



SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO FLUXO DE POTÊNCIA TRIFÁSICO UTILIZANDO O MÉTODO DA INCORPORAÇÃO HOLOMÓRFICA

André Lazaro Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadora: Carmen Lucia Tancredo Borges

Rio de Janeiro
Agosto de 2022

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO FLUXO DE POTÊNCIA TRIFÁSICO
UTILIZANDO O MÉTODO DA INCORPORAÇÃO HOLOMÓRFICA

André Lazaro Souza

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Orientadora: Carmen Lucia Tancredo Borges

Aprovada por: Prof^ª. Carmen Lucia Tancredo Borges

Prof. Glauco Nery Taranto

Prof. João Alberto Passos Filho

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

AGOSTO DE 2022

Souza, André Lazaro

Solução do Problema do Fluxo de Potência Trifásico Utilizando o Método da Incorporação Holomórfica/André Lazaro Souza. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2022.

XVIII, 154 p.: il.; 29,7cm.

Orientadora: Carmen Lucia Tancredo Borges

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Elétrica, 2022.

Referências Bibliográficas: p. 139 – 148.

1. Método da Incorporação Holomórfica. 2. Fluxo de Potência Trifásico. I. Borges, Carmen Lucia Tancredo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

*A quem definitivamente é
“a real human being”,
Kinsella, vulgo Kim.*

*A quem sempre serei infinitamente grato
pela dedicação em minha criação,
Antônio e Eliane.*

It has often been said that a person does not really understand something until he can teach it to someone else. Actually a person does not really understand something until he can teach it to a computer.
Donald Knuth, *Computer Science and Its Relation to Mathematics* (1974)

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO FLUXO DE POTÊNCIA TRIFÁSICO UTILIZANDO O MÉTODO DA INCORPORAÇÃO HOLOMÓRFICA

André Lazaro Souza

Agosto/2022

Orientadora: Carmen Lucia Tancredo Borges

Programa: Engenharia Elétrica

Originalmente, o método da incorporação holomórfica se propôs a resolver de forma não-iterativa o problema do fluxo de potência monofásico ou de sequência positiva utilizando conceitos da geometria algébrica e da análise complexa. Sua formulação referida como canônica resolve o problema a partir de uma solução trivial e estável desse sistema de equações.

Apresenta-se neste trabalho uma generalização da incorporação holomórfica canônica de forma a acomodar o problema do fluxo de potência trifásico. Os elementos de rede devidamente modelados incluem linhas de distribuição, linhas de transmissão, transformadores de dois enrolamentos, transformadores de dois enrolamentos com derivação central, autotransformadores reguladores de tensão e dispositivos shunt que foram organizados conforme a classificação de passivos e ativos. O primeiro grupo compreende bancos de capacitores ou reatores e cargas de modelo polinomial. A formulação desenvolvida para o segundo grupo compreende uma variedade de modos de controle que permitem uma representação satisfatória em regime permanente de máquinas síncronas, máquinas de indução e dispositivos de corrente alternada flexíveis.

A metodologia proposta foi implementada em ambiente MATLAB. Para validação da mesma, foram utilizados sistemas presentes na literatura (alguns deles recriados em um software open source de análise de sistemas de energia elétrica) e sistemas didáticos (reproduzidos na versão acadêmica de um segundo software de análise de sistemas de energia elétrica).

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

THREE-PHASE LOAD FLOW SOLUTION USING THE HOLOMORPHIC EMBEDDING METHOD

André Lazaro Souza

August/2022

Advisor: Carmen Lucia Tancredo Borges

Department: Electrical Engineering

The holomorphic embedding method is a non-iterative method based on concepts of complex analysis and algebraic geometry. Its canonical form was originally proposed for solving the single-phase or positive sequence load flow problem relying on a trivial stable solution of this system of equations.

