x) = 0$ seja uma superfície de deslizamento.

$s(x) = 0$ é uma superfície de deslizamento $\Leftrightarrow s\dot{s} < 0$
--

2.2 Descrição matemática de modos deslizantes

A descrição matemática de modos deslizantes não é simples de se obter, devido ao fato de que o sinal de controle descontínuo (equação (2.2)) e, conseqüentemente, o sistema (2.1), não são definidos sobre a superfície deslizante. Além disso, a condição de *Lipschitz* para a existência e unicidade de solução de equações diferenciais é violada na vizinhança da superfície de chaveamento. Os métodos a seguir apresentam soluções para a descrever, de maneira formal, o movimento durante o deslizamento.

2.2.1 Método de *Filippov*

Este método trata de forma axiomática a solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo. Considere a seguinte equação diferencial¹:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (2.6)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $f(x, t)$ ($f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$) é uma função definida para quase todo (x, t) e mensurável (no sentido de *Lebesgue*) em um domínio E do espaço de fase (x, t) .

Além disso, para qualquer subconjunto compacto $D \subset E$, existe uma função $A(t)$ finita (localmente integrável) em quase todo (x, t) em D , tal que:

$$\|f(x, t)\| < A(t) \quad (2.7)$$

A solução da equação diferencial com lado direito descontínuo é dada pela definição a seguir, devido a *Filippov*.

Definição 1 (*Solução no sentido de Filippov*)

Uma função vetorial $x(\cdot)$ é denominada de uma solução de (2.6), definida em $[t_0, t_1]$ se $x(\cdot)$ é absolutamente contínua em $[t_0, t_1]$ e se para quase todo $t \in [t_0, t_1]$, tem-se:

$$\dot{x} \in \mathcal{K}[f(x, t)] \quad (2.8)$$

com

$$\mathcal{K}[f(x, t)] = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu N=0} \text{conv} f[B(x, \delta) - N, t] \quad (2.9)$$

onde “conv” denota o fecho convexo, $B(x, \delta)$ é uma bola de raio δ centrada em x e μ é a medida no sentido de *Lebesgue*. A notação $\bigcap_{\mu N=0}$ denota a interseção de todos os conjuntos N de medida nula (no sentido de *Lebesgue*).

Esta definição é interpretada da seguinte forma:

- **Interpretação de $\mathcal{K}[f(x, t)]$** - considere um ponto x^s da superfície de descontinuidade $s(x) = 0$. $\mathcal{K}[f(x, t)]$ é o conjunto convexo mínimo que contém todos os

¹Note que o sistema (2.6) é coerente com o sistema (2.1), definido no início do capítulo, no sentido em que a equação (2.6) pode ser interpretada como sendo a equação diferencial que governa o sistema (2.1) em malha fechada (onde sinal de controle $u(x)$ é uma função do estado x).

valores de $f(x)$ variando x em quase (a menos de um conjunto de medida nula) toda uma vizinhança δ ($\delta \rightarrow 0$) do ponto x^s .

- **Interpretação da relação (2.8)** - esta relação, denominada de inclusão diferencial, define, de forma axiomática, que o campo vetorial da solução no sentido de *Filippov* pertence a $\mathcal{K}[f(x, t)]$. A possibilidade de rejeitar um conjunto de medida nula em $\mathcal{K}[f(x, t)]$ é que permite a definição do campo vetorial na superfície de chaveamento.

Seja $f^*(x, t)$ o campo vetorial da solução no sentido de *Filippov* ($f^*(x, t) = \dot{x}$). Caso ocorra deslizamento na superfície $s(x) = 0$ o campo vetorial f^* deve ser tangente a essa superfície, ou, equivalentemente, f^* deve ser ortogonal ao gradiente $\nabla_x s$ da superfície $s(x)$.

Neste sentido, o campo vetorial f^* pode ser determinado pelos campos vetoriais f^+ e f^- que são os valores limites de f obtidos para pontos infinitamente próximos e em lados opostos da superfície $s(x) = 0$ (a existência destes valores limites está garantida desde que a superfície $s(x) = 0$ seja regular), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f^*(x, t) \\ f^*(x, t) &= \alpha f^+(x, t) + (1 - \alpha) f^-(x, t)\end{aligned}$$

onde α é um escalar que depende das projeções f_0^+ e f_0^- dos campos f^+ e f^- sobre o gradiente $\nabla_x s$, respectivamente, da seguinte forma:

$$\alpha = \frac{f_0^-}{f_0^- - f_0^+} \quad (2.10)$$

Note que com esta definição é fácil verificar que f^* é ortogonal ao gradiente de $s(x)$, portanto, tangente a $s(x) = 0$.

A definição acima permite garantir a existência e unicidade da solução de equações diferenciais com lado direito descontínuo.

2.2.2 Método da regularização

Uma abordagem simples para o problema de encontrar uma representação matemática para o modo de deslizamento real é a introdução de imperfeições físicas (atrasos, zona morta, histerese) no dispositivo de chaveamento. Como resultado, o modo de deslizamento que apareceria na superfície descontínua dará lugar a trajetórias que são contínuas por parte. Desta forma, as dificuldades matemáticas encontradas (equações diferenciais com lado direito descontínuo, *Filippov*) para decrever o comportamento do sistema, são removidas. A equação do modo deslizante ideal correspondente é obtida através de uma análise limite quando os parâmetros que representam as imperfeições tendem a zero. Por outro lado, deve ser conhecida a natureza dessas imperfeições, o que nem sempre é fácil.

O conceito de “camada de fronteira” (*boundary layer*) permite obter as equações do deslizamento sem especificar a natureza das imperfeições.

Considere novamente o sistema (2.1) e suponha que a superfície de deslizamento exista e seja dada por $s(x) = 0$. Essencialmente, a idéia é substituir o controle u , em uma vizinhança de $s(x) = 0$, por outro controle \tilde{u} que leve em consideração todas as imperfeições (tanto do dispositivo de chaveamento quanto da planta). O movimento do sistema passa a ser descrito por:

$$\dot{x} = h(x, t, \tilde{u})$$

Assume-se que a solução da equação regularizada acima existe no sentido usual (clássico). Entretanto, esta solução resulta em um movimento, não mais somente na superfície $s(x) = 0$, mas sim, em alguma vizinhança

$$\|s(x)\| \leq \Delta, \quad \|s(x)\| = |s(x)|$$

onde Δ é uma constante positiva pequena. Este movimento é denominado de deslizamento real. Caso $\Delta \rightarrow 0$ o deslizamento real tenderá para o deslizamento ideal.

2.2.3 Método do controle equivalente

Uma forma alternativa de se representar modos deslizantes é através do conceito de controle equivalente. Este método consiste, basicamente, em encontrar um controle **contínuo** u_{eq} , chamado de **controle equivalente**, que, para uma dada condição inicial **dentro da superfície deslizante**, a trajetória resultante do sistema

$$\dot{x} = h(x, t, u_{eq})$$

coincida com a trajetória descrita pelo sistema a estrutura variável (2.1) (2.2) durante o deslizamento.

Note que, como o controle equivalente é contínuo, por definição, e o campo vetorial h é suave, também por definição, \dot{x} é uma função contínua no tempo. Portanto, para uma superfície de deslizamento $s(x)$, tem-se:

$$\dot{s} = Gh$$

onde G é o gradiente de $s(x)$, definido em (2.4).

Considere a seguinte classe de sistemas não-lineares descrita por (sistemas afim no controle):

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u \quad (2.11)$$

onde $f(\cdot)$ e $B(\cdot)$ são campos vetoriais suaves (contínuos no sentido de *Lipschitz*).

Durante o deslizamento $s(x) \equiv 0$, o que implica em $\dot{s} = 0$.

Portanto, o controle equivalente pode ser obtido da seguinte identidade:

$$\dot{s} = Gf + GBu_{eq} = 0 \quad (2.12)$$

onde G é definido em (2.4).

Caso a matrix GB seja não-singular (note que para o caso em que a entrada é monovariável GB é um escalar), o controle equivalente pode ser explicitado da seguinte forma:

$$u_{eq} = -[GB]^{-1}Gf \quad (2.13)$$

Através do conceito de controle equivalente a equação do deslizamento do sistema original (2.12) (2.2) é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, t) + B(x, t)u_{eq} \\ &= f - B[GB]^{-1}Gf = [I - B[GB]^{-1}G]f\end{aligned}\quad (2.14)$$

ver (Edwards & Spurgeon 1998) para uma interpretação geométrica da expressão acima.

2.2.3.1 Interpretação física do controle equivalente

O método do controle equivalente oferece uma interessante interpretação física. Considere o controle u_{av} como uma versão filtrada (através de um filtro de 1ª ordem com constante de tempo τ) do controle \tilde{u} obtido através do método da “camada de fronteira” (*boundary layer*), ou seja:

$$\tau \dot{u}_{av} + u_{av} = \tilde{u}\quad (2.15)$$

A função u_{eq} , utilizada no método do controle equivalente, coincide com o valor médio de \tilde{u} (*boundary layer* Δ) no caso limite em que $\Delta \rightarrow 0$ e $\tau \rightarrow 0$. De outra forma, o controle equivalente pode ser obtido através de um filtro de primeira ordem que possua um constante de tempo (τ) propriamente “casada” com a largura da “camada de fronteira” (Δ), ou seja:

$$\tau \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\Delta}{\tau}\right) \rightarrow 0$$

2.2.3.2 Controle equivalente estendido

O controle equivalente estendido (*extended equivalent control*) é definido como o controle equivalente o qual se aplica ao movimento completo do sistema, ou seja, dentro e fora da superfície de deslizamento $s(x(t)) = 0$. Considere, novamente a classe de sistemas não-lineares, mas lineares no controle, descrita por:

$$\dot{x} = f(x, t) + B(x, t)u,\quad (2.16)$$

onde $f(\cdot)$ e $B(\cdot)$ são campos vetoriais suaves (contínuos no sentido de *Lipschitz*). Seja $x(t)$ a solução deste sistema para $t \in [0, T)$. Então, o controle equivalente estendido é uma função localmente integrável, definida em quase todo o intervalo $[0, T)$, e é dado por:

$$u_{eq} = -[GB(x(t), t)]^{-1}[Gf(x(t), t) + \frac{d}{dt}s(x(t), t)], \quad (2.17)$$

onde $G = \frac{\partial}{\partial x}s(x(t), t)$. A expressão acima é bem definida já que a solução $x(t)$, por definição, é absolutamente contínua e, sendo assim, possui derivadas em quase todo o intervalo.

2.3 Caso linear: projeto da lei de controle

Para o projeto da lei de controle será considerado o seguinte sistema linear (estável ou não), invariante no tempo (com sinal de controle escalar):

$$\dot{x} = Ax + B(u + d) \quad (2.18)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, e o par (A, B) é controlável e, $d \in \mathbb{R}$ é uma perturbação de entrada contínua por partes e com um limitante superior instantâneo $\bar{d} > 0$, tal que $\|d(t)\| \leq \bar{d} < \infty, \forall t$.

O sinal de controle $u(x)$ é descontínuo e dado pela equação (2.2), repedita a seguir:

$$u(x) = \begin{cases} u^+(x, t) & \text{se } s(x) > 0 \\ u^-(x, t) & \text{se } s(x) < 0 \end{cases}$$

onde $u^+(x, t)$ e $u^-(x, t)$ são funções contínuas do tempo e $s(x)$ é a superfície de descontinuidade.

Suponha que a dinâmica desejada para o sistema é obtida com trajetórias restritas à superfície de deslizamento $s(x) = 0$ (coincidente com a superfície de descontinuidade), com $s(x)$ também sendo uma função linear do estado, dada por:

$$s(x) = Sx$$

com $S^T \in \mathbb{R}^n$.

Note que, neste caso, o gradiente G de $s(x)$ é igual a $G = S$. Sendo assim, o controle equivalente é dado por uma realimentação de estados do tipo $u_{eq} = -Kx$, onde $K = (SB)^{-1}SA$. Portanto, a dinâmica desejada (dinâmica do modo deslizante) é governada pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x \\ &= (A - B(SB)^{-1}SA)x = (I - B(SB)^{-1}S)Ax\end{aligned}\quad (2.19)$$

Para garantir a existência de modo deslizante sobre a superfície $s(x) = 0$, a condição $\dot{s} < 0$ deve ser atendida. Entretanto, para o caso linear em questão, existe uma condição equivalente a condição de deslizamento $\dot{s} < 0$, dada da seguinte forma.

Seja $G_{su}(p) = S(pI - A)^{-1}B$ a função de transferência de u para s , com $d = 0$. Observe $SB \in \mathbb{R}$ é o ganho de alta frequência de $G_{su}(p)$.

Para a existência de um modo de deslizamento estável na superfície $s(x) = Sx$, é necessário e suficiente que as seguintes condições sejam satisfeitas (ver (Young, Kokotovic & Utkin 1977)):

- O ganho de alta frequência SB seja diferente de zero, o que implica G_{su} ter grau relativo unitário ($n^* = 1$).
- A função de transferência $G_{su}(p)$ seja de fase mínima.

A primeira condição é consistente com a existência do controle equivalente $u_{eq} = -(SB)^{-1}SA$. A segunda condição é consequência do fato que o modo de deslizante é governado pelo sistema equivalente (Young et al. 1977), substituindo $u = u_{eq}$, equação (2.19). Os autovalores do sistema equivalente são os zeros de $G_{su}(p)$.

Note que G_{su} não precisa ser uma transferência estável, mas deve apresentar grau relativo $n^* = 1$ (estabilidade em alto ganho).

Uma vez que a dinâmica desejada já foi definida através da superfície $s(x) = 0$ ($s(x) = Sx$), deve-se determinar um sinal de controle u adequado para garantir que a superfície $s(x) = 0$ é alcançada e que representa uma superfície de deslizamento. Projetar a lei de controle descontínua u , baseada em modos deslizantes, requer dois passos:

1. Primeiro, deve-se garantir que a superfície em questão é uma superfície de deslizamento, ou seja, para qualquer condição inicial dentro da superfície, a trajetória do sistema permanece em $s(x) = 0$ e não sai mais. Para tanto, a condição $s\dot{s} < 0$ (seção 2.1.1) deve ser satisfeita.
2. Segundo, deve-se garantir que para qualquer condição inicial no espaço de fase, a superfície $s(x) = 0$ é alcançada, ou seja, $s(x) = 0$ é atrativa (uma vez que a superfície de deslizamento tenha sido alcançada, a trajetória do sistema controlado permanece em $s(x) = 0$).

Para garantir que a superfície de deslizamento escolhida seja atrativa, será utilizado o método direto de *Lyapunov* adaptado para sistemas descontínuos. Através do método direto de *Lyapunov*, utilizando $V(s(x)) = (1/2)s^2$ como uma candidata função de *Lyapunov*, pode-se verificar que os passos (1) e (2) seriam atendidos simultaneamente. Entretanto, o sistema em questão é governado por uma equação diferencial com lado direito descontínuo, e, portanto, a teoria de *Lyapunov* não se aplica diretamente. Para aplicar o método direto de *Lyapunov* na análise de estabilidade de equações diferenciais descontínuas, é necessário a extensão da teoria de *Lyapunov* apresentada em (Bailey & Arapostathis 1987).

A lei de controle proposta, uma das formas mais comuns em controle por modos deslizantes, é baseada na função sinal ($\text{sign}(\cdot)$) ou relé, e é dada por:

$$u = -f \text{sign}(s) \tag{2.20}$$

onde s é a superfície de deslizamento e f é a função de modulação. A seguir serão analisados dois casos: primeiro considerando a função de modulação dependente dos estados do sistema, segundo considerando que os estados não são todos acessíveis, realimentação de saída apenas.

2.3.1 Realimentação de estados

Supondo que os estados do sistema (2.18) são disponíveis, a seguinte proposta para a lei de controle descontínua (relé modulado) assegura que $s(x) = 0$ é uma superfície

deslizante (item (1)) e atrativa (item (2)):

$$u = -[\alpha \|x\| + \bar{d}] \text{sign}(s^*)$$

onde α é uma constante positiva de projeto e $s^* = (SB)^{-1}s$ (SB é o ganho de alta frequência da função de transferência G_{su}).

Considere a seguinte função candidata de *Lyapunov*

$$2V = (s^*)^2$$

onde $s^* = (SB)^{-1}s$.

Defina

- $F = Ax + B[u + d]$
- $W := (SB)^{-1}SF\nabla_{s^*}V$

Portanto, levando em consideração que $\nabla_{s^*}V = s^*$, tem-se:

$$\begin{aligned} W &= (SB)^{-1}S[Ax + B(u + d)]s^* \\ &= [(SB)^{-1}SAx + (u + d)]s^* \\ &= [Hx + (u + d)]s^* \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde $H = (SB)^{-1}SA$.

Substituindo o sinal de controle u , tem-se:

$$\begin{aligned} W &= Hxs^* - [\alpha \|x\| + \bar{d}] \overbrace{\text{sign}(s^*)s^*}^{|s^*|} + ds^* \\ W &= [Hxs^* - \alpha \|x\| |s^*|] + [ds^* - \bar{d}|s^*|] \end{aligned} \tag{2.22}$$

De (2.22) é fácil verificar que para um valor de $\alpha \geq \|H\|$, existe $\lambda > 0$ tal que $W \leq -\lambda \|x\| |s^*| < 0$.

Portanto, utilizando o Lema 2 de (Bailey & Arapostathis 1987) (que permite a extensão da teoria de estabilidade de *Lyapunov* para sistemas descontínuos), a derivada temporal de V sobre as trajetórias do sistema (2.18) (solução no sentido de *Filippov*)

é tal que $\dot{V} < 0$. Isto implica $s^* = 0$ ser exponencialmente estável.

Além disto, se

$$u = -[\alpha \|x\| + \bar{d} + \delta] \text{sign}(s^*)$$

com $\delta > 0$, tem-se que

$$s^* \dot{s}^* \leq -[\lambda \|x\| - K_1 \delta] |s^*|$$

onde $K_1 > 0$. Dado que x converge exponencialmente para zero, existe um $T \geq t_0$ tal que $s^* \dot{s}^* \leq -\delta' |s^*| < 0$ ($\delta' > 0$) $\forall t > T$. Portanto s^* é garantida ser uma superfície de escorregamento. Devido a $SB \in \mathbb{R}$, temos que também s será uma superfície de escorregamento, portanto podemos concluir que s alcança zero em um tempo finito $t_r \geq T$.

Note que se o sinal do ganho de alta frequência SB for conhecido, a lei de controle proposta dependerá apenas do sinal de $s(x)$.

2.3.2 Realimentação de saída

A seguir será apresentada uma proposta para a lei de controle descontínua considerando que o estado completo do sistema não seja disponível. A lei de controle deve ser projetada utilizando somente informações da entrada e saída do sistema. A proposta também é um relé modulado, onde, neste caso, a função de modulação $f(t)$ dependente somente dos sinais de entrada e saída.

Como forma de suprir a falta do estado completo será necessário adicionar a condição da transferência do sistema ser estritamente real positiva *SPR*.

Na realidade o Lema a seguir pode ser demonstrado, onde se garante, não só que $s(x) = 0$ é uma superfície de deslizamento, mas também a convergência para zero do vetor de estados x . Este Lema será utilizado no capítulo 4 para demonstrar os corolários que garantem a existência de deslizamento ideal no sistema controlado pelo controlador suave a estrutura variável.

Lema 2.1 *Considere a seguinte relação entrada/saída:*

$$s(t) = G_{su}(p)[u + d(t) + \pi(t)]$$

onde s , u , d e π são sinais escalares, $G_{su}(p)$ é uma função de transferência estritamente

real positiva (*SPR*), $d(t)$ é localmente integrável e $\pi(t)$ é uma função com decaimento exponencial. Seja x o vetor de estados de uma realização estável, possivelmente não-mínima, de G_{su} . Se u é dado pela lei descontínua de realimentação $u = -f(t)\text{sgn}(s(t))$, onde f é localmente integrável e satisfaz $f(t) \geq |d(t)|, \forall t$, então a desigualdade

$$|s(t)| \text{ and } \|x(t)\| \leq [c_1 \|x(0)\| + c_2 R]e^{-\lambda_1 t}$$

é satisfeita $\forall t \geq 0$ para algumas constantes positivas c_1, c_2, λ_1 . Além disso, se $f(t)$ satisfaz $f(t) \geq |d(t)| + \delta, \forall t$, com uma pequena constante positiva arbitrária δ , então $s(t)$ torna-se identicamente igual a zero após algum tempo finito $t_r \geq 0$.

Prova: A demonstração está baseada na teoria de Lyapunov estendida para sistemas descontínuos, ver (Bailey & Arapostathis 1987). Para uma completa demonstração ver (Hsu & Costa 1989). ■

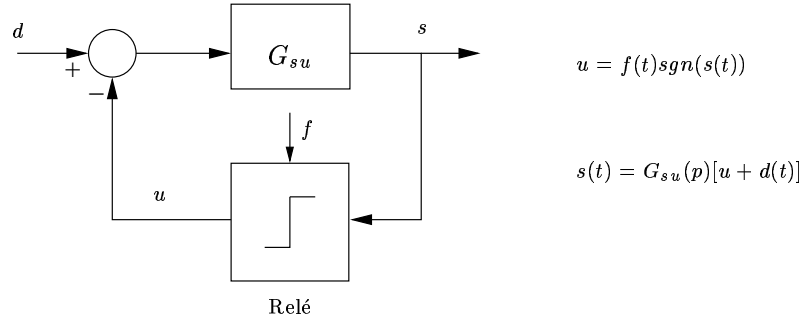


FIGURA 2.2: Diagrama em blocos representativo do Lema 2.1.

O Lema acima pode ser generalizado para uma condição menos conservativa na que a função de transferência $G_{su}(p)$ é *quase SPR*. Sendo que uma definição de *quase SPR* é a seguinte (Owens, Pratzel-Wolters & Ichmann 1987):

Definição 2 A função de transferência $G(p)$ é *quase SPR* se existe $K_m > 0$ tal que $\forall K > K_m$, a função de transferência $G_c = [1 + G(p)K]^{-1}G(p)$ é *SPR*.

Note que uma condição para uma função de transferência ser *ASPR* é ter grau relativo unitário e zeros estritamente estáveis.

Capítulo 3

O controlador adaptativo por modelo de referência (*MRAC*)

A estratégia denominada de controle adaptativo por modelo de referência (*MRAC - model reference adaptive control*) aplicada a sistemas lineares invariantes no tempo é considerada uma das principais abordagens na literatura referente a controle adaptativo, ver (Mareels & Polderman 1996). O sistema caracteriza-se por uma planta com parâmetros desconhecidos, por um controlador parametrizado e por um mecanismo de aprendizagem ou adaptação. O controle adaptativo pode ser visto através de duas estratégias distintas. Primeiro, o método indireto, onde os parâmetros desconhecidos da planta são estimados e, então, os parâmetros do controlador são calculados a partir dessas estimativas. Essa estratégia de controle pode ser encarada como um caso especial do problema de controle por alocação de pólos, ver (Åström & Wittenmark 1997). Segundo, o método direto, que em contraste com o método indireto, não realiza a identificação da planta de forma explícita. Neste método os parâmetros do controlador são estimados diretamente, através de uma lei de adaptação.

Em particular, os algoritmos adaptativos que utilizam somente informações da entrada e saída da planta para realizar o ajuste dos parâmetros do controlador são de particular interesse prático. Neste sentido, a teoria de controle adaptativo, teve em (Narendra & Valavani 1978) e (Narendra et al. 1980) um considerável desenvolvimento, complementado, posteriormente em (Sastry 1984) (o controlador é denominado de *I/O MRAC - controlador adaptativo por modelo de referência usando somente medições da*

entrada e saída da planta).

O objetivo básico do *I/O MRAC* é encontrar um sinal de controle tal que o comportamento do sistema em malha fechada encontre-se próximo ao de um modelo de referência arbitrado (rastreamento), mesmo na presença de incertezas ou variações nos seus parâmetros. Entretanto, em (Rohrs, Valavani, Athans & Stein 1982) verificou-se que o *I/O MRAC*, esquema proposto originalmente com a lei integral ((Narendra & Valavani 1978), (Sastry 1984)), é pouco robusto em situações não ideais (ex: perturbações de entrada e dinâmicas não-modeladas), o que motivou a procura de diversas modificações do *MRAC* original a fim de torná-lo robusto.

O problema apresentado é considerado um caso ideal, no sentido que a lei de adaptação presupõe que o modelo da planta esteja livre de perturbações ($d_e = 0$) e dinâmicas não-modeladas. Sabe-se que mesmo quando sujeito a perturbação limitada de pequena amplitude, segundo (Egardt 1979), e também, na presença de dinâmicas não-modeladas, ver (Rohrs et al. 1982), (Ioannou & Kokotovic 1984), o *MRAC* tornar-se instável. Diversas estratégias, foram desenvolvidas no sentido aumentar a robustez dos sistemas adaptativos através de adequadas modificações.

Uma contribuição neste sentido é a modificação- σ fixo apresentada em (Ioannou & Kokotovic 1984), que garante, no mínimo, estabilidade local na presença de perturbações e/ou dinâmica não-modelada limitados. Estabilidade global foi obtida posteriormente em (Ioannou & Tsakalis 1986), através do método da modificação- σ descontínuo. Apesar do parâmetro σ desses métodos aumentar a robustez do sistema (no sentido de preservar a estabilidade), foi verificado em (Hsu & Costa 1987), que pode levar ao surgimento do fenômeno indesejável denominado de *bursting* (oscilações repentinas e intermitentes seguidas de longos períodos de comportamento aparentemente estável). Outras contribuições importantes são os métodos baseados em projeção paramétrica usados em (Naik, Kumar & Ydstie 1992) e (Hsu & Costa 1987).

Um ponto importante é que mesmo com a excitação r sendo suficientemente rica em frequências, a qualidade do transitório de adaptação é não uniforme com respeito às condições iniciais e a convergência tanto do vetor de estados completo do sistema do erro, quanto o erro paramétrico, para zero, pode ser muito lenta, ver (Hsu & Costa 1989).

Também visando modificar o *MRAC* original, no sentido de torná-lo robusto, os

trabalhos de (Hsu 1988) e (Fu 1990) deram início a utilização de conceitos baseados em estrutura variável e controladores chaveados, em particular, o controlador proposto em (Hsu 1988) e em (Hsu & Costa 1989), denominado de *I/O VS-MRAC - Variable Structure Model Reference Adaptive Control*, controlador adaptativo por modelo de referência e a estrutura variável, que utiliza apenas informações da entrada e saída da planta para gerar a lei de controle. O *I/O VS-MRAC* foi desenvolvido a partir do *I/O MRAC*, basicamente, substituindo a lei de adaptação do tipo integral por uma síntese direta do sinal de controle.

O objetivo principal deste capítulo é introduzir a nomenclatura e notação utilizados no desenvolvimento da equação do erro de saída do *I/O MRAC* para o caso de grau relativo $n = 1$, os quais serão aplicados na versão suave do *VS-MRAC* no capítulo 4.

3.1 Esquema de controle do *I/O MRAC*

Considere uma planta desconhecida (com incertezas), monovariável (*SISO*), linear invariante no tempo (*LTI*) modelada por uma função de transferência racional e estritamente própria dada por:

$$G(p) = K_p \frac{N_p(p)}{D_p(p)} \quad (3.1)$$

com entrada u e saída y , onde:

- K_p é o ganho em alta frequência.
- $D_p(p)$ é um polinômio mônico de grau n .
- $N_p(p)$ é um polinômio mônico de grau $m \leq n - 1$.

As especificações da resposta dinâmica em malha fechada são estabelecidas através do modelo de referência $M(p)$, com entrada r e saída y_m , que é caracterizado por uma função de transferência estritamente própria, linear, invariante no tempo e assintoticamente estável dada por:

$$M(p) = K_m \frac{N_m(p)}{D_m(p)} \quad (3.2)$$

onde:

- K_m é o ganho em alta frequência.
- $D_m(p)$ é um polinômio mônico.
- $N_m(p)$ é um polinômio mônico.

O sinal de referência r é uma função arbitrária do tempo, contínua por partes e uniformemente limitada.

Da teoria de sistemas lineares sabe-se que, para garantir que o controlador seja causal, é necessário que o grau relativo do modelo de referência (diferença entre o grau do denominador e do numerador) seja maior ou igual ao da planta. O objetivo de controle pode ser definido da seguinte forma:

- Projetar uma lei de controle $u(t)$, tal que todos os sinais na malha fechada permaneçam limitados e o erro de saída $e_0 := y - y_m$ tenda assintoticamente para zero ou para algum pequeno intervalo residual em torno do zero, para condições iniciais e sinais de referência r (contínuos por partes e uniformemente limitados) arbitrários.

Para garantir que o problema *MRAC* tenha solução serão consideradas as hipóteses usuais de projeto (Narendra & Annaswamy 1989, p.183) sobre a planta e o modelo de referência, listadas a seguir:

Hipótese 1 A planta $G_p(p)$ é de fase mínima ($N_p(p)$ é Hurwitz).

Hipótese 2 A planta $G_p(p)$ é controlável e observável (os polinômios $N_p(p)$ e $D_p(p)$ são coprimos).

Hipótese 3 $N_p(p)$ e $D_p(p)$ são mônicos com $\text{grau}[D_p(p)] = n$ e $\text{grau}[N_p(p)] = m$, n e m conhecidos (o grau relativo $n^* = n - m$ da planta é conhecido).

Hipótese 4 O sinal do ganho de alta frequência da planta (K_p) é conhecido (assume-se positivo por simplicidade, sem perda de generalidade).

Hipótese 5 O modelo $M(p)$ é estável e de fase mínima, com mesmo grau relativo $n^* = n - m$ que a planta.

No *MRAC* os coeficientes do numerador e do denominador da planta são considerados desconhecidos. Conseqüentemente, os parâmetros do controlador não podem ser obtidos diretamente como no controle por modelo de referência (*MRC* ver (Ioannou & Sun 1996)). Uma maneira de contornar este problema, baseia-se no princípio da equivalência certa. Neste princípio, os parâmetros do controlador são estimados e utilizados na lei de controle com se fossem os parâmetros ideais. O procedimento de projeto é baseado na combinação de uma lei de controle com uma lei de adaptação que gera estimativas em tempo real dos parâmetros do controlador.

A hipótese de se ter disponibilidade apenas da entrada e da saída da planta sugere a utilização de um esquema de controle com dois graus de liberdade utilizando, por exemplo, uma estrutura de filtros de entrada e saída (Ioannou & Sun 1996) como uma forma de suprir a falta de informações dos estados na implementação da lei de controle. O esquema do *I/O MRAC* é apresentado na figura 3.1, onde pode ser verificado, por

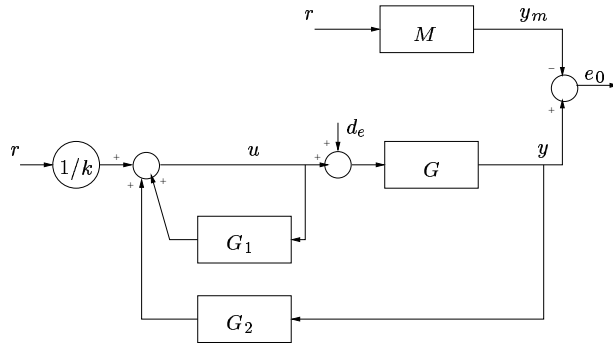


FIGURA 3.1: Estrutura do controlador adaptativo por modelo de referência (*MRAC*), planta desconhecida.

inspeção, que a **lei de controle** u é composta pelas saídas dos filtros $G_1(p)$ e $G_2(p)$ e pela entrada de referência r , sendo dada por:

$$u = \frac{1}{k}r + G_1(p)u + G_2(p)y \quad (3.3)$$

onde:

- $k := \frac{K_p}{K_m}$.
- $G_1(p) := \frac{N_1(p)}{\Lambda(p)}$.

- $G_2(p) := \frac{N_2(p)}{\Lambda(p)}$.

com $\text{grau}[N_1(p)] = n - 2$, $\text{grau}[N_2(p)] = n - 1$ e $\text{grau}[\Lambda(p)] = n - 1$. Portanto, o filtro $G_1(p)$ é estritamente próprio e o filtro $G_2(p)$ é próprio.

Para considerar a planta sujeita a perturbação de entrada, adicionalmente às hipóteses 1–5, considere a hipótese a seguir.

Hipótese 6 A perturbação de entrada d_e é uniformemente limitada, e possui um limitante superior instantâneo $\bar{d}_e(t)$ conhecido que satisfaz a $\bar{d}_e(t) \geq |d_e(t)| \ (\forall t)$.

3.2 Equação de casamento

Através do esquema apresentado existe de um controlador ideal (k^* , $G_1^*(p)$ e $G_2^*(p)$), que assegura o casamento perfeito entre o sistema em malha fechada e o modelo de referência, para o caso em que os parâmetros da planta **são conhecidos**.

Deslocando a perturbação d_e da entrada da planta, o diagrama em blocos do *MRAC* apresentado na figura 3.1 pode ser modificado, de forma equivalente, conforme mostra a figura 3.2, onde:

$$W_d = 1 - G_1^* \quad (3.4)$$

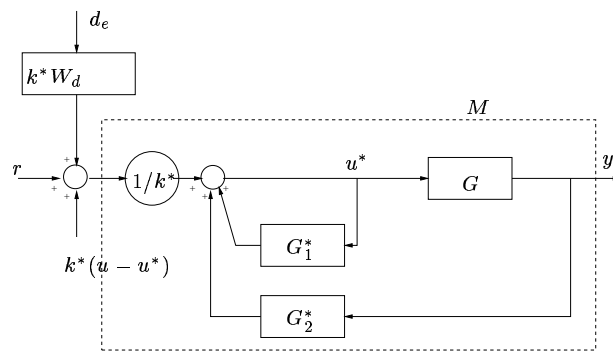


FIGURA 3.2: Esquema equivalente da estrutura do controlador por modelo de referência (*MRC*), parâmetros ideais, planta conhecida e $k^* := \frac{K_p}{K_m}$.

Considerando $d_e = 0$, na figura 3.2, pode ser verificado, por inspeção, que a **lei de controle ideal** $u = u^*$ que assegura o casamento perfeito é dada por:

$$u^* = \left(\frac{1}{k^*} r + G_1^* u^* + G_2^* y \right) \quad (3.5)$$

Resolvendo a equação acima para u^* , para que ocorra o casamento perfeito entre o modelo e a malha fechada, i.e. $y = Mr$, a seguinte equação deve ser satisfeita, (Sastry & Bodson 1989)):

$$k^* M = \frac{G}{1 - G_1^* - G G_2^*} \quad (3.6)$$

Note que para que o casamento perfeito entre o modelo e a planta em malha fechada seja possível, o controlador (G_1 e G_2) deve não só alocar os pólos de malha fechada, mas também cancelar os zeros da planta e substituí-los pelos zeros do modelo. Este cancelamento de zeros restringe a planta a ser de fase mínima (hipótese 1) para que não ocorra cancelamentos de zeros com parte real positiva.

Considerando a perturbação de entrada $d_e \neq 0$, pode-se verificar, por inspeção no diagrama em blocos da figura 3.2, que o sinal de controle que permite o casamento perfeito é dado por $u = U_d$, onde

$$U_d = u^* - W_d d_e$$

3.3 Equação do erro de saída e_0

Observando na figura 3.2 que a transferência destacada no retângulo pontilhado é exatamente a transferência do modelo, é fácil verificar que a saída y da planta pode ser determinada por (princípio da superposição):

$$y = \underbrace{Mr}_{y_m} + k^* \underbrace{(1 - G_1^*)}_{W_d} M d_e + k^* M (u - u^*) \quad (3.7)$$

Desta forma o erro de saída pode ser representado das seguintes formas equivalentes:

$$e_0 := y - y_m \quad (3.8)$$

$$e_0 = k^* M(u - u^* + W_d d_e) \quad (3.9)$$

$$= k^* M(u - u^*) + \bar{W}_d d_e \quad (3.10)$$

onde:

$$\bar{W}_d = k^* M W_d \quad (3.11)$$

O sistema do erro pode ser representado no espaço de estados da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} \text{Espaço de Estados: } \dot{x}_{e_0} &= A_c x_{e_0} + k^* b_c [u - u^*] + b'_0 d_e \\ e_0 &= h_c^T x_{e_0} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\text{Entrada e Saída: } e_0 = k^* M(p) [u - u^* + W_d d_e] \quad (3.13)$$

$$(k^* = K_p / K_m) \quad (3.14)$$

onde x_{e_0} é o vetor de estados de uma realização (A_c, b_c, h_c) de $M(p)$, possivelmente não-mínima, $u = u^* = \theta^{*T} \omega$ é o sinal de controle ideal, $W_d(p)$ é uma função de transferência própria e estável e $\bar{W}_d(p) = k^* M W_d = h_c^T (pI - A_c)^{-1} b'_0$ é a função de transferência de malha fechada da perturbação de entrada d_e para e_0 com $u = u^*$.

Note que, pela equação (3.13), torna-se evidente que se u for substituído por $U_d = u^* - W_d d_e$, então $e_0(t) \rightarrow 0$ exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$, devido, somente, às condições iniciais do operador $M(p)$ (resposta a entrada zero).

Detalhes do desenvolvimento da equação do erro utilizando a abordagem no espaço de estados encontram-se no apêndice A, onde, também é verificado que as definições de W_d e \bar{W}_d apresentadas em (3.4) e (3.11), respectivamente, são equivalentes as definições apresentadas na abordagem no espaço de estados.

3.4 Parametrização do controle

Nos esquemas de controle adaptativo é comum o sinal de controle u ser parametrizado da seguinte forma, ver figura 3.3:

$$u(t) = \theta^T \omega(t) \quad (3.15)$$

onde $\theta \in \mathbb{R}^{2n}$ é o vetor de parâmetros a ser adaptado e $\omega \in \mathbb{R}^{2n}$ é denominado de vetor regressor, obtido sem o conhecimento dos parâmetros da planta, definidos a seguir (Narendra & Annaswamy 1989).

$$\theta^T(t) := [\theta_{v_1}^T(t) \quad \theta_n(t) \quad \theta_{v_2}^T(t) \quad \theta_{2n}(t)] \quad (3.16)$$

$$\omega^T(t) := [v_1^T \quad y \quad v_2^T \quad r] \quad (3.17)$$

onde $\theta_{v_1} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\theta_{v_2} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\theta_n \in \mathbb{R}$ e $\theta_{2n} \in \mathbb{R}$.

Seguindo o mesmo procedimento que em (Narendra & Annaswamy 1989), considere a seguinte realização (mínima) para os filtros de entrada e saída G_1 e G_2 :

$$\begin{aligned} G_1(p) &= \theta_{v_1}^T (pI - \Lambda)^{-1} g \\ G_2(p) &= \theta_{v_2}^T (pI - \Lambda)^{-1} g + \theta_n \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde

$$\dot{v}_1 = \Lambda v_1 + gu \quad (3.19)$$

$$\dot{v}_2 = \Lambda v_2 + gy \quad (3.20)$$

com $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ e Λ tal que $N_m(p) = \det(pI - \Lambda)$ (para maiores detalhes verificar o desenvolvimento da equação do erro no apêndice).

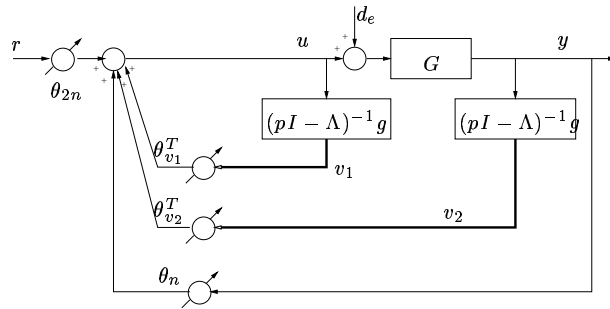


FIGURA 3.3: MRAC, planta desconhecida, parametrização do controle.

De acordo com (Sastry & Bodson 1989) o controle ideal parametrizado é dado por $u = u^* = \theta^{*T} \omega$, onde $\theta^{*T}(t) := [\theta_{v_1}^{*T}(t) \quad \theta_n^*(t) \quad \theta_{v_2}^{*T}(t) \quad \theta_{2n}^*(t)]$ é o vetor de parâmetros ideais tal que: $G_1^*(p) = \theta_{v_1}^{*T} (pI - \Lambda)^{-1} g$, $G_2^*(p) = \theta_{v_2}^{*T} (pI - \Lambda)^{-1} g + \theta_n^*$ e $\theta_{2n}^* = \frac{1}{k^*}$.

3.5 Lei de adaptação - Caso: grau relativo $n^* = 1$

No *MRAC* os coeficientes do numerador e denominador da função de transferência que descreve a planta são considerados desconhecidos. Consequentemente não é possível determinar diretamente os parâmetros ideais (θ^*) do controlador. Uma maneira de contornar este problema é através de uma lei de adaptação para $\theta(t)$. Definindo o erro paramétrico por $\tilde{\theta} := \theta - \theta^*$, a lei de adaptação deve garantir que o sistema em malha fechada seja estável e que o erro de saída, e_0 , tenda para zero (ou para um conjunto residual em torno do zero).

O controlador proposto em (Narendra & Valavani 1978) é baseado na seguinte lei de adaptação puramente integral (lei do gradiente):

$$\dot{\theta} = -\gamma\omega e_0 \text{sgn}(K_p) \quad (3.21)$$

onde γ é o ganho de adaptação (escolhido arbitrariamente), K_p é o ganho de alta frequência da planta, ω é o vetor regressor e e_0 é o erro de saída. Observe que $\text{sgn}(K_p) = \text{sgn}(k^*)$, considerando-se $K_m > 0$.

Com a lei de controle $u = \theta^T \omega$ e com esta lei de adaptação o controlador adaptativo por modelo de referência (*MRAC*) para plantas com grau relativo unitário e perturbação de entrada nula ($d_e = 0$), possui as seguintes propriedades, ver (Ioannou & Sun 1996):

- Todos os sinais da planta em malha fechada são limitados e o erro de saída e_0 converge assintoticamente para zero, para qualquer sinal de referência r limitado e para qualquer condição inicial.
- Se r for suficientemente rico de ordem $2n$, \dot{r} for limitado e os polinômios $N_p(p)$ e $D_p(p)$ forem coprimos, então o erro paramétrico $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$ e o erro de saída e_0 convergem exponencialmente para zero.

A demonstração destas propriedades está baseada no fato de, no caso em que o grau relativo da planta é unitário, é possível escolher uma função de transferência para o modelo de referência $M(p)$, estritamente real positiva (*SPR* - *Strictly Positive Real*, ver (Narendra & Annaswamy 1989)). Neste caso, estas propriedades são verificadas através do Lema de *Kalman-Yakubovich* (ver (Ioannou & Sun 1996)), e condensadas no teorema a seguir.

Teorema 3.1 *Considere a seguinte relação entrada/saída:*

$$e = M(p)[k^*(u - u^*)] \quad (3.22)$$

onde e e u são sinais escalares, $M(p)$ é uma função de transferência estritamente real positiva (SPR), k^* é uma constante desconhecida mas com sinal conhecido e u é parametrizado da seguinte forma:

$$u = \theta^T \omega$$

onde ω é o vetor regressor. Seja θ^* o vetor de parâmetros ideais e $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$ o erro paramétrico. Se

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma \omega \text{sgn}(k^*)$$

onde γ é uma constante positiva, então e e $\tilde{\theta}$ são globalmente limitados. Além disso, se o vetor regresso ω for limitado, então

$$e(t) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow \infty$$

Prova: Considere a seguinte representação de estados de (3.22):

$$\dot{x}_e = Ax_e + b[u - u^*] \quad (3.23)$$

$$e = h^T x_e \quad (3.24)$$

Sendo M uma transferência SPR, pelo Lema de Kalman-Yakubovich é sempre possível encontrar uma matriz definida positiva e simétrica P , dada uma outra matriz positiva definida e simétrica Q , tal que:

$$A^T P + PA = -Q$$

$$e Pb = h.$$

Seja V uma função definida positiva da seguinte forma:

$$V = x_e^T P x_e + \frac{|k^*|}{\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta} \quad (3.25)$$

A derivada temporal de V , ao longo das trajetórias do sistema (3.23) e (3.24) é dada por:

$$\dot{V} = x_e^T(PA + A^T P)x + 2x_e^T Pb(k^* \tilde{\theta}^T \omega) - 2\tilde{\theta}^T(k^* e \omega)$$

mas $Pb = h$, então:

$$\dot{V} = x_e^T(PA + A^T P)x = -x_e^T Q x_e \leq 0$$

Portanto, o sistema (3.23) e (3.24) é globalmente estável e e e $\tilde{\theta}$ são globalmente limitados.

Além disso, se o vetor regressor ω for limitado, pode-se verificar de (3.23) que \dot{x}_e é limitado. Isto implica na continuidade uniforme de \dot{V} , basta verificar que a segunda derivada

$$\ddot{V} = -2x_e Q \dot{x}_e$$

é limitada. Utilizando o Lema de Barbalat, ver (Slotine & Li 1991), prova-se a convergência assintótica de $e(t)$ a zero. ■

Capítulo 4

Controlador suave a estrutura variável (*SSC*)

Este capítulo apresenta o controlador suave a estrutura variável (*SSC - Smooth Sliding Control*) que é uma estratégia adaptativa, usando somente dados da entrada e da saída da planta, baseada em estrutura variável. O *SSC* é uma versão do *VS-MRAC - variable structure model reference adaptive control* (Hsu 1997b) que possui sinal de controle suave e é baseado no *MRAC* convencional. A diferença principal está na implementação da lei de adaptação dos parâmetros do controlador. No *VS-MRAC* a lei de adaptação baseia-se em **síntese de sinal**, ao contrário do *MRAC* que utiliza uma lei de adaptação paramétrica.

Uma das motivações para esta abordagem consistiu na busca de um controlador que tornasse o sistema em malha fechada robusto (no sentido de preservar a estabilidade do sistema) em relação às incertezas da planta e a distúrbios externos, além de apresentar desempenho satisfatório. Utilizar sistemas a estrutura variável baseados em modos deslizantes é uma opção atrativa, em particular, devido ao princípio da invariância, que torna o sistema em malha fechada, após atingir o deslizamento, insensível com respeito a perturbações externas e internas (variações nos parâmetros da planta), ver capítulo 2. Em (Hsu & Costa 1989), (Hsu 1988) e (Hsu 1990) foi proposta uma solução (*VS-MRAC*) para este problema, utilizando somente os sinais de entrada e saída da planta, através de adequadas modificações no *I/O MRAC* (capítulo 3). Para plantas com grau relativo unitário, foi desenvolvida uma lei de adaptação a estrutura variável

que substitui a tradicional lei de adaptação integral, ver (Narendra & Valavani 1978) e o capítulo 3. A idéia básica foi tornar o erro de saída uma superfície deslizante $e_0(t) \equiv 0$.

Entretanto, um desafio a ser superado ao se implementar controladores a estrutura variável é a possível ocorrência do indesejável fenômeno de *chattering* induzido por não-idealidades como pequenos atrasos ou dinâmicas não-modeladas na planta. Isto leva ao conhecido modo deslizante real *real sliding mode* (Utkin 1992).

Este capítulo considera uma versão do *VS-MRAC* (Hsu 1997b) que possui sinal de controle suave (O *SSC*, ver (Peixoto et al. 2001) e (Peixoto et al. 2002)), aplicável a plantas de grau relativo arbitrário, onde a abordagem utilizada para suavizar o sinal de controle não é baseada no conceito de “camada de fronteira” (*boundary layer*), ver capítulo 2, mas sim, na utilização de uma malha de predição em conjunto com um filtragem do sinal de controle.

4.1 Definição do problema

Da mesma forma que no capítulo 3, considere uma planta desconhecida (com incertezas), monovariável (*SISO*), linear e invariante no tempo (*LTI*) modelada por uma função de transferência racional e estritamente própria dada por:

$$G(p) = K_p N_p(p) / D_p(p) \quad (u \rightarrow y) \quad (4.1)$$

com entrada u e saída y . O modelo de referência, com entrada r e saída y_m , é caracterizado por uma função de transferência estritamente própria, linear, invariante no tempo e assintoticamente estável dada por:

$$M(p) = K_m N_m(p) / D_m(p) \quad (r \rightarrow y_m) \quad (4.2)$$

onde N_p, D_p, N_m, D_m são polinômios mônicos e r é uma função arbitrária do tempo, contínua por partes e uniformemente limitada.

O objetivo de controle pode ser definido da seguinte forma:

- Projetar uma lei de controle $u(t)$, tal que todos os sinais na malha fechada per-

maneçam limitados e o erro de saída $e_0 := y - y_m$ tenda assintoticamente para zero ou para algum pequeno intervalo residual em torno do zero, para condições iniciais e sinais de referência r (contínuos por partes e uniformemente limitados) arbitrários.

Serão adotadas as hipóteses (hipóteses 1-4 do capítulo 3) usuais de projeto do controle adaptativo por modelo de referência (*MRAC*) (Narendra & Annaswamy 1989, p.183) sobre: a planta, o modelo e o sinal de referência. Na abordagem do *MRAC* o sinal de controle u é parametrizado por $u(t) = \theta^T \omega(t)$, onde $\theta \in \mathbb{R}^{2n}$ é o vetor de parâmetros e $\omega \in \mathbb{R}^{2n}$ é o vetor regressor obtido a partir dos filtros de entrada e saída (Narendra & Annaswamy 1989).

A equação do erro de saída e_0 do *MRAC* para uma planta com perturbação de entrada d_e é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Espaço de Estados: } \dot{x}_{e_0} &= A_c x_{e_0} + k^* b_c [u - u^*] + b'_0 d_e \\ e_0 &= h_c^T x_{e_0} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\text{Entrada e Saída: } e_0 = k^* M(p)[u - u^* + W_d d_e] \quad (4.4)$$

$$(k^* = K_p / K_m) \quad (4.5)$$

onde x_{e_0} é o estado de uma realização estável de $M(p)$, possivelmente não mínima, $u = u^* = \theta^{*T} \omega$ é o sinal controle ideal que assegura o casamento perfeito entre $M(p)$ e o sistema em malha fechada (com $d_e = 0$), $W_d(p) = [k^* M(p)]^{-1} \bar{W}_d$ é uma transferência estável e própria (ver (Hsu et al. 1997) para detalhes) e $\bar{W}_d(p) = h_c^T (pI - A_c)^{-1} b'_0$ é a função de transferência em malha fechada da perturbação d_e para e_0 com $u = u^*$.

A perturbação de entrada é uniformemente limitada por hipótese. Além disso, assume-se que é conhecido um limitante superior dependente do tempo $\bar{d}_e(t)$ de $d_e(t)$ que satisfaça $\bar{d}_e(t) \geq |d_e(t)|$ ($\forall t$).

Classes admissíveis de sinais de controle

De acordo com a parametrização do controle $u(t) = \theta^T \omega(t)$, é criada a seguinte restrição para a classe de sinais de controle admissíveis.

Hipótese 7 A lei de controle satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\sup_t |u(t)| \leq K_\omega \sup_t \|\omega(t)\| + K_\delta; \quad \forall t \quad (4.6)$$

onde K_ω, K_δ são constantes positivas. Esta restrição garante que não ocorra escape em tempo finito para os sinais do sistema. Desta forma, os sinais do sistema serão regulares (regular signals) e, portanto, podem crescer no máximo exponencialmente (Sastry & Bodson 1989). Este limitante superior garante que todos os sinais no sistema pertençam a L_∞ .

O Lema 2.1 e o Lema a seguir são úteis para a análise de estabilidade do controlador SSC, ver (Hsu et al. 1997):

Lema 4.1 Considere a seguinte relação entrada/saída:

$$\varepsilon(t) = M(p)[u + d(t)] + \pi(t) + \beta(t)$$

onde $M(p) = K_m/(p + a_m)$ ($K_m, a_m > 0$); $d(t)$ é localmente integrável; $\beta(t)$ é absolutamente contínuo ($\forall t$) e $\pi(t)$ é uma função com decaimento exponencial (i.e. $|\pi(t)| \leq Re^{-\lambda t}$). Se $u = -f(t) \operatorname{sgn}(\varepsilon(t))$, onde f é localmente integrável e $f(t) \geq |d(t)| \forall t$, então, os sinais $\varepsilon(t)$ e $\hat{\varepsilon}(t) := \varepsilon(t) - (\beta(t) + \pi(t))$ são limitados por

$$|\varepsilon(t)| \quad \text{and} \quad |\hat{\varepsilon}(t)| \leq |\hat{\varepsilon}(0)| e^{-a_m t} + 2 \left[Re^{-\min(a_m, \lambda)t} + \sup_t |\beta| \right]$$

Prova: A demonstração é baseada no Lema da comparação ((Filippov 1964)). Ver (Hsu et al. 1997) para uma demonstração. ■

4.2 SSC - Caso: grau relativo $n^* = 1$

A principal idéia em controle baseado em modos deslizantes é fechar a malha do erro com um relé, com uma função de modulação apropriada, ou seja, $u = f(t) \operatorname{sgn}(e_0)$. Se o grau relativo da malha do erro for unitário ($n^* = 1$), o modelo de referência $M(p)$ pode ser escolhido de forma a ser estritamente real positivo (SPR), tal que uma malha ideal

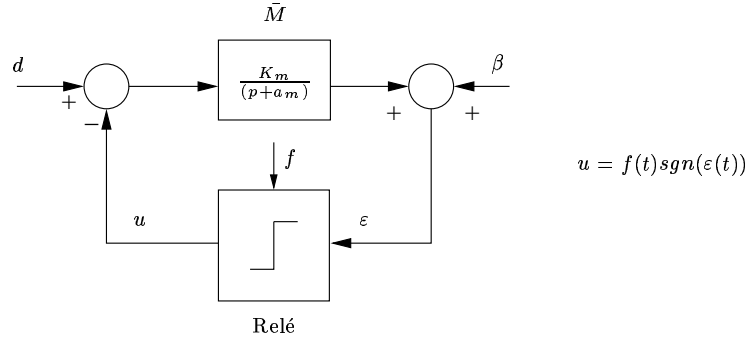


FIGURA 4.1: Diagrama em blocos representativo do Lema 4.1.

de deslizamento (*ideal sliding loop - ISL*) (Hsu 1997b) é formada ao redor da função de chaveamento e o erro tende a zero exponencialmente ou em tempo finito.

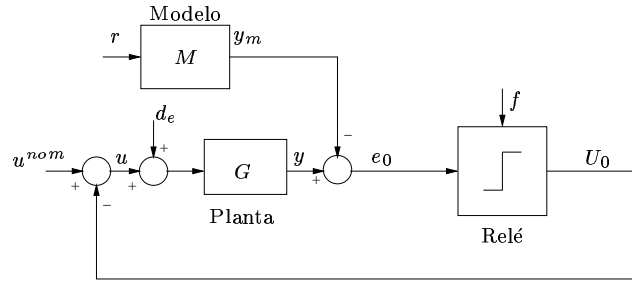


FIGURA 4.2: *VS-MRAC* para $n^* = 1$.

Figura 4.2 apresenta o diagrama em blocos do controlador adaptativo por modelo de referência a estrutura variável (*VS-MRAC*), onde $u^{nom} = \theta^{nomT}\omega$ é um sinal de controle nominal que assegura um casamento perfeito entre $M(p)$ e o sistema em malha fechada para alguma planta nominal. O sinal de controle é definido por:

$$u = u^{nom} - U_0; \quad U_0 = f(t)sgn(e_0)$$

As propriedades de estabilidade do esquema acima podem ser condensadas através do Lema 2.1 apresentado no capítulo 2 (ver (Hsu et al. 1997)):

De acordo com o Lema 2.1, o controle corretivo U_0 pode ser gerado utilizando uma função de modulação que satisfaça a:

$$f(t) \geq |u^* - u^{nom} - W_d d_e| + \delta \quad (4.7)$$

onde δ é uma constante arbitrária não-negativa. Esta função de modulação garante que o esquema acima é globalmente exponencialmente estável e o erro de saída e_0 torna-se identicamente nulo após algum tempo finito, de acordo com o Lema 2.1.

A função de modulação $f(t)$ pode ser implementada da seguinte forma:

$$f(t) = \bar{\theta}^T |\omega(t)| + |W_d d_e| + \delta \quad (4.8)$$

que satisfaz (4.7), se $\bar{\theta}^T = [\bar{\theta}_1 \cdots \bar{\theta}_{2n}]$, com $\bar{\theta}_i > |\theta_i^* - \theta_i^{nom}|$, onde $\bar{\theta}^T$ é o vetor de limitantes superiores dos parâmetros desconhecidos (incertos), $|\omega(t)|^T = [|\omega_1(t)|, \cdots, |\omega_{2n}(t)|]$, e δ é uma constante arbitrária não-negativa.

Observação 1 *Um limitante superior para $|W_d d_e|$ pode ser obtido a partir de uma versão filtrada de \bar{d}_e ($\geq d_e$) através de um filtro de 1ª ordem, ou seja, $\hat{d}_e = \frac{k_e}{p+\gamma} \bar{d}_e$ onde $\gamma = \min_k |Re(p_k)|$, com p_k sendo os pólos de W_d (para detalhes ver Lema 3 in (Hsu et al. 1997)).*

Na prática a hipótese de grau relativo unitário é muito difícil de ser atendida, na realidade, impossível. Isto se deve ao fato de que pequenos atrasos irão aumentar o grau relativo. Por outro lado, sabe-se que o desempenho do rastreamento de sistema de controle a estrutura variável (VSC) é robusto com respeito a dinâmicas não-modeladas. Apesar disso, pode surgir chaveamento em frequência alta, mas finita, inaceitável, denominado de *chattering*, mesmo na presença de pequenos atrasos.

Atenuação de *chattering* pode ser conseguida utilizando a abordagem de “camada de fronteira” (*boundary layer*), ver capítulo 2). Entretanto, esta solução não apresenta desempenho melhor do que um controlador PD e ainda gera erro de regime proporcional a espessura da camada de fronteira (Utkin 1992). Outra abordagem (utilizada neste trabalho) é filtrar as componentes de alta frequência do sinal de controle, utilizando um filtro da média $1/F_{av}(\tau p)$ (*averaging filter*), onde $F_{av}(\tau p)$ é um polinômio *Hurwitz* em τp com $F_{av}(0) = 1$ e constante de tempo $\tau > 0$. Entretanto, a introdução de tal filtro não deve destruir a malha de deslizamento ideal (*ISL - Ideal Sliding Loop - $n^* \geq 1$*) entorno da função de chaveamento do sistema de controle a estrutura variável (VSC).

Desta forma, para sistemas desconhecidos (incertos), um controle suave a estrutura variável (*smooth VSC*) pode ser obtido utilizando-se filtros da média para suavizar

o sinal de controle chaveado e uma malha de predição (Hsu 1997b) para preservar os modos deslizantes ideais, para $n^* = 1$, sem utilizar a abordagem de “camada de fronteira”.

Além disso, o novo controlador suave baseado em modos deslizantes (*Smooth Sliding Controller - SSC*), apresenta modo deslizante ideal que é robustos com respeito a perturbações limitadas de entrada, dinâmicas não-modeladas ou atrasos na planta (Hsu 1997b).

O esquema do controlador suave a estrutura variável (*VSC*) é apresentado na figura 4.3 e a lei de controle é definida da seguinte forma:

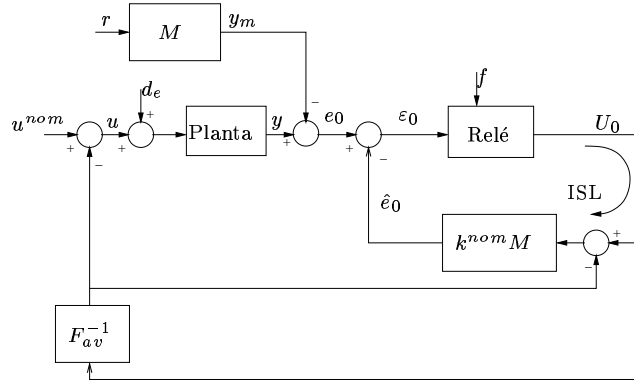


FIGURA 4.3: Controlador suave a estrutura variável (*SSC*) para $n^* = 1$.

$$u = u^{nom} - U_0^{av}; \quad U_0^{av} = F_{av}^{-1}(\tau p)U_0 \quad (4.9)$$

Note que, para uma constante de tempo τ suficientemente pequena, U_0^{av} é uma aproximação do controle equivalente estendido $(U_0)_{eq}$ (ver capítulo 2).

Com esta lei de controle a equação do erro de saída e_0 (equação (4.4)) pode ser reescrita como:

$$e_0 = k^{nom} M(p)[- \rho(U_0^{av} + U_d)]$$

Sendo assim, os erros auxiliares apresentados na figura 4.3 são dados por:

$$\hat{e}_0 = k^{nom} M(p)[U_0 - U_0^{av}] = k^{nom} M(p) \frac{F_{av}(\tau p) - 1}{F_{av}(\tau p)} U_0 \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_0 = e_0 - \hat{e}_0 = k^{nom} M(p)[- \rho(U_0 + U_d)] + \kappa \hat{e}_0 \quad (4.11)$$

onde:

- $U_d = u^* - u^{nom} - W_d d_e$;
- k^{nom} é uma valor nominal de k^* ;
- $\kappa = (k^* - k^{nom})/k^{nom}$;
- $\rho = 1 + \kappa = k^*/k^{nom}$.

4.2.1 Análise de estabilidade

De agora por diante, seja z o vetor de estados completo do sistema do erro. Afim de levar em consideração as condições iniciais, é conveniente criar a seguinte partição do vetor de estados z :

$$z^T = [(z^0)^T, z_e^T] \quad z_e^T = [x_{e_0}^T, \varepsilon_0]$$

onde x_{e_0} é o vetor de estados da realização não-mínima da equação (4.4), e z^0 denota o estado do transiente correspondente a qualquer operador de convolução.

No que segue, todos os K 's são constantes positivas, as normas de operadores ($\|H\|$) são normas induzidas do tipo L_∞ , e EXP and EXP^0 representam qualquer termo da forma $K \|z(0)\| e^{-at}$ e $K \|z^0(0)\| e^{-at}$, respectivamente, onde a é uma constante genérica positiva.

A proposição a seguir caracteriza as propriedades de convergência do erro auxiliar $\varepsilon_0(t)$. Esta proposição garante que, para apropriadas funções de modulação $f(t)$, $\varepsilon_0(t)$ é limitado por uma norma L_∞ do vetor regressor.

Proposição 1 *Considere a equação do erro auxiliar (4.11). Se a função de modulação do relé satisfaz $f(t) \geq |u^* - u^{nom} - W_d d_e|$, e o modelo de referência $M(p)$ é da forma $M(p) = K_m/(p + a_m)$ ($K_m, a_m > 0$) então,*

$$|\varepsilon_0(t)| \leq \tau K_{\varepsilon_0} C(t) + EXP \quad (4.12)$$

onde $K_{\varepsilon_0} > 0$ é uma constante, τ é a constante de tempo de F_{av}^{-1} e

$$C_1(t) = \sup_t \|\omega(t)\|; \quad C(t) = M_\theta C_1(t) + M_r \quad (4.13)$$

para algumas constantes positivas M_θ, M_r .

Prova: ver apêndice B. ■

O resultado de estabilidade global pode ser resumido através do seguinte Teorema (Hsu et al. 1997):

Teorema 4.1 *Considere o sistema (4.4)(4.9)(4.10)(4.11). Assuma que $f(t) \geq |u^* - u^{nom} - W_d d_e|$, e $M(p) = K_m/(p + a_m)$ ($K_m, a_m > 0$). Então, para τ suficientemente pequeno, o sistema completo do erro, com estado z , é globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual de ordem τ , e este conjunto residual não depende das condições iniciais.*

Prova: ver apêndice B. ■

Realização de modos deslizantes ideais

A realização de modos deslizantes ideais é importante já que problemas com *chattering* são evitados. No controlador suave a estrutura variável (*SSC*), a superfície de deslizamento ideal é $\varepsilon_0(t) \equiv 0$. De fato, o seguinte corolário pode ser demonstrado.

Corolário 4.1.1 *Adicionalmente ao Teorema 4.1, se $f(t) \geq |d_1| + \delta, \forall t$, para uma constante não-negativa pequena e arbitrária δ e $M(p)(1 + \kappa F_{av}^{-1}(\tau p))$ é estritamente real positiva (*SPR*), com $d_1 = \rho[\frac{F_{av}}{F_{av} + \kappa}]U_d$ e $U_d = u^* - u^{nom} - W_d d_e$, então o erro auxiliar ε_0 (fig. 4.3), tende a zero exponencialmente. Além disso, se $\delta > 0$ então $\varepsilon_0(t)$ torna-se identicamente zero após algum tempo finito $t_r \geq 0$.*

Prova: Considerando que a equação (4.11) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon_0 = k^{nom} M(p)(1 + \kappa F_{av}^{-1})[-U_0 - d_1]$$

a demonstração baseia-se no Lema 2.1. ■

4.2.1.1 Dinâmica não-modelada

No esquema do controlador suave (*SSC*) para $n^* = 1$, ver fig. 4.3, uma malha de deslizamento ideal (*ISL*) existe, independentemente de possíveis atrasos inerentes a planta que elevam o grau relativo acima da unidade. Portanto é possível realizar um modo

deslizante ideal. Considere apenas dinâmicas não-modeladas do tipo multiplicativa, onde a função de transferência da planta é dada por:

$$G(p) = G_0(p)[1 + \mu G_m(p)] \quad (4.14)$$

Assume-se que $0 \leq \mu \leq \mu^*$, para alguma constante positiva μ^* .

O termo- μ da dinâmica não-modelada (de acordo com (Hsu et al. 1997) e (Hsu 1997b)) pode ser tratado com uma perturbação de entrada dada por:

$$d_\mu = \mu G_m(p)u \quad (4.15)$$

O Teorema a seguir garante as propriedades de estabilidade global na presença de dinâmica não-modelada.

Teorema 4.2 *Considere o controlador suave (SSC) definido por (4.4)(4.9)(4.10)(4.11) com perturbação de entrada $d_e + d_\mu$. Assuma que $f(t) \geq |u^* - u^{nom} - W_d d_e|$. Se $M(p) = K_m/(p + a_m)$, ($K_m, a_m > 0$) e $\|MW_d G_m\|$ é limitada por alguma constante finita, então, para valores suficientemente pequenos de τ e μ , o sistema completo do erro, com estado z , é globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual de ordem $(\tau + \mu)$ e este conjunto residual não depende das condições iniciais.*

Prova: A perturbação de entrada é dada por $d_\mu + d_e$, então o erro de saída e_0 (equação (4.4)) pode ser reescrito como (considerando a lei de controle (4.9)):

$$e_0 = k^{nom} M(p)[-(U_0^{av} + \bar{U})]$$

onde $\bar{U} = \kappa U_0^{av} + \rho U_d - \rho W_d d_\mu$.

Além disso, o erro auxiliar (4.11) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\varepsilon_0 = k^{nom} M(p)[- \rho(U_0 + U_d - \mu W_d G_m u)] + \kappa \hat{e}_0 \quad (4.16)$$

$$= k^{nom} M(p)[- \rho(U_0 + U_d)] + \mu \beta_u + \kappa \hat{e}_0 \quad (4.17)$$

onde

$$\beta_u = \rho k^{nom} M(p) W_d(p) G_m(p) [u]$$

Definindo $\beta_{eq} = \mu\beta_u + \kappa\hat{e}_0$, assumindo que $\|MW_dG_m\|$ é limitada por alguma constante K_{β_u} e considerando a classe de sinais de controle admissíveis (hipótese 7), tem-se que, para alguma constante positiva $K_{\beta_{eq}}$:

$$\sup_t |\beta_{eq}| \leq (\tau + \mu) K_{\beta_{eq}} C(t)$$

Desta forma, a demonstração de estabilidade segue utilizando-se a proposição 1 (compare (4.17) e (4.11)) e o Teorema 4.1 (considerando $\bar{U} = \kappa U_0^{av} + \rho U_d - \rho W_d d_\mu$ na demonstração do Teorema 4.1). ■

Realização de modos deslizantes ideais

Agora será demonstrado que deslizamentos ideais ainda são possíveis de serem realizados mesmo na presença de dinâmicas não-modeladas, de acordo com o seguinte corolário.

Corolário 4.2.1 *Adicionalmente ao Teorema 4.2, se $f(t) \geq |d_1| + \mathcal{O}(\mu) + \delta, \forall t$, para uma constante não-negativa pequena e arbitrária δ , $M(p)(1 + \kappa F_{av}^{-1})$ é estritamente real positiva (SPR), $\|W_d G_m\|$ é limitada por alguma constante positiva, com $d_1 = \rho \left[\frac{F_{av}}{F_{av} + \kappa} \right] U_d$ e $U_d = u^* - u^{nom} - W_d d_e$, então o erro auxiliar ε_0 (fig. 4.3) tende a zero exponencialmente. Além disso, se $\delta > 0$ então $\varepsilon_0(t)$ torna-se identicamente zero após algum tempo finito $t_r \geq 0$.*

Prova: Reescreva a equação (4.11) como:

$$\varepsilon_0 = k^{nom} M(p) (1 + \kappa F_{av}^{-1}) [-U_0 - d_1 + \mu d_2]$$

onde, $d_2 = \left[\frac{\rho W_d G_m F_{av}}{F_{av} + \kappa} \right] u$.

Se $\|W_d G_m\|$ é limitada por alguma constante, então utilizando a hipótese 7 e o Teorema 4.2, o termo μd_2 é de ordem $\mathcal{O}(\mu)$. A demonstração segue utilizando o Lema 2.1. ■

Observação 2 *Nos Teoremas e corolários acima a função de modulação $f(t)$ pode ser*

implementada com em (4.8). Para maiores detalhes na implementação da função de modulação ver (Hsu et al. 1997).

4.3 SSC - Caso: grau relativo $n^* \geq 1$

Considerando as propriedades de robustez do controlador suave (SSC), parece natural estender o controlador para o caso de grau relativo maior do que a unidade. Caso a planta tenha grau relativo $n^* > 1$, então o operador polinomial diferencial $L(p)$ (não-causal) compensa o grau relativo da planta. Além disso, assume-se que o modelo de predição $ML(p)$, é estritamente real positivo SPR. Desta forma, o problema se reduz ao caso $n^* = 1$ ($L(p) = 1$), ver figura 4.4.

O controlador SSC para grau relativo arbitrário é apresentado na figura 4.4, onde o operador $L(p)$ não-causal é implementado (tanto nas simulações quanto no experimento prático) de forma aproximada descrita a seguir. Deslocando-se $L(p)$ para antes do somador do erro de saída e_0 o sistema de controle não se altera (ver figuras 4.4 e 4.5). Como o modelo de referência é conhecido é possível ter acesso as derivadas superiores da saída y_m , ou seja, é possível implementar diretamente o operador causal $ML(p)$. Por outro lado, por não se ter acesso as derivadas de ordem superior da saída da planta y o filtro da figura 4.5, com função de transferência $\mathcal{L} = L(p)/F(\tau_F p)$, pode ser utilizado para aproximar o operador polinomial diferencial $L(p)$. O filtro $F^{-1}(\tau_F p)$ é tal que:

$$F(\tau_F p) \rightarrow 1, \quad \text{quando} \quad \tau_F \rightarrow 0$$

Observação 3 Uma alternativa para implementar a função de transferência $\frac{L(p)}{F(\tau_F p)}$ (filtro lead linear) que aproxima o operador diferencial $L(p)$, é utilizar o sistema não-linear, baseado em estrutura variável (modo deslizante), como mostra a figura 4.6. Nesta configuração, o filtro lead $\frac{L(p)}{F(\tau_F p)}$ é denominado de filtro lead a estrutura variável (VSLF - variable structure lead filter), ver (Hsu et al. 1997).

Note que, uma vez que o sistema entra em regime deslizante, tem-se:

$$\varepsilon \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{e_F}{L(p)} = \frac{e}{F(\tau_F p)}$$

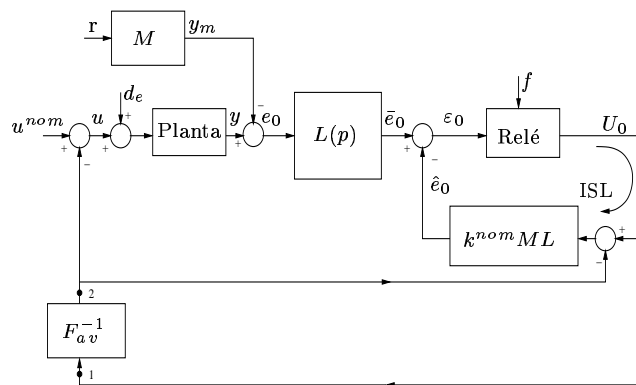


FIGURA 4.4: Controlador suave a estrutura variável (SSC) utilizando um operador $L(p)$ para compensação de grau relativo.

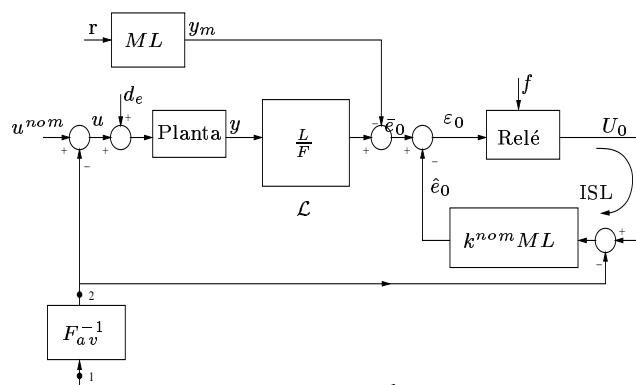


FIGURA 4.5: Controlador suave a estrutura variável (SSC) utilizando um filtro $L(p)/F(\tau_F p)$ para aproximar o operador diferencial $L(p)$.

Portanto a saída do VSLF é dada por:

$$e_F = \frac{L(p)}{F(\tau_F p)} e$$

Com a finalidade de simplificar o controlador, no sentido de diminuir o número de dispositivos de chaveamento, será utilizado o filtro linear apesar de, em (Sant'Anna 1996), serem apresentadas simulações que mostram que o filtro lead a estrutura variável (VS lead filter) apresenta um desempenho superior em comparação ao filtro lead linear de 1ª ordem, devido a saturação imposta pelo relé característico de sua topologia.

Utilizando o filtro linear, define-se o sinal de erro \bar{e}_0 (figura 4.5), como a seguinte

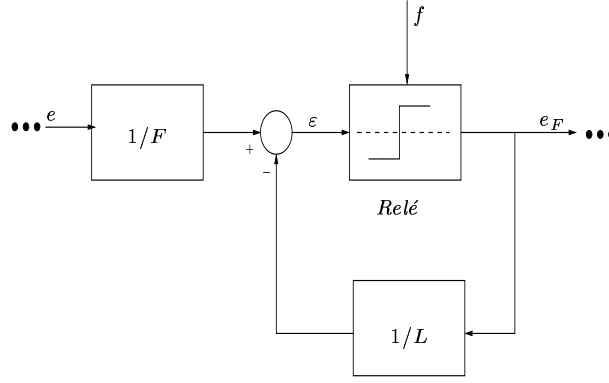


FIGURA 4.6: *Filtro lead a estrutura variável (VSLF) utilizado para implementar a aproximação $L(p)/F(\tau_F p)$ do operador diferencial $L(p)$.*

aproximação do sinal $L(p)e_0(t)$:

$$\begin{aligned}
 \bar{e}_0 &:= \underbrace{\frac{L(p)}{F(\tau_F p)} y}_{\approx L(p)y} - \underbrace{ML(p)r}_{=L(p)y_m} & (4.18) \\
 &= \frac{L(p)}{F(\tau_F p)} e_0 + ML(p) \left[\frac{1 - F(\tau_F p)}{F(\tau_F p)} \right] r \\
 &\approx L(p)e_0
 \end{aligned}$$

A definição do sinal de controle (equação (4.9)) e a equação do erro de saída e_0 (equação (4.4)) não se alteram.

Além disso, os seguintes erros auxiliares são indicados (figura 4.5):

$$\hat{e}_0 = k^{nom} ML(p) [U_0 - U_0^{av}] = k^{nom} ML(p) \frac{F_{av}(\tau p) - 1}{F_{av}(\tau p)} U_0 \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_0 = \bar{e}_0 - \hat{e}_0 = k^{nom} ML(p) [-\rho(U_0 + U_d)] + \kappa \hat{e}_0 + \beta_F \quad (4.20)$$

onde $U_d = u^* - u^{nom} - W_d d_e$ e

$$\begin{aligned}
 \beta_F &= k^{nom} \rho ML \left[\frac{F - 1}{F} \right] U_d + \\
 &+ k^{nom} \rho ML \left[\frac{F - 1}{F F_{av}} \right] U_0 + \\
 &+ ML \left[\frac{1 - F}{F} \right] r
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.3.1 Análise de estabilidade

Os resultados globais de estabilidade e as condições para existência de regime deslizante ideal são dados pelos Teoremas e corolários a seguir cujas demonstrações seguem a mesma linha das demonstrações dos Teoremas 4.1 e 4.2 e dos corolários 4.1.1 e 4.2.1.

Assim como a proposição 1, a proposição seguinte caracteriza a propriedade de convergência do erro auxiliar $\varepsilon_0(t)$. A proposição garante que para uma apropriada função de modulação $f(t)$, $\varepsilon_0(t)$ é limitado por uma norma $L_{\infty e}$ do vetor regressor.

Proposição 2 *Considere a equação do erro auxiliar (4.20). Se a função de modulação do relé satisfaz $f(t) \geq |u^* - u^{nom} - W_d d_e|$, e $ML(p)$ é da forma $ML(p) = K_m/(p + a_m)$ ($K_m, a_m > 0$) então,*

$$|\varepsilon_0(t)| \leq (\tau + \tau_F)K_{\varepsilon_0}C(t) + EXP \quad (4.22)$$

onde $K_{\varepsilon_0} > 0$ é uma constante, τ é a constante de tempo de F_{av}^{-1} , τ_F é a constante de tempo de F^{-1} e

$$C_1(t) = \sup_t \|\omega(t)\|; \quad C(t) = M_\theta C_1(t) + M_r \quad (4.23)$$

para algumas constantes positivas M_θ, M_r .