This work presents an extended canonical embedding formulation in order to accommodate the three-phase load flow problem. The network modelling includes distribution lines, transmission lines, two winding transformers, center tapped two winding transformers, voltage regulators (autotransformers) and shunt devices classified as passive and active. The first shunt group comprehends capacitor banks, reactor banks and polynomial loads. The formulation developed to the second shunt group comprehends a range of control modes that allows the representation of synchronous machines, induction machines and flexible alternating current equipment.

The presented methodologies were implemented on MATLAB environment and validated by well-known IEEE test feeders.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Símbolos	xv
Lista de Abreviaturas	xviii
1 Introdução	1
1.1 Contextualização e Motivação	1
1.2 Objetivos e Contribuições	3
1.3 Organização	3
2 O Problema do Fluxo de Potência e o Método da Incorporação Holomórfica	5
2.1 Revisão Bibliográfica	12
3 Formulação do Problema do Fluxo de Potência Trifásico	19
3.1 Matriz de Admitância de Barra	20
3.1.1 Linhas de Distribuição e Transmissão	20
3.1.2 Transformadores de Dois Enrolamentos	21
3.1.3 Transformadores de Dois Enrolamentos com Derivação Central	22
3.1.4 Autotransformadores Reguladores de Tensão	29
3.2 Injeção Líquida de Corrente	38
3.2.1 Dispositivos Shunt Passivos	38
3.2.2 Dispositivos Shunt Ativos	42
3.3 Sistema de Equações	50
3.3.1 Equação I	52
3.3.2 Equação II	54
3.3.3 Equação III	55
3.3.4 Equações IV e V	56
3.3.5 Equações VI, VII e VIII	58

3.3.6	Equação IX	59
3.3.7	Modos de Controle	60
4	Formulação do Método da Incorporação Holomórfica	65
4.1	Incorporação Holomórfica Canônica Monofásica	70
4.2	Incorporação Holomórfica Canônica Trifásica	74
4.2.1	Equação I	76
4.2.2	Equação II	76
4.2.3	Equação III	77
4.2.4	Equações IV e V	77
4.2.5	Equações VI, VII e VIII	77
4.2.6	Equação IX	78
4.2.7	Problema do Fluxo de Potência Trifásico em $s = 0$	79
5	Resultados e Discussões	81
5.1	<i>IEEE Test Feeders</i>	84
5.1.1	<i>1990s Test Feeders</i>	84
5.1.2	<i>Comprehensive Test Feeder</i>	84
5.1.3	<i>Low Voltage Test Systems</i>	87
5.2	<i>TPC 345 kV System</i>	95
5.3	<i>WSCC 9-Bus System</i>	95
5.4	Sistema Didático	100
5.5	<i>IEEE 13-Node Test Feeder</i> (Modificado)	113
5.6	<i>IEEE North American Low Voltage Test System</i> (Modificado)	120
5.7	<i>IEEE European Low Voltage Test Feeder</i> (Modificado)	125
5.8	Desempenho Computacional	125
5.9	Considerações Finais	133
6	Conclusões	137
	Referências Bibliográficas	139
A	Blocos Auxiliares	149