Prova: De acordo com a classe de sinais de controle admissíveis dada pela hipótese γ , é possível escolher constantes M_θ, M_r tais que

$$\sup_t |U_0(t)| \leq C(t)$$

Então, de (4.19), tem-se

$$\sup_t |\hat{e}_0(t) - \hat{e}_0^0(t)| \leq \underbrace{\left\| k^{nom} ML \frac{F_{av} - 1}{F_{av}} \right\|}_{O(\tau)} C(t) = \tau K_{\varepsilon_0} C(t) \quad (4.24)$$

onde $\hat{e}_0^0(t)$ é limitado por EXP^0 , é pode-se concluir que $\sup_t |\hat{e}_0(t)| \leq \tau K_{\varepsilon_0} C(t) + EXP^0$. Note que, assim como em (4.24), já que $\|ML[F - 1]F^{-1}F_{av}^{-1}\|$ e $\|ML[F - 1]F^{-1}\|$ são operadores de ordem $\mathcal{O}(\tau_F)$ e a referência r é limitada por hipótese, β_F (4.21) pos-

sua o seguinte limitante superior:

$$\sup_t |\beta_F(t)| \leq \tau_F K_{\beta_F} C(t) + EXP^0$$

Se $f(t) \geq |U_d|$, aplicando o Lema 4.1 a equação do erro auxiliar (4.20), a proposição é demonstrada. ■

O resultado de estabilidade é garantido pelo Teorema a seguir (Hsu 1997b):

Teorema 4.3 *Considere o sistema (4.4)(4.9)(4.19)(4.20). Assuma que $f(t) \geq |u^* - u^{nom} - W_d d_e|$ e $\mathcal{L} = L(p)/F(\tau_F p)$. Se $ML(p) = K_m/(p + a_m)$ ($K_m, a_m > 0$). Então, para τ e τ_F suficientemente pequenos, o sistema completo do erro, com estado z , é globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual de ordem $\tau + \tau_F$, e este conjunto residual não depende das condições iniciais.*

Prova: O erro auxiliar ε_0 (equação (4.20)) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\varepsilon_0 = k^{nom} ML(p)[-(U_0^{av} + \bar{U})] + \beta_F - \hat{e}_0$$

onde \hat{e}_0 é definido em (4.19) e $\bar{U} = \kappa U_0^{av} + \rho U_d$.

De acordo com a proposição 2 ε_0 possui um limitante superior dado por (4.22), além disso, na demonstração da proposição 2 β_F é limitado por (4.25). A demonstração segue a demonstração do Teorema 4.1 considerando $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \hat{e}_0 - \beta_F$. ■

Realização de modos deslizantes ideais

O corolário a seguir garante que deslizamento ideal é possível mesmo na presença da constante de tempo τ_F introduzida pelo filtro $F^{-1}(\tau_F p)$ utilizado para realizar o operador $L(p)$ para compensar grau relativo.

Corolário 4.3.1 *Adicionalmente ao Teorema 4.3, se $f(t) \geq |d_1| + |d_{1r}| + \delta, \forall t$, para uma constante não-negativa pequena e arbitrária δ e $ML(p)(1 + (\rho F^{-1} - 1)F_{av}^{-1})$ é estritamente real positiva (SPR), com $d_1 = \rho[\frac{F_{av}}{(FF_{av} - F + \rho)}]U_d$, $d_{1r} = [\frac{F_{av}(F-1)}{k^{nom}(FF_{av} - F - \rho)}]r$ e $U_d = u^* - u^{nom} - W_d d_e$, então o erro auxiliar ε_0 (fig. 4.5), tende a zero exponencialmente. Além disso, se $\delta > 0$ então $\varepsilon_0(t)$ torna-se identicamente zero após algum tempo finito $t_r \geq 0$.*

Prova: Considerando que a equação (4.20) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon_0 = k^{nom} ML(p)(1 + (\rho F^{-1} - 1)F_{av}^{-1})[-U_0 - d_1 - d_{1r}]$$

a demonstração baseia-se no Lema 2.1. ■

4.3.1.1 Dinâmica não-modelada

Assim como para o caso de grau relativo unitário, o esquema de controle *SSC* é robusto com respeito a dinâmicas não-modeladas ($G_m(p)$), do tipo multiplicativa, dada pela equação (4.14) que pode ser tratada com perturbação de entrada d_μ dada por:

$$d_\mu = \mu G_m(p)u$$

Os resultados globais de estabilidade são dados pelo Teorema a seguir.

Teorema 4.4 *Considere o controlador suave (SSC) definido por (4.4)(4.9)(4.10)(4.20) com perturbação de entrada $d_e + d_\mu$. Assuma que $f(t) \geq |u^* - u^{nom} - W_d d_e|$. Se $ML(p) = K_m/(p + a_m)$, ($K_m, a_m > 0$) e $\|MLW_d G_m\|$ é limitada por alguma constante finita, então, para valores suficientemente pequenos de τ , τ_F e μ , o sistema completo do erro, com estado z , é globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual de ordem $(\tau + \tau_F + \mu)$ e este conjunto residual não depende das condições iniciais.*

Prova: A perturbação de entrada é dada por $d_\mu + d_e$, então o erro de saída e_0 (equação (4.4)) pode ser reescrito como (considerando a lei de controle (4.9)):

$$e_0 = k^{nom} M(p)[-(U_0^{av} + \bar{U})]$$

onde $\bar{U} = \kappa U_0^{av} + \rho U_d - \rho W_d d_\mu$.

O erro auxiliar (4.20) pode ser reescrito como:

$$\varepsilon_0 = k^{nom} ML(p)[-\rho(U_0 + U_d)] + \beta_F + \kappa \hat{e}_0 + \mu \beta_{\mu_F} \quad (4.25)$$

where

$$\beta_{\mu_F} = \rho k^{nom} ML(p)W_d(p)G_m(p)F^{-1}[u]$$

Assumindo que $\|MLW_dG_m\|$ é limitada por uma constante K_{β_μ} e considerando a classe de sinais de controle admissíveis (hipótese 7), tem-se, seguindo a proposição 2:

$$|\varepsilon_0| \leq (\tau + \tau_F + \mu)\bar{K}_{\varepsilon_0}C(t)$$

A prova de estabilidade segue o Teorema 4.3 considerando $\bar{U} = \kappa U_0^{av} + \rho U_d - \rho W_d d_\mu$ e $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \hat{e}_0 - \beta_F + \mu\beta_{\mu'}$, onde

$$\beta_{\mu'} = \rho k^{nom} ML(p)W_d(p)G_m(p)[1 - F^{-1}][u]$$

.

■

Realização de modos deslizantes ideais Além disso, o corolário a seguir garante que, para plantas com grau relativo arbitrário, deslizamento ideal é possível, mesmo na presença de dinâmica não-modelada.

Corolário 4.4.1 *Adicionalmente ao Teorema 4.4, se $f(t) \geq |d_1| + |d_{1r}| + \mathcal{O}(\mu) + \delta, \forall t$, para uma constante não-negativa pequena e arbitrária δ , $ML(p)(1 + (\rho F^{-1} - 1)F_{av}^{-1})$ é estritamente real positiva (SPR), $\|W_dG_m\|$ é limitada por alguma constante positiva, com $d_1 = \rho[\frac{F_{av}}{(FF_{av} - F + \rho)}]U_d$, $d_{1r} = [\frac{F_{av}(F-1)}{k^{nom}(FF_{av} - F - \rho)}]r$ e $U_d = u^* - u^{nom} - W_d d_e$, então o erro auxiliar ε_0 (fig. 4.5) tende a zero exponencialmente. Além disso, se $\delta > 0$ então $\varepsilon_0(t)$ torna-se identicamente zero após algum tempo finito $t_r \geq 0$.*

Prova: Reescreva a equação (4.20) como:

$$\varepsilon_0 = k^{nom} M(p)(1 + \kappa F_{av}^{-1})[-U_0 - d_1 - d_{1r} + \mu d_2]$$

onde, $d_2 = [\frac{\rho W_d G_m F_{av}}{F_{av} + \kappa}]u$.

Se $\|W_dG_m\|$ é limitada por alguma constante, então utilizando a hipótese 7 e o Teorema 4.4, o termo μd_2 é de ordem $\mathcal{O}(\mu)$. A demonstração segue utilizando o Lema 2.1.

■

Observação 4 *Nos Teoremas e corolários acima a função de modulação $f(t)$ pode ser*

implementada com em (4.8). Para maiores detalhes na implementação da função de modulação ver (Hsu et al. 1997).

Na análise acima, os teoremas 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4 garantem a estabilidade global do vetor de estados completo do sistema do erro enquanto que os corolários 4.1.1, 4.2.1, 4.3.1 e 4.4.1 garantem a existência de regime deslizante ideal na superfície $\varepsilon_0 = 0$. O caso mais geral é abordado pelo Teorema 4.4 e pelo Corolário 4.4.1, onde considera-se o controlador *SSC* para grau relativo arbitrário (o grau relativo é compensado através da aproximação $L(p)/F(\tau_F p)$ do operador diferencial $L(p)$), na presença de perturbação de entrada (d_e) e dinâmica não-modelada ($G_m(\mu p)$). O Teorema 4.4 afirma que o vetor de estados completo do sistema do erro converge para um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(\tau + \tau_F + \mu)$ caso a função de modulação $f(t)$ seja suficientemente grande. Para tanto, a implementação da função de modulação requer o conhecimento do vetor regressor ω , ou seja, requer a implementação dos filtros de entrada e saída (ver o capítulo 3).

4.4 Aspectos de implementação prática

Ao se implementar o controlador alguns aspectos devem ser levados em consideração. Em primeiro lugar, visando simplificar a implementação do controlador *SSC*, a função de modulação assumirá um valor constante ($f(t) = f_0$). Esta simplificação é justificada do ponto de vista prático devido a que, em geral, existe uma saturação inerente nos atuadores. No entanto, ao se utilizar uma função de modulação constante os resultados de estabilidade deixam de ser globais e passam a ser locais. Esta é a primeira diferença da análise teórica com relação a implementação prática do controlador *SSC*. O valor constante da função de modulação, e conseqüentemente, a região de estabilidade local, serão determinados através de simulações.

Além disso, serão destacados mais dois aspectos práticos de implementação do controlador *SSC*:

1. **Deslizamento real** (*chattering*) - outra diferença importante reside no fato de que, após o sistema atingir o regime deslizante (caso as condições dos Corolário 4.4.1 sejam satisfeitas), a frequência do sinal de saída do relé (U_0) é infinita, o que é impossível de ocorrer em uma situação prática devido a presença

de imperfeições como pequenos atrasos nos dispositivos de chaveamento reais, atrasos impostos por limitações computacionais de sistemas de controle digitais ou dinâmicas não-modeladas na planta, impedem a existência de um modo de deslizamento ideal (*ideal sliding mode*) resultando no chamado modo de **deslizamento real** (*real sliding mode*). No deslizamento real, a variável de controle é chaveada em alta, mas finita, frequência (este fenômeno é conhecido por *chattering*).

Uma abordagem simples para analisar o comportamento do sistema considerando que a frequência do sinal de saída do relé não pode ser infinita em implementações práticas (ou seja, deslizamento real) é utilizar o conceito de “camada de fronteira” (*boundary layer*) apresentado no capítulo 2. As limitações físicas (atrasos, zona morta, histerese, discretização) são introduzidas no dispositivo de chaveamento sem especificar a natureza dessas limitações, através de uma zona linear de largura Δ .

O desempenho do sistema passa a depender do seu comportamento em alto ganho (ganho da zona linear do relé). Caso o sistema seja estável em alto ganho, após um transitório ε_0 estará confinado a camada de fronteira ($\|\varepsilon_0\| \leq \Delta$). Caso contrário, ou seja, se o sistema não for estável em alto ganho, ε_0 não pertencerá a camada de fronteira, e conseqüentemente, o desempenho do sistema será deteriorado. Apesar disso, a estabilidade global do sistema em malha fechada pode ser garantida, caso a função de modulação do relé seja suficiente para garantir a atratividade da “camada de fronteira” (capítulo 2). Entretanto, o sistema apresentará um grande erro de saída e_0 . Desta forma, o deslizamento real pode ser analisado através do comportamento do sistema em alto ganho.

2. **Sintonia do controlador** - outro aspecto importante para a implementação do controlador é a sintonia de seus parâmetros: a constante de tempo τ do filtro da média ($F_{av}^{-1}(\tau p)$), a constante de tempo τ_F do filtro ($F^{-1}(\tau_F p)$) utilizado para realizar o operador $L(p)$ para compensar grau relativo, o valor de k^{nom} utilizado na malha de predição e a amplitude constante f_0 da função de modulação do relé. Além da escolha do compensador de grau relativo $L(p)$ e do modelo de referência $M(p)$. Para sintonizar o controlador é conveniente conhecer o efeito

dos parâmetros e definir uma metodologia para a sintonia.

A influência dos parâmetros do controlador será ilustrada através de simulações. Por fim, será estipulado um critério para a sintonia do controlador *SSC*.

Em seguida, serão apresentadas as análises do controlador durante o deslizamento ideal e durante o deslizamento real (analisado através de uma zona linear no relé - análise de alto ganho) que servirão para extrair algum conhecimento a respeito da influência dos parâmetros do controlador no desempenho do sistema em malha fechada, para servir de base para a sintonia do controlador.

4.4.1 Análise durante o deslizamento ideal

Após atingir o deslizamento o erro auxiliar ε_0 torna-se identicamente nulo ($\varepsilon_0 \equiv 0$).

De acordo com o diagrama em blocos da figura 4.5 ε_0 é dado por:

$$\varepsilon_0 = \bar{\varepsilon}_0 - \hat{\varepsilon}_0$$

Portanto, de acordo com o corolário 4.4.1, após um tempo finito t_r , a superfície $\varepsilon_0 \equiv 0$ é atingida, dando início ao deslizamento ideal, onde:

$$\bar{\varepsilon}_0 \equiv \hat{\varepsilon}_0, \quad \forall t \geq t_r$$

Por outro lado, de acordo com a equação (4.10) $\hat{\varepsilon}_0$ é dado por:

$$\hat{\varepsilon}_0 = k^{nom} ML(p)[F_{av}(\tau p) - 1]U_0^{av}$$

Portanto,

$$\bar{\varepsilon}_0 = k^{nom} ML(p)[F_{av}(\tau p) - 1]U_0^{av}$$

De acordo com o diagrama em blocos da figura 4.5 tem-se:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \frac{L(p)}{F(\tau_F p)}y - ML(p)r$$

Sendo assim, o sinal controle $u = u_{SM}$ do esquema *SSC* em regime deslizante

($\forall t \geq t_r$) é dado por:

$$u_{SM} = u^{nom} - (U_0^{av})_{SM}, \quad \forall t \geq t_r$$

onde

$$(U_0^{av})_{SM} = \underbrace{\frac{1}{k^{nom} M[F_{av} - 1] F}}_{C_1} e_0 - \underbrace{\frac{(F - 1)}{k^{nom} F[F_{av} - 1]}}_{C_2} r \quad (4.26)$$

Observe que o controlador C_1 apresenta ação integral, uma vez que quando $s \rightarrow 0$ o ganho do controlador cresce indefinidamente.

Como exemplo ilustrativo, considere o seguinte caso particular:

- O modelo de referência é dado por $M(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$.
- O filtro da média é de primeira ordem tal que $F_{av}(\tau p) = \tau p + 1$.
- O filtro utilizado na aproximação L/F de $L(p)$ é tal que $F(\tau_F p) = \tau_F p + 1$.

Durante o deslizamento o controlador SSC equivale ao seguinte controlador linear:

$$(U_0^{av})_{SM} = \frac{(p + 1)^2}{k^{nom} \tau (\tau_F p + 1) p} e_0 - \frac{\tau_F / \tau}{k^{nom} (\tau_F p + 1)} r \quad (4.27)$$

e, para o caso particular de regulação ($r = 0$), tem-se:

$$(U_0^{av})_{SM} = \frac{(p + 1)^2}{k^{nom} \tau (\tau_F p + 1) p} e_0 \quad (4.28)$$

ou seja, o controlador SSC pode ser interpretado, durante o deslizamento ideal, como um controlador que apresenta uma ação integral com alto ganho (τ pequeno). A figura 4.7 ilustra o controlador em regime deslizante.

Observação 5 Influência de k^{nom} e τ

De acordo com (4.28), o erro de saída e_0 é menor quanto menor for k^{nom} e τ , para valores que satisfaçam a hipótese do corolário 4.4.1, garantido a existência de deslizamento ideal.

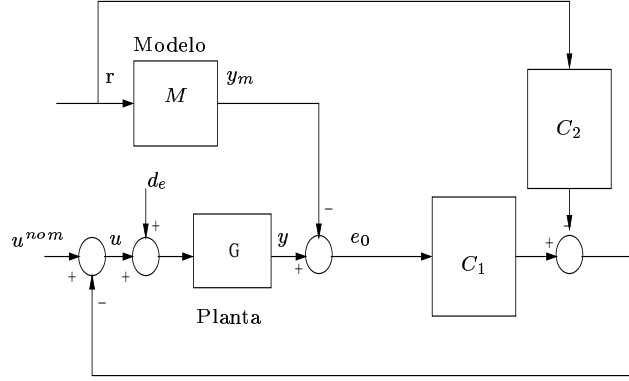


FIGURA 4.7: Equivalente linear para o controlador suave a estrutura variável (SSC) durante o regime deslizante. O controlador possui ação integral com alto ganho.

Observação 6 Influência de τ_F

De acordo com (4.28), o erro de saída e_0 em estado estacionário, é independente de τ_F , para valores de τ_F que satisfaçam a hipótese do corolário 4.4.1, garantido a existência de deslizamento ideal.

4.4.2 Análise durante o deslizamento real - (análise de alto ganho)

Suponha agora que, o relé será substituído por um ganho constante. Portanto, torna-se possível determinar o controlador linear equivalente, da seguinte forma.

Para o caso em que o relé é substituído por um ganho constante g , o sinal de saída U_0 é dado por:

$$U_0 = g\varepsilon_0$$

com ε_0 dado pela equação (4.20).

Substituindo a relação acima em (4.20) determina-se o controlador linear, dado por:

$$(U_0^{av})_{HG} = \underbrace{\frac{L}{F[k^{nom}ML(F_{av} - 1) + \frac{F_{av}}{g}]}_{C_1}} e_0 + \underbrace{\frac{ML[1 - F]}{F[k^{nom}ML(F_{av} - 1) + \frac{F_{av}}{g}]}_{C_2} \quad (4.29)$$

Observação 7 Note que para $g \rightarrow \infty$ o controle em alto ganho $(U_0^{av})_{HG}$ tende para o controle em regime deslizante $(U_0^{av})_{ss}$. Sendo assim, a influência dos parâmetros k^{nom} ,

τ e τ_F , no desempenho do sistema em malha fechada, durante o deslizamento real, pode ser analisada pela influência durante o deslizamento ideal.

O exemplo a seguir ilustra o lugar das raízes do sistema em malha fechada, considerando o caso de regulação ($r = 0$) para duas escolhas do filtro $F^{-1}(\tau_F p)$ um de primeira ordem e outro de segunda ordem. Além disso, considera-se $u^{nom} = 0$.

Exemplo 4.1 Considere a planta com função de transferência dada por: $G(p) = \frac{5}{(p-3)(p+3)}$, sendo controlada pelo controlador SSC da figura 4.5, substituindo o relé por um ganho constante g , com $M(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$, $r(t) = 0$ (caso de regulação), filtro da média $F_{av}^{-1} = 1/(\tau p + 1)$ com $\tau = 1/300$, $k^{nom} = 40$ e $L(p) = p + 1$. Neste caso o sinal de controle é dado por:

$$(U_0^{av})_{HG} = \frac{(p+1)^2}{\underbrace{F\left[\frac{\tau}{g}p^2 + \left[\frac{\tau+1}{g} + \tau\right]p + \frac{1}{g}\right]}_{C_1}} e_0$$

A figura 4.8 apresenta o lugar das raízes do sistema de malha fechada para o caso em que o filtro utilizado na aproximação L/F do operador $L(p)$ é dado por $F^{-1}(\tau_F p) = 1/(\tau_F p + 1)$ com $\tau_F = 1/100$. A figura 4.9 apresenta o lugar das raízes para o caso em que

$$F^{-1}(p) = \frac{1}{\left(\frac{1}{k_{c_2}}p^2 + \frac{k_{c_1}}{k_{c_2}}p + 1\right)}$$

com $k_{c_1} = 10.5$ e $k_{c_2} = 1400$. Observa-se que em alto ganho o primeiro caso apresenta uma margem de estabilidade maior do que o segundo. ■

Exemplo 4.2 Nas mesmas condições que no exemplo anterior, considere, agora, o caso em que será introduzida a dinâmica não-modelada ($G_m(\mu p) = 1/(0.22p + 1)$, $\mu = 0.22$) (possivelmente a dinâmica do atuador da planta), que passa a ter a seguinte função de transferência: $G(p) = \frac{5}{(p-3)(p+3)(0.22p+1)}$.

A figura 4.10 apresenta o lugar das raízes do sistema de malha fechada para o caso em que o filtro utilizado na aproximação L/F do operador $L(p)$ é o filtro de 1ª ordem do exemplo anterior, e a figura 4.11 para o caso do filtro de segunda ordem (exemplo anterior). Observa-se o efeito contrário com relação ao exemplo anterior. Em alto

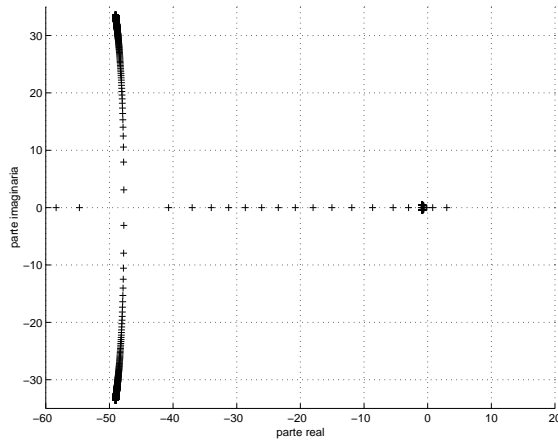


FIGURA 4.8: Lugar das raízes (exemplo 4.1) do sistema de malha fechada. Análise de alto ganho. $F^{-1}(\tau_F p) = 1/(\tau_F p + 1)$.

ganho o primeiro caso apresenta uma margem de estabilidade menor do que o segundo. ■

Os exemplos ilustram o fato de que a escolha do filtro $F^{-1}(\tau_F p)$ pode gerar um controlador instável em alto ganho, impedindo a existência de um deslizamento real. O erro auxiliar ε_0 não permanecerá dentro da camada de fronteira.

A figura 4.12 apresenta o controlador linear equivalente em alto ganho.

4.4.3 Sintonia do controlador *SSC*

Serão adotados os seguintes critérios para a sintonia dos parâmetros do controlador suave a estrutura variável (*SSC*) para grau relativo qualquer:

- O modelo de referência M é escolhido de forma que sua dinâmica seja mais lenta que as dinâmicas não-modeladas.
- L - O operador $L(p)$ terá, por simplicidade, seus zeros localizados na mesma posição dos pólos do modelo de referência $M(p)$.
- f_0 - a função de modulação do relé deve satisfazer as hipóteses do Corolário 4.4.1 e ser a menor possível, para não obter sinais de controle muito conservativos.
- Os parâmetros τ , τ_F e k^{nom} devem ser escolhidos de forma que a hipótese relacionada a positividade real, no corolário 4.4.1, seja atendida, afim de garantir a

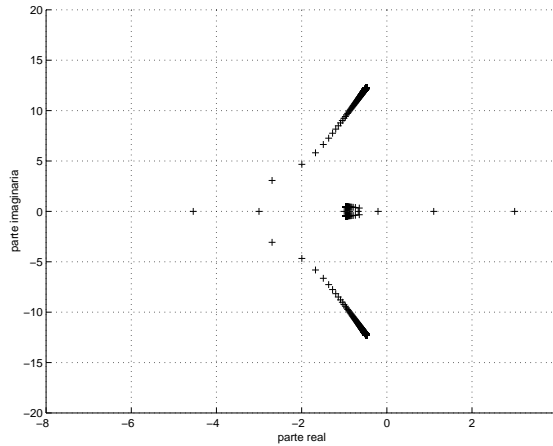


FIGURA 4.9: Lugar das raízes (exemplo 4.1) do sistema de malha fechada. Análise de alto ganho. $F^{-1}(p) = 1/(\frac{1}{k_{c2}}p^2 + \frac{k_{c1}}{k_{c2}}p + 1)$.

existência de deslizamento ideal (aspecto teórico). Esta hipótese está relacionada ao deslizamento real (aspecto prático) através da estabilidade em alto ganho do sistema em malha fechada. A estabilidade em alto ganho é uma condição necessária para a existência de modo deslizante real sobre a superfície $\varepsilon_0 = 0$. A influência de cada um desses parâmetros sobre o desempenho do sistema pode ser resumida da seguinte forma:

- τ - constante de tempo do filtro da média ($F_{av}^{-1}(\tau p)$) - ver exemplo 4.3
 Quanto menor este parâmetro menor o erro em regime ($\mathcal{O}(\tau + \tau_F + \mu)$, Teorema 4.4) e menor o atraso introduzido na malha de controle, o que resulta em uma menor influência no transitório. Por outro lado, quanto menor τ menos o sinal de controle será filtrado. Existe, portanto, um compromisso entre suavização do sinal de controle e o erro de rastreamento (transitório e regime).
- k_{nom} - malha de predição - exemplo 4.4
 Uma vez em deslizamento ideal ($\varepsilon_0 = e_0 - \hat{e}_0 = 0$), o erro de rastreamento é igual ao erro de predição ($\bar{e}_0 = \hat{e}_0$). De acordo com a equação (4.19) o erro de predição é proporcional a k^{nom} . Portanto, no deslizamento, o erro de saída é tão menor quanto menor for k^{nom} . Sendo assim k^{nom} deve ser escolhido o menor possível de forma que ainda exista deslizamento ideal, em outras

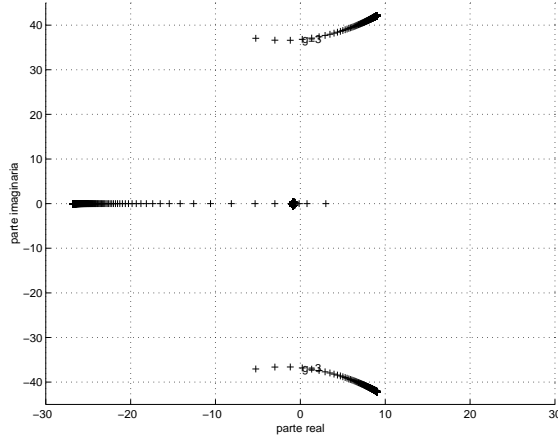


FIGURA 4.10: Lugar das raízes (exemplo 4.2) do sistema de malha fechada considerando a dinâmica do atuador. Análise de alto ganho com $F^{-1}(\tau_F p) = 1/(\tau_F p + 1)$.

palavras, de forma que as hipótese do Corolário 4.4.1 sejam satisfeitas.

- τ_F - Constante de tempo do filtro $F^{-1}(\tau_F p)$ - exemplo 4.5

Quanto menor este parâmetro menor o erro em regime ($\mathcal{O}(\tau + \tau_F + \mu)$, Teorema 4.4), menor será a influência da dinâmica não-modelada F^{-1} (menos atraso no sistema de controle). Apesar da função original do filtro $F^{-1}(\tau_F p)$ ser de tornar causal a aproximação L/F do operador L , a influência do ruído de medição é atenuada a medida que τ_F aumenta. Por outro lado, quanto menor τ_F menos a saída da planta será filtrada o que leva a uma deteriorização do desempenho do sistema. Existe, portanto, um compromisso entre filtragem de ruído de medição (ruído de saída) e introdução de atraso no sistema de controle.

O exemplo a seguir mostra a influência da constante de tempo τ no desempenho do controlador *SSC*.

Exemplo 4.3 (*SSC* ($n^* = 2$) - influência de τ) Considere a planta com função de transferência dada por: $G(p) = \frac{5}{(p+3)(p-3)(0.22p+1)}$, onde a dinâmica $G_m(\mu p) = \frac{1}{0.22p+1}$, $\mu = 0.22$ do atuador é considera como uma dinâmica não-modelada, sendo controlada pelo controlador suave *SSC* da figura 4.5, com $M(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$, $r(t) = \frac{\pi}{18} sqw(t/20)$, $k^{nom} =$

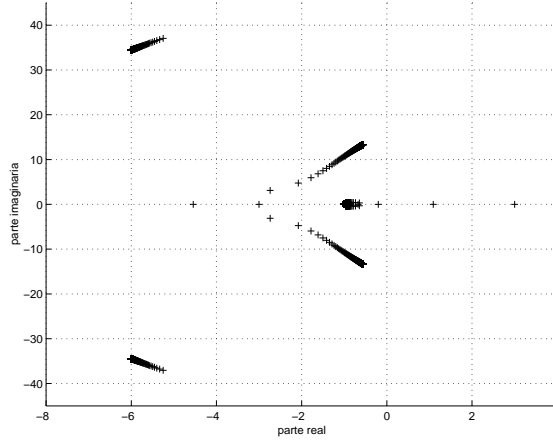


FIGURA 4.11: Lugar das raízes (exemplo 4.2) do sistema de malha fechada considerando a dinâmica do atuador. Análise de alto ganho com $F^{-1}(p) = 1/(\frac{1}{k_{c2}}p^2 + \frac{k_{c1}}{k_{c2}}p + 1)$.

40 e filtro da média $F_{av}^{-1}(\tau p) = 1/(\tau p + 1)$. O filtro linear em avanço é dado por:

$$\mathcal{L} = \left[a_L \frac{1}{\tau_F p + 1} + \frac{p}{\tau_F p + 1} \right]$$

onde $a_L = 1$, $\tau_F = 1/100$.

Este exemplo ilustra a influência da constante de tempo do filtro da média. O exemplo mostra que quanto maior for τ pior é o transitório, mas em compensação o controle é mais suave (figura 4.13). Além disso, o erro em regime pode ser maior devido ao conjunto residual (teorema 4.4) ser maior ($\mathcal{O}(\tau + \tau_F + \mu)$). ■

O exemplo a seguir mostra a influência de k^{nom} no desempenho do controlador SSC.

Exemplo 4.4 (SSC ($n^* = 2$) - influência de k^{nom}) Nas mesmas condições que no exemplo 4.3, este exemplo ilustra a influência de k^{nom} . A figura 4.14 apresenta o erro de rastreamento variando k^{nom} e os respectivos sinais de controle. Verifica-se que k^{nom} deve ser o menor possível mantendo o deslizamento ideal. ■

O exemplo a seguir ilustra a influência do parâmetro τ_F no desempenho do controlador suave SSC.

Exemplo 4.5 (SSC ($n^* = 2$) - influência de τ_F) Nas mesmas condições que no exemplo 4.3, este exemplo ilustra a influência da constante de tempo do filtro que aproxima

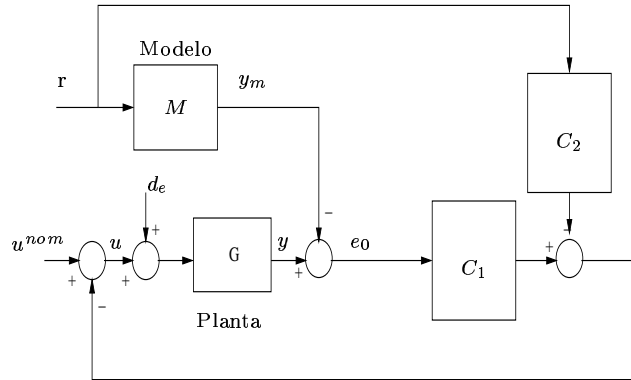


FIGURA 4.12: Equivalente linear para o controlador suave a estrutura variável (SSC) em alto ganho. O relé é substituído por um ganho constante g .

o operador diferencial $L(p)$ usado para compensar o grau relativo da planta. Considere o caso em que a saída y esteja contaminada por um ruído de quantização com passo 0.00157 rad.

Note que o ruído de quantização não pode ser atenuado simplesmente ajustando-e os parâmetros a_L e τ_F sem comprometer o desempenho do sistema (já que existe um compromisso entre redução de ruído e introdução de atraso no sistema). Repare que ao aumentar a constante de tempo τ_F o atraso na banda passante do sistema aumenta prejudicando o transitório, ver figura 4.15. ■

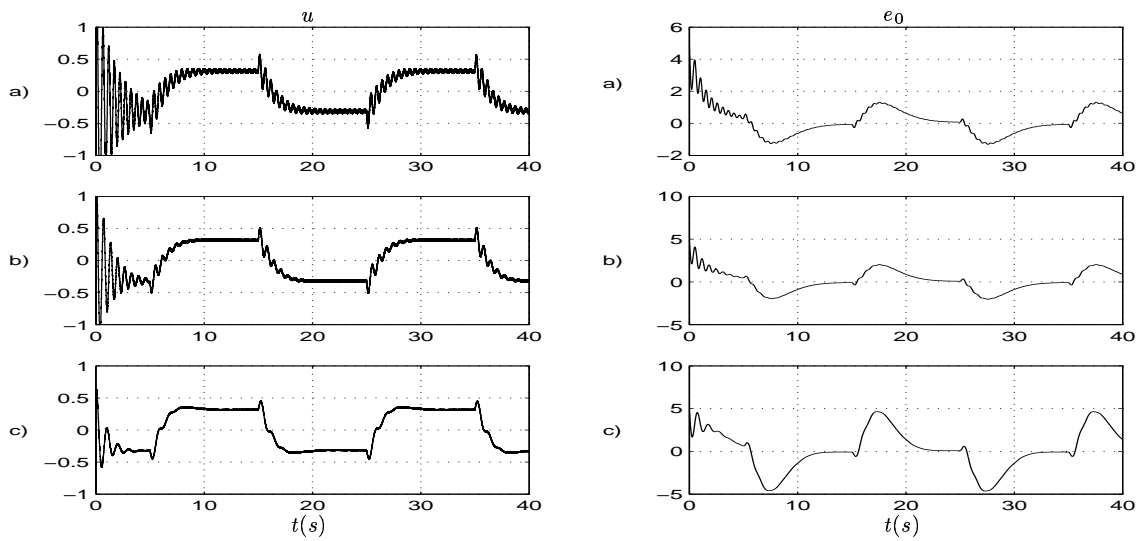


FIGURA 4.13: *Influência do parâmetro τ . Controlador (SSC) para $n^* = 2$ (exemplo 4.3). Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $k^{nom} = 40$, $\tau_F = 1/100$. Sinal de controle u em p.u. e erro de saída e_0 em graus. a) $\tau = 1/300$, b) $\tau = 1/200$, c) $\tau = 1/100$.*

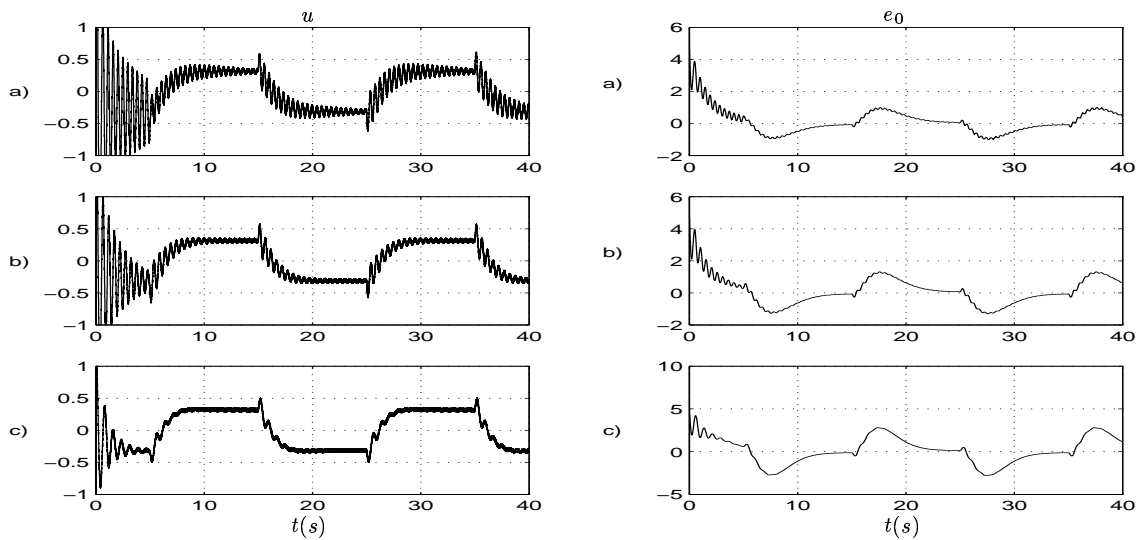


FIGURA 4.14: *Influência de k^{nom} . Resultados simulados (exemplo 4.4) do controlador (SSC) para $n^* = 2$. Passo de integração 10^{-4} , $\tau = 1/300$, $\tau_F = 1/100$. Erro de rastreamento e_0 em graus e sinal de controle u em p.u.. a) $k^{nom} = 30$, b) $k^{nom} = 40$, c) $k^{nom} = 80$.*

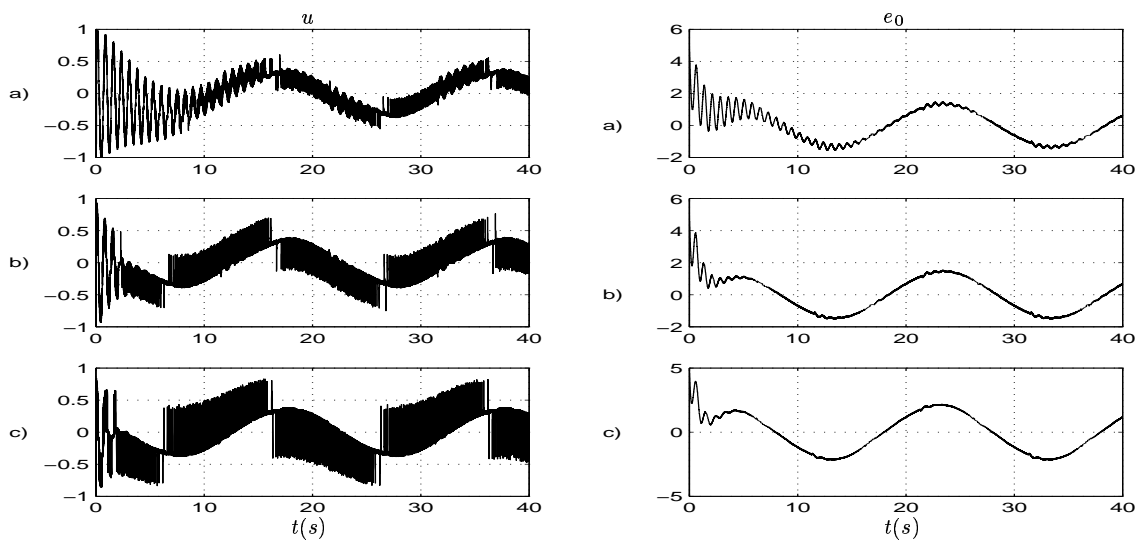


FIGURA 4.15: *Influência do parâmetro τ_F . Atraso no sistema de controle. Controlador SSC (exemplo 4.5) e ruído de quantização (passo de $2\pi/4000\text{rad}$), $k^{nom} = 70$, $\tau = 1/300$. Sinal de controle u em p.u. e erro de saída e_0 em graus. a) $\tau_F = 1/40$, b) $\tau_F = 1/80$, c) $\tau_F = 1/200$.*

Capítulo 5

Efeitos da Quantização

Diferenciação de sinais no tempo é um problema conhecido. Para o caso particular, em que o sinal em questão seja a saída de um sistema com dinâmica conhecida, o problema pode ser resolvido utilizando observadores assintóticos baseados no modelo da planta. No entanto, em situações que a solução não possa depender do modelo da planta, a construção de um diferenciador é inevitável. Por um lado, diferenciadores ideais não podem ser realizados. De fato, já que juntamente com o sinal, a diferenciação de um ruído de alta frequência (sempre presente em situações práticas) resulta em derivadas de amplitude consideravelmente grandes.

A abordagem principal na construção de diferenciadores lineares é a aproximação da função de transferência do diferenciador ideal na banda de frequência dos sinais a serem diferenciados. Se a banda de frequências do ruído for conhecida e, completamente separada da banda do sinal, filtros passa-baixas são utilizados para rejeitar o ruído. Entretanto, caso os espectros se sobreponham, a questão é determinar um critério de otimalidade para projetar o melhor filtro que rejeite ao máximo o ruído.

No sentido de se contruir um diferenciador filtrando o ruído, deve ser levado em consideração o contexto em questão. Este trabalho trata de sistemas de controle em malha fechada. Sendo assim, o atraso na banda passante que o filtro introduzir pode acarretar em uma considerável degradação do desempenho do sistema em malha fechada.

De uma forma geral, os diferenciadores são robustos com respeito a ruído, mas não são exatos, ou seja, na ausência de ruído obtem-se somente uma aproximação da derivada. Neste sentido, diferenciadores não-lineares, baseados em modos deslizantes,

são de particular interesse quando se sabe pouco, ou quase nada, a respeito da estrutura do sinal a ser diferenciado. Em (Levant 1998) é proposto um diferenciador ao mesmo tempo exato e robusto, baseado em modos deslizantes de ordem superior (*HOSM - High Order Sliding Modes*). Para tanto, é necessário o prévio conhecimento da constante de *Lipschitz* do sinal a ser diferenciado.

Além disso, sistemas a estrutura variável, podem ser utilizados para implementar o seguinte filtro do tipo *lead*:

$$D(p) = \frac{L(p)}{F(p)}$$

chamado de filtro *lead* a estrutura variável (*VSLF*), ver capítulo 4 e o controlador *VS-MRAC* em (Hsu et al. 1997).

Apesar desses diferenciadores não-lineares (em particular o diferenciador baseado em *HOSM*) apresentarem boas perspectivas de um bom desempenho, serão tratados com mais profundidade em trabalhos futuros. Isso se deve ao fato de que, neste trabalho, não se ter necessidade de se obter diferenciações exatas, razão pela qual um diferenciador linear, e portanto, mais simples é suficiente.

Este capítulo apresenta uma alternativa para solucionar o problema de se estimar derivadas de ordem superior de um sinal y_p medindo uma versão, possivelmente, contaminada por ruído y . Assim como em (Bélanger 1992) e (Jaritz & Spong 1996), é utilizado um método mais elaborado e efetivo para se estimar essas derivadas, baseado em um filtro de *Kalman* otimizado. A vantagem de se utilizar a abordagem de *Kalman* reside no fato de que, no projeto do filtro, contempla-se as propriedades estatísticas do ruído em questão.

5.1 O problema

Para se ter uma idéia do problema, considere os sistema mecânicos onde, em grande parte dos casos, a realimentação de velocidade é utilizada para controle proporcional derivativo (PD) ou para leis de realimentação de estados mais complexas. Em particular, a velocidade angular é derivada a partir de medidas de ângulo obtidas, por exemplo, através de *encoders* ópticos incrementais. A velocidade pode ser estimada com base

nas medidas de posição utilizando, por exemplo, a seguinte aproximação de *Euler*:

$$v(k) = \frac{y(k) - y(k-1)}{h} \quad (5.1)$$

onde $v(k)$ denota a estimativa de velocidade no instante $t_k = kh$, y denota a medições de posição e h é o período de amostragem constante. Entretanto, o desempenho do sistema pode ser inaceitável, especialmente quando a taxa de amostragem cresce, devido ao ruído de medição do *encoder* (quantização).

Para descrever a natureza do problema considere um *encoder* com ângulo entre pulsos (passo) θ_m (Bélanger 1992). Seja N_p o número de pulsos ocorridos durante o intervalo h . A velocidade angular estimada por diferenças finitas é $N_p\theta_m/h$. Isto significa que a estimativa de velocidade é quantizada com um passo de quantização θ_m/h . Para ilustrar, seja $\theta_m = 0.09^\circ$ (resolução do *encoder* de 1000 pulsos/volta, $4\times$ decodificação), e $h = 0.01\text{sec}$. O passo de quantização é igual a $\theta_m/h = 9^\circ/\text{sec}$. A uma taxa de amostragem de 1-kHz ($h = 0.001\text{sec}$), a resolução é inaceitável ($90^\circ/\text{sec}$).

Afim de ilustrar o problema da quantização do *encoder* considere o sistema apresentado na figura 5.1 (controlador PD) e o exemplo a seguir:

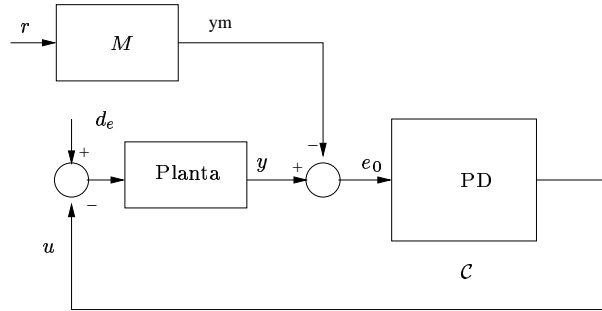


FIGURA 5.1: Controlador PD.

Exemplo 5.1 Considere a planta com função de transferência dada por: $G(p) = \frac{5}{p^2-3^2}$, sendo controlada por um controlador clássico PD com satura c ao do sinal de controle (ver figura 5.1), com $M(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$, $r(t) = 10\sin(0.2\pi t)$. A transferência do controlador PD é dada por:

$$C = k_p \left[1 + \frac{k_d p}{\tau_F p + 1} \right]$$

onde $k_p = 5$, $k_d = 0.5$, $\tau_F = 0.01$. A figura 5.2 mostra o desempenho do sistema para o caso ideal. Por outro lado, considere o caso em que a saída y esteja contaminada por um ruído de quantização com passo 0.00157 rad. A figura 5.3 mostra como a quantização pode afetar drasticamente o desempenho do sistema, introduzindo muito ruído no sinal de controle. No decorrer deste capítulo será verificado que o ruído de quantização não pode ser atenuado simplesmente ajustando-se os parâmetros k_p , k_d e τ_F sem comprometer o desempenho do sistema (já que existe um compromisso entre redução de ruído e introdução de atraso na banda passante do sistema). ■

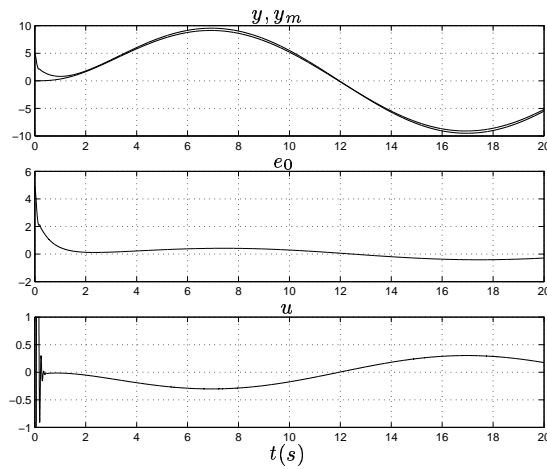


FIGURA 5.2: Resultados simulados (exemplo 5.1) do controlador PD sob condições ideais. a) y e y_m em graus, b) erro de saída e_0 em graus, c) sinal de controle u em p.u.

5.2 Possíveis soluções

Talvez, a alternativa mais imediata para estimar a velocidade a partir de medidas de posição contaminadas por ruído, seja utilizar uma versão filtrada $\bar{D}(p)$ do diferenciador ideal $D(p) = p$ do tipo

$$\bar{D}(p) = \frac{p}{F(p)} = \frac{p}{\tau_F p + 1}$$

Será verificado que filtrar o sinal através de um passa-baixa de 1ª ordem ($F^{-1}(\tau_F p)$) resultará sempre em um compromisso entre atenuação do ruído e a introdução de atraso na banda passante do sistema (o que é extremamente prejudicial ao controle em malha fechada), principalmente para altas taxas de amostragem. Será necessário aumentar

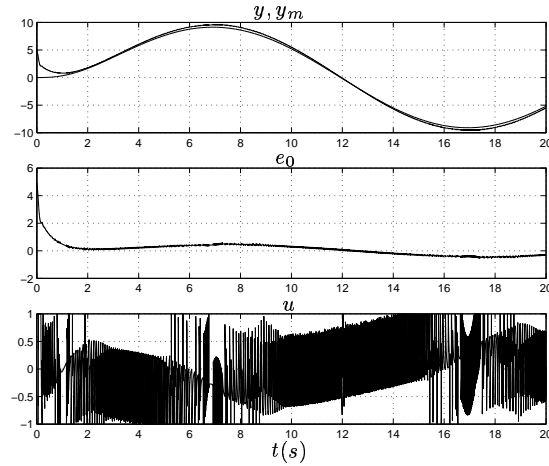


FIGURA 5.3: Resultados simulados (exemplo 5.1) do controlador PD sob ruído de quantização (passo de 0.00157 rad). a) y e y_m em graus, b) erro de saída e_0 em graus, c) sinal de controle u em p.u..

a ordem do filtro para modificar a sua resposta em frequência de forma que, para uma mesma atenuação do filtro de 1ª ordem, o novo diagrama de fase da resposta em frequência apresente um atraso menor na banda passante do sistema.

Outra possível solução é realizar uma média dos últimos N valores das estimativas de *Euler*, o que de fato elimina ruídos de alta frequência. Entretanto o desempenho não é melhor do que se obtem ao utilizar a aproximação de *Euler* (Jaritz & Spong 1996).

Neste trabalho, assim como em (Bélanger 1992) e (Jaritz & Spong 1996), é utilizado um método mais elaborado e efetivo para se estimar a velocidade baseado em um filtro de *Kalman* otimizado. A abordagem de *Kalman* será utilizada como uma (não é a única) metodologia de projeto que resulta em um filtro de ordem mais elevada com característica frequencial tal que introduza menor atraso na banda passante em comparação com o filtro *lead* de 1ª ordem. A estimativa de velocidade é obtida por uma versão filtrada do diferenciador ideal do tipo

$$\bar{D}(p) = \frac{p}{F(p)} = \frac{p}{\frac{1}{k_{c2}}p^2 + \frac{k_{c1}}{k_{c2}}p + 1}$$

onde $K_c = \begin{bmatrix} k_{c1} \\ k_{c2} \end{bmatrix}$ é o ganho de *Kalman*.

Esta característica frequencial é conseguida devido a fato de que no projeto do

filtro de *Kalman* leva-se em consideração as propriedades estatísticas do ruído do sinal medido gerando uma estimativa que minimiza a variância do erro de estimação.

De uma forma geral, a estimativa de velocidade, é obtida após uma filtragem do sinal medido (posição) que pode ser interpretada como a extração do ruído desse sinal. Portanto, quanto melhor for a estimativa de posição, como consequência, melhor será a estimativa de velocidade (mais suave).

5.3 Filtro de *Kalman*

Em sua forma original o filtro de *Kalman* é formado por um conjunto de equações a diferenças que tratam as amostras do sinal medido (contaminado por ruído) gerando as estimativas de forma que a variância do erro de estimação seja minimizada (para tanto é necessário conhecer, ao menos, a intensidade do ruído). Sendo assim, o filtro de *Kalman*, em sua forma original, não é um filtro no sentido usual de entrada e saída. Estas equações a diferenças podem ser interpretadas como um observador atualizado da planta (linear) com ganho variante no tempo (ganho de *Kalman*). Para sistemas não-lineares poderia-se utilizar a versão estendida do filtro de *Kalman* (ver (Bélanger 1992)). Além disso, apesar do filtro de *Kalman* poder ser aplicado a sistemas multivariáveis (*MIMO*), neste trabalho o filtro será apresentado somente para o caso escalar (*SISO*) e invariante no tempo.

Para determinados processos (plantas lineares observáveis), o ganho de *Kalman* tende para um valor constante em regime estacionário. Substituindo o ganho variante no tempo pelo seu valor em regime estacionário o observador pode ser interpretado como um filtro no sentido usual.

Assim como os observadores de sistemas determinísticos, o filtro de *Kalman* é baseado no modelo da planta, ou seja, seus parâmetros devem ser conhecidos. Entretanto, através do conceito de **modelo do sinal**, pode-se considerar, de certa forma, que o filtro é projetado levando em consideração variações nos parâmetros da planta, ou seja, não é necessário conhecê-los exatamente.

5.3.1 Filtro de Kalman discreto

Nesta seção, o filtro de Kalman discreto é utilizado como um estimador de estados de um sistema *SISO*, linear, invariante no tempo, **aleatório** e discreto. Para estimar corretamente o estado desse sistema levando em consideração a natureza aleatória, o filtro de Kalman possui um ganho variante no tempo, o que o difere de um estimador de estados de um sistema determinístico.

Inicialmente, considere o caso determinístico, onde a planta (com par (Φ, C) observável) é dada por:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) \quad (5.2)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (5.3)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$, o sinal de controle $u(k) \in \mathbb{R}$, a saída $y(k) \in \mathbb{R}$ e (Φ, Γ, C) são matrizes conhecidas e constantes.

O observador (não atualizado) para o sistema (5.2) e (5.3) tem a seguinte estrutura:

$$\hat{x}(k+1) = \Phi \hat{x}(k) + K[y(k) - C\hat{x}(k)] + \Gamma u(k) \quad (5.4)$$

com dinâmica do sistema do erro de estimação $\tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ governada pelos autovalores da matriz $\Phi - KC$. A alocação dos pólos do observador pode ser determinada de forma arbitrária, por exemplo, através da fórmula de *Ackermann* (Franklin, Powell & Workman 1998). Entretanto, considere as matrizes D e G tais que o par (Φ, G) seja alcançável e o posto de $[C \ D]$ seja igual ao posto de D . De acordo com (Lewis 1986), o ganho do observador, e conseqüentemente, os pólos do sistema do erro de estimação, podem ser determinados através da solução P^* da seguinte *Equação Algebrica de Ricatti (ARE)*:

$$P = \Phi P \Phi^T - \Phi P C^T (C P C^T + D D^T)^{-1} C P \Phi^T + G G^T \quad (5.5)$$

O ganho K do observador é dado por:

$$K = \Phi P^* C^T (C P C^T + D D^T)^{-1} \quad (5.6)$$

Diferentes valores das matrizes D e G resultam em diferentes alocações de pólos do sistema do erro.

O ganho do filtro de *Kalman* variante no tempo será determinado pela solução de uma equação a diferenças de *Riccati* e sua versão estacionária, pela solução de uma equação algébrica de *Riccati*. Sendo assim, a abordagem através de equação algébrica de *Riccati* para se determinar o ganho de observador de sistemas determinísticos é útil para facilitar a comparação com o filtro de *Kalman*. Considere o seguinte modelo (*SISO*) de um sistema aleatório discreto:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + W(k) \quad (5.7)$$

$$y(k) = \underbrace{Cx(k)}_{y_p(k)} + e(k) \quad (5.8)$$

onde $x(k) \in \mathbb{R}^n$, o sinal de controle $u(k) \in \mathbb{R}$ é um sinal **determinístico**, a saída da planta $y_p(k) \in \mathbb{R}$ e sua versão $y(k) \in \mathbb{R}$ contaminada com ruído, $W(k) \in \mathbb{R}^m$ e $e(k) \in \mathbb{R}$ são considerados como sequências discretas de ruído branco estacionário, com média nula, denominados de **ruído do sistema ou do processo** e **ruído de medição**, respectivamente. Além disso, (Φ, Γ, C) são matrizes conhecidas e constantes.

As matrizes de covariância Q_d (de $W(k)$) e R_d (de $e(k)$) são supostas conhecidas, e são tais que:

$$\mathcal{E}[W(k_1)W^T(k_2)] = Q_d \delta(k_1 - k_2) \quad (5.9)$$

$$\mathcal{E}[e(k_1)e^T(k_2)] = R_d \delta(k_1 - k_2) \quad (5.10)$$

Onde $\delta(k)$ é o delta de *Kronecker* e $\mathcal{E}[\cdot]$ denota o valor esperado. Além disso, $\omega(k)$ e $e(k)$ são consideradas sequências não-correlacionadas, ou seja, $\mathcal{E}[W(k)e^T(j)] = 0, \forall k, j$.

Neste enfoque, o vetor de estados $x(k)$ e a saída $y_p(k)$ passam a ser considerados processos aleatórios.

O problema de estimação do estado aleatório $x(k)$ pode ser formulado da seguinte maneira: projetar um estimador conhecendo a entrada determinística $u(k)$, a intensidade (ou variância) do ruído do processo e do ruído de medição (matrizes Q_d e R_d) de forma a minimizar a variância do erro de estimação $\tilde{x}(k)$.

Um observador (atualizado) que soluciona este problema tem a seguinte estrutura

(**Filtro de Kalman**):

$$\hat{x}^-(k+1) = \Phi \hat{x}^-(k) + \Phi K_d(k)(y(k) - C \hat{x}^-(k)) + \Gamma u(k) \quad (5.11)$$

Onde $\hat{x}^-(k)$ é definido como a estimativa do estado $x(k)$ no instante k utilizando amostras passadas até (inclusive) o instante $k-1$. Desta forma, $\hat{x}^-(k)$ é a estimativa de $x(k)$ *a priori* (antes de incluir a amostra medida $y(k)$). Além disso, defina $\hat{x}(k)$ como a estimativa *a posteriori* (depois de incluir a amostra $y(k)$).

Para cada uma das estimativas são definidos os correspondentes erros de estimação *a priori* e *a posteriori*, e suas respectivas matrizes de covariância do erro de estimação $P^-(k)$ e $P(k)$, dadas por:

$$P^-(k) = \mathcal{E}[(x(k) - \hat{x}^-(k))(x(k) - \hat{x}^-(k))^T] \quad (5.12)$$

$$P(k) = \mathcal{E}[(x(k) - \hat{x}(k))(x(k) - \hat{x}(k))^T] \quad (5.13)$$

O ganho $K_d(k)$ é determinado ((Bélanger 1992) e (Goodwin & Sin 1984)) de forma a minimizar a diagonal maior da matriz de covariância do erro de estimação $P^-(k)$. Em outras palavras, o ganho é calculado de forma a **minimizar a variância do erro de estimação**. O ganho $K_d(k)$ é dado por ((Bélanger 1992)):

$$K_d(k) = P_*^-(k)C^T(CP_*^-(k)C^T + R_d)^{-1} \quad (5.14)$$

onde $P_*^-(k)$ é a solução da seguinte equação de *Riccati* a diferenças (*RDE*):

$$P^-(k+1) = \Phi P^-(k)\Phi^T - \Phi P^-(k)C^T(CP^-(k)C^T + R_d)^{-1}CP^-(k)\Phi^T + Q_d \quad (5.15)$$

com condição inicial $P^-(0) = P_0$.

Observe que a equação (5.15) é a versão variante no tempo da equação algébrica de *Riccati* (5.5). Em comparação com observadores de sistemas determinístico, o filtro de *Kalman* é um observador **atualizado** de um sistema aleatório com ganho variante no tempo.

5.3.2 Filtro de *Kalman* discreto - versão estacionária

Na seção anterior verificou-se que o ganho de *Kalman* depende da solução P^* da equação a diferenças de *Riccati* (5.15). Supondo que (5.15) apresente uma solução limitada em estado estacionário P^∞ , ou seja:

$$P^-(k) \rightarrow P^\infty, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Como consequência a equação a diferenças de *Riccati* (5.15) se transforma em uma equação algébrica de *Riccati* com solução P^∞ , dada por:

$$P = \Phi P \Phi^T - \Phi P C^T (C P C^T + R_d)^{-1} C P \Phi^T + Q_d \quad (5.16)$$

Sendo assim, de acordo com a equação (5.14), o ganho de *Kalman* também apresenta um valor constante K_d^∞ em estado estacionário, resultando em um observador invariante no tempo (filtro de *Kalman* estacionário).

Utilizando, por simplicidade, diretamente o ganho em estado estacionário, o filtro de *Kalman* discreto e estacionário é dado por:

$$\hat{x}^-(k+1) = \Phi \hat{x}^-(k) + \Phi K_d^\infty (y(k) - C \hat{x}^-(k)) + \Gamma u(k) \quad (5.17)$$

onde o ganho de *Kalman* em regime permanente é dado pela seguinte equação:

$$K_d^\infty = P^\infty C^T (C P^\infty C^T + R_d)^{-1} \quad (5.18)$$

Surge, então, as seguintes questões:

- Quando a equação a diferenças de *Riccati* (5.15), apresenta soluções em regime estacionário limitadas (para qualquer condição inicial $P^-(0) = P_0$) ?
- Caso exista uma solução limitada em regime estacionário P^∞ , independente da condição inicial P_0 , quando esta solução resultará em um filtro estável ?

O teorema a seguir responde a essas perguntas, ver (Goodwin & Sin 1984) e (Lewis 1986).

Teorema 5.1 *Considere o sistema (5.7)-(5.8). Seja $Q_d = D_{Q_d} D_{Q_d}^T$, onde Q_d é a matriz de covariância do ruído do processo. Se o par (Φ, C) for detectável e o par (Φ, D_{Q_d}) for estabilizável, então:*

- *Existe uma única solução P^∞ em estado estacionário, limitada, e independente da condição inicial $P_0 \geq 0$, para a equação a diferenças de Riccati (5.15). Além disso, P^∞ é a solução única e semidefinida positiva da equação algébrica de Riccati (5.16).*
- *O filtro de Kalman em regime estacionário (ganho K_d^∞) é estritamente estável, ou seja, os autovalores da matriz $\Phi - K_d^\infty C$ estão dentro do círculo unitário.*

Este teorema afirma que, escolhendo-se adequadamente a matriz de medição C (tal que o par (Φ, C) seja detectável), e garantindo que o processo esteja suficientemente excitado pelo ruído $W(k)$ (tal que o par (Φ, D_{Q_d}) seja estabilizável), o filtro de *Kalman* estacionário existe e é estável.

Note que a estabilidade do filtro de *Kalman* não está relacionada a estabilidade do sistema, o contexto não se trata de malha fechada. O filtro pode ser projetado para sistemas instáveis.

Observação 8 *O ganho de Kalman em regime permanente depende apenas da razão entre as intensidades dos ruídos do processo e de medição. Isto é facilmente verificado através da equação algébrica de Riccati (5.16). Multiplicando as matrizes Q_d e R_d por um mesmo fator f , a solução P^∞ fica multiplicada por este fator f . Entretanto, o ganho de Kalman **não se altera**, basta substituir P^∞ e R_d por $P^\infty f$ e $R_d f$, respectivamente, na equação (5.18). Este fato já era esperado devido ao seguinte: a intensidade do ruído do processo determina a amplitude ou o nível do sinal de saída ($y_p(k) = Cx(k)$), já a intensidade do ruído de medição determina o nível de ruído do sinal medido $y(k)$. Desta forma a razão entre as intensidades dos ruídos do processo e de medição pode ser interpretada como uma relação sinal/ruído. Se esta relação não se altera, o filtro também não.*

Observação 9 *A princípio o filtro de Kalman estacionário poderia gerar estimativas de mínima variância, para qualquer sinal contaminado y . Tanto sinais lentos quanto*

sinais rápidos. Entretanto, o filtro de Kalman estacionário é um filtro no sentido usual, portanto possui uma banda passante finita. Existe, uma contradição aparente. Na realidade, o que acontece é que para mudar a frequência do sinal de saída y_p existem duas possibilidades: ou mudar a frequência de u ou a planta (seus pólos). Ao mudar a planta o sistema pode não mais satisfazer a hipótese de observabilidade que garantem a existência de um estado estacionário, e portanto, o ganho seria variante no tempo. Mudar u não influencia já que o sinal determinístico u é entrada da planta e do filtro, o que não altera o erro de estimação \tilde{x} .

5.3.3 Modelo do sinal

Tanto os observadores de sistemas determinísticos quanto o filtro de *Kalman* presuppõe um total conhecimento dos parâmetros da planta $((\Phi, \Gamma, C))$. Para levar em consideração a incerteza nos parâmetros da planta, uma abordagem possível (apresentada em (Lewis 1986)) é considerar o conhecimento (possivelmente através de algum processo de identificação) de um modelo nominal para a planta. A análise e o projeto do filtro de *Kalman* é reformulado baseado em um modelo que considera variações em torno da planta nominal. Desta forma, ajustam-se os níveis de ruído para determinar o ganho do filtro.

Outra abordagem possível, e que foi utilizada neste trabalho e em (Bélanger et al. 1998) e (Bélanger 1992), é baseada no conceito de **modelo do sinal** (*signal model*), descrito a seguir.

Considere o problema de se estimar um sinal corrompido por ruído e suas derivadas. Para estimar a posição e a velocidade, a saída da planta será considerada como uma realização de um processo aleatório que pode ser gerado por um ruído branco na entrada de um sistema linear. O ruído de quantização será considerado como ruído de saída. Este sistema linear é denominado de **modelo do sinal** a ser estimado. O modelo do sinal nada mais é do que um filtro que determina a forma do processo a ser estimado (*shaping filter*). Para maiores detalhes ver apêndice C.3.

O modelo de sinal adotado é linear, possui duas entradas e uma saída e é dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B\omega(t) \quad (5.19)$$

$$y(t) = \underbrace{Cx(t)}_{\bar{y}_p} + e(t) \quad (5.20)$$

Onde:

- $x(t) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estados do processo.
- $u(t) \in \mathbb{R}$ é uma entrada determinística.
- $\omega(t) \in \mathbb{R}$ é ruído do processo, ruído branco com média nula e densidade espectral de potência Q_c .
- $e(t) \in \mathbb{R}$ é o ruído de medição, ruído branco com média nula e densidade espectral de potência R_c .
- $\bar{y}_p(t)$ é um modelo para a saída real da planta y_p e $\bar{y}(t)$ é o modelo do sinal medido $y(t)$.
- Sem perda de generalidade o ruído ω é inserido no processo pelo mesmo canal que o sinal determinístico u (através da matriz B).

Na figura 5.4 é apresentado o diagrama em blocos do modelo do sinal.

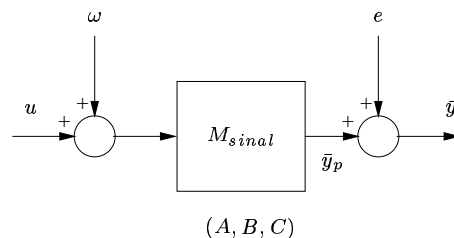


FIGURA 5.4: Modelo de processo aleatório.

Deve ficar claro que este modelo nada tem haver com um modelo para a planta real. O modelo do sinal tem como entrada um ruído branco ω somado a um sinal determinístico u (**diferente do sinal de controle**) e como saída $\bar{y}_p(t)$. Quanto mais representativo for o modelo do sinal (M_{sinal}), mais próximo o sinal $\bar{y}_p(t)$ estará da saída real da planta $y_p(t)$. Além disso, o ruído de saída $e(t)$ (ruído de quantização) será considerado aditivo e, portanto, o sinal real medido $y(t)$ será modelado por $\bar{y}(t) = \bar{y}_p + e(t)$. A intensidade Q_c do ruído do processo determina o nível do sinal $\bar{y}_p(t) = Cx(t)$,

enquanto que a intensidade do ruído de medição R_c determina o nível de ruído do sinal medido. Como, na seção anterior, a relação Q_c/R_c pode ser considerada como uma relação sinal ruído.

Assim como em (Bélanger et al. 1998), (Bélanger 1992) e (Jaritz & Spong 1996), por simplicidade, o sistema (A, B, C) será considerado como uma realização de um **duplo integrador**, ou seja:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

As perguntas que surgem são:

- A saída da planta y_p pode ser considerada um processo aleatório ?
- Existe este modelo do sinal que gera exatamente a saída da planta ($\bar{y}_p = y_p$) ? E mais, este modelo pode ser um duplo integrador ?
- O ruído de medição pode ser considerado ruído branco com média nula para o caso particular de ruído de quantização ?

Como pode ser comprovado nas simulações apresentadas no apêndice C.3, é bastante razoável modelar a saída da planta y_p pela saída \bar{y}_p de um sistema linear que tenha como entrada um ruído branco. De uma forma geral uma função aleatória do tempo pode ser considerada como saída de um sistema dinâmico excitado por um processo aleatório gaussiano independente ((Kalman 1960)). É claro que nem todo processo aleatório pode ser modelado desta forma, mas grande parte dos processos encontrados em aplicações práticas (físicas) possuem modelos de estados com dimensão finita, o que permite tal modelagem.

Considerar o sistema em questão um duplo integrador justifica-se devido ao fato de que ao se utilizar um filtro de *Kalman* discreto e estacionário como observador desse sistema, com período de amostragem pequeno, o ganho do filtro se altera muito

pouco ao se modificar os pólos do sistema. Por simplicidade, então, escolhe-se o duplo integrador (ver apêndice C.3 para mais detalhes sobre a justificativa da escolha do duplo integrador). Quanto mais banda larga for o sinal \ddot{y}_p mais o modelo de um duplo integrador excitado por ruído branco é válido (figura 5.5).

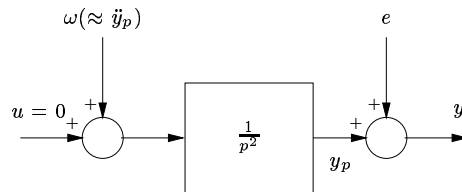


FIGURA 5.5: ω é um substituto para \ddot{y}_p .

Além disso, considerando o sistema de controle por modelo de referência em malha fechada, após algum transitório, o sinal y de saída da planta deve acompanhar um sinal de referência y_m . Sendo assim tomando a entrada determinística $u = \ddot{y}_m$, o ruído branco ω passa a ser um substituto para $\ddot{y}_p - \ddot{y}_m$. Este sinal possui média zero e caso possua uma banda larga ele pode ser aproximado de forma mais realista por um ruído branco de média nula (ver figura 5.6).

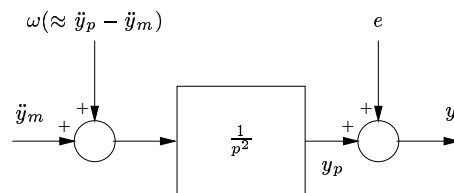


FIGURA 5.6: ω é um substituto para $\ddot{y}_p - \ddot{y}_m$.

A principal hipótese, que é mais difícil de ser atendida, é considerar que o ruído de quantização possa ser representado por um ruído branco com **média nula**. Como foi apresentado no apêndice C.4, claramente o ruído de quantização está longe de ser considerado branco com média nula, principalmente para sinais lentos. Este é o motivo, do ponto de vista do projeto do ganho de *Kalman*, que leva a uma degradação da estimativa para baixas velocidades.

Certamente, à medida que esta hipótese for sendo violada e o modelo do sinal não representar bem a saída da planta ($\bar{y}_p \neq y_p$), a estimativa do filtro de *Kalman* será degradada.

Modelo discreto do sinal para $h \rightarrow 0$

O ganho do filtro de *Kalman* discreto e estacionário será projetado considerando o filtro como um observador da seguinte versão discreta do modelo do sinal (equações (5.19) e (5.20)) que é baseada no duplo integrador, considerando período de amostragem pequeno (aproximação de *Euler*):

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + W(k) \quad (5.24)$$

$$\bar{y}(k) = \underbrace{Cx(k)}_{\bar{y}_p} + e(k) \quad (5.25)$$

Onde, considerando o período de amostragem h pequeno, tem-se:

- $x(k) \in \mathbb{R}^2$ é o vetor de estados do processo no instante k .
- $\Phi = e^{Ah} = I + Ah = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz (2×2) de transição de estados.
- $\Gamma = \int_0^h \Phi(\tau) B d\tau \approx \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}$ é o vetor de entrada (2×1).
- $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ é o vetor de saída (1×2).
- $u(k) \in \mathbb{R}$ é uma entrada determinística no instante k .
- $W(k) \in \mathbb{R}^m$ é o ruído do processo, um vetor considerado com uma sequência branca com estrutura de covariância conhecida $Q_d = Q_c h B B^T = Q_c h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ($h \rightarrow 0$).
- $e(k)$ é o erro de medição no instante k , sequência branca (escalar), com estrutura de covariância conhecida $R_d = \frac{R_c}{h}$ ($h \rightarrow 0$). Note que R_d não tende para infinito quanto $h \rightarrow 0$ (ver apêndice C.2).

A dedução das expressões das matrizes de covariância encontram-se no apêndice C.2.

5.3.4 Projeto e implementação do filtro de *Kalman*

O modelo do sinal é dado pelas equações (5.24) e (5.25), sendo o ruído de medição dado pelo ruído de quantização que possui variância dada por:

$$R_d = \theta^2/3 \quad (5.26)$$

Onde θ é o passo de quantização.

Para o caso em que o modelo é um duplo integrador o sistema é observável para $h \neq 0$, e portanto, o par (Φ, C) é detectável. Por outro lado, a matriz de covariância Q_d é dada por (ver equação (C.16) no apêndice C):

$$Q_d = \begin{bmatrix} h^3/3 & h^2/2 \\ h^2/2 & h \end{bmatrix}$$

O que implica o par (Φ, D_{Q_d}) ser estabilizável, com $Q_d = D_{Q_d} D_{Q_d}^T$ para algum D_{Q_d} , por exemplo:

$$D_{Q_d} = \begin{bmatrix} \sqrt{3h^3}/6 & \sqrt{h^3}/2 \\ 0 & \sqrt{h} \end{bmatrix}$$

Desta forma, de acordo com o teorema 5.1 (ver (Goodwin & Sin 1984)), existe um valor constante em estado estacionário para a matriz de covariância do erro de estimação e, conseqüentemente, para o ganho de *Kalman*. Portanto, justifica-se o uso do filtro estacionário.

O projeto do ganho é baseado na topologia apresentada na figura 5.7, onde o filtro é considerado um observador do modelo do sinal.

Sendo assim, o filtro de *Kalman* discreto e estacionário é dado por:

$$\hat{x}^-(k+1) = \Phi \hat{x}^-(k) + \Phi K_d (\bar{y}(k) - C \hat{x}^-(k)) + \Gamma u(k) \quad (5.27)$$

onde o ganho de *Kalman* em regime permanente é dado pela seguinte equação:

$$K_d = P^* C^T (C P^* C^T + R_d)^{-1} \quad (5.28)$$

e P^* é solução da seguinte equação algébrica de *Riccati*:

$$P = \Phi P \Phi^T - \Phi P C^T (C P C^T + R_d)^{-1} C P \Phi^T + Q_d \quad (5.29)$$

Portanto, **para efeito de projeto do ganho**, as entradas do filtro de *Kalman* são: o sinal determinístico $u(k)$ e a saída do modelo do sinal $\bar{y}(k)$. A saída do filtro é o estado estimado do modelo do sinal, \hat{x}^- (ver figura 5.7).

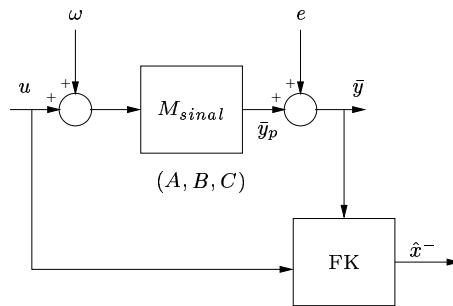


FIGURA 5.7: Topologia para o projeto do ganho de *Kalman*.

Entretanto, **para efeito de implementação**, as entradas do filtro são: o sinal determinístico $u(k)$ (modelo do sinal) e a **saída real da planta contaminada com ruído** $y(k)$. A saída do filtro é o estado estimado (ver figura 5.8).

Quanto mais a saída do modelo do sinal $\bar{y}(k)$ for representativa da saída real da planta $y(k)$ mais a variância do erro de estimação será minimizada. O desempenho do filtro depende, portanto, do modelo do sinal (no caso um duplo integrador) e das intensidades dos ruídos do processo e de medição. Caso a saída real da planta $y(k)$ se afaste muito do valor modelado $\bar{y}(k)$ espera-se uma degradação no desempenho.

Projeto

O projeto do ganho de *Kalman* é realizado utilizando-se a função `dlqe()` do *Matlab*. Esta função retorna o ganho K_d em regime estacionário, resolvendo a equação algébrica

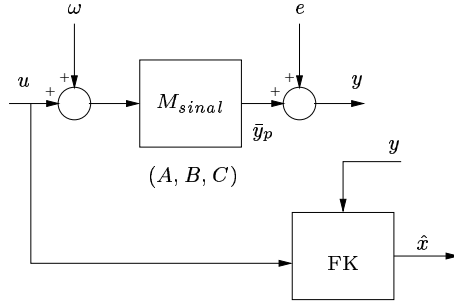


FIGURA 5.8: Topologia para a implementação do filtro de *Kalman*.

de *Riccati* (5.16). Os seguintes parâmetros são fornecidos à função *dlqe()*:

- O sistema a ser observado, ou seja, o duplo integrador aproximado. $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
 $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- As matrizes de covariância $Q_d = Q_c h B B^T = Q_c h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $R_d = \frac{R_c}{h}$.

Será considerado que o ruído de medição (ruído de quantização) possui variância fixa, dada pelo passo de quantização θ ($R_d = \theta^2/3$). Portanto, o único parâmetro desconhecido é a intensidade Q_c do ruído do processo. Este parâmetro será sintonizado observado-se a estimativa do filtro de *Kalman*. O parâmetro Q_c é ajustado até que a saída do filtro passe por entre a “escada” que surge devido ao ruído de quantização (ver figura 5.9), ou seja, de forma que o erro de estimação possua um mínimo valor médio quadrático. Esta situação caracteriza a variância mínima.