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de um sistema elétrico de potência	7
2.2	Soluções para o sistema-exemplo	8
2.3	Autovalores referentes a linearização do sistema-exemplo	11
3.1	Modelagem de linhas de distribuição ou de transmissão trifásicas	21
3.2	Modelagem de transformadores monofásicos de dois enrolamentos	22
3.3	Modelagem de transformadores trifásicos em conexão $Y_g - Y_g$	23
3.4	Modelagem de transformadores trifásicos em conexão $\Delta - \Delta$	24
3.5	Modelagem de transformadores trifásicos elevadores em conexão $Y_g - \Delta$	25
3.6	Modelagem de transformadores trifásicos abaixadores em conexão $Y_g - \Delta$	26
3.7	Modelagem de transformadores trifásicos elevadores em conexão $\Delta - Y_g$	27
3.8	Modelagem de transformadores trifásicos abaixadores em conexão $\Delta - Y_g$	28
3.9	Modelagem de transformadores de dois enrolamentos com derivação central	29
3.10	Modelagem de transformadores trifásicos com derivação central em conexão $\Delta - \Delta$	30
3.11	Modelagem de transformadores trifásicos com derivação central em conexão $Y_g - \Delta$	30
3.12	Modelagem de autotransformadores reguladores de tensão monofásicos	31
3.13	Modelagem de autotransformadores trifásicos reguladores de tensão (Tipo A) conectados em Y_g	32
3.14	Modelagem de autotransformadores trifásicos reguladores de tensão (Tipo A) conectados em Δ	33
3.15	Modelagem de autotransformadores trifásicos reguladores de tensão (Tipo A) conectados em \wedge	34
3.16	Modelagem de autotransformadores trifásicos reguladores de tensão (Tipo B) conectados em Y_g	35
3.17	Modelagem de autotransformadores trifásicos reguladores de tensão (Tipo B) conectados em Δ	36

3.18	Modelagem de autotransformadores trifásicos reguladores de tensão (Tipo B) conectados em Δ	37
3.19	Exemplo para a possibilidade de aproximação de uma função algébrica com expoentes racionais em uma outra com expoentes inteiros	39
3.20	Modelagem de dispositivos shunt passivos	40
3.21	Modelagem de dispositivos shunt ativos	42
3.22	Família de curvas de capacidade para uma máquina síncrona de polos lisos típica	45
3.23	Circuitos equivalentes de regime permanente para uma máquina de indução	47
3.24	Características QV representativas de SVCs e STATCOMs	50
4.1	Visão geral da incorporação holomórfica canônica proposta	80
5.1	Diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas e obtidas (<i>IEEE 1990s Test Feeders</i>)	85
5.2	Diagrama Unifilar (<i>IEEE Comprehensive Test Feeder</i>)	91
5.3	Diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas e obtidas (<i>IEEE Comprehensive Test Feeder</i>)	92
5.4	Diagrama Unifilar (<i>IEEE North American Low Voltage Test System</i>)	93
5.5	Diagrama Unifilar (<i>IEEE European Low Voltage Test Feeder</i>)	93
5.6	Diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas e obtidas (<i>Low Voltage Test Systems</i>)	94
5.7	Diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas e obtidas (<i>TPC 345 kV System</i>)	96
5.8	Diagrama Unifilar (<i>TPC 345 kV System</i>)	96
5.9	Diagrama Unifilar (<i>WSCC 9-Bus System</i>)	99
5.10	Diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas e obtidas (<i>WSCC 9-Bus System</i>)	99
5.11	Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 1)	103
5.12	Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 2)	104
5.13	Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 3)	105
5.14	Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 4)	106
5.15	Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 5)	107
5.16	Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 6)	108
5.17	Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 7)	109
5.18	Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 8)	110
5.19	Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 9)	111
5.20	Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 10)	112
5.21	Ponto de Operação do <i>IEEE 13-Node Test Feeder</i> (Fase A)	116

5.22	Ponto de Operação do <i>IEEE 13-Node Test Feeder</i> (Fase <i>B</i>)	117
5.23	Ponto de Operação do <i>IEEE 13-Node Test Feeder</i> (Fase <i>C</i>)	118
5.24	Ponto de Operação do <i>IEEE 13-Node Test Feeder</i> (Tensões de Sequência Positiva e Fluxos de Potência Trifásicos)	119
5.25	Dispositivos shunt ativos adicionados ao <i>IEEE North American Low Voltage Test System</i>	121
5.26	Dispositivos shunt ativos adicionados ao <i>IEEE European Low Voltage Test Feeder</i>	126
5.27	Tempos de Execução (Cálculo dos Aproximantes de Padé)	131
5.28	Tempos de Execução (Cálculo das Séries de Taylor)	132
5.29	Diagrama Unifilar (<i>IEEE 4-Node Test Feeder</i>)	133