O ganho de *Kalman* é calculado e o filtro estacionário é implementado, discretamente, como segue:

Implementação do filtro

$$\hat{x}_1^-(k+1) = (1 - k_{d_1} - h k_{d_2}) \hat{x}_1^-(k) + h \hat{x}_2^-(k) + (k_{d_1} + h k_{d_2}) y(k) \quad (5.30)$$

$$\hat{x}_2^-(k+1) = -k_{d_2} \hat{x}_1^-(k) + \hat{x}_2^-(k) + k_{d_2} y(k) + h u(k) \quad (5.31)$$

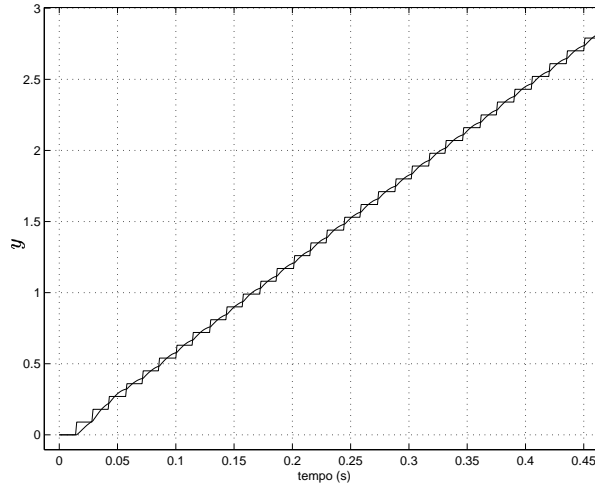


FIGURA 5.9: Projeto do ganho, ajusta-se Q_c até a estimativa passar por entre a “escada” (y em graus).

onde $\hat{x}^- = \begin{bmatrix} \hat{x}_1^- & \hat{x}_2^- \end{bmatrix}^T$, y é a saída real da planta, $K_d = \begin{bmatrix} k_{d1} \\ k_{d2} \end{bmatrix}$ é o ganho de *Kalman* e h é o período de amostragem.

5.3.4.1 Análise discreta

O filtro pode ser interpretado no domínio frequencial através das funções de transferências discretas determinadas aplicando transformada \mathcal{Z} nas equações acima. Por simplicidade, para o caso em que o sinal determinístico $u(k)$ é desconsiderado ($u(k) = 0$), as funções de transferências de posição $G_1(z)$ ($y \rightarrow \hat{x}_1^-$) e velocidade $G_2(z)$ ($y \rightarrow \hat{x}_2^-$) são dadas por:

$$G_1(z) = \frac{(k_{d1} + k_{d2}h)z - k_{d1}}{z^2 + (k_{d1} + k_{d2}h - 2)z + (1 - k_{d1})} \quad (5.32)$$

$$G_2(z) = \frac{k_{d2}(z - 1)}{z^2 + (k_{d1} + k_{d2}h - 2)z + (1 - k_{d1})} \quad (5.33)$$

onde

$$K_d = \begin{bmatrix} k_{d1} \\ k_{d2} \end{bmatrix}$$

é o ganho discreto de *Kalman*.

5.3.4.2 Análise contínua

As funções de transferência de posição $G_1(p)$ ($y \rightarrow \hat{x}_1$) e velocidade $G_2(p)$ ($y \rightarrow \hat{x}_2$) do filtro de *Kalman* contínuo e estacionário (ver apêndice C), para o caso em que o modelo do sinal é o duplo integrador e o sinal determinístico $u(t)$ é nulo, são dadas por:

$$G_1(p) = \frac{\frac{k_{c1}}{k_{c2}}p + 1}{\frac{1}{k_{c2}}p^2 + \frac{k_{c1}}{k_{c2}}p + 1} \quad (5.34)$$

$$G_2(p) = \frac{p}{\frac{1}{k_{c2}}p^2 + \frac{k_{c1}}{k_{c2}}p + 1} \quad (5.35)$$

Onde

$$K_c = \begin{bmatrix} k_{c1} \\ k_{c2} \end{bmatrix}$$

é o ganho contínuo de *Kalman*.

Sendo o modelo do sinal um duplo integrador, a equação algébrica de *Riccati* pode ser resolvida analiticamente resultando no seguinte ganho de *Kalman*:

$$K_c = \begin{bmatrix} \sqrt{2}(\frac{Q_c}{R_c})^{1/4} \\ (\frac{Q_c}{R_c})^{1/2} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

onde pode ser verificado que o ganho depende apenas da razão $r = \frac{Q_c}{R_c}$.

Fixado o modelo do sinal (duplo integrador), o ganho de *Kalman*, como já era esperado, depende apenas da razão Q_c/R_c . Além disso, sendo R_c constante (ruído de quantização), o ganho depende apenas de Q_c .

É fácil verificar que para qualquer valor de Q_c/R_c os pólos de G_1 serão sempre complexos dados por:

$$\frac{\sqrt{2}(Q_c/R_c)^{1/4}}{2} \times [-1 \pm i]$$

com zero real localizado em $-\frac{\sqrt{2}(Q_c/R_c)^{1/4}}{2}$. A figura 5.10 apresenta a disposição dos pólos e do zero da transferência G_1 de posição.

Observação 10 (Interpretação do ganho de *Kalman*) Uma vez que os pólos do

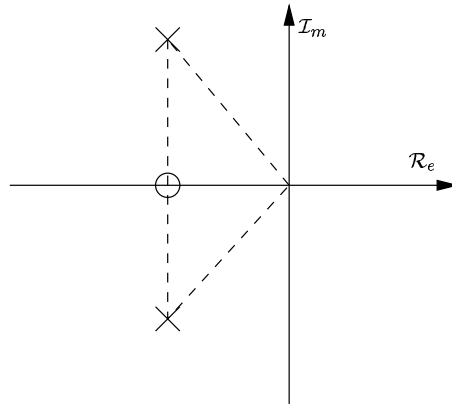


FIGURA 5.10: Disposição dos pólos e do zero do filtro de *Kalman* contínuo estacionário.

filtro de Kalman contínuo são sempre complexos (para toda relação Q_c/R_c) o filtro

$$\frac{1}{\frac{1}{k_{c2}}p^2 + \frac{k_{c1}}{k_{c2}}p + 1}$$

pode ser comparado com um sistema de 2ª ordem padrão do tipo

$$\frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}p^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}p + 1}$$

logo, k_{c1} está relacionado com a parte real dos pólos complexos e k_{c2} com a frequência de ressonância.

5.3.5 Estimativas do filtro de *Kalman*

De acordo com a resposta em frequência do filtro de *Kalman* (figura 5.13), na ausência ou presença de ruído de medição o filtro deve apresentar uma estimativa satisfatória para frequências dentro de sua banda passante, ou seja, para frequências desde **zero** até a frequência de corte. Entretanto, para o caso do ruído de medição ser dado pela quantização do *encoder*, o ruído passa a depender do sinal a ser quantizado (ver apêndice C.4). Sendo assim, fixado um ganho de *Kalman*, sinais muito rápidos serão atenuados devido a banda passante do filtro. Por outro lado, sinais lentos geram ruídos de quantização com componentes em baixa frequência que o filtro deixará passar. O exemplo a seguir ilustra este fato.

Exemplo 5.2 As figuras 5.11 e 5.12 mostram a estimativa do filtro para diferentes frequências da senóide de entrada $10\text{sen}(2\pi/T)$. A figura 5.11 apresenta a resposta do filtro na ausência do ruído de medição. Verifica-se que para a estimativa é satisfatória para sinais lentos e rápidos (dentro da banda passante do filtro). Por outro lado, a figura 5.12 apresenta a resposta do filtro na presença de ruído de medição, em particular, ruído de quantização. Neste caso, verifica-se que para sinais lentos a estimativa é deteriorada. ■

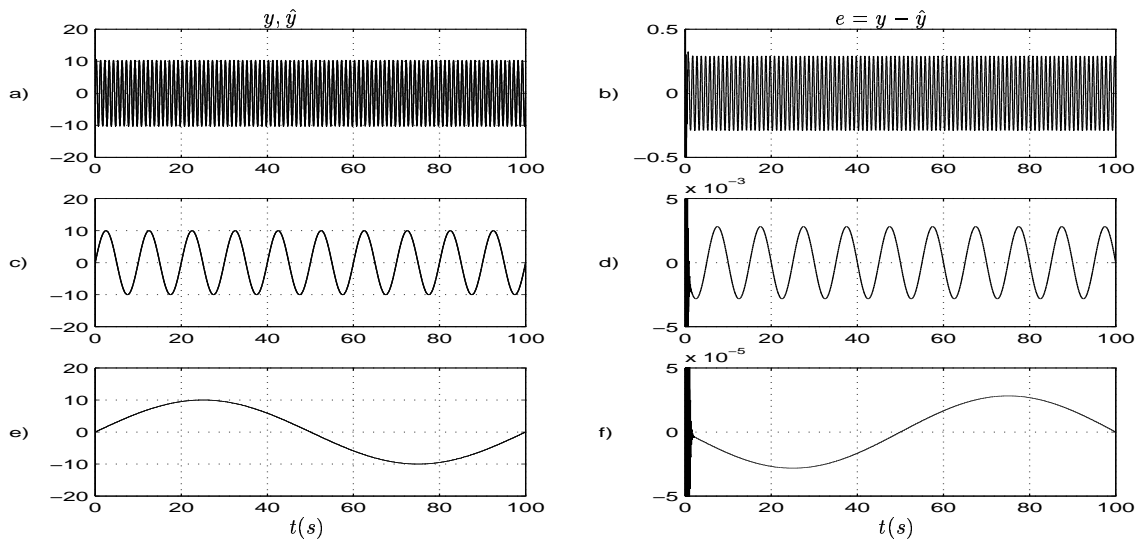


FIGURA 5.11: Estimativa do filtro de Kalman, sem quantização. $y(t) = 10\text{sen}(2\pi t/T)$ com y , \hat{y} e erro em graus. $T = 1$ (a,b), $T = 10$ (c,d) e $T = 100$ (e,f).

O desempenho do filtro de *Kalman* depende da velocidade do sinal que se deseja estimar. É necessário algum conhecimento a respeito da velocidade do sinal. O importante é que o filtro possua uma banda passante suficiente para a aplicação desejada.

5.4 Comparação com filtro de 1ª ordem

Considere o seguinte caso particular ($Q_c = 10^{-3}$ e $R_c = 2 \times 10^{-10}$) o que leva a $G_1(p) = \frac{66.41p+2205.3}{p^2+66.41p+2205.3}$. Através do diagrama de *Bode* (figura 5.13) é fácil verificar que o filtro de *Kalman* é um filtro passa-baixas que não oferece praticamente nenhum atraso de fase para frequências na banda passante e atenua bastante as frequências altas. Esta é a diferença principal entre o filtro projetado através da abordagem de

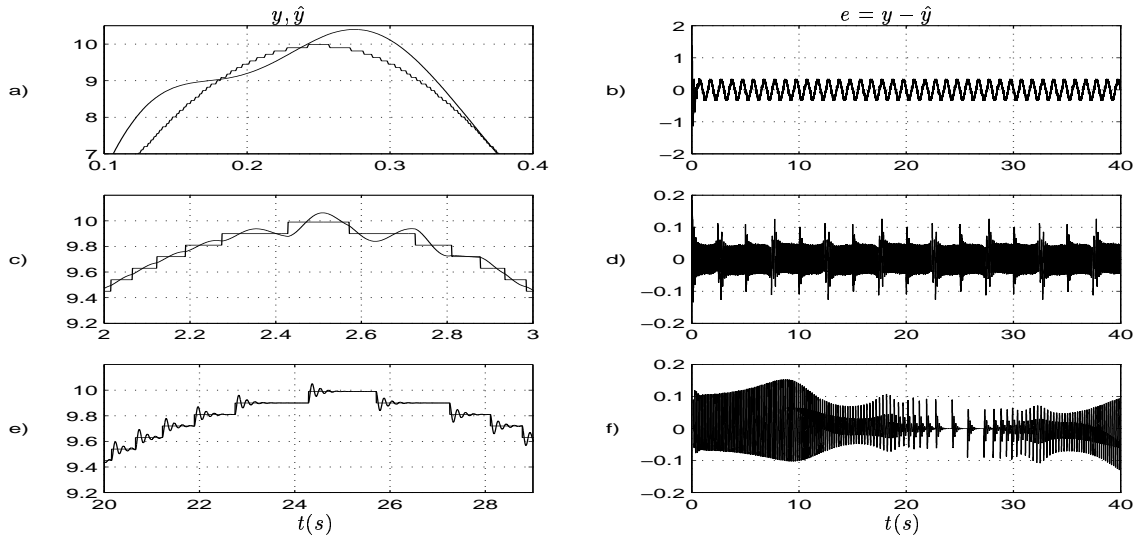


FIGURA 5.12: Estimativa do filtro de Kalman, com quantização ($\theta = 0.09^\circ$). Sinal quantizado dado por: $y(t) = 10\text{sen}(2\pi t/T)$, com y , \hat{y} e erro em graus. $T = 1$ (a,b), $T = 10$ (c,d) e $T = 100$ (e,f).

Kalman é um filtro passa-baixas de 1ª ordem projetado simplesmente para rejeitar alta frequência.

O exemplo a seguir destaca a vantagem de se utilizar o filtro de *Kalman* com relação ao filtro de 1ª ordem.

Exemplo 5.3 A figura 5.14 apresentam uma comparação entre as estimativas do filtro de Kalman e de um filtro de primeira ordem dado por:

$$\frac{1}{\tau p + 1} = \frac{1}{0.01p + 1} \quad (5.37)$$

Verifica-se que ao se utilizar o filtro de 1ª ordem para tentar obter uma estimativa tão suave quanto a estimativa do filtro de Kalman o atraso é bem maior. Mesmo o filtro de Kalman sendo de uma ordem superior $\frac{66.41p+2205.3}{p^2+66.41+2205.3}$ (com grau relativo unitário). Este atraso prejudica completamente o desempenho do sistema de controle em malha fechada. O diagrama de Bode (figure 5.15) ilustra o atraso maior introduzido pelo filtro de 1ª ordem. ■

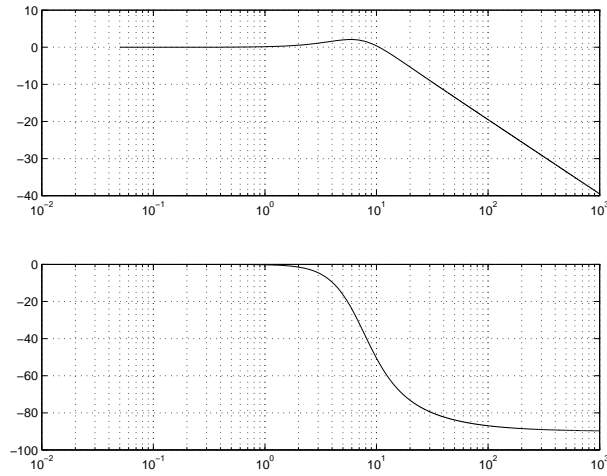


FIGURA 5.13: Resposta em frequência do filtro de *Kalman* contínuo estacionário - Magnitude e Fase.

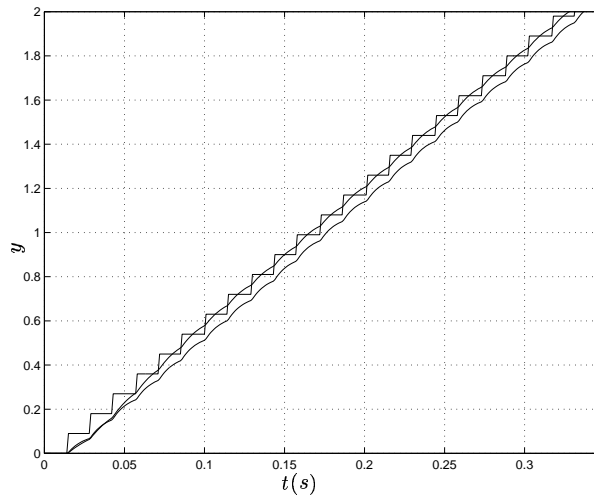


FIGURA 5.14: Comparação entre a estimativa do filtro de *Kalman* e a estimativa de um filtro de 1ª ordem. Sinal quantizado dado por: $10\text{sen}(2\pi t/10)$ com passo de quantização $\theta = 0.09^\circ$.

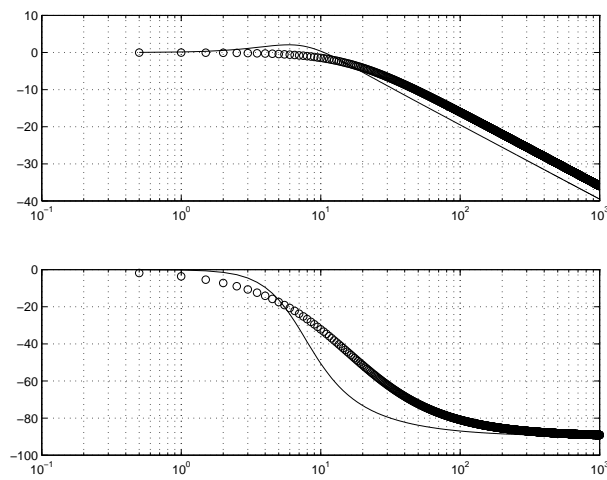


FIGURA 5.15: *Comparação entre o filtro de Kalman (-) e o filtro de 1ª ordem (o). Diagrama de Bode.*

Capítulo 6

Simulações Numéricas

As simulações tem como principal objetivo ilustrar aspectos teóricos e verificar o efeito dos parâmetros do controlador suave a estrutura variável (*SSC*) para se determinar uma metodologia para a sintonia do controlador em situações reais. Serão adotados os critérios do capítulo 4 para a sintonia dos parâmetros do *SSC* para grau relativo arbitrário. Nesse capítulo foi apresentado o controlador suave a estrutura variável, *SSC*, e sua análise de estabilidade global, de forma progressiva. Primeiro o controlador a estrutura variável *VSC* para $n^* = 1$, em seguida a sua versão suave *SSC* para $n^* = 1$, e finalmente, a versão suave para grau relativo arbitrário ($n^* \geq 1$).

Este capítulo apresenta, também de forma progressiva, os resultados de simulações que ilustram o desempenho do controlador *VSC* para $n^* = 1$, do controlador *SSC* para $n^* = 1$ e para $n^* = 2$.

Os resultados de estabilidade apresentados no capítulo 4 são resultados globais desde que a função de modulação do relé seja implementada a partir do vetor regressor e dos filtro de entrada e saída da planta. Afim de simplificar a implementação do controlador (evitando implementar os filtros de entrada e saída) a função de modulação será constante f_0 (até porque, em situações práticas, os atuadores sempre apresentam saturação). Os resultados de estabilidade passam a ser locais, o que não inviabiliza a implementação prática do controlador.

Na maioria dos resultados simulados (quando não for o caso será destacado) será considerado que não se tem nenhum conhecimento prévio da planta, ou seja, o controle nominal será desconsiderado ($u_{nom} = 0$) e, além disso, sem perda de generalidade, as

condições iniciais serão nulas.

Os sistemas de controle analisados no capítulo 4 são sistemas contínuos no tempo. Para comprovar os resultados teóricos as simulações apresentadas são realizadas com passo de integração fixo e pequeno (método de *Euler*), afim de se obter resultados próximos dos resultados teóricos. As simulações no campo contínuo se justificam já que, apesar do controlador ser implementado discretamente, ao se utilizar um período de amostragem pequeno o suficiente, o desempenho do controlador discreto se aproxima do desempenho do controlador contínuo.

O efeito principal é que (devido ao passo de integração, caso contínuo, ou ao período de amostragem, caso discreto) o sinal de controle chaveado durante o deslizamento deixa de ter frequência infinita (resultado teórico) e passa a ter frequência finita. Este efeito gera o que será denominado de *chattering* numérico e deve ser diferenciado do *chattering* devido a dinâmicas não-modeladas da planta (atuadores).

6.1 Resultados de simulações numéricas

As simulações são realizadas da seguinte forma. Para o caso de grau relativo unitário, a planta $G(p)$ (instável e de fase mínima) e o modelo de referência $M(p)$ são dados por:

$$\begin{aligned}G(p) &= \frac{5}{p-3} \\M(p) &= \frac{1}{p+1}\end{aligned}$$

Para simular o caso geral ($n^* \geq 1$) o caso de $n^* = 2$ será considerado (que contém grande parte das dificuldades encontradas no caso geral). A planta (dada pelo modelo linear do helicóptero com um grau de liberdade, ver capítulo 7¹) e o modelo de referência serão dados por:

$$\begin{aligned}G(p) &= \frac{5}{(p^2-3^2)} \\M(p) &= \frac{1}{(p+1)^2}\end{aligned}$$

¹Em algumas simulações será considerada um dinâmica não-modelada $G_m(p) = \frac{1}{0.22p+1}$ que representa a dinâmica do atuador do helicóptero

Os seguintes tópicos serão abordados:

- O fenômeno de *chattering* como consequência da integração numérica e/ou implementação discreta.
- O controlador a estrutura variável (*VSC*)
 - Desempenho na presença e ausência de: perturbação de entrada e dinâmica não-modelada.
 - Suavização do sinal de controle através de: zonas lineares e filtro da média.
- O controlador **suave** a estrutura variável (*SSC*) para $n^* = 1$.
 - Desempenho da malha de predição em conjunto com o filtro da média para suavizar o sinal de controle na ausência de imperfeições.
 - Eliminação do *chattering* numérico através de um zona linear consideravelmente pequena.
 - Desempenho na presença e ausência de: perturbação de entrada e dinâmica não-modelada.
- O controlador **suave** a estrutura variável (*SSC*) para $n^* = 2$. Desempenho da aproximação $L(p)/F(\tau_F p)$ do operador diferencial $L(p)$ para compensar o grau relativo, na ausência de imperfeições.
- Comparações.
 - Comparações entre o *SSC* e o controlador a estrutura variável padrão (*VSC*) - importância da malha de predição.
 - Comparações entre o filtro de *Kalman* e o filtro de 1ª ordem para atenuar o ruído de quantização.
 - Comparações entre o *SSC* e o controlador clássico (PD de alto ganho).

6.1.1 Controlador a estrutura variável *VSC* ($n^* = 1$)

O controlador a estrutura variável (*VSC*) apresentado na figura 4.2 possui as seguintes características principais:

- Sinal de controle chaveado em frequência teórica infinita apresentando (*chattering*) devido a presença de dinâmicas não-modeladas (atuadores).
- Rejeição a perturbações de entrada limitadas.
- Dinâmica não-modelada destrói o modo deslizante.

O exemplo a seguir ilustra o desempenho do controlador *VSC* e o efeito do passo de integração (*chattering* numérico).

Exemplo 6.1 (*VSC* ($n^* = 1$) - *chattering* numérico) Considere a planta com função de transferência² (C.I. $y(0) = \pi/4$) dada por: $G(p) = \frac{5}{p-3}$, sendo controlada pelo controlador *VSC* da figura 4.2, com $M(p) = \frac{1}{(p+1)}$, $r(t) = \frac{\pi}{18}\mathbb{I}(t)$, função de modulação $f = 1$. A figura 6.1 apresenta o desempenho do controlador a estrutura variável mostrando um erro de rastreamento nulo (deslizamento ideal), com o sinal de controle chaveado. A figura 6.2 mostra o *chattering* numérico devido ao passo de integração. Nota-se que quanto menor o passo o erro e_0 torna-se mais próximo de zero (deslizamento ideal). ■

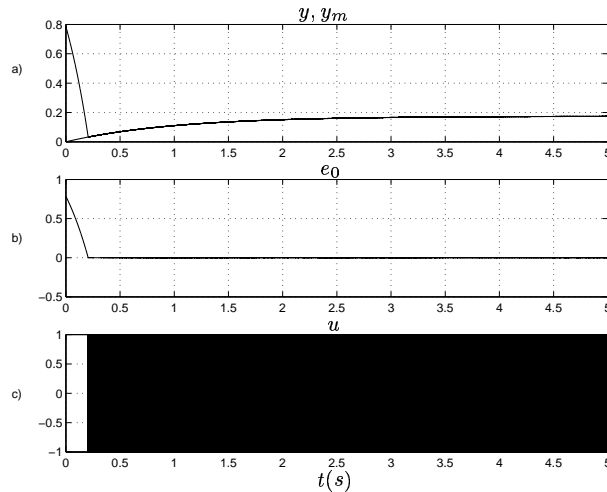


FIGURA 6.1: *Exemplo 6.1. Resultados simulados do controlador VSC. Deslizamento ideal. Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$. a) y e y_m b) erro de saída e_0 c) sinal de controle u .*

²C.I.: Condições Iniciais.

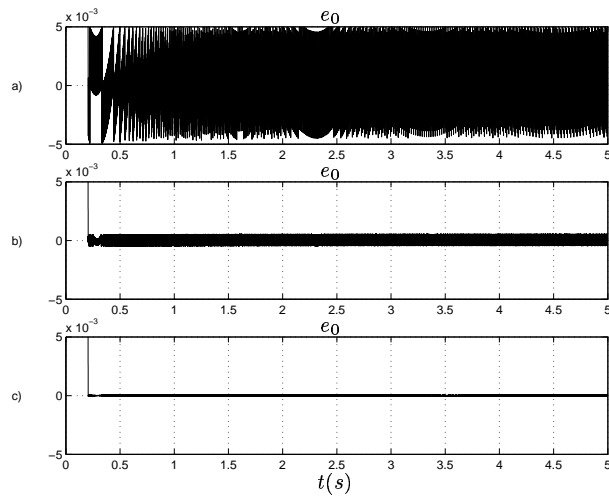


FIGURA 6.2: *Chattering numérico. Resultados simulados (exemplo 6.1) do controlador VSC. Erro de saída e_0 ($f = 1$). Passo de integração: a) 10^{-3} , b) 10^{-4} , c) 10^{-5} .*

Exemplo 6.2 (*VSC* ($n^* = 1$) *pert. de entrada e dinâmica não-modelada*) *Nas mesmas condições que o exemplo 6.1, este exemplo ilustra o desempenho do controlador VSC da figura 4.2 na presença de perturbação de entrada e dinâmica não-modelada. A figura 6.3 mostra a capacidade do controlador de rejeitar perturbações de entrada ($d_e(t) = 0.7\mathbb{I}(t - 3)$). A figura 6.4 deixa claro que, mesmo com uma função de modulação grande ($f = 1$), o controlador não é robusto com respeito a dinâmicas não-modeladas ($G(p) = G_m(p)\frac{5}{p-3}$, com $G_m(p) = \frac{10}{p+10}$). Isto já era esperado, pois o grau relativo da transferência em torno do relé aumentou, deixou de ser unitário.* ■

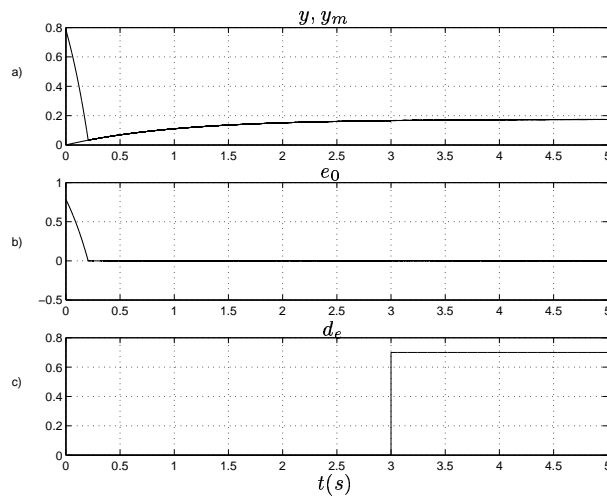


FIGURA 6.3: *Exemplo 6.2. Rejeição a perturbação de entrada ($d_e(t) = 0.7\mathbb{I}(t - 3)$). Controlador VSC. Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$. a) y e y_m b) erro de saída e_0 c) perturbação de entrada d_e .*

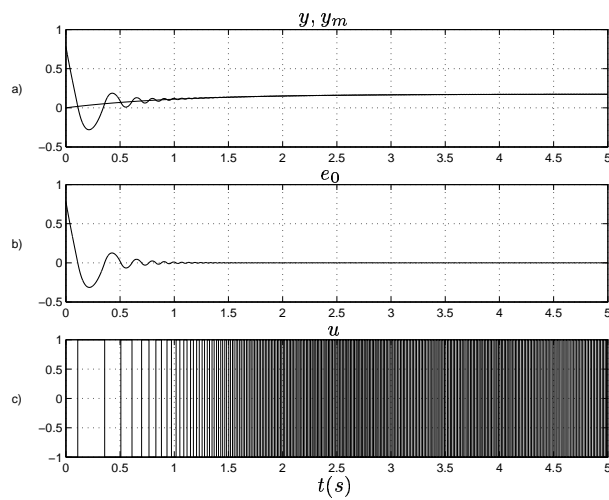


FIGURA 6.4: Dinâmica não-modelada ($G_m(p) = \frac{10}{p+10}$). Controlador VSC (exemplo 6.2). Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$. a) y e y_m b) erro de saída e_0 c) sinal de controle u .

O exemplo a seguir ilustra os problemas encontrados para atenuar o chaveamento do sinal de controle utilizando as seguintes alternativas clássicas:

- Introdução de zona linear no relé.
- Filtragem do sinal de controle chaveado.

Exemplo 6.3 (VSC ($n^* = 1$) - suavização do sinal de controle) *Utilizando a mesma planta ($n^* = 1$) e referência que no exemplo 6.1 este exemplo apresenta alternativas para suavizar o sinal de controle do VSC da figura 4.2. Inicialmente, será utilizada uma zona linear no relé ($U_0 = f \text{sat}(e_0/\delta_0)$, $f = 1$)³. Verifica-se que esta solução gera um compromisso entre atenuação do chattering do sinal de controle e erro em regime (ver figura 6.5), principalmente na presença de perturbação de entrada ($d_e(t) = 0.7\mathbf{1}(t-3)$). Propõe-se, então, outra alternativa: o uso de um filtro passa-baixas (filtro da média - $F_{av}^{-1}(\tau p) = \frac{1}{\tau p + 1}$). Entretanto, utilizar somente este filtro não é suficiente, pois apesar de quanto menor for a constante de tempo do filtro mais o sinal de controle é suavizado, ao mesmo tempo a malha de deslizamento ideal em torno do relé é destruída devido ao aumento do grau relativo (a figura 6.6 ilustra este fato). ■*

³A função de saturação é definida da seguinte forma:

$$\text{sat}(x/\delta) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -\delta \\ x & \text{se } -\delta < x < \delta \\ 1 & \text{se } x > \delta \end{cases}$$

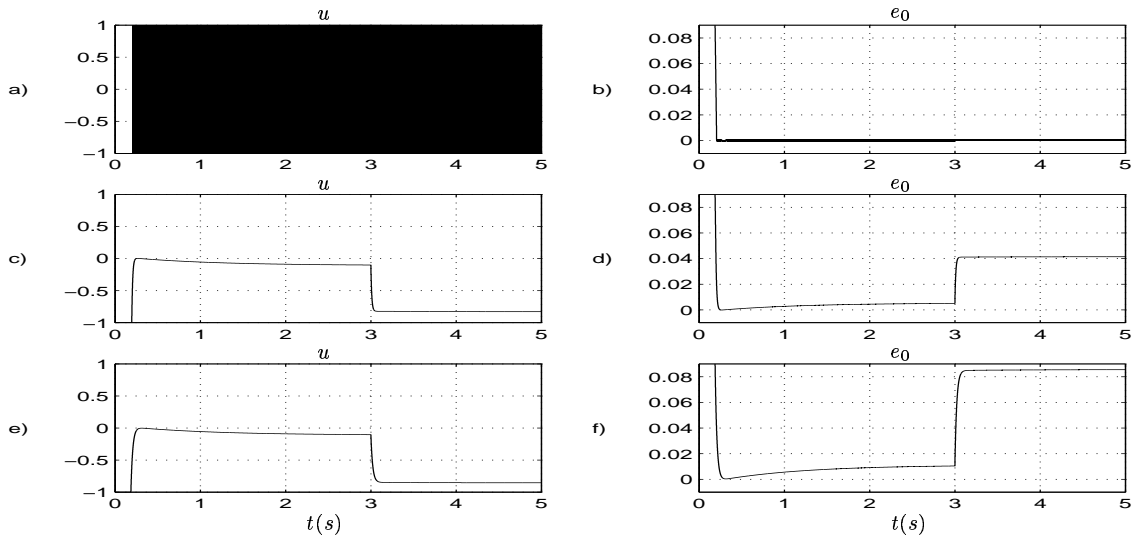


FIGURA 6.5: Zona linear δ_0 para atenuar chattering. Controlador VSC (exemplo 6.3). Sinal de controle u e erro de saída e_0 . Passo de integração 10^{-4} . Perturbação de entrada ($d_e = 0.7\mathbb{I}(t - 3)$). a) u : $\delta_0 = 0$, b) e_0 : $\delta_0 = 0$, c) u : $\delta_0 = 0.05$, d) e_0 : $\delta_0 = 0.05$, e) u : $\delta_0 = 0.1$, f) e_0 : $\delta_0 = 0.1$.

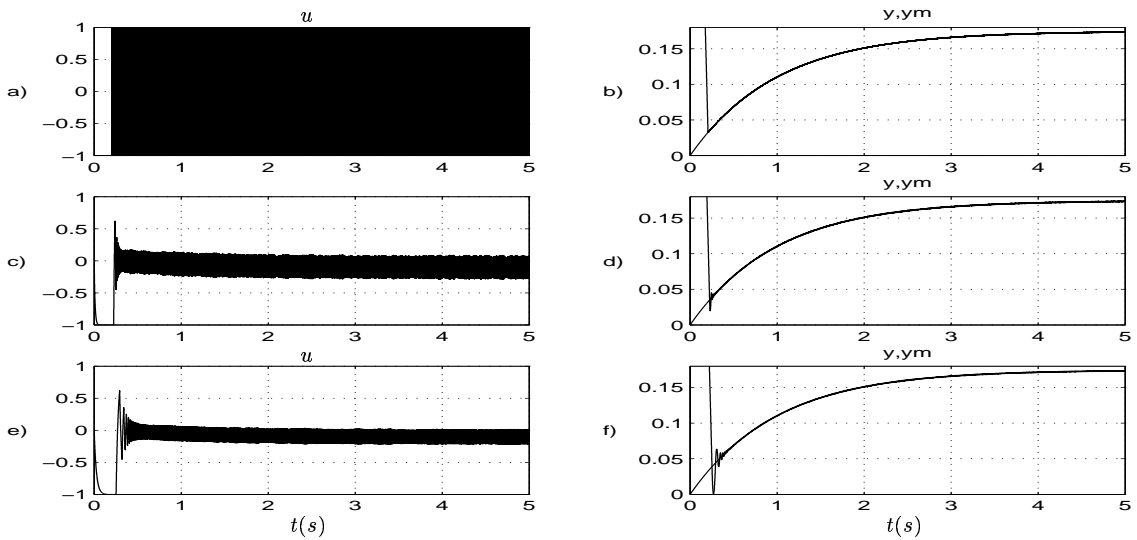


FIGURA 6.6: Filtro da média para atenuar chattering. Resultados simulados (exemplo 6.3) do controlador VSC. Passo de integração 10^{-4} , $\delta_0 = 0$. a) u : $\tau = 0$, b) y, y_m : $\tau = 0$, c) u : $\tau = 1/100$, d) y, y_m : $\tau = 1/100$, e) u : $\tau = 1/40$, f) y, y_m : $\tau = 1/40$.

Observe que para controladores a estrutura variável, suavizar o sinal de controle através de zonas lineares resulta em um controlador PD de alto ganho com saturação (ver (Glatzl et al. 1993)). Sendo assim, nenhum dos métodos acima exibem uma solução eficiente para atenuar o chaveamento do sinal de controle. Para solucionar este problema, é proposto então, o controlador suave a estrutura variável (*SSC*) apresentado na figura 4.3 (para grau relativo unitário) e na figura 4.5 para grau relativo qualquer. O controlador suave utiliza uma malha de predição para manter o deslizamento ideal em torno do relé. Desta forma, é possível utilizar o filtro da média para suavizar o sinal de controle sem destruir o deslizamento ideal (ver figura 6.7). Além disso, não é preciso utilizar zonas lineares.

6.1.2 Controlador suave a estrutura variável *SSC* ($n^* = 1$)

O *SSC* (figura 4.3) possui as seguintes características:

- Controle suave (devido ao filtro da média e malha de predição).
- Não utiliza zonas lineares para suavizar o sinal de controle.
- Erro de rastreamento em regime da ordem da constante de tempo do filtro da média.
- Rejeição a perturbação de entrada.
- Robustez a dinâmicas não-modeladas.

Afim de mostrar as características principais do *SSC*, comprovar resultados teóricos e deixar claro a influência dos parâmetros do controlador sobre o seu desempenho, inicialmente são apresentadas simulações para o caso em que a planta e o modelo possuem grau relativo unitário. O caso geral possui as mesmas características, pois ao se utilizar o operador polinomial diferencial para compensar o grau relativo, o problema se reduz ao caso de grau relativo unitário.

O exemplo a seguir ilustra o desempenho do controlador *SSC* para grau relativo unitário.

Exemplo 6.4 (SSC ($n^* = 1$) - suavização do sinal de controle) Considere a planta com função de transferência (C.I. $y(0) = \pi/4$) dada por: $G(p) = \frac{5}{p-3}$, sendo controlada pelo controlador suave SSC ($n^* = 1$) da figura 4.3, com $M(p) = \frac{1}{(p+1)}$, $r(t) = \frac{\pi}{18}\mathbb{I}(t)$, $k^{nom} = 0.4$ e filtro da média $F_{av}^{-1}(\tau p) = 1/(\tau p + 1)$ com $\tau = 1/300$. O relé foi implementado com $f = 1$. A figura 6.7 apresenta os resultados do controlador SSC. A malha de predição mantém o deslizamento ideal em torno do relé, só que agora a superfície de deslizamento é dada por $\varepsilon_0 = 0$ (ver figura 6.8). A condição para que exista este deslizamento ideal encontram-se no corolário 4.1.1. O erro de rastreamento e_0 converge para um conjunto residual da ordem da constante de tempo do filtro da média ($\mathcal{O}(\tau)$), ver Teorema 4.1. ■

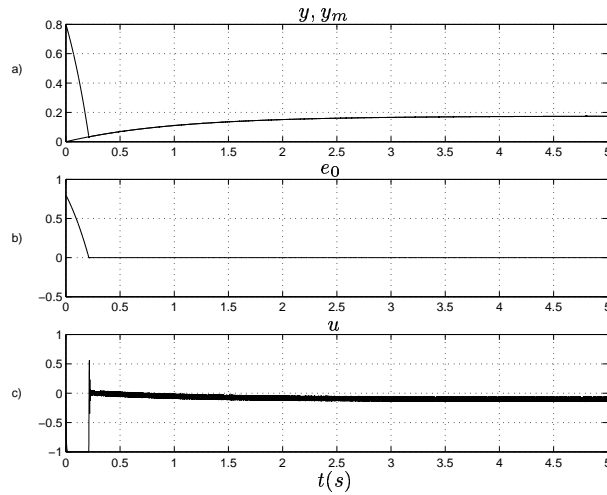


FIGURA 6.7: Exemplo 6.4. Resultados simulados do controlador SSC caso $n^* = 1$. Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $\delta_0 = 0$, $\tau = 1/300$, $k_{nom} = 0.4$. a) y e y_m b) erro de saída e_0 c) sinal de controle. u

Assim como no controlador VSC o passo de integração finito também gera *chattering* numérico. A figura 6.9 mostra o sinal de controle u e o erro de saída e_0 obtidos no exemplo 6.4 (passo de integração de 10^{-4}) e com passo de integração de 10^{-5} .

A figura 6.10 mostra a atenuação do *chattering* numérico através da inclusão de uma zona linear δ_0 no relé ($U_0 = fsat(e_0/\delta_0)$, onde $f = 1$). Deve ficar claro que esta zona linear não é utilizada para suavizar o sinal de controle (*chattering* devido a dinâmicas não-modelada dos atuadores, por exemplo), esta é a função do filtro da média. Note que a zona linear necessária para evitar o *chattering* numérico é bem menor do que a

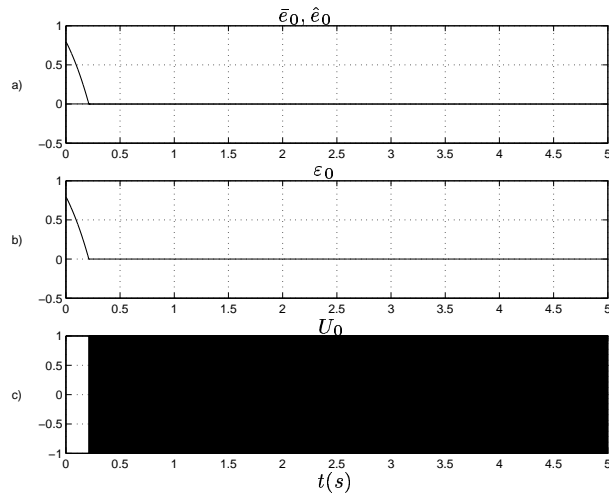


FIGURA 6.8: Erros auxiliares. Resultados simulados (exemplo 6.4) do controlador SSC caso $n^* = 1$. Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $\delta_0 = 0$, $\tau = 1/300$, $k_{nom} = 0.4$. a) erro de predição \hat{e}_0 e \bar{e}_0 c) erro na predição (ou erro auxiliar) ε_0 c) saída U_0 do relé.

zona linear utilizada para suavizar o sinal de controle (exemplo 6.3).

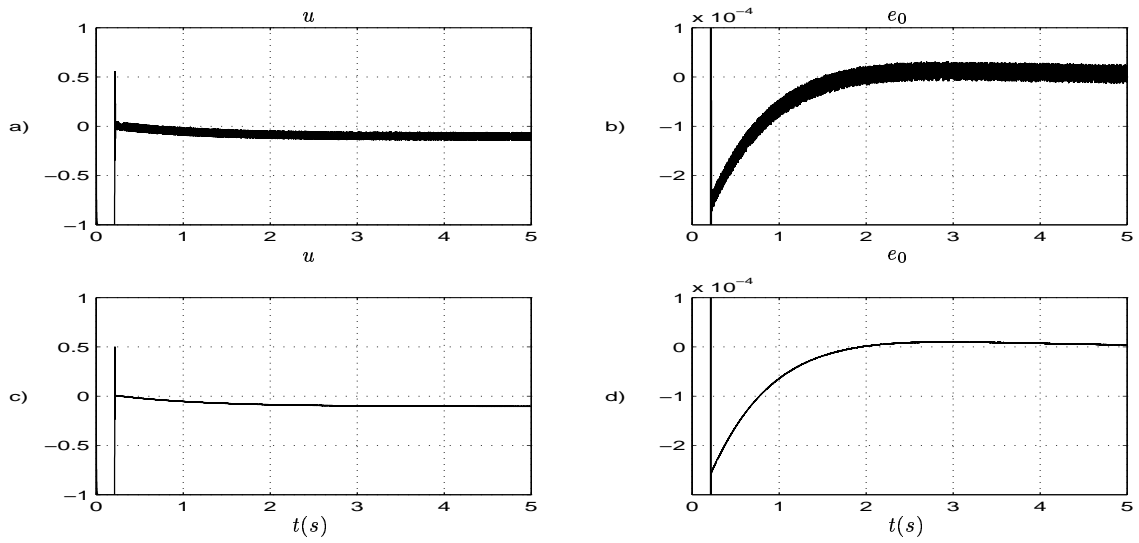


FIGURA 6.9: *Chattering* numérico. Controlador suave *SSC* caso $n^* = 1$ (exemplo 6.4). Sinal de controle u e erro de saída e_0 . a) u : Passo de integração 10^{-4} , b) e_0 : Passo de integração 10^{-4} , c) u : Passo de integração 10^{-5} , d) e_0 : Passo de integração 10^{-5}

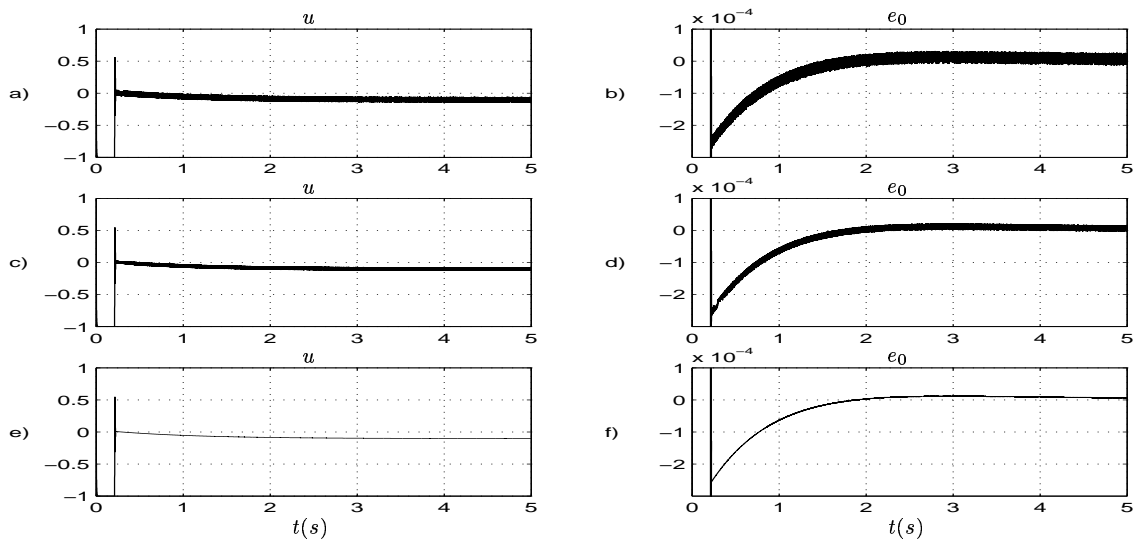


FIGURA 6.10: Zona linear δ_0 para aliviar *chattering* numérico. Resultados simulados (exemplo 6.4) do controlador suave *SSC* caso $n^* = 1$. Sinal de controle u e erro de saída e_0 . a) u : $\delta_0 = 0$, b) e_0 : $\delta_0 = 0$, c) u : $\delta_0 = 1 \times 10^{-5}$, d) e_0 : $\delta_0 = 1 \times 10^{-5}$, e) u : $\delta_0 = 2 \times 10^{-5}$, f) e_0 : $\delta_0 = 2 \times 10^{-5}$.

Portanto, em algumas simulações daqui por diante, bem como na implementação discreta do controlador (utilizada em simulações e nos experimentos), será utilizada uma pequena zona linear para evitar problemas numéricos somente.

O exemplo a seguir mostra o desempenho do controlador *SSC* para grau relativo unitário, na presença de perturbação de entrada e dinâmica não-modelada.

Exemplo 6.5 (*SSC* ($n^* = 1$) pert. de entrada e dinâmica não-modelada) *Sob as mesmas condições que o exemplo 6.4, considere o desempenho do controlador suave *SSC* ($n^* = 1$) da figura 4.3 na presença de perturbação de entrada e dinâmica não-modelada. O relé é implementado com $f = 1$. A figura 6.11 apresenta os resultados do controlador *SSC* na presença de um perturbação de entrada ($d_e = 0.7\mathbb{I}(t - 3)$). A perturbação é rejeitada e o controle continua suave após o degrau de perturbação. A figura 6.13 mostra o quanto o controlador é robusto com respeito a dinâmicas não-modeladas ($G(p) = G_m(p)\frac{5}{p-3}$, com $G_m(p) = \frac{10}{p+10}$). A malha de predição mantém o deslizamento ideal em torno do relé, só que agora a superfície de deslizamento é dada por $\varepsilon_0 = 0$ (ver figura 6.14). A condição para que exista este deslizamento ideal encontram-se no corolário 4.2.1. O erro de rastreamento e_0 converge para um conjunto residual da ordem da constante de tempo do filtro da média mais a contante de tempo da dinâmica não-modelada ($\mathcal{O}(\tau + \mu)$, com $\mu = 1/10$), ver Teorema 4.2. ■*

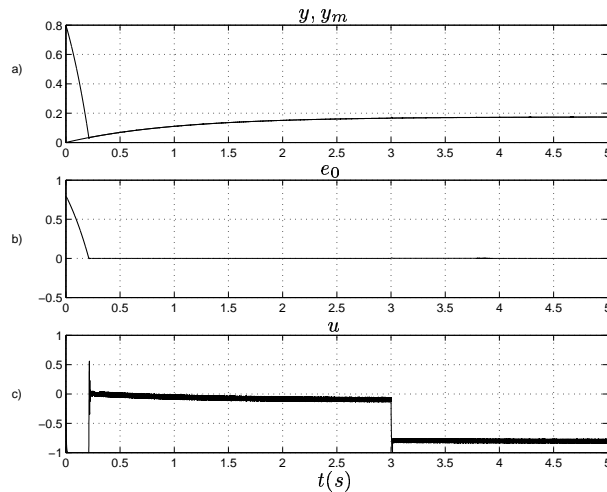


FIGURA 6.11: *Rejeição a perturbação de entrada. Resultados simulados (exemplo 6.5) do controlador *SSC* caso $n^* = 1$. Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $\delta_0 = 0$, $\tau = 1/300$, $k_{nom} = 0.4$. a) y e y_m b) erro de saída e_0 c) sinal de controle u .*

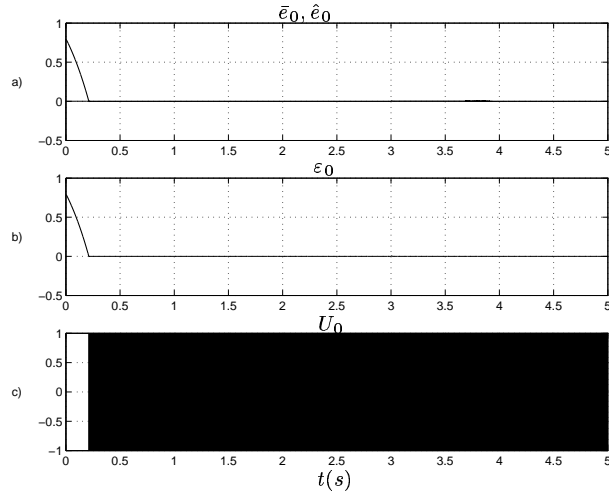


FIGURA 6.12: Perturbação de entrada (erros auxiliares). Resultados simulados (exemplo 6.5) do controlador SSC caso $n^* = 1$. Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $\delta_0 = 0$, $\tau = 1/300$, $k_{nom} = 0.4$. a) erro de predição \hat{e}_0 e \bar{e}_0 b) erro na predição (ou erro auxiliar) ϵ_0 c) saída U_0 do relé.

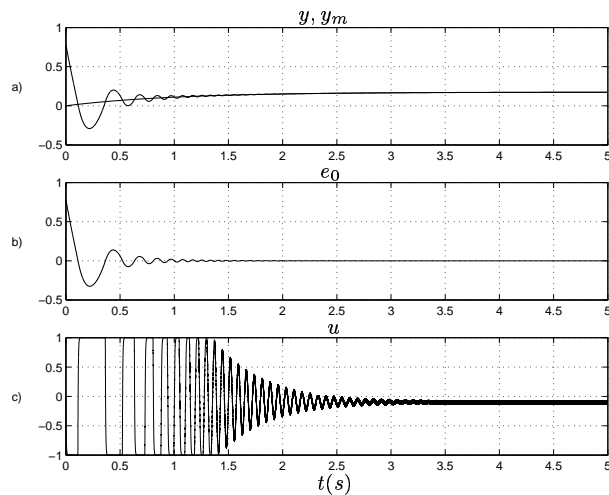


FIGURA 6.13: Dinâmica não-modelada. Controlador SSC caso $n^* = 1$ (exemplo 6.5). Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $\delta_0 = 0$, $\tau = 1/300$, $k_{nom} = 2$, $\mu = 1/10$. a) y e y_m b) erro de saída e_0 c) sinal de controle u .

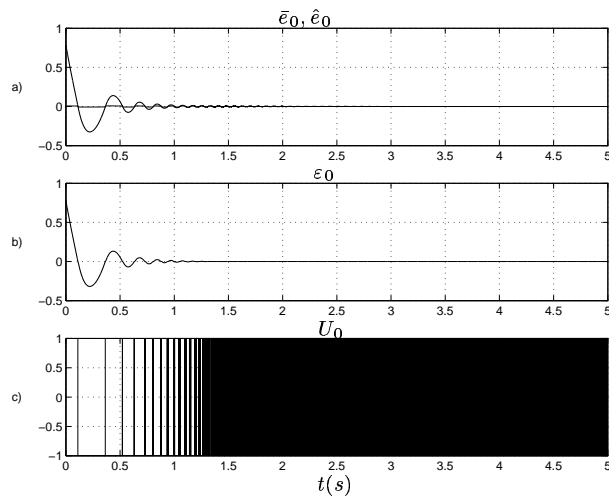


FIGURA 6.14: Dinâmica não-modelada (erros auxiliares). Resultados simulados (exemplo 6.5) do controlador SSC caso $n^* = 1$. Passo de integração 10^{-4} , $f = 1$, $\delta_0 = 0$, $\tau = 1/300$, $k_{nom} = 2$, $\mu = 1/10$. a) erro de predição $\hat{\epsilon}_0$ e $\bar{\epsilon}_0$ b) erro na predição (ou erro auxiliar) ϵ_0 c) saída U_0 do relé.

6.1.3 Controlador suave a estrutura variável SSC ($n^* = 2$)

O caso geral ($n^* \geq 1$) recai no caso de grau relativo unitário utilizando um operador diferencial L para compensar o grau relativo (figura 4.5). Este operador é realizado através de uma versão filtrada do tipo $L(p)/F(\tau_F p)$ (ver capítulo 4). Como o modelo de referência é conhecido é possível ter acesso as derivadas superiores da saída y_m . Portanto, é possível implementar diretamente o operador não-causal $L(p)$. Por outro lado, por não se ter acesso as derivadas de ordem superior da saída da planta y o operador L será aproximado por uma versão filtrada do tipo $L(p)/F(\tau_F p)$. A constante de tempo do filtro $F^{-1}(\tau_F p)$ será tratada como dinâmica não-modelada, de acordo com o capítulo 4.

O exemplo a seguir ilustra o desempenho do controlador suave SSC , em condições ideais. O pólo devido ao atuador será considerado como dinâmica não-modelada ($1/(0.22p + 1)$).

Exemplo 6.6 (SSC ($n^* = 2$) - compensação do grau relativo) *Considere a planta com função de transferência dada por: $G(p) = \frac{5}{(p+3)(p-3)}$ (com dinâmica não-modelada $G_m(p) = \frac{1}{(0.22p+1)}$), sendo controlada pelo controlador suave SSC da figura 4.5, com $M(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$, $r(t) = \frac{\pi}{18}sqw(t/20)$, $k^{nom} = 40$ e filtro da média $F_{av}^{-1}(\tau p) = 1/(\tau p + 1)$ com $\tau = 1/300$. O operador diferencial $L(p) = (p + a_L)$ é aproximado por:*

$$\mathcal{L} = \frac{p + a_L}{\tau_F p + 1}$$

onde $a_L = 1$, $\tau_F = 1/100$. O relé é implementado com $f = 1$. A figura 6.15 mostra o desempenho do sistema. A condição para que exista este deslizamento ideal encontram-se no corolário 4.3.1. O erro de rastreamento e_0 converge para um conjunto residual da ordem da constante de tempo do filtro da média mais a contante de tempo do filtro $F^{-1}(\tau_F p)$ ($\mathcal{O}(\tau + \tau_F)$), ver Teorema 4.3. ■

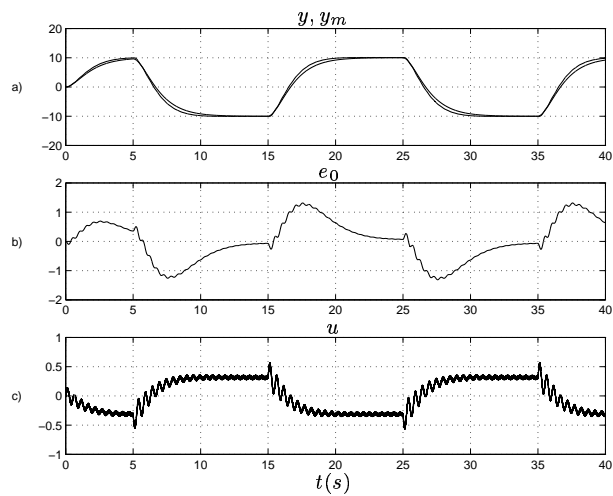


FIGURA 6.15: Resultados simulados (exemplo 6.6) do controlador SSC para $n^* = 2$. a) y e y_m em graus, b) erro de saída e_0 em graus, c) sinal de controle u em p.u.

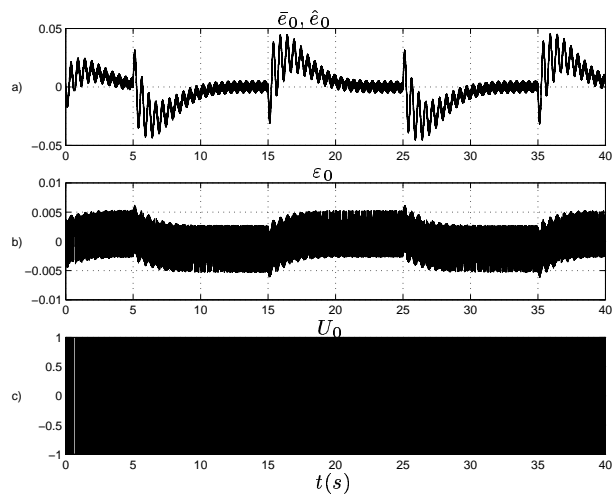


FIGURA 6.16: Resultados simulados (exemplo 6.6) do controlador SSC para $n^* = 2$. Erros auxiliares. a) \bar{e}_0 e \hat{e}_0 b) erro na previsão ε_0 c) saída U_0 do relé em p.u..

6.1.3.1 SSC ($n^* = 2$) utilizando filtro de Kalman

Uma solução mais eficiente é utilizar um filtro F^{-1} , mesmo que de ordem superior, que não apresente atraso de fase para as frequências de interesse da saída da planta y . Uma solução proposta no capítulo 5 é utilizar um filtro de Kalman. O operador diferencial $L(p) = p + a_L$ será aproximado por:

$$\mathcal{L} = \frac{p}{\frac{1}{k_{c2}}p^2 + \frac{k_{c1}}{k_{c2}}p + 1} + a_L \frac{\frac{k_{c1}}{k_{c2}}p + 1}{\frac{1}{k_{c2}}p^2 + \frac{k_{c1}}{k_{c2}}p + 1} \quad (6.1)$$

onde $K_c = \begin{bmatrix} k_{c1} \\ k_{c2} \end{bmatrix}$ é o ganho de Kalman.

O exemplo a seguir mostra o desempenho do filtro em avanço implementado utilizando as estimativas do filtro de Kalman.

Exemplo 6.7 (*SSC ($n^* = 2$) - filtro de Kalman*) Considere a planta com função de transferência dada por: $G(p) = \frac{5}{(p+3)(p-3)}$, na presença de dinâmica não-modelada ($G_m(p) = \frac{1}{(0.22p+1)}$), sendo controlada pelo controlador suave SSC da figura 4.5, com $M(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$, $r(t) = \frac{\pi}{18} \sin(\pi t/10)$, $k^{nom} = 40$ e filtro da média $F_{av}^{-1}(\tau p) = 1/(\tau p + 1)$ com $\tau = 1/300$. O filtro linear em avanço é dado pela equação (6.1), onde $a_L = 1$, $k_{c1} = 10.5$, $k_{c2} = 1400$. ■

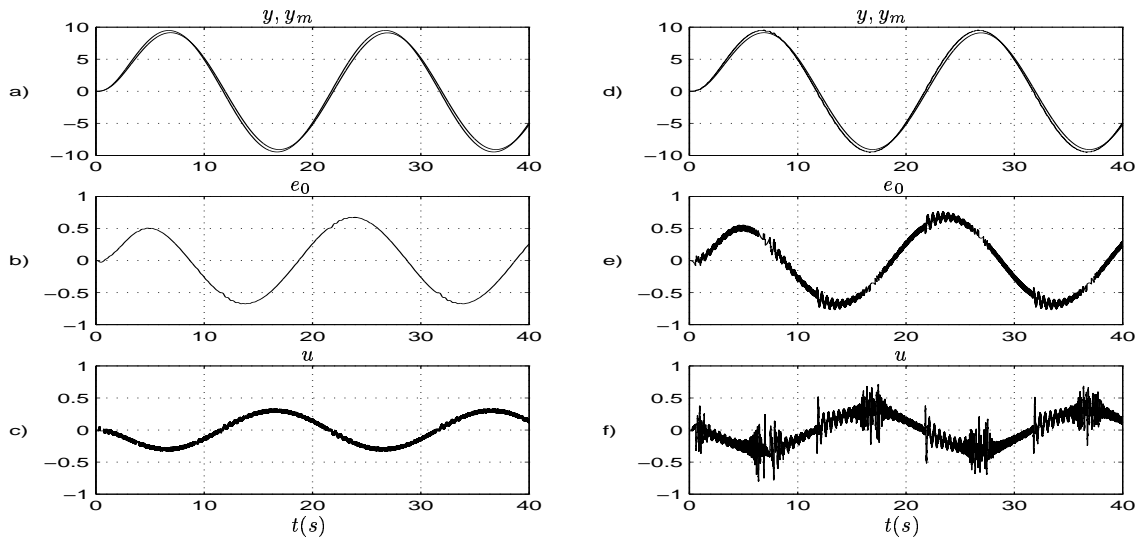


FIGURA 6.17: Resultados simulados (exemplo 6.7) do controlador SSC sob condições ideais (a,c,e) e sob ruído de quantização (b,d,f) (passo de 0.00157 rad), com filtragem de Kalman. a) e b) y e y_m em graus, c) e d) erro de saída e_0 em graus, e) e f) sinal de controle u em p.u.

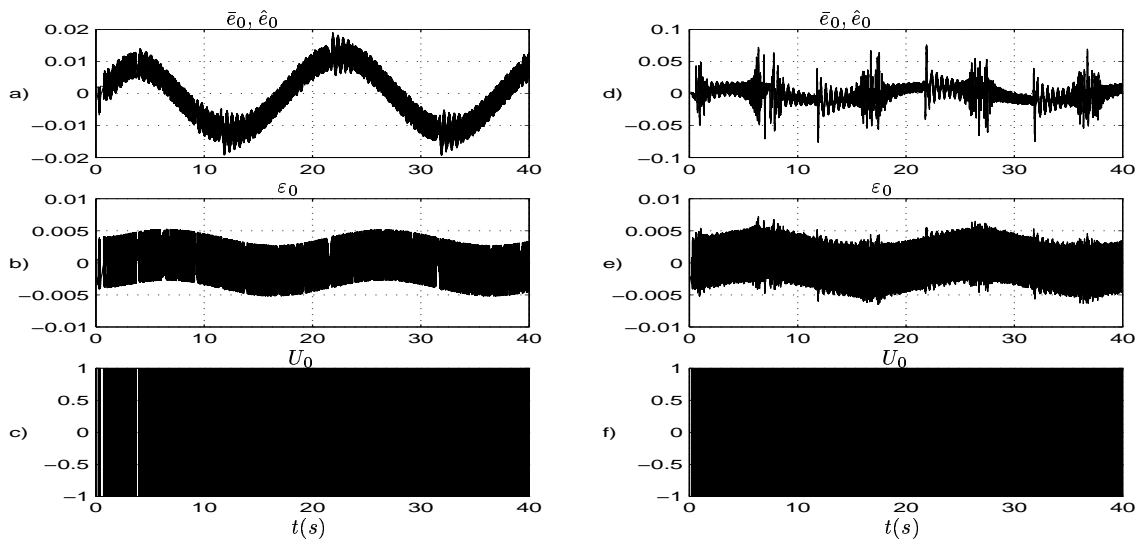


FIGURA 6.18: Erros auxiliares (exemplo 6.7) do controlador SSC sob condições ideais (a,c,e) e sob ruído de quantização (b,d,f) (passo de 0.00157 rad), com filtragem de Kalman. a) e b) \bar{e}_0 e \hat{e}_0 , c) e d) erro na predição ϵ_0 , e) e f) saída U_0 do relé em p.u..

6.2 Comparações

O exemplo a seguir mostram o desempenho superior do filtro de *Kalman* em comparação com o filtro de 1ª ordem.

Exemplo 6.8 (SSC - filtro de *Kalman* vs. filtro de 1ª ordem) Considere a planta com função de transferência dada por: $G(p) = \frac{5}{(p+3)(p-3)}$, com dinâmica não-modelada $G_m(p) = \frac{1}{(0.22p+1)}$, sendo controlada pelo controlador suave SSC da figura 4.5, com $M(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$, $r(t) = \frac{\pi}{18}sqw(t/20)$, $k^{nom} = 40$ e filtro da média $F_{av}^{-1}(\tau p) = 1/(\tau p + 1)$ com $\tau = 1/300$. A figura 6.19 apresenta o desempenho do sistema quando se utiliza o filtro de 1ª ordem ($\tau_F = 1/100$) em comparação com o desempenho quando se utiliza o filtro de *Kalman* (equação (6.1), com $a_L = 1, k_{c1} = 10.5, k_{c2} = 1400$). ■

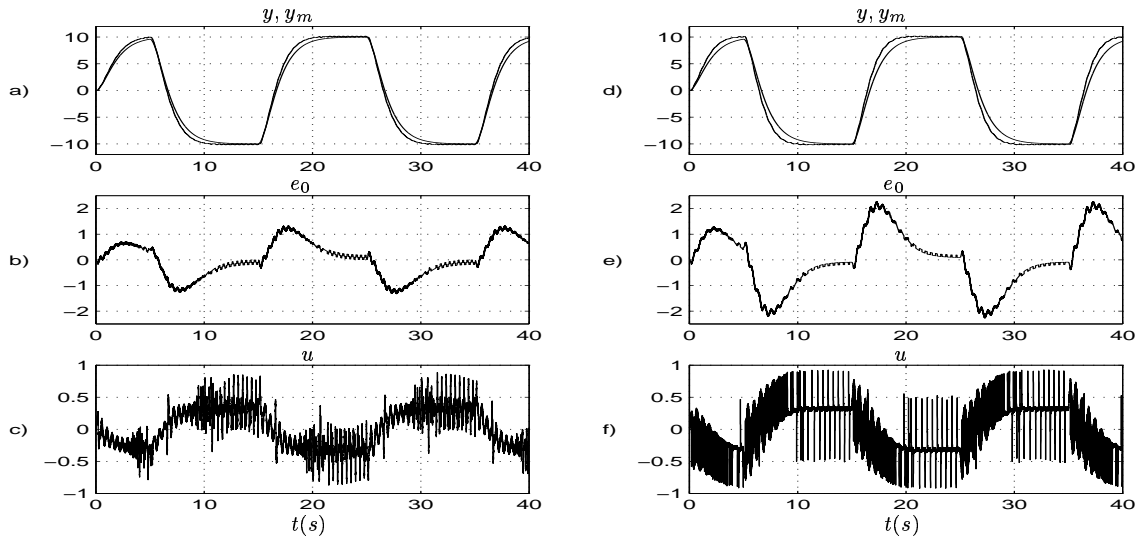


FIGURA 6.19: Controlador SSC (exemplo 6.8) utilizando um filtro de 1ª ordem (a,c,e) para atenuar ruído de quantização em comparação com o filtro de *Kalman* (b,d,f). a) e b) y e y_m em graus, c) e d) erro de saída e_0 em graus, e) e f) sinal de controle u em p.u.

O próximo exemplo mostra o desempenho superior do *SSC*, que utiliza a malha de predição e o filtro da média para atenuar o *chattering* do sinal de controle, em relação ao controlador a estrutura variável padrão (*VSC*) que utiliza zona linear para suavizar o sinal de controle. Ambos os controladores utilizam uma aproximação $L(p)/F(p)$ do operador $L(p)$ para compensar o grau relativo da planta.

Exemplo 6.9 (VSC vs. SSC) Considere a planta com função de transferência dada por: $G(p) = \frac{5}{(p+3)(p-3)}$, com dinâmica não-modelada $G_m(p) = \frac{1}{(0.22p+1)}$, sendo controlada pelo controlador suave *SSC* da figura 4.5, com $M(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$, $r(t) = \frac{\pi}{18} \text{sqw}(t/20)$, $k^{nom} = 40$ e filtro da média $F_{av}^{-1}(\tau p) = 1/(\tau p + 1)$ com $\tau = 1/300$. A figura 6.20 apresenta a comparação entre o desempenho do *SSC* (a,c,e) e o desempenho do *VSC* padrão (b,d,f) (retirando a malha de predição e o filtro da média), na presença de quantização. No *VSC* o relé foi implementado com uma função de saturação $\text{sat}(\bar{e}_0/d\delta_0)$ com $\delta_0 = 0.05$ para atenuação do *chattering*. Note que o *VSC* apresenta um erro em estado estacionário. Em todos os caso, para estimar posição e velocidade, foi utilizado o filtro de Kalman (equação (6.1), com $a_L = 1, k_{c1} = 10.5, k_{c2} = 1400$). ■

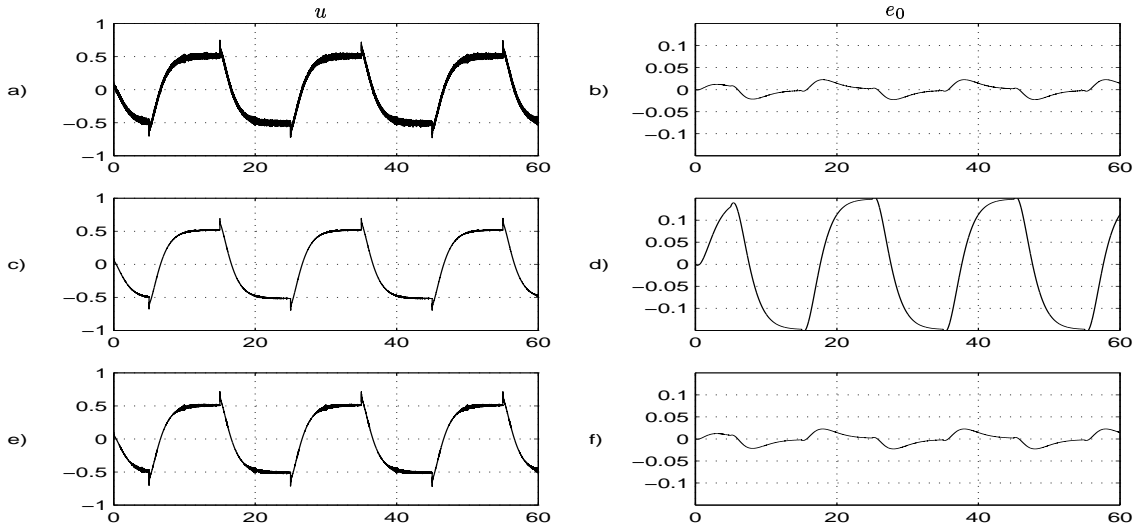


FIGURA 6.20: Resultados de simulação. Comparação entre o controlador *SSC* (a,c,e) e o controlador *VSC* (b,d,f). a) e b) y e y_m em graus, c) e d) erro de saída e_0 em graus, e) e f) sinal de controle u em p.u.

O exemplo a seguir compara o *SSC* com o controlador PD de alto ganho (ambos utilizando o filtro de *Kalman* para estimar a posição e velocidade) na presença de ruído de saída. Verifica-se que, na presença de ruído de medição o ganho do PD não pode ser aumentado demais o que leva a uma degradação no rastreamento.

Exemplo 6.10 (*SSC* ($n^* = 2$) - PD vs. *SSC*) Nas mesmas condições que no exemplo anterior considere, agora, a comparação entre o desempenho do controlador *SSC* e do controlador PD com saturação do sinal de controle, na presença de ruído de medição (quantização). A figura 6.21 apresenta a comparação entre o desempenho do *SSC* (a,b) e o desempenho do controlador PD padrão (c,d) com ganhos de $k_p = 10$ e $k_d = 1$.

Em todos os caso, para estimar posição e velocidade, foi utilizado o filtro de *Kalman* (equação (6.1), com $a_L = 1$, $k_{c1} = 10.5$, $k_{c2} = 1400$). ■

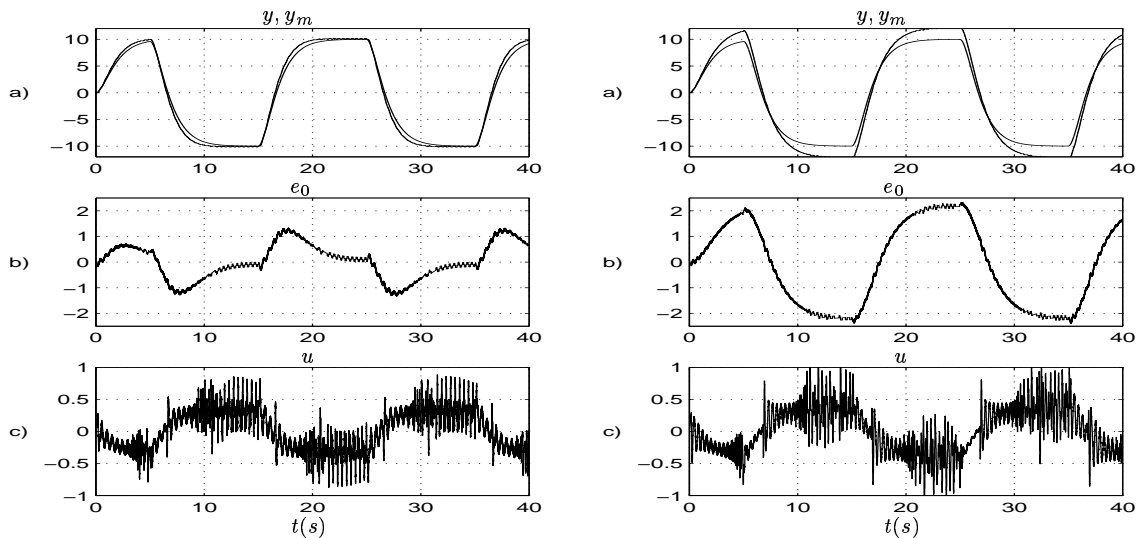


FIGURA 6.21: Resultados de simulação. a) *SSC*: y, y_m ; b) PD: y, y_m ; c) *SSC*: e_0 ; d) PD: e_0 ; e) *SSC*: u ; f) PD: u . Erro de saída e_0 em graus, sinal de controle u em p.u. e y, y_m em graus.

Capítulo 7

Resultados experimentais

Neste capítulo serão apresentados os resultados experimentais obtidos com um helicóptero com um grau de liberdade (1 *d.o.f.* - *degree of freedom*), ver figura 7.1. A estrutura mecânica consiste em uma base na qual é montado o corpo do helicóptero como é mostrado na figura 7.1. O corpo é livre para girar em torno do eixo de elevação (*pitch*). As dimensões físicas relevante estão indicadas na figura 7.1.

Os atuadores são dois motores de corrente contínua (*2342024CR*, *MicroMo Electronics, Inc.*) que acionam as suas respectiva hélices. Eles são montados no corpo do helicóptero, e geram os torques que provocam a rotação em torno do eixo de elevação (*pitch*). Os motores são controlados pela tensão de armadura utilizando-se um acionador modulado por largura de pulso (*PWM* - *1.3A/24V* - 4 quadrantes). O ângulo de elevação (*pitch*) é medido através de *encoders* ópticos incrementais (*HEDM 5500*, *HP Inc.*) com resolução de 1000 pulsos por volta ($\theta_m = 360/4000 = 0.09$ graus, $4\times$ decodificação).

Os controladores são implementados em uma placa de controle equipada com um processador de sinais digitais (*DSP*) fabricada pela *Arcs Inc.*. Esta placa (padrão *PC-ISA*) é baseada no processador *TMS320C31* e possui entradas para *encoders* assim como conversores digitais-analógicos (*D/A*) para acionar os amplificadores de potência do motores. É utilizado o ambiente *Linux*, e a transferência de dados é realizada através de dispositivos de baixo nível (*drivers*) e de uma interface desenvolvida em *Java*. Todos os algoritmos de controle são codificados em linguagem *C*, compilados em montados utilizando-se ferramentas *GNU*. O código executável é carregado para a

placa de controle (*DSP*) através da interface em *Java*.

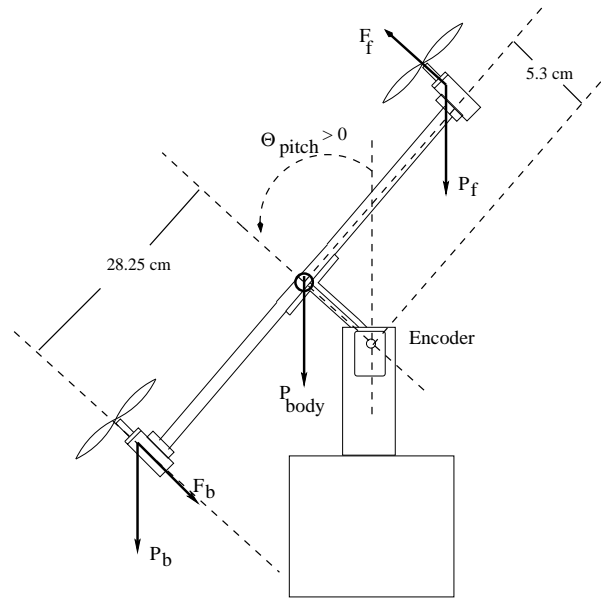


FIGURA 7.1: Helicóptero com 1 grau de liberdade (*1 d.o.f.*).

7.1 Modelagem e Identificação

Afim de se projetar o controlador suave a estrutura variável (*SSC*) e também para fins de simulação, primeiramente será obtido um modelo linear para a planta.

O sistema (o helicóptero com um grau de liberdade) é originalmente multivariável (dois atuadores), entretanto ele pode ser considerado como uma planta escalar (*SISO*) definindo uma entrada monovariável como sendo a soma dos torques gerados pelas hélices. As forças que produzem os torque são: F_f , gerada pelo motor dianteiro (*front motor*) e F_b , gerada pelo motor traseiro (*back motor*).

O sinal de controle u é dado pelo ciclo de trabalho do sinal *PWM* aplicado na armadura de ambos os motores. Os motores estão conectados ao acionador *PWM* de tal forma que um sinal de controle positivo produz empuxos (F_f e F_b) que resultam em uma rotação em um dos sentidos (define-se este como o sentido positivo, $\theta_p > 0$).