Lista de Tabelas

2.1	Relação dos sistemas trifásicos desequilibrados que foram resolvidos em publicações que exploraram o método da incorporação holomórfica	18
3.1	Equações implementadas para o problema do fluxo de potência trifásico	52
3.2	Constantes σ no contexto da Equação I	53
3.3	Constantes σ no contexto da Equação II	55
3.4	Constantes σ no contexto da Equação III	56
3.5	Constantes σ no contexto das Equações IV e V	57
3.6	Constantes σ no contexto das Equações VI, VII e VIII	59
3.7	Controles secundários e características construtivas	61
3.8	Modos de Controle dos Dispositivos Shunt Ativos (Parte 1)	62
3.9	Modos de Controle dos Dispositivos Shunt Ativos (Parte 2)	63
4.1	Exemplo de obtenção dos sistemas lineares que permitem o cálculo dos coeficientes das séries de Taylor (Parte 1)	67
4.2	Exemplo de obtenção dos sistemas lineares que permitem o cálculo dos coeficientes das séries de Taylor (Parte 2)	68
5.1	Sistemas trifásicos presentes na literatura que foram avaliados	83
5.2	Resultados Selecionados (<i>IEEE 1990s Test Feeders</i>)	86
5.3	Ponto de Operação (<i>IEEE Comprehensive Test Feeder</i> , Parte 1)	88
5.4	Ponto de Operação (<i>IEEE Comprehensive Test Feeder</i> , Parte 2)	89
5.5	Ponto de Operação (<i>IEEE Comprehensive Test Feeder</i> , Parte 3)	90
5.6	Ponto de Operação (<i>IEEE Comprehensive Test Feeder</i> , Parte 4)	91
5.7	Resultados Selecionados (<i>IEEE Comprehensive Test Feeder</i>)	92
5.8	Resultados Selecionados (<i>Low Voltage Test Systems</i>)	94
5.9	Resultados Selecionados (<i>TPC 345 kV System</i>)	96
5.10	Pontos de Operação (<i>WSCC 9-Bus System</i> , Casos 4 e 5)	98
5.11	Operação das Máquinas de Indução (<i>WSCC 9-Bus System</i> , Caso 5)	99
5.12	Descrição do Sistema Didático e seus respectivos casos (Parte 1)	100
5.13	Descrição do Sistema Didático e seus respectivos casos (Parte 2)	101
5.14	Descrição do Sistema Didático e seus respectivos casos (Parte 3)	102

5.15	Dispositivos shunt ativos adicionados ao <i>IEEE 13-Node Test Feeder</i> .	114
5.16	Pontos de Operação (<i>IEEE 13-Node Test Feeder</i> , Parte 1)	114
5.17	Pontos de Operação (<i>IEEE 13-Node Test Feeder</i> , Parte 2)	115
5.18	Dispositivos shunt ativos adicionados ao <i>IEEE North American Low Voltage Test System</i> (Susceptâncias Equilibradas)	121
5.19	Dispositivos shunt ativos adicionados ao <i>IEEE North American Low Voltage Test System</i> (Susceptâncias Desequilibradas)	121
5.20	Resultados Selecionados (<i>IEEE North American Low Voltage Test System</i> , Magnitudes de Tensão, Parte 1)	122
5.21	Resultados Selecionados (<i>IEEE North American Low Voltage Test System</i> , Magnitudes de Tensão, Parte 2)	123
5.22	Resultados Selecionados (<i>IEEE North American Low Voltage Test System</i> , Bancos de Capacitores e Reatores Equivalentes)	124
5.23	Dispositivos shunt ativos adicionados ao <i>IEEE European Low Voltage Test Feeder</i>	126
5.24	Resultados Selecionados (<i>IEEE European Low Voltage Test Feeder</i>) .	127
5.25	Tempos de Execução da Incorporação Holomórfica Proposta	130
5.26	Séries de Taylor do Barramento 4 (<i>IEEE 4-Node Test Feeder, Step-Down Open Grounded Wye – Delta</i>)	135
5.27	Séries de Taylor do Barramento 8 (<i>WSCC 9-Bus System</i> , Caso 1) . .	136