A dinâmica do helicóptero com um grau de liberdade será dividida em duas partes: a dinâmica do corpo principal (a entrada é a soma dos empuxos u_F e a saída é o ângulo de *pitch* θ_p) e a dinâmica do atuador (a entrada é o sinal de controle u e a saída é a

soma dos empuxos u_F).

1. **Dinâmica do corpo principal:** O corpo principal do helicóptero é modelado utilizando a segunda lei de *Newton* aplicada a um corpo rígido realizando um movimento plano vinculado (rotação não-baricêntrica). A equação do movimento é dada por:

$$\ddot{\theta}_p = a^2 \sin(\theta_p) + K_p^F u_F \quad (7.1)$$

onde $u_F = F_f + F_b$ e K_p^F , a são constantes positivas.

No modelo acima, considera-se que o atrito na junta é desconsiderado. Conhecendo a geometria do helicóptero e as massas das partes que o compõem, é possível determinar o momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação (ver figura 7.1) o que permite calcular K_p^F e a , resultando em:.

$$K_p^F = 11.6 \quad (7.2)$$

$$a = 3.1 \quad (7.3)$$

Linearizando o sistema em torno de $\theta_p = 0$, a seguinte função de transferência é obtida:

$$\begin{aligned} G_F(p) &= \frac{K_p^F}{(p^2 - a^2)} \\ &= \frac{11.6}{(p^2 - (3.1)^2)} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Note que a planta em malha aberta é instável em torno de $\theta_p = 0$ (pólos em -3.1 e 3.1).

2. **Dinâmica do atuador/hélice:** O sinal de controle u é proporcional ao valor médio da tensão de armadura (acionador *PWM*). O torque de carga gerado pela hélice bem como o empuxo (por exemplo, F_b) estão relacionados com a velocidade angular do motor (por exemplo, ω_b). Em (Saunders 1975) é verificado que a relação aerodinâmica entre velocidade angular (por exemplo, ω_b) e torque ou empuxo (por exemplo, F_b) pode ser aproximada pela seguinte relação **estática** $F_b = C_T \omega_b^2$, onde C_T é o coeficiente médio de empuxo que depende da geometria

da hélice. Para velocidade baixas a relação quadrática pode ser aproximada por uma relação linear. A figura 7.2 confirma esta relação onde a curva foi construída experimentalmente obtendo-se, primeiramente, a função que relaciona o sinal de controle com a velocidade angular da hélice em estado estacionário, utilizando um *encoder* acoplado ao eixo do motor. A resposta de velocidade do motor ao se aplicar um degrau no sinal de controle é basicamente um atraso de primeira ordem com constante de tempo $\tau_m = 0.22s$ como pode ser visto na figura 7.3 ((Peixoto 2000)).

Utilizando o controle em malha fechada do helicóptero, o ângulo de elevação (*pitch*) foi regulado para vários valores em regime estacionário (contralador PID). Para cada ângulo de elevação em equilíbrio $\theta_{p_{ss}}$, o sinal de controle u_{ss} correspondente, em estado estacionário, foi armazenado gerando um par $u_{ss} \times \theta_{p_{ss}}$ da figura 7.4.

Através da relação $\frac{K_p^F}{a^2} = 1.2$ determinou-se a correspondente soma de forças (u_F) em estado estacionário ($u_{F_{ss}}$) para cada ângulo de elevação em equilíbrio $\theta_{p_{ss}}$ ($u_{F_{ss}} = \frac{\theta_{p_{ss}}}{1.2}$), resultando em um par $u_{ss} \times u_{F_{ss}}$ da figura 7.5.

A relação da figura 7.5 será aproximada por um ganho constante de 0.45 e, considerando, a constante de tempo da figura 7.3, o atuador será modelado por:

$$u_F = \frac{0.45}{0.22p + 1}u \quad (7.5)$$

Por simplicidade, já que τ_m é muito pequeno, a dinâmica do motor será desprezada, sendo considerada como uma dinâmica não-modelada. Além disso, a relação quadrática da figura 7.5 será aproximada por um ganho constante de 0.45. Sendo assim, o sinal de controle será considerado estaticamente relacionado com a força gerada pela hélice.

3. **Dinâmica (modelo linear) do conjunto atuador/planta:** Desprezando o atrito na junta, linearizando a dinâmica do corpo principal em torno de $\theta_p = 0$ e considerando que o sinal de controle (u) esteja relacionado com a soma das forças geradas pelas hélices (u_F) através do sistema de 1ª ordem (7.5), o modelo

do conjunto atuador planta é dado por:

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{K_p}{(p^2 - a^2)(\tau_m p + 1)} \\ &= \frac{11.6 \times 0.45}{(p^2 - (3.1)^2)(0.22p + 1)} \end{aligned}$$

Portanto, considerando $G_m(\mu p) = \frac{1}{0.22p+1}$, $\mu = 0.22$ como dinâmica não-modelada, o helicóptero com um grau de liberdade pode ser modelado pela seguinte função de transferência:

$$G(p) = \frac{5.22}{(p^2 - (3.1)^2)} \frac{1}{(0.22p + 1)} \quad (7.6)$$

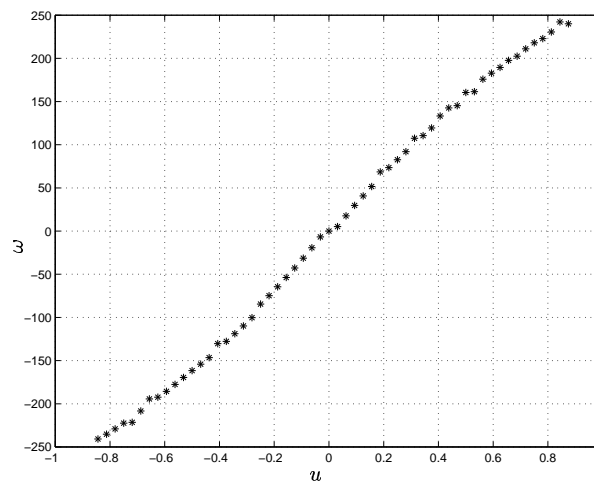


FIGURA 7.2: Relação estática entre sinal de controle u (em p.u.) e a velocidade angular ω (em rad/s). Característica do empuxo da hélice.

A figura 7.6 mostra uma comparação entre a resposta do modelo (7.6) e a resposta experimental, para uma entrada de referência. Note que as respostas estão qualitativamente similares.

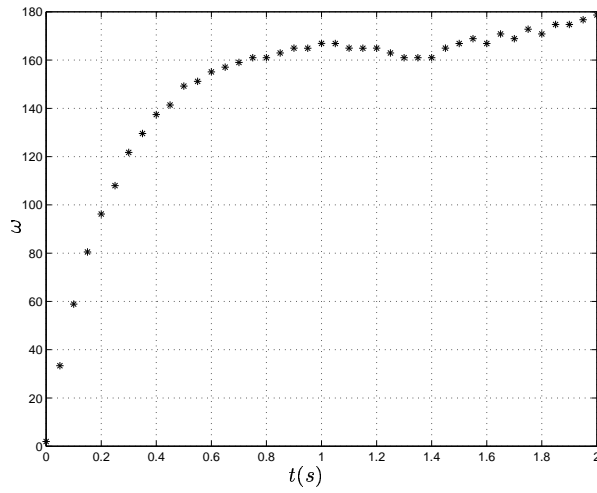


FIGURA 7.3: Resposta experimental de velocidade do motor (ω em rad/s) devido a um degrau de 0.03 p.u. no sinal de controle u (constante de tempo $\tau_m = 0.22s$).

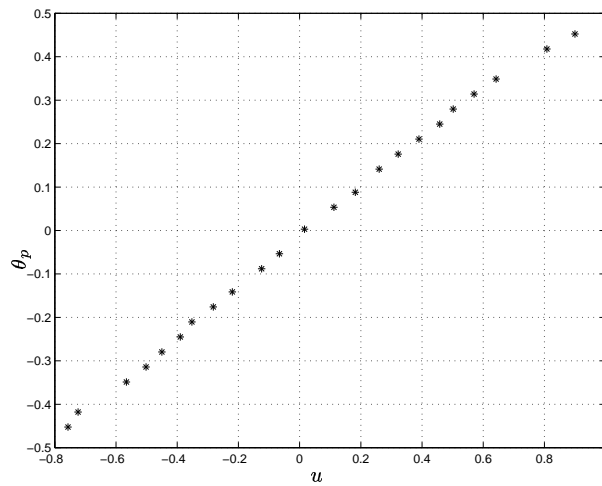


FIGURA 7.4: Relação estática entre sinal de controle u (em p.u.) e ângulo de *pitch* θ_p (em rad).

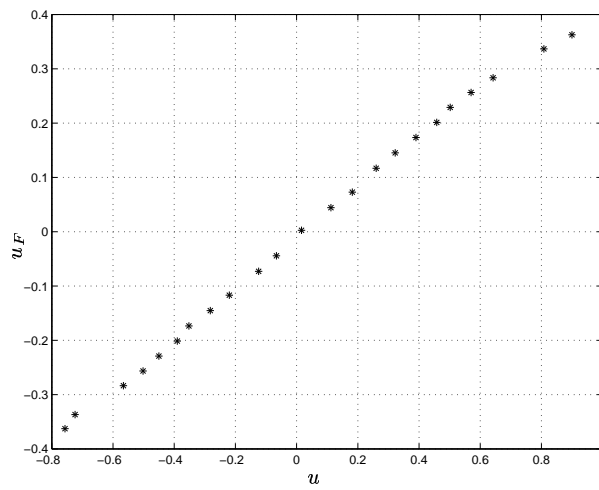


FIGURA 7.5: Relação estática entre sinal de controle u (em p.u.) e força u_F (em N), aproximada por um ganho de 0.45.

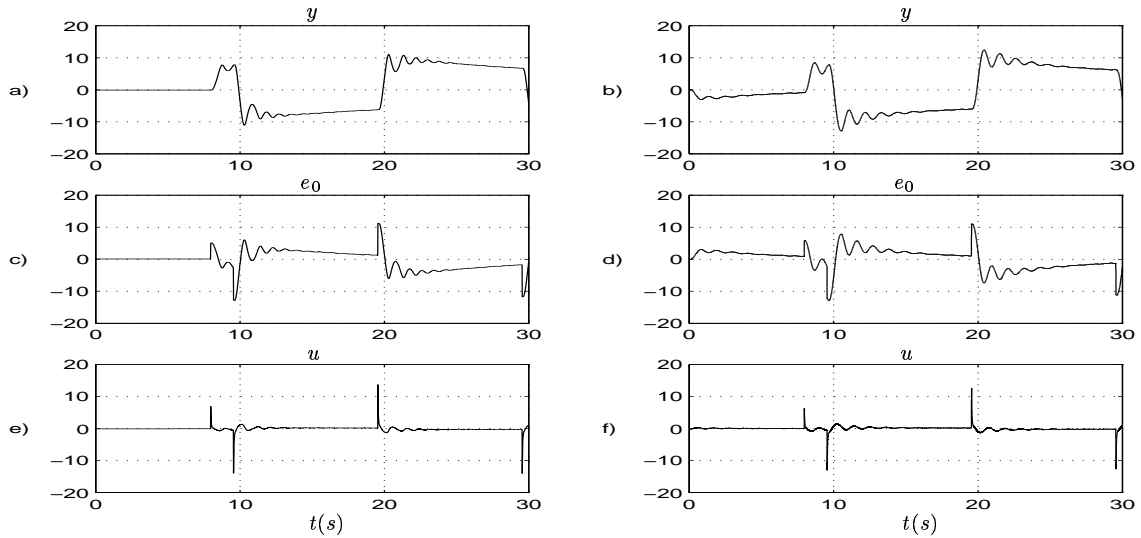


FIGURA 7.6: Validação do modelo linear $G(p) = \frac{5.22}{(p^2 - (3.1)^2)} \frac{1}{(0.22p + 1)}$ para o helicóptero com um grau de liberdade. a) EXP: y ; b) SIM: y ; c) EXP: e_0 ; d) SIM: e_0 ; e) EXP: u ; f) SIM: u . Sinal de controle u em p.u., erro de saída e_0 em graus e saída da planta y em graus.

7.2 Implementação do controlador

A versão discreta do controlador suave (*SSC*) contínuo (figura 4.5) é obtida utilizando a aproximação de *Euler* para o operador diferencial. O período de amostragem é igual a $h = 1/3500$ segundos.

Em implementações digitais, a frequência do *chattering* é limitada pela metade da frequência de amostragem, ou seja, $1/2h$. Portanto, uma constante de tempo $\tau = 1/300$ (filtro da média $F_{av}^{-1}(\tau p)$) é suficientemente pequena para gerar o controle equivalente na saída do filtro da média.

O relé do esquema *SSC* foi implementado utilizando uma função de saturação $sat(\varepsilon_0/\delta_0)$ para evitar *chattering* numérico (que não está relacionado a dinâmicas não-modeladas ou atrasos no atuador). Portanto, uma zona linear δ_0 ($= 0.007$) consideravelmente pequena, elimina este *chattering*. Em contraste, caso somente fosse utilizado o conceito de “camada de fronteira” (*boundary layer*) para atenuar *chattering* (sem a abordagem do erro de predição), δ_0 seria consideravelmente maior ($\delta_0 = 0.1$).

Para compensar o grau relativo $n^* = 2$ da planta, o operador diferencial $L(p) =$

$(p + a_L)$ será aproximado utilizando as estimativas de posição e velocidade dadas pelo filtro de *Kalman*.

De acordo com o capítulo 5 (assim como em (Bélanger 1992)), é proposto o seguinte filtro de *Kalman* discreto e estacionário (observador atualizado):

$$\hat{x}^-(k+1) = \Phi \hat{x}^-(k) + \Phi K_d (y(k) - C \hat{x}^-(k)) + \Gamma \ddot{y}_m(k) \quad (7.7)$$

onde K_d é o ganho de *Kalman*, (Φ, Γ, C) é a aproximação de *Euler* para um duplo integrador com período de amostragem h , a entrada determinística será desconsiderada $\ddot{y}_m = 0$. Além disso, $\hat{x}^-(k)$ é definido como a estimativa do estado do modelo do sinal no instante k utilizando dados até o instante anterior $k-1$. A variável \hat{x}_1 é a estimativa \hat{y} da saída medida y e \hat{x}_2 é a estimativa \hat{y} da derivada \dot{y} .

Portanto, o sinal de erro \bar{e}_0 (ver figura 4.5) é implementado da seguinte forma:

$$\bar{e}_0 = [(\hat{x}_1 - y_m)a_L + (\hat{x}_2 - \dot{y}_m)] \quad (7.8)$$

O modelo de referência é escolhido de tal forma que a frequência de corte de sua banda passante esteja 2 oitavas abaixo do modo mais lento do atuador (figura 7.3).

7.3 Resultados experimentais

O exemplo a seguir apresenta os resultados experimentais do controlador *SSC* utilizando o filtro de 1ª ordem para implementar a aproximação $L(p)/F(\tau_F p)$ do operador $L(p)$. Este experimento deve ser comparado com a simulação equivalente dada no exemplo 6.6 do capítulo 6.

Exemplo 7.1 (*SSC* ($n^* = 2$) - compensação do grau relativo) *Neste experimento, o helicóptero com 1 d.o.f está sendo controlado pelo controlador suave SSC da figura 4.5. O operador diferencial $L(p) = (p + a_L)$, para compensar o grau relativo é aproximado por:*

$$\mathcal{L} = \left[\frac{p}{\tau_F p + 1} + a_L \right] \quad (7.9)$$

onde $a_L = 1, \tau_F = 1/100$. O relé é implementado com uma insignificante zona linear $\delta_0 = 10^{-5}$ e $f = 1$. Os parâmetros do controlador encontram-se na tabela 7.1. A figura 7.7 mostra o desempenho do sistema. ■

TABELA 7.1: Parâmetros do controlador SSC com filtro lead.

Elemento	Equação	Valor
Modelo de referência	$M(p) = \frac{K_m}{(p+a_m)^2}$	$a_m = 1$ e $K_m = 1$
Sinal de referência	$r(t) = A \text{sqw}(t/T)$	$A = \pi/18, T = 20$
Controlador suave (SSC)		
Preditor	$k^{nom} ML = \frac{k^{nom} a_m^2}{(p+a_m)}$	$k^{nom} = 40$
Filtro da média	$F_{av}^{-1} = \frac{1}{\tau p + 1}$	$\tau = 1/300$
Aproximação de $L(p)$	equação (7.9)	$\tau_F = 1/100$ e $a_L = 1$
Relé	$U_0 = f \text{sat}(\varepsilon_0/\delta_0)$	$f = 1$ e zona linear $\delta_0 = 10^{-5}$

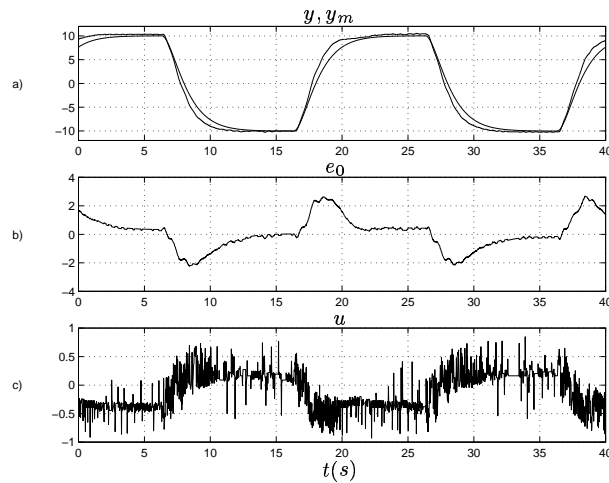


FIGURA 7.7: Exemplo 7.1. Resultados experimentais do controlador (SSC) para $n^* = 2$. a) y e y_m em graus, b) erro de saída e_0 em graus, c) sinal de controle u em p.u.

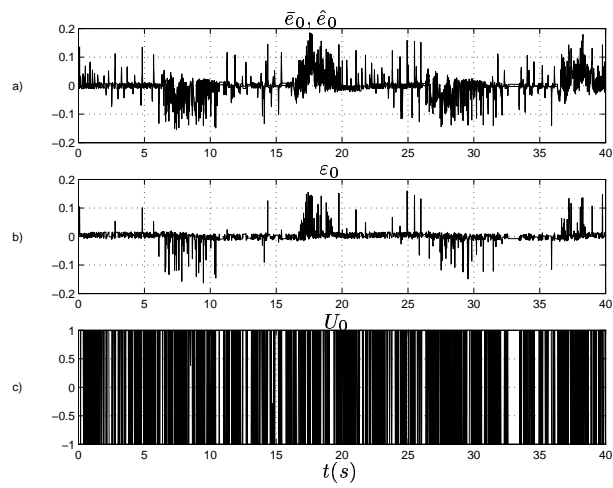


FIGURA 7.8: *Exemplo 7.1. Erros auxiliares. Resultados experimentais do controlador (SSC) para $n^* = 2$. a) $\bar{\epsilon}_0$ e $\hat{\epsilon}_0$ em graus, b) erro na predição ϵ_0 em graus, c) saída U_0 do relé em p.u..*

Afim de comparar os resultados simulados apresentados no exemplo 6.7 do capítulo 6, no exemplo a seguir encontram-se os resultados experimentais do controlador *SSC* utilizando o filtro de *Kalman* para implementar a aproximação $L(p)/F(p)$ do operador $L(p)$.

Exemplo 7.2 (*SSC* ($n^* = 2$) - filtro de *Kalman*) *Nas mesmas condições que o exemplo 7.1, neste experimento, o operador diferencial $L(p) = (p + a_L)$, para compensar o grau relativo é aproximado por:*

$$\mathcal{L} = \frac{p}{\frac{1}{k_{c_2}}p^2 + \frac{k_{c_1}}{k_{c_2}}p + 1} + a_L \frac{\frac{k_{c_1}}{k_{c_2}}p + 1}{\frac{1}{k_{c_2}}p^2 + \frac{k_{c_1}}{k_{c_2}}p + 1}$$

onde $a_L = 1, k_{c_1} = 10.5, k_{c_2} = 1400$.

O relé é implementado com uma insignificante zona linear $\delta_0 = 10^{-5}$ e $f = 1$. Os parâmetros do controlador encontram-se na tabela 7.2. As figuras 7.9 e 7.10 mostram o desempenho do sistema. ■

TABELA 7.2: Parâmetros do controlador *SSC* com filtro de *Kalman*.

Elemento	Equação	Valor
Modelo de referência	$M(p) = \frac{K_m}{(p+a_m)^2}$	$a_m = 1$ e $K_m = 1$
Sinal de referência	$r(t) = A \sin(\omega t)$	$A = \pi/18, \omega = \frac{\pi}{10}$
Controlador suave (<i>SSC</i>)		
Preditor	$k^{nom} ML = \frac{k^{nom} a_m^2}{(p+a_m)}$	$k^{nom} = 40$
Filtro da média	$F_{av}^{-1} = \frac{1}{\tau p + 1}$	$\tau = 1/300$
Aproximação de $L(p)$	equação (7.10)	$a_L = 1, k_{c_1} = 10.5$ e $k_{c_2} = 1400$
Relé	$U_0 = f \text{sat}(\varepsilon_0/\delta_0)$	$f = 1$ e zona linear $\delta_0 = 10^{-5}$

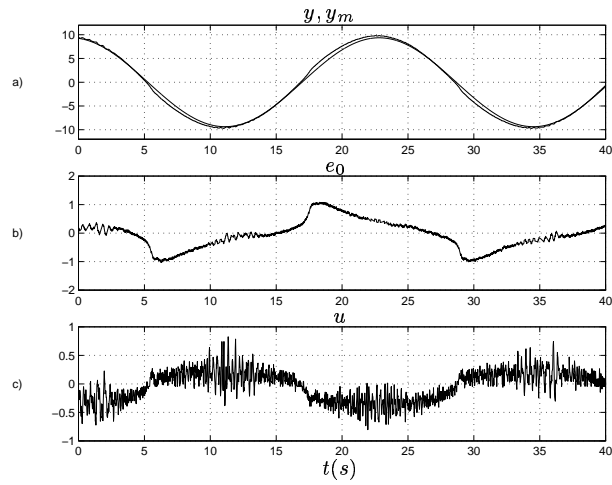


FIGURA 7.9: *Exemplo 7.2. Resultados experimentais do controlador (SSC) utilizando filtro de Kalman para atenuar o ruído de quantização. a) y e y_m em graus, b) erro de saída e_0 em graus, c) sinal de controle u em p.u.*

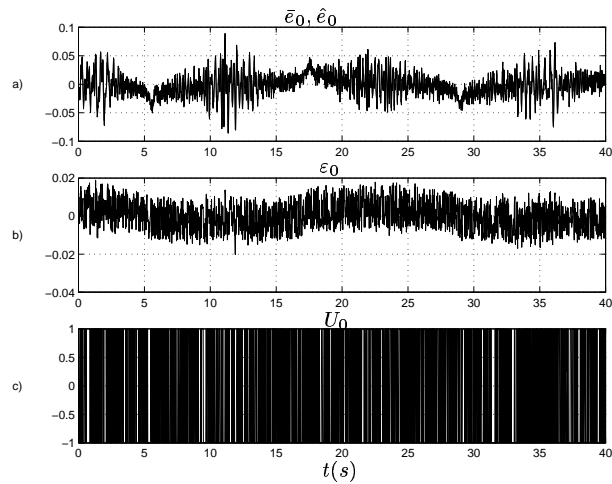


FIGURA 7.10: *Erros auxiliares (exemplo 7.2). Resultados experimentais do controlador (SSC) utilizando filtro de Kalman para atenuar o ruído de quantização. a) \bar{e}_0 e \hat{e}_0 , b) erro na predição ε_0 , c) saída U_0 do relé em p.u..*

7.3.1 Comparações

Assim como foi feito no capítulo 6 (exemplo 6.8), o exemplo a seguir apresenta o desempenho do sistema em malha fechada durante o rastreamento de uma onda quadrada, utilizando um filtro de 1ª ordem em comparação com o desempenho ao se utilizar o filtro de *Kalman*, para implementar a aproximação do operador $L(p)$.

Exemplo 7.3 (*SSC* ($n^* = 2$) - filtro de *Kalman* \times filtro de 1ª ordem) Na figura 7.11, é apresentada a melhora no desempenho conseguida com a utilização do filtro de *Kalman* para estimar a velocidade. O filtro de *Kalman*, figuras 7.11 (a,c,e), com equivalente contínuo dado por $\hat{y} = \frac{p}{1400p^2 + \frac{10.5}{1400}p + 1}y$ e $\hat{y} = \frac{p}{1400p^2 + \frac{10.5}{1400}p + 1}y$, é substituído pela derivada “suja” ($\hat{y} = \frac{p}{p/80+1}y$), figuras 7.11 (b,d,f), no esquema do controlador suave (*SSC*). A figuras 7.11 ilustra a degradação do desempenho após tal mudança. Todos os parâmetros do controlador estão resumidos na tabela 7.3. ■

TABELA 7.3: Parâmetros do controlador *SSC*.

Elemento	Equação	Valor
Modelo de referência	$M(p) = \frac{K_m}{(p+a_m)^2}$	$a_m = 1$ e $K_m = 1$
Sinal de referência	$r(t) = A \sin(\omega t)$	$A = \pi/18, \omega = \frac{\pi}{10}$
Controlador suave (<i>SSC</i>)		
Preditor	$k^{nom} ML = \frac{k^{nom} a_m^2}{(p+a_m)}$	$k^{nom} = 40$
Filtro da média	$F_{av}^{-1} = \frac{1}{\tau p + 1}$	$\tau = 1/300$
Aproximação de $L(p)$	equação (7.9) ou (7.10)	$a_L = 1, k_{c_1} = 10.5, k_{c_2} = 1400$ e $\tau_F = 1/100$
Relé	$U_0 = f \text{sat}(\varepsilon_0/\delta_0)$	$f = 1$ e zona linear $\delta_0 = 10^{-5}$

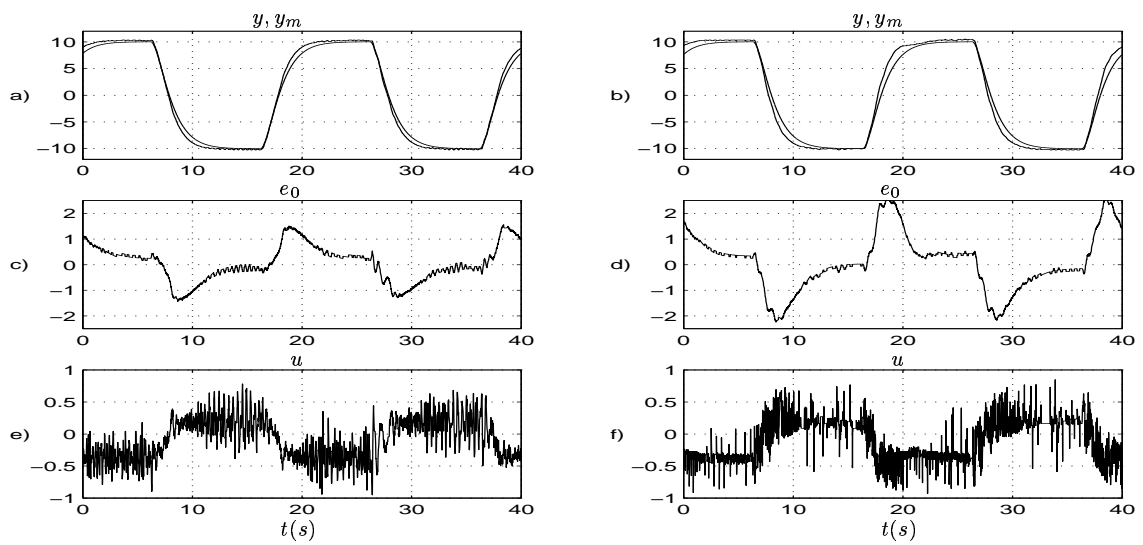


FIGURA 7.11: Controlador SSC (exemplo 7.3) utilizando um filtro de 1ª ordem (b,d,f) para atenuar ruído de quantização em comparação com o filtro de Kalman (a,c,e). a) e b) y e y_m em graus, c) e d) erro de saída e_0 em graus, e) e f) sinal de controle u em p.u.

Exemplo 7.4 ($SSC (n^* = 2) - VSC \times SSC$) Nas mesmas condições que no exemplo anterior, para ilustrar a significativa melhora no desempenho obtido com o controlador proposto, em fig. 7.12 a malha de predição é removida. Note que sem o malha de predição, o controlador suave a estrutura variável (SSC) torna-se um controlador a estrutura variável padrão (VSC) que nada mais é, neste caso, que um controlador PD de alto ganho com saturação ((Glatzl et al. 1993)). O desempenho do controlador VSC padrão é drasticamente deteriorado devido ao fenômeno de chattering. Para eliminar o chattering a zona linear δ_0 deve ser aumentada. Entretanto, isto resulta em um aumento do erro de rastreamento. Em todos os caso, para estimar posição e velocidade, foi utilizado o filtro de 1ª ordem ($\tau_F = 1/100$). ■

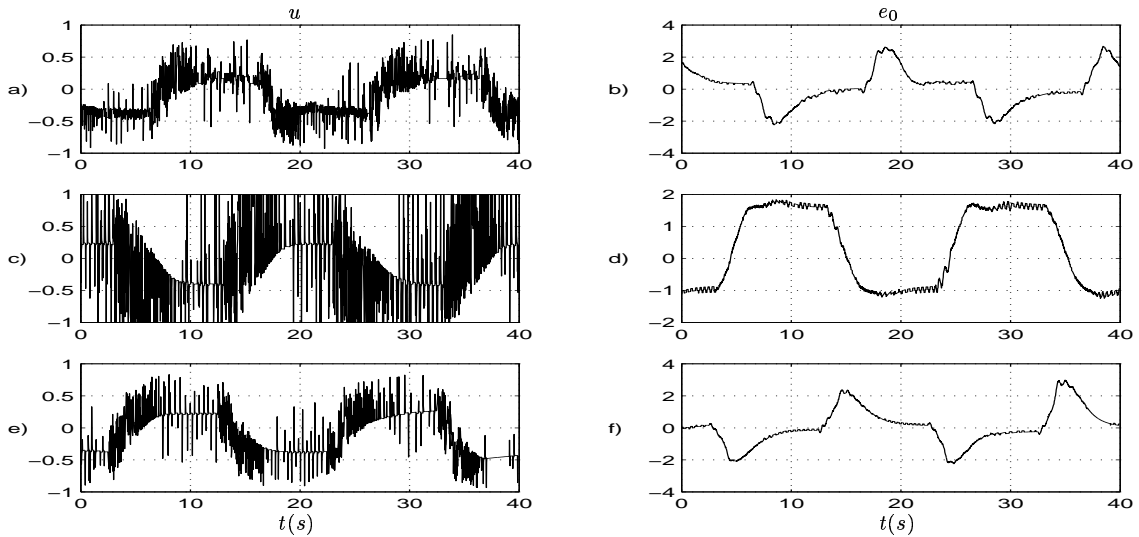


FIGURA 7.12: Resultados experimentais. a) $SSC - \delta_0 = 10^{-5}$: u ; b) $SSC - \delta_0 = 10^{-5}$: e_0 ; c) $VSC - \delta_0 = 0.07$: u ; d) $VSC - \delta_0 = 0.07$: e_0 ; e) $SSC - \delta_0 = 0.007$: u ; f) $SSC - \delta_0 = 0.007$: e_0 . Erro de saída e_0 em graus, sinal de controle u em p.u. e sinal de referência $r(t) = 0.17 \text{ sqw}(t/20)$.

Exemplo 7.5 (*SSC* ($n^* = 2$) - *PD* \times *SSC*) As figuras 7.13 (a,c,d) mostram os resultados experimentais utilizando o controlador suave proposto (*SSC*). Pode ser observado que o desempenho é satisfatório. O valor máximo do erro é menor do que 0.5 graus, o que consideravelmente melhor do que o erro que se obtém com o controlador clássico proporcional derivativo (*PD*), ver figuras 7.13 (b,d,f). Para garantir uma comparação justa, o controlador *PD* foi cuidadosamente sintonizado afim de se obter o seu melhor desempenho.

Em todos os caso, para estimar posição e velocidade, foi utilizado o filtro de Kalman (equação (6.1), com $a_L = 1, k_{c1} = 10.5, k_{c2} = 1400$). Todos os parâmetros do controlador estão resumidos na tabela 7.4. ■

TABELA 7.4: Parâmetros dos controladores *SSC* e *PD*.

Elemento	Equação	Valor
Modelo de referência	$M(p) = \frac{K_m}{(p+a_m)^2}$	$a_m = 1$ e $K_m = 1$
Sinal de referência	$r(t) = A \text{sqw}(t/T)$	$A = 0.1745, T = 20$
Controlador suave (<i>SSC</i>)		
Preditor	$k^{nom} M L = \frac{k^{nom} a_m^2}{(p+a_m)}$	$k^{nom} = 40$
Filtro da média	$F_{av}^{-1} = \frac{1}{\tau p + 1}$	$\tau = 1/300$
Aproximação de $L(p)$	equações (7.7)–(7.8)	$K = [0.003 \quad 0.4]^T$ e $a_L = 1$
Relé	$U_0 = f \text{sat}(\varepsilon_0/\delta_0)$	$f = 1$ e zona linear $\delta_0 = 0.007$
Controlador <i>PD</i>		
Saída do contr. <i>PD</i>	$u = k_p[(\hat{y} - y_m) + k_d(\hat{y} - \dot{y}_m)]$	$k_p = 12$ e $k_d = 0.5$

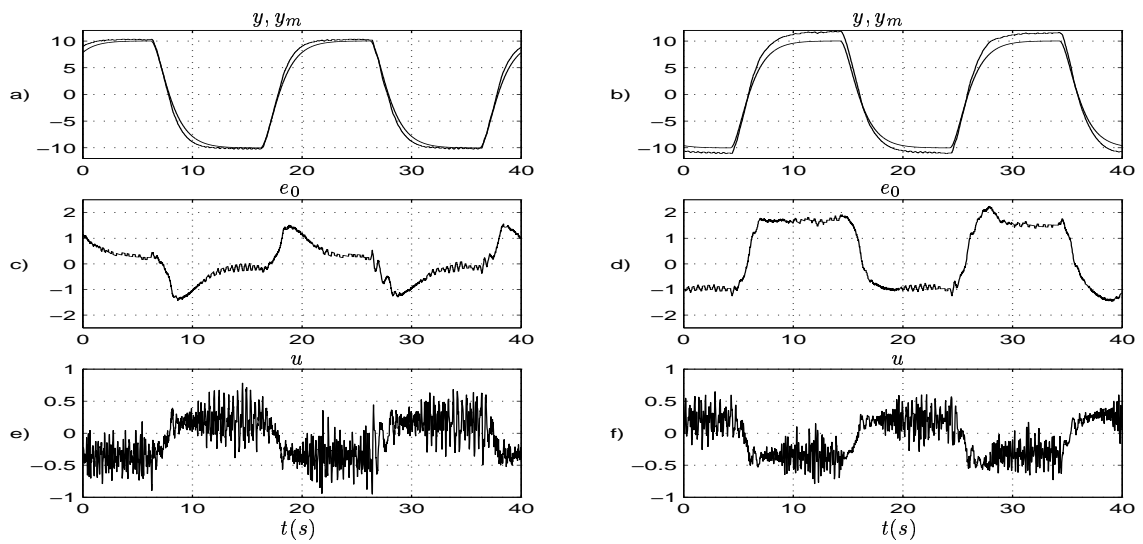


FIGURA 7.13: Exemplo 7.5. Resultados experimentais. a) SSC: y, y_m ; b) PD: y, y_m ; c) SSC: e_0 ; d) PD: e_0 ; e) SSC: u ; f) PD: u . Erro de saída e_0 em graus, sinal de controle u em p.u. e y, y_m em graus.

Capítulo 8

Discussão e Conclusões Gerais

Este trabalho apresentou o controlador suave a estrutura variável (*SSC*), que é uma versão, com sinal de controle suave, do controlador *VS-MRAC* (ver (Hsu 1990)). Foi realizada a análise completa de estabilidade do controlador *SSC*, considerando perturbação de entrada e dinâmica não-modelada, para plantas lineares desconhecidas com grau relativo arbitrário, além de considerar aspectos de implementação prática.

O *SSC* apresentou um bom desempenho em condições experimentais sendo melhor do que os controladores lineares e a estrutura variável (*VSC*) padrões. O novo controlador, ao contrário dos controladores *VSC* apresenta um bom desempenho no rastreamento ao mesmo tempo que gera um sinal de controle suave, livre de *chattering*.

A contribuição principal deste trabalho foi avaliar a aplicabilidade do controlador *SSC* em condições reais. A dificuldade encontrada na implementação do *SSC* é descobrir uma forma eficiente de atenuar ruído de medição, em particular, a quantização dos sinais medidos. Acredita-se que o mesmo ocorra em aplicações com controladores PD de alto ganho, bem como, em controladores por modos deslizantes. A solução adotada foi a utilização de um filtro de *Kalman* apropriado para estimar o sinal e a sua derivada.

Os resultados obtidos através de simulações e o resultados experimentais confirmam o desempenho satisfatório do controlador *SSC* quando o filtro de *Kalman* é utilizado e uma degradação do desempenho caso contrário.

Seguem algumas sugestões para trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.

1. Analisar a teoria de sistemas a estrutura variável no campo discreto, visando a implementação digital do controlador com taxas de amostragem mais restritivas.

2. Avaliar a influência das escolhas de $L(p)$ e do modelo de referência $M(p)$ no desempenho do controlador, e.g. utilizando técnicas de *Loop shapping*.
3. Extensão do *SSC* para sistemas multivariáveis.
4. Avaliar a utilização de modos deslizantes de ordem superior na estimação de velocidade e na eliminação de *chattering*.

Apêndice A

Desenvolvimento da equação do erro de saída do *MRAC*

A equação do erro de saída (ou erro de rastreamento) e_0 foi desenvolvida no capítulo 3 utilizando uma abordagem de entrada e saída. Este apêndice apresenta o desenvolvimento da equação do erro e_0 utilizando uma abordagem em espaço de estados que será útil para analisar a estabilidade do controlador *SSC*. Em seguida será verificado a equivalência entre estas duas abordagens.