Lista de Símbolos

θ, ϑ	Ângulo de Tensão
J, I	Corrente Complexa
Y	Conexão Estrela
Y_g	Conexão Estrela-Aterrada
Δ	Conexão Delta
Λ	Conexão Delta-Aberto
a	Constante complexa $e^{j\frac{2\pi}{3}}$ ou e^{j120°
$H^{(x)}$	Denota que a grandeza elétrica H está associada a fase X , se $x \in \{a, b, c\}$
	Denota que a grandeza elétrica H está associada a fase A da sequência X , se $x \in \{0, 1, 2\}$
	Denota que a grandeza elétrica H está associada as duas fases indicadas por X , se $x \in \{ab, bc, ca\}$
	Denota que a grandeza elétrica H está associada as três fases, se $x \in \{3\phi\}$
H_k	Denota que a grandeza elétrica H está associada ao barramento trifásico k
H_{km}	Denota que a grandeza elétrica H está associada aos barramentos trifásicos k e m
${}^\psi H$	Denota que a grandeza elétrica H está associada a um dispositivo shunt ativo
${}^\varphi H$	Denota que a grandeza elétrica H está associada a um dispositivo shunt passivo

${}_iH$	Denota que a grandeza elétrica H está associada ao i -ésimo elemento de rede
U, u	Escorregamento ou <i>Slope</i>
$Y_{ki}^{(xy)}$	Elemento da linha k e coluna i da submatriz da matriz de admitância nodal que compreende a fase X como linha e a fase Y como coluna
$\widehat{Y}_{ki}^{(xy)}$	Elemento da linha k e coluna i da submatriz da matriz de admitância equivalente shunt que compreende a fase X como linha e a fase Y como coluna
$\widetilde{Y}_{ki}^{(xy)}$	Elemento da linha k e coluna i da submatriz da matriz de admitância equivalente série que compreende a fase X como linha e a fase Y como coluna
G	Inverso multiplicativo da Magnitude de Tensão
W	Inverso multiplicativo da Tensão Complexa
Z, z	Impedância
M, m	Magnitude de Tensão
P, p	Potência Ativa
Q, q	Potência Reativa
S	Potência Aparente
$\alpha, \beta, \gamma,$ λ, μ	Parcelas que compõem o modelo de carga polinomial
α, β	Relações de transformação (no contexto específico dos modelos de transformadores e autotransformadores)
E, V, v	Tensão Complexa
T, t	Torque Mecânico
σ	Constante (complexa ou real)
ω	Constante real contida no intervalo $[0, 1]$
$F[n]$	Coefficiente de ordem n da série de Taylor da função f expandida ao redor da origem

$\text{Im}\{z\}$	Denota a parte imaginária do número complexo z
$\text{Re}\{z\}$	Denota a parte real do número complexo z
${}^*z, z^*$	Denota o complexo conjugado do número complexo z
j	Unidade imaginária
s	Variável complexa de incorporação

Lista de Abreviaturas

ANSI	<i>American National Standards Institute</i>
FACTS	<i>Flexible Alternating Current Transmission System</i>
IEEE	<i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
PWM	<i>Pulse-Width Modulation</i>
STATCOM	<i>Static Synchronous Compensator</i>
SVC	<i>Static Var Compensator</i>

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização e Motivação

Fundamentalmente, o problema do fluxo de potência consiste na determinação do ponto de operação de um sistema de energia elétrica para uma dada condição de rede, geração e carga. Por consequência, estudos de fluxo de potência permitem avaliar a capacidade do sistema em suprir adequadamente a demanda de energia elétrica. Portanto, é evidente a importância de estudos de fluxo de potência tanto para o planejamento quanto para a operação de um sistema elétrico.

Em um contexto realista, o problema do fluxo de potência é constituído por um sistema de equações não-linear que apresenta inúmeras soluções e, sendo assim, os mais variados métodos iterativos costumam ser empregados. As limitações inerentes aos métodos iterativos são amplamente documentadas: a depender da aproximação inicial adotada, o processo iterativo pode convergir ou não; em caso de não-convergência, não existem formas práticas de identificar se o conjunto de equações, de fato, não possui solução ou se o método iterativo simplesmente falhou em obtê-la; em caso de convergência, se o conjunto de equações possui múltiplas soluções, também não existem formas práticas que permitem relacionar as aproximações iniciais com as respectivas soluções encontradas.

É possível que a classe de métodos iterativos mais utilizada seja a que cujas fórmulas de recorrência apresentam derivadas ou aproximações destas. Por sua vez, o método iterativo mais utilizado dentro dessa classe tende a ser o chamado método de Newton-Raphson. Existe uma relação íntima entre esses métodos baseados em derivadas e sistemas dinâmicos caóticos [1–5]. De fato, essa dualidade faz com que diferentes métodos iterativos, ainda que possam apresentar propriedades de convergência mais interessantes que o método de Newton-Raphson, não são capazes de endereçar definitivamente todas as limitações descritas no parágrafo anterior. Por esse motivo, alternativas aos métodos iterativos continuam sendo estudadas e

propostas. Em 2012, o método da incorporação holomórfica¹ introduziu uma nova metodologia de solução ao interpretar as equações do problema do fluxo de potência sob a ótica da geometria algébrica e da análise complexa.

A essa altura é importante pontuar que o problema do fluxo de potência desdobra-se em pelo menos dois grandes grupos: monofásico (ou de sequência positiva) e trifásico. Ambas as denominações são sugestivas: o primeiro grupo é desenvolvido a partir de uma representação monofásica equivalente de sequência positiva da rede elétrica, podendo ser utilizado como uma boa aproximação no contexto de sistemas trifásicos suficientemente equilibrados; por sua vez, o segundo grupo é desenvolvido a partir da representação trifásica efetiva da rede elétrica, estendendo o escopo de atuação até sistemas trifásicos com níveis elevados de desbalanço. Por consequência, o problema do fluxo de potência monofásico compõe a escolha natural para análises de sistemas de transmissão, enquanto o problema do fluxo de potência trifásico mantém-se majoritariamente associado à análises de sistemas distribuição.

Sistemas de transmissão, apesar de poderem ter sua rede reduzida a um equivalente monofásico de sequência positiva, demandam a representação de diversos dispositivos elétricos que possuem inúmeras ações de controle. Por sua vez, sistemas de distribuição, apesar de exigirem um tratamento trifásico da rede elétrica, historicamente, eram em sua maioria constituídos por dispositivos elétricos passivos ou que pelo menos eram tratados como tal. Os aspectos salientados, somados às próprias diferenças de topologia de rede entre sistemas de transmissão e distribuição (os primeiros são excessivamente malhados, enquanto os segundos são majoritariamente radiais), permitiram que métodos de solução específicos e limitados fossem desenvolvidos para sistemas de distribuição, por exemplo, *sweeping methods* (formalizados no início da década de 1970) e *impedance methods* (formalizados no início da década de 1990) [6]. De fato, durante um bom tempo, métodos iterativos baseados em derivadas eram amplamente empregados apenas em sistemas de transmissão. Contudo, algumas características dos sistemas de distribuição modernos, influenciadas principalmente por um considerável crescimento da penetração de geração distribuída, começaram a confluir na direção das características dos sistemas de transmissão. E com essa mudança de paradigma, os métodos de solução empregados também caminharam para se tornarem os mesmos. A demanda por métodos de solução robustos para o problema do fluxo de potência trifásico culminou, em 2000, na formalização do método das injeções de correntes trifásicas, uma das mais conhecidas aplicações