A.1 Abordagem: espaço de estados

Seja (A_p, b_p, h_p) uma realização mínima da planta $K_p N_p(p)/D_p(p)$ apresentada em (3.1) com a seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_p x + b_p u + b_p d_e \\ y &= h_p^T x\end{aligned}\tag{A.1}$$

Considere a parametrização do sinal de controle apresentada na seção 3.4, ou seja:

$$u(t) = \theta^T \omega(t)$$

onde

$$\begin{aligned}\omega^T(t) &= [v_1^T \quad y \quad v_2^T \quad r] \\ \theta^T(t) &= [\theta_{v_1}^T(t) \quad \theta_n(t) \quad \theta_{v_2}^T(t) \quad \theta_{2n}(t)] \\ \theta^{*T}(t) &= [\theta_{v_1}^{*T}(t) \quad \theta_n^*(t) \quad \theta_{v_2}^{*T}(t) \quad \theta_{2n}^*(t)]\end{aligned}$$

sendo v_1 e v_2 os vetores de estado da seguinte realização (mínima) dos filtros de entrada e saída G_1 e G_2 , respectivamente:

$$\begin{aligned}\dot{v}_1 &= \Lambda v_1 + gu \\ \dot{v}_2 &= \Lambda v_2 + gy\end{aligned}$$

Definindo o vetor de estado $X^T := [x^T \quad v_1^T \quad v_2^T]$ do sistema formado pelos filtros de entrada e saída e a planta, determina-se a seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \underbrace{\begin{pmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ gh_p^T & 0 & \Lambda \end{pmatrix}}_{A_0} X + \underbrace{\begin{pmatrix} b_p \\ g \\ 0 \end{pmatrix}}_{b_0} u + \underbrace{\begin{pmatrix} b_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b'_0} d_e \\ &= A_0 X + b_0 u + b'_0 d_e\end{aligned}\tag{A.2}$$

O vetor regressor ω pode ser escrito em função do vetor de estados X da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\omega &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h_p^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Omega} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r \\ &= \Omega X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r\end{aligned}$$

Multiplicando a relação acima pelo vetor de parâmetros ideais, obtém-se a seguinte expressão para o controle ideal u^* :

$$\begin{aligned} u^* &= \theta^{*T} \omega \\ &= \theta^{*T} \Omega X + \theta_{2n}^* r \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $b_0 u^*$ na equação (A.2) tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \underbrace{[A_0 + b_0 \theta^{*T} \Omega]}_{A_c} X + \underbrace{(b_0 \theta_{2n}^*)}_{b_c} r + \underbrace{(b_0 \theta_{2n}^*)}_{b_c} \left(\frac{1}{\theta_{2n}^*}\right) [u - u^*] + b'_0 d_e \\ y &= \underbrace{[h_p^T \quad 0 \quad 0]}_{h_c^T} X \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

O sistema em malha fechada passa a ser representado por:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A_c X + b_c r + b_c \left(\frac{1}{\theta_{2n}^*}\right) [u - u^*] + b'_0 d_e \\ y &= h_c^T X \end{aligned}$$

Note que, pela definição de controle ideal ($u = u^*$ e perturbação nula $d_e = 0$), a transferência de r para y deve ser igual a M . Portanto, (A_c, b_c, h_c) é uma realização, possivelmente não-mínima, da transferência M do modelo de referência. Sendo assim o modelo e sua saída podem ser representados por:

$$\begin{aligned} \dot{X}_m &= A_c X_m + b_c r \\ y_m &= h_c^T X_m \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Definindo $x_{e_0} := X - X_m$ a equação do erro de saída e_0 é dada por:

$$\dot{x}_{e_0} = A_c x_{e_0} + b_c \left(\frac{1}{\theta_{2n}^*}\right) [u - u^*] + b'_0 d_e \quad (\text{A.5})$$

$$e_0 = h_c^T x_{e_0} \quad (\text{A.6})$$

Note que os ganhos de alta frequência do modelo e da planta são dados por: $K_m = h_c^T b_c$ e $K_p = h_p^T b_p$, respectivamente. Observando que $h_c^T b_c = \theta_{2n}^* h_p^T b_p$ e lembrando que

$k^* = K_p/K_m$ tem-se que:

$$\theta_{2n}^* = \frac{1}{k^*}$$

A equação do erro de saída pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{e_0} &= A_c x_{e_0} + b_c k^* [u - u^*] + b_0' d_e \\ e_0 &= h_c^T x_{e_0}\end{aligned}$$

Finalmente, definindo $\bar{W}_d := h_c^T (pI - A_c)^{-1} b_0'$ como sendo a transferência entre a perturbação d_e e o erro de rastreamento e_0 , com $u = u^*$, e $W_d := (k^* M)^{-1} \bar{W}_d$, tem-se que:

$$e_0 = k^* M (u - u^* + W_d d_e) \tag{A.7}$$

$$= k^* M (u - u^*) + \bar{W}_d d_e \tag{A.8}$$

A.2 Equivalência entre as abordagens

De acordo com a parametrização do controle $u = \theta^T \omega$ e lembrando que o filtro de entrada G_1 é estritamente próprio enquanto que o filtro de saída G_2 é próprio, tem-se que:

$$\begin{aligned}G_1(p) &= \theta_{v_1}^T (pI - \Lambda)^{-1} g \\ G_2(p) &= \theta_{v_2}^T (pI - \Lambda)^{-1} g + \theta_n\end{aligned} \tag{A.9}$$

Para que as duas abordagens aplicadas no desenvolvimento da equação do erro sejam equivalentes a definição de W_d apresentada no capítulo 3 deve ser coerente com a definição apresentada na seção A.1. Para isso basta demonstrar a seguinte igualdade:

$$h_c^T (pI - A_c)^{-1} b_0' = k^* M (1 - G_1^*)$$

onde, pela equação (A.3), tem-se:

$$A_c = [A_0 + b_0 \theta^{*T} \Omega] = \begin{bmatrix} (A_p + b_p \theta_n^* h_p^T) & b_p \theta_{v_1}^{*T} & b_p \theta_{v_2}^{*T} \\ g \theta_n^* h_p^T & (\Lambda + g \theta_{v_1}^{*T}) & g \theta_{v_2}^{*T} \\ g h_p^T & 0 & \Lambda \end{bmatrix},$$

$$b_c = \frac{1}{k^*} b_0 = \frac{1}{k^*} \begin{bmatrix} b_p \\ g \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b'_0 = \begin{bmatrix} b_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad h_c^T = [h_p^T \quad 0 \quad 0] \quad (\text{A.10})$$

Seja R , S e T matrizes com dimensões apropriadas tais que:

$$(pI - A_c)^{-1} = \begin{bmatrix} R_{n \times n} & \cdots & \cdots \\ S_{(n-1) \times n} & \cdots & \cdots \\ T_{(n-1) \times n} & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Parte I

Desta forma \bar{W}_d é dado por:

$$\begin{aligned} \bar{W}_d &= h_c^T (pI - A_c)^{-1} b'_0 \\ &= [h_p^T \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} R_{n \times n} & \cdots & \cdots \\ S_{(n-1) \times n} & \cdots & \cdots \\ T_{(n-1) \times n} & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= h_p^T R b_p \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Parte II

Por outro lado, $(pI - A_c)(pI - A_c)^{-1} = I_{(3n-2)}$, que pode ser representado da seguinte forma:

$$(pI - A_c) \begin{bmatrix} R_{n \times n} & \cdots & \cdots \\ S_{(n-1) \times n} & \cdots & \cdots \\ T_{(n-1) \times n} & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & \cdots & \cdots \\ 0_{(n-1) \times n} & \cdots & \cdots \\ 0_{(n-1) \times n} & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Utilizando a expressão de A_c (equação (A.3)), tem-se que:

$$\begin{aligned} (pI_n - A_p)R - b_p \underbrace{(\theta_n^* h_p^T R + \theta_{v_1}^{*T} S + \theta_{v_2}^{*T} T)}_L &= I_n \\ (pI_{n-1} - \Lambda)S - g \underbrace{(\theta_n^* h_p^T R + \theta_{v_1}^{*T} S + \theta_{v_2}^{*T} T)}_L &= 0_{(n-1) \times n} \\ \theta_n^* [(pI_{n-1} - \Lambda)T - gh_p^T R] &= 0_{(n-1) \times n} \end{aligned}$$

Definindo $L := \theta_n^* h_p^T R + \theta_{v_1}^{*T} S + \theta_{v_2}^{*T} T$ as equações acima podem ser reescritas na seguinte forma mais compacta:

$$\begin{aligned} R &= (pI_n - A_p)^{-1} b_p L + (pI_n - A_p)^{-1} \\ S &= (pI_{n-1} - \Lambda)^{-1} g L \\ T &= (pI_{n-1} - \Lambda)^{-1} g h_p^T R \end{aligned} \tag{A.13}$$

Note que, utilizando a equação (A.9), tem-se:

$$\begin{aligned} \theta_n^* h_p^T R &= \theta_n^* h_p^T (pI_n - A_p)^{-1} b_p L + \theta_n^* h_p^T (pI_n - A_p)^{-1} \\ &= \theta_n^* (GL + h_p^T (pI_n - A_p)^{-1}) \\ \theta_{v_1}^{*T} S &= \theta_{v_1}^{*T} (pI_{n-1} - \Lambda)^{-1} g L \\ &= G_1^* L \\ \theta_{v_2}^{*T} T &= \theta_{v_2}^{*T} (pI_{n-1} - \Lambda)^{-1} g h_p^T R \\ &= (G_2^* - \theta_n^*) h_p^T R \end{aligned} \tag{A.14}$$

Portanto, L pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$L = \frac{G_2^*}{1 - G_1^*} h_p^T R \tag{A.15}$$

Substituindo (A.15) em (A.13) e multiplicando pela direita ambos os membros por b_p , tem-se:

$$h_p^T R b_p = \underbrace{\left[\frac{G}{1 - G_1^* - GG_2^*} \right]}_{k^* M} (1 - G_1^*)$$

Lembrando da equação de casamento perfeito entre a malha fechada e o modelo de referência a equação acima pode ser escrita como:

$$h_p^T R b_p = k^* M (1 - G_1^*)$$

Com isso e utilizando a equação (A.12) a equivalência entre as abordagens utilizadas no desenvolvimento da equação do erro é verificada, pois:

$$\begin{aligned} \bar{W}_d &= k^* M \underbrace{(1 - G_1^*)}_{W_d} \\ &= k^* M W_d \end{aligned} \tag{A.16}$$

Apêndice B

Controlador suave a estrutura variável *SSC*

B.1 Demonstração da Proposição 1

De acordo com a hipótese 7, é sempre possível escolher constantes M_θ, M_r tais que

$$\sup_t |U_0(t)| \leq C(t)$$

Então, de (4.10), tem-se

$$\sup_t |\hat{e}_0(t) - \hat{e}_0^0(t)| \leq \underbrace{\left\| k^{nom} M \frac{F_{av} - 1}{F_{av}} \right\|}_{O(\tau)} C(t) = \tau K_{\hat{e}_0} C(t) \quad (\text{B.1})$$

onde $\hat{e}_0^0(t)$ é limitado por EXP^0 , o que leva a concluir que $\sup_t |\hat{e}_0(t)| \leq \tau K_{\hat{e}_0} C(t) + EXP^0$. Agora, se $f(t) \geq |U_d|$, aplicando o Lema 4.1 na equação do erro (4.11), a proposição é demonstrada (verifica-se que é válido o limitante de ε_0).

B.2 Demonstração do Teorema 4.1

A equação do erro (4.4) pode ser reescrita das seguintes formas:

$$\text{Espaço de estados: } \dot{x}_{e_0} = A_c x_{e_0} + k^{nom} b_c [-(U_0^{av} + \bar{U})]$$

$$e_0 = h_c^T x_{e_0}; \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Entrada e saída: } e_0 = k^{nom} M(p) [-(U_0^{av} + \bar{U})] \quad (\text{B.3})$$

onde

$$\bar{U} = \kappa U_0^{av} + \rho U_d; \quad (\text{B.4})$$

É conveniente reescrever (4.11) como

$$\varepsilon_0 = k^{nom} M(p) [-(U_0^{av} + \bar{U})] - \hat{e}_0 \quad (\text{B.5})$$

onde \hat{e}_0 é definido em (4.10).

Note que, em (B.3) e (B.5), $M(p)$ opera sobre a mesma entrada, o modelo do erro de rastreamento pode ser reescrito como:

$$\dot{x}_{e_0} = A_c x_{e_0} + b_c/K_m [\dot{\hat{\varepsilon}} + a_m \hat{\varepsilon}] \quad (\text{B.6})$$

onde $\hat{\varepsilon} := \varepsilon_0 + \hat{e}_0$, Então, afim de eliminar o termo derivativo $\dot{\hat{\varepsilon}}$, será realizada a transformação de variável $x_{\hat{\varepsilon}} := x_{e_0} - b_c/K_m \hat{\varepsilon}$ que resulta em

$$\dot{x}_{\hat{\varepsilon}} = A_c x_{\hat{\varepsilon}} + (A_c + I a_m) \frac{b_c}{K_m} \hat{\varepsilon} \quad (\text{B.7})$$

Se $f \geq |U_d|$, pela proposição 1, ε_0 é limitado por (4.12). Então, desde que A_c seja *Hurwitz*, tem-se que $x_{\hat{\varepsilon}}(t)$ é limitado por $\|x_{\hat{\varepsilon}}(t)\| \leq \tau \bar{K} C(t) + \text{EXP}$. Além disso,

$$\|x_{e_0}(t)\| \leq \tau K_e C(t) + \text{EXP} \quad (\text{B.8})$$

$$C_1(t) \leq \tau K_1 C(t) + K_2 \|z(0)\| + K_{\omega_m} \quad (\text{B.9})$$

$$C(t) \leq \frac{K'_{red} + K_4 \|z(0)\|}{1 - \tau K_3} \quad (\text{B.10})$$

De fato, a desigualdade (B.8) é verificada a partir de $x_{\hat{\varepsilon}} = x_{e_0} - b_c/K_m \hat{\varepsilon}$. Da relação $\omega = \omega_m + \Omega x_{e_0}$, onde $\omega_m^T = [v_{m1}^T \ y_m \ v_{m2}^T \ r]$ é o vetor regressor correspondente ao modelo de referência e Ω é uma matriz constante, segue que $\|\omega\| \leq K_{\omega_m} + K_{\Omega} \|x_{e_0}\|$ e, desde que $C_1(t) = \sup_t \|\omega(t)\|$, então de (B.8) obtem-se (B.9), onde $K_2 \|z(0)\|$ resulta do valor inicial do termo EXP que aparece no limitante (B.8) de $\|x_{e_0}\|$. Agora, de (4.13) e

(B.9), $C(t)$ pode, também, ser limitado por $C(t) \leq \tau K_3 C(t) + K_4 \|z(0)\| + K'_{red}$, através do que, após uma simples manipulação algébrica obtem-se (B.10), que é válida para $\tau < K_3^{-1}$. Também pode-se encrever que:

$$\|z^0(t)\| \leq K_z e^{-a_z t} \|z^0(0)\| \quad (\text{B.11})$$

$$\|z_e(t)\| \leq \tau K_5 \left(\|z_e(0)\| + \|z^0(0)\| \right) + O(\tau) + \text{EXP} \quad (\text{B.12})$$

De fato, z^0 é limitado por EXP^0 , onde somente as condições iniciais de z^0 aparecem. Agora, de (4.13), (B.8) e (B.10) segue (B.12), onde $O(\tau)$ é independente das condições iniciais.

Percebendo que o tempo inicial é irrelevante no desenvolvimento das expressões acima, pode-se escrever que, para arbitrários $t \geq t_0 \geq 0$, algum $T_1 > 0$ e $\lambda < 1$,

$$\|z_e(t)\| \leq \left[\tau K_5 + K_6 e^{-a(t-t_0)} \right] \left[\|z_e(t_0)\| + \|z^0(t_0)\| \right] + O(\tau) \quad (\text{B.13})$$

$$\|z^0(t)\| \leq K_z e^{-a_z(t-t_0)} \|z^0(t_0)\| \quad (\text{B.14})$$

$$\|z_e(t_0 + T_1)\| \leq \lambda \left(\|z_e(t_0)\| + \|z^0(t_0)\| \right) + O(\tau) \quad (\text{B.15})$$

$$\|z^0(t_0 + T_1)\| \leq \lambda \|z^0(t_0)\| \quad (\text{B.16})$$

Equações (B.15) e (B.16) são obtidas de (B.13) e (B.14) da seguinte maneira: para $\tau < K_5^{-1}$, existe $T_1 > 0$ tal que $\lambda = \max[\tau K_5 + K_6 e^{-aT_1}, K_z e^{-a_z T_1}] < 1$. Então, as simples desigualdades recursivas (B.15) e (B.16) são satisfeitas e facilmente levam a conclusão que, para τ pequeno o suficiente, o sistema do erro é globalmente exponencialmente estável com respeito a um pequeno conjunto residual de ordem τ . Além disso, este conjunto residual é independente das condições iniciais.

Apêndice C

Filtro de *Kalman*

C.1 Filtro de *Kalman* contínuo

É natural que os sistemas discretos sejam resultado de uma amostragem ou aproximação de um sistema contínuo. Entretanto, no caso do filtro de *Kalman*, a sua origem é no campo discreto, a sua versão contínua será resultado de um caso limite quanto o período de amostragem tende a zero.

Considerando o seguinte sistema aleatório em tempo contínuo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B\omega(t) \quad (\text{C.1})$$

$$y(t) = Cx(t) + e(t) \quad (\text{C.2})$$

onde

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados do processo.
- $u(t) \in \mathbb{R}$ é uma entrada determinística.
- $\omega(t) \in \mathbb{R}$ é ruído do processo, ruído branco com densidade espectral de potência Q_c .
- $e(t) \in \mathbb{R}$ é o ruído de medição, ruído branco com densidade espectral de potência R_c .
- Sem perda de generalidade o ruído do processo é introduzido no sistema através do mesmo canal que o sinal determinístico $u(t)$.

O filtro contínuo também pode ser interpretado como um observador dos sistema (C.1) (C.2) com ganho K_c variante no tempo. O ganho é determinado de forma a minimizar a variância do erro de estimação, que é dada pela matriz P , como segue:

$$P = \mathcal{E}[(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T] \quad (\text{C.3})$$

O observador (filtro de *Kalman*) é dado por:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + K_c(y - C\hat{x}) \quad (\text{C.4})$$

com ganho de *Kalman*:

$$K_c = P^*C^TR_c^{-1} \quad (\text{C.5})$$

sendo P^* solução da seguinte equação diferencial de *Riccati* (ou equação matricial de *Riccati*):

$$\dot{P} = AP + PA^T - PC^TR_c^{-1}CP + BQ_cB^T \quad (\text{C.6})$$

A relação entre os parâmetros do filtro de *Kalman* discreto e sua versão contínua é desenvolvida em (Brown & Hwang 1992), para o caso em que $h \rightarrow 0$, e estão listadas a seguir:

- Ruído do processo:

$$- Q_d = BQ_chB^T$$

- Ruído de medição:

$$- R_d = \frac{R_c}{h}$$

- Ganho de *Kalman* em estado estacionário:

$$- K_d = K_ch$$

A versão estacionária do filtro contínuo pode ser determinada fazendo $\dot{P} = 0$ na equação matricial de *Riccati* (C.6). A equação a ser resolvida passa a ser algébrica, e para o caso

particular em que o sistema (A, B, C) é o duplo integrador, a versão estacionária do filtro contínuo pode ser determinada analiticamente. O ganho em estado estacionário é dado por:

$$K_c = \begin{bmatrix} k_{c1} \\ k_{c2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2} \left(\frac{Q_c}{R_c}\right)^{1/4} \\ \left(\frac{Q_c}{R_c}\right)^{1/2} \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

C.2 Amostragem de sistemas aleatórios

Considere o seguinte sistema aleatório contínuo e invariante no tempo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B\omega(t) \quad (\text{C.9})$$

$$y(t) = Cx(t) + e(t) \quad (\text{C.10})$$

Sem perda de generalidade, o ruído $\omega(t)$ é introduzido no sistema contínuo através do mesmo canal de entrada do sinal determinístico $u(t)$. Os ruídos do processo ($\omega(t)$) e de medição ($e(t)$) do sistema contínuo são considerados ruídos brancos de média nula e com densidades espectrais de potência Q_c e R_c , respectivamente, tais que:

$$\mathcal{E}[\omega(\tau)\omega^T(\sigma)] = Q_c\delta(\tau - \sigma) \quad (\text{C.11})$$

$$\mathcal{E}[e(\tau)e^T(\sigma)] = R_c\delta(\tau - \sigma) \quad (\text{C.12})$$

Onde $\delta(t)$ é a função delta de *Dirac* e $\mathcal{E}[\cdot]$ denota o valor esperado. Além disso, $\omega(t)$ e $e(t)$ são não-correlacionados, ou seja, $\mathcal{E}[\omega(\tau)e^T(\sigma)] = 0$.

O sistema acima amostrado a uma taxa $1/h$, utilizando um retentor de ordem zero (*ZOH*) é dado por:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + W(k) \quad (\text{C.13})$$

$$y(k) = Cx(k) + e(k) \quad (\text{C.14})$$

onde: $\Phi = e^{Ah}$, $\Gamma = \int_0^h e^{A\tau} B d\tau$ e o vetor $W(k)$ é dado por:

$$W(k) = \int_{kh}^{(k+1)h} e^{A[(k+1)h-\tau]} B \omega(\tau) d\tau \quad (\text{C.15})$$

Considerando que o ruído do processo $\omega(t)$ seja um ruído branco, pode-se provar que a sua versão discreta $W(k)$ será uma sequência aleatória com amostras descorrelacionadas (sequência branca). Repare que o sinal ω não é constante durante o período de amostragem e, portanto, não pode ser retirado da integral acima, como acontece com o sinal determinístico $u(t)$. A sequência $W(k)$ pode ser interpretada como uma amostragem de uma versão filtrada do ruído branco $\omega(t)$ ponderada pelo vetor B .

A matriz de covariância Q_d do ruído do processo $W(k)$ é definida por:

$$\mathcal{E}[W(k_1)W^T(k_2)] = Q_d \delta(k_1 - k_2)$$

Onde $\delta(k)$ é o delta de *Kronecker*.

Na expressão acima, utilizando as definições de $W(k)$ (equação (C.15)) e de Q_c ($\mathcal{E}[\omega(\tau)\omega^T(\sigma)] = Q_c \delta(\tau - \sigma)$), tem-se:

$$Q_d = \int_0^h e^{A\tau} B Q_c B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad (\text{C.16})$$

A discretização do ruído branco $e(t)$ não pode ser realizada por uma amostragem direta $e(kh)$, pois resultaria em uma sequência com amostras de variância infinita, devido a função delta de *Dirac* na expressão de definição de R_c .

Em (Brown & Hwang 1992) é proposta a seguinte definição de $e(k)$:

$$e(k) := \frac{1}{h} \int_{(k-1)h}^{kh} e(\tau) d\tau, (h \rightarrow 0) \quad (\text{C.17})$$

ou seja, a amostra $e(k)$ no instante k é definida como uma média dos valores do ruído branco $e(t)$ entre os instantes $(k-1)h$ e kh . Com esta definição a matriz de covariância R_d do ruído de medição $e(k)$ é dada por

$$\mathcal{E}[e(k_1)e^T(k_2)] = R_d \delta(k_1 - k_2) \quad (\text{C.18})$$

e, aplicando a definição de $e(k)$, tem-se:

$$R_d = \frac{1}{h^2} \int \int \mathcal{E}[e(\tau)e^T(\sigma)]d\tau d\sigma, \quad (h \rightarrow 0) \quad (\text{C.19})$$

Lembrando que $\mathcal{E}[e(\tau)e^T(\sigma)] = R_c\delta(\tau - \sigma)$, para $h \rightarrow 0$ R_d é dado por:

$$R_d = \frac{R_c}{h} \quad (\text{C.20})$$

Portanto, para $h \rightarrow 0$, Q_d e R_d podem ser aproximadas por, (ver (Bélanger 1992)):

$$Q_d = Q_c h B B^T \quad (\text{C.21})$$

$$= Q_c h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.22})$$

$$R_d = \frac{R_c}{h} \quad (\text{C.23})$$

Além disso, $\omega(k)$ e $e(k)$ são consideradas sequências não-correlacionadas, ou seja, $\mathcal{E}[\omega(k)e^T(j)] = 0, \forall k, j$.

C.3 Modelo do sinal

A saída da planta y_p será modelada pela seguinte classe de sistemas lineares alimentadas por ruído branco (ver (Bélanger 1992)):

$$\frac{\bar{y}_p}{\omega} = \frac{1}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0}$$

Sem dúvida, existe alguma perda de generalidade ao desconsiderar zeros, entretanto um processo autoregressivo (*AR*) pode servir de aproximação para um processo autoregressivo de média móvel (*ARMA*) caso a ordem seja alta o suficiente.

Através de simulações pode-se verificar que certamente a saída da planta y_p pode ser representada pela saída \bar{y}_p do modelo do sinal $M_{sinal}(p)$ para alguma configuração de pólos e para alguma intensidade Q_c do ruído branco ω (ver figuras C.1 e C.2).

Verifica-se que os pólos estão relacionados com a frequência da saída \bar{y}_p enquanto que a intensidade Q_c , está relacionada com a amplitude de \bar{y}_p . Além disso, como a

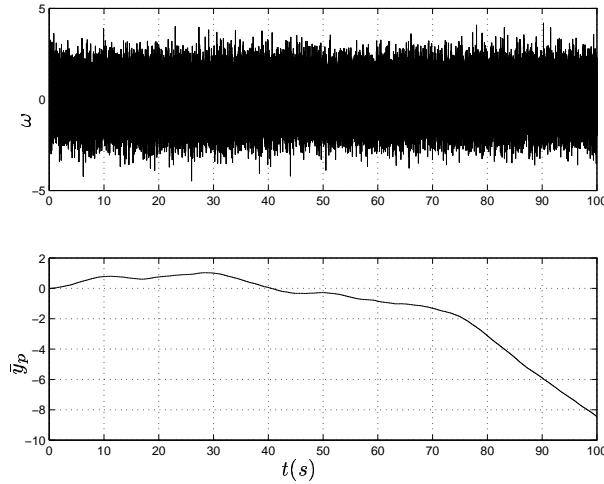


FIGURA C.1: Modelo $\frac{1}{p^2}$ com saída \bar{y}_p e entrada ω (ruído branco com intensidade $Q_c = 1$).

frequência de y_p esta relacionada a velocidade de \bar{y}_p , pode-se interpretar que os pólos do modelo caracterizam a velocidade de \bar{y}_p .

Considerando o ruído de medição, com intensidade R_c , pode-se verificar que a relação Q_c/R_c representa uma relação sinal ruído.

É demonstrado em (Bélanger 1992) que para um período de amostragem pequeno ($h \rightarrow 0$) o filtro de *Kalman* discreto é independente dos coeficientes a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , ou seja, ao variar os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_{n-1} o ganho e a matriz de covariância do erro de estimação não variam.

Sendo assim, por simplicidade, escolhe-se os pólos na origem $a_0 = 0, a_1 = 0, \dots, a_{n-1} = 0$, o que leva a uma cascata de n integradores $\frac{1}{p^n}$.

Além disso, se a intenção é estimar a primeira derivada, basta escolher um duplo integrador. Para se estimar derivadas de ordem superior a primeira, basta escolher um cascata de integradores.

Esta pequena variação do ganho foi comprovada utilizando a função *dlqe()* do *Matlab*. Para um período $h = 1/3500$, e para dois sistemas de ordem 2, obteve-se os seguintes ganhos em regime permanente:

$$\frac{1}{p^2} \quad \Rightarrow \quad K_d = \begin{bmatrix} 1.1636 & 0.0256 \end{bmatrix}$$

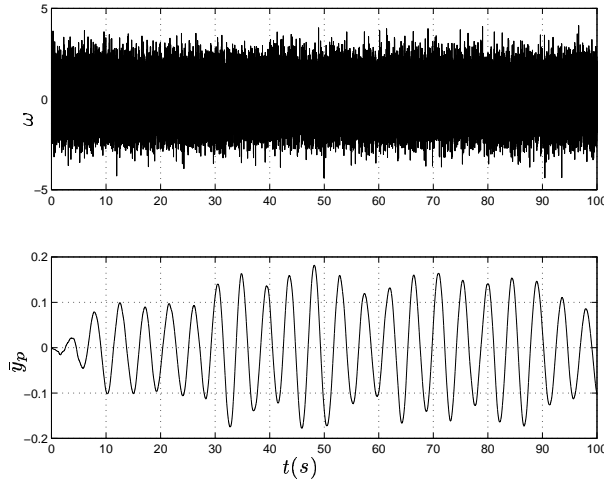


FIGURA C.2: Modelo $\frac{1}{p^2+2}$ com saída \bar{y}_p e entrada ω (ruído branco com intensidade $Q_c = 1$).

$$\frac{1}{p^2 + 100} \quad \Rightarrow \quad K_d = \begin{bmatrix} 1.1363 & 0.0253 \end{bmatrix}$$

Note que realmente o ganho varia muito pouco. Os pólos em malha fechada são dados por:

$$\frac{1}{p^2} \quad \Rightarrow \quad \text{pólos} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{p^2 + 100} \quad \Rightarrow \quad \text{pólos} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

C.4 Modelagem do *encoder* - análise do erro de quantização

Em (Kavanagh 2000), o *encoder* óptico foi modelado por um quantizador ideal considerando não-linearidades do tipo diferencial e integral. Neste trabalho, as não-linearidades serão ignoradas, resultando no modelo apresentado na figura C.3 para o *encoder* óptico (quantizador ideal).

O erro introduzido pelo quantizador pode ser interpretado de forma aditiva, figura C.4. A validade deste modelo pode ser verificada através de simulações.

Neste modelo (figura C.4) o sinal e é considerado um ruído com distribuição uniforme e **média nula** e variância dada por $R = \theta^2/3$, onde θ é o passo de quantização ((Kavanagh 2000) e (Williamson 1991)). O modelo do erro de quantização adotado

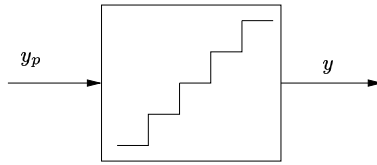


FIGURA C.3: Modelo do *encoder* óptico.

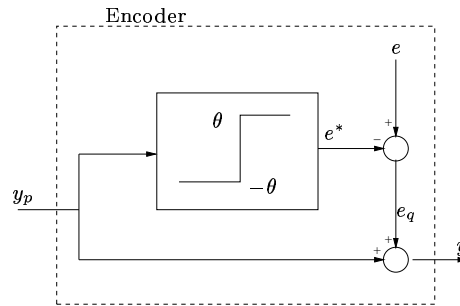


FIGURA C.4: Modelo do erro de quantização.

depreza o efeito do termo e^* , ver figura C.5.

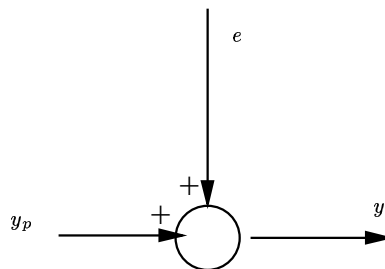


FIGURA C.5: Modelo do erro de quantização simplificado.

Para o projeto do filtro de *Kalman*, o erro de quantização (erro de medição) será considerado um ruído branco com **média nula**. Esta hipótese é muito pouco realista quando o sinal quantizado y_p for lento. Repare que para sinais muito lentos o termo e^* altera muito a média de e_q .

Referências Bibliográficas

- Ambrosino, G., Celentano, G. & Garofalo, F. (1984), 'Variable structure MRAC systems', *Int. J. Contr.* **39**(6), 1339–1349.
- Åström, K. J. & Wittenmark, B. (1997), *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*, Prentice-Hall.
- Bailey, E. & Arapostathis, A. (1987), 'Simple sliding mode control scheme applied to robot manipulator', *Int. J. Contr.* **45**(4), 1197–1209.
- Bartolini, G. & Zolezzi, T. (1988), 'The V.S. approach to the model reference control of nonminimal phase linear plants', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **33**(9), 859–863.
- Bélanger, P. (1992), Estimation of angular velocity and acceleration from shaft encoder measurements, *in* 'Proc. IEEE Conf. Robotics&Automation', Nice, France, pp. 585–592.
- Bélanger, P., Dobrovolny, P., Helmy, A. & Zhang, X. (1998), 'Estimation of angular velocity and acceleration from shaft-encoder measurements', *Int. J. Robotics Res.* **17**(11), 1225–1233.
- Bondarev, A. G., Bondareva, S. A., Kostyleva, N. E. & Utkin, V. I. (1985), 'Sliding modes in systems with asymptotic state observers', *Autom. Remote Control* **46**(6), 679–684. Pt. 1.
- Brown, R. G. & Hwang, P. Y. C. (1992), *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*, John-Wiley, Inc.
- Edwards, C. & Spurgeon, S. (1998), *Sliding Mode Control : Theory and Applications*, Systems and Control Book Series, Taylor & Francis.
- Egardt, B. (1979), *Stability of Adaptive Controllers*, Springer Verlag.
- Emelyanov, S. V. (1970), *Theory of variable structure systems*, Nauka.
- Emelyanov, S. V. & Taran, V. A. (1963a), 'Use of inertial elements in the design of a class of variable structure control systems - I', *Automation and Remote Control* **24**(1), 29–42.
- Emelyanov, S. V. & Taran, V. A. (1963b), 'Use of inertial elements in the design of a class of variable structure control systems - II', *Automation and Remote Control* **24**(2), 183–190.

- Filippov, A. F. (1964), 'Differential equations with discontinuous right-hand side', *American Math. Soc. Translations* **42**(2), 199–231.
- Franklin, G. F., Powell, J. D. & Workman, M. (1998), *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley.
- Fu, L. C. (1990), A new robust MRAC using VS adaptation for plant with relative degree two, *in* 'Proc. American Contr. Conf.', pp. 73–78.
- Glatzl, A., Murphy, S., Wen, J. & Kopacek, P. (1993), Discrete implementation and adaptation of sliding mode control for robot manipulators, *in* 'Proc. IEEE Conf. Robotics&Automation', Vol. 2, Atlanta, pp. 539–544.
- Goodwin, G. C. & Sin, K. S. (1984), *Adaptive Filtering*, Prentice-Hall.
- Hsu, L. (1988), Variable structure model reference adaptive control using only I/O measurement: Part II, *in* 'Proc. IEEE Conf. on Dec. and Contr.', Austin, pp. 2396–2401.
- Hsu, L. (1990), 'Variable structure model reference adaptive control using only I/O measurement: General case', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **35**(11), 1238–1243.
- Hsu, L. (1997a), Self-oscillating adaptive systems (SOAS) without limit-cycle, *in* 'Proc. American Contr. Conf.', Albuquerque.
- Hsu, L. (1997b), 'Smooth sliding control of uncertain systems based on a prediction error', *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control* **7**, 353–372.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1987), 'Adaptive control with discontinuous σ -factor and saturation for improved robustness', *Int. J. Contr.* **45**(3), 843–859.
- Hsu, L. & Costa, R. R. (1989), 'Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurement: Part I', *Int. J. Contr.* **49**(2), 399–416.
- Hsu, L., Araújo, A. D. & Costa, R. R. (1994), 'Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **39**(1), 4–21.
- Hsu, L., Lizarralde, F. & Araújo, A. (1997), 'New results on output feedback VS-MRAC: Design and stability analysis', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **42**(3), 386–393.
- Ioannou, P. & Sun, K. (1996), *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall.
- Ioannou, P. & Tsakalis, K. (1986), 'A robust direct adaptive controller', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **31**(11), 1033–1043.
- Ioannou, P. A. & Kokotovic, P. V. (1984), 'Robust redesign of adaptive control', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **29**(3), 202–211.
- Itkis, U. (1976), *Control systems of variable structure*, John Wiley & Sons.
- Janabi-Sharifi, F., Hayward, V. & Chen, C. (2000), 'Discrete-time adaptive windowing for velocity estimation', *IEEE Trans. on Contr. Syst. Technology* **8**(6), 1003–1009.

- Jaritz, A. & Spong, M. (1996), 'An experimental comparison of robust control algorithms on a direct drive manipulator', *IEEE Trans. on Contr. Syst. Technology* **4**(6), 627–640.
- Kalman, R. E. (1960), 'A new approach to linear filtering and prediction problems', *Trans. of the ASME–J. of Basic Engr.* pp. 35–45.
- Kavanagh, R. (2000), 'Shaft encoder characterization via theoretical model of differentiator with both differential and integral nonlinearities', *IEEE Trans. Instr. Measur.* **49**(4), 795–801.
- Levant, A. (1998), 'Robust exact differentiation via sliding mode technique', *Automatica* **34**(3), 379–384.
- Lewis, F. L. (1986), *Optimal Estimation with an Introduction to Stochastic Control Theory*, John-Wiley, Inc.
- Mareels, I. & Polderman, J. W. (1996), *Adaptive systems an introduction*, Birkhauser.
- Naik, S. M., Kumar, P. R. & Ydstie, B. E. (1992), 'Robust continuous-time adaptive control by parameter projection', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **37**(2), 182–197.
- Narendra, K. & Annaswamy, A. (1989), *Stable Adaptive Systems*, Prentice Hall.
- Narendra, K. & Valavani, L. (1978), 'Stable adaptive controller design-direct control', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **23**(8), 570–583.
- Narendra, K., Lin, S. & Valavani, L. (1980), 'Stable adaptive controller design: Part II', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **25**(3), 570–583.
- Owens, D. H., Pratzel-Wolters, D. & Ichmann, A. (1987), 'Positive structure and high-gain adaptive stabilization', *IMA J. Math. Contr. Inform.* **4**, 167–181.
- Peixoto, A. J. (2000), Projeto e controle de um protótipo de um helicóptero, Technical report, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Peixoto, A., Lizarralde, F. & Hsu, L. (2001), Experimental results on smooth sliding control of uncertain systems, in 'Proc. IEEE Conf. on Dec. and Contr.', Orlando, pp. 2430–2435.
- Peixoto, A., Lizarralde, F. & Hsu, L. (2002), Further results on smooth sliding control of uncertain systems, in 'Proc. American Contr. Conf.', Anchorage.
- Rohrs, C. E., Valavani, L., Athans, M. & Stein, G. (1982), Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics, in 'Proc. IEEE Conf. Dec. and Contr.', Florida, pp. 3–11.
- Sant'Anna, F. B. (1996), Contribuição à implementação prática de um controlador adaptativo por modos deslizantes (VS-MRAC), Master's thesis, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Sastry, S. S. (1984), 'Model-reference adaptive control: stability, parameter convergence and robustness', *IMA J. Math. Contr. Inform.* **1**, 27–66.

- Sastry, S. S. & Bodson, M. (1989), *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Prentice Hall.
- Saunders, G. H. (1975), *Dynamics of Helicopter Flight*, John Wiley.
- Slotine, J. & Li, W. (1991), *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall.
- Taran, V. A. (1964*a*), 'Control of a linear plant with an astatic variable structure controller without pure derivatives in control law - i', *ARC* **25**(10), 1278–1288.
- Taran, V. A. (1964*b*), 'Control of a linear plant with an astatic variable structure controller without pure derivatives in control law - ii', *ARC* **25**(11), 1406–1412.
- Tsytkin, Y. Z. (1955), *Theory of switching control systems*, Gostekhizdat.
- Utkin, V. I. (1978), *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*, MIR.
- Utkin, V. I. (1992), *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag.
- Williamson, D. (1991), *Digital Control and Implementation Finite Wordlength Considerations*, Prentice-Hall.
- Young, K. K. D., Kokotovic, V. & Utkin, V. (1977), 'A singular perturbations analysis of high-gain feedback systems', *IEEE Trans. Aut. Contr.* **22**, 931–939.
- Zhou, K., Doyle, J. & Glover, K. (1994), *Robust and optimal control*, Prentice Hall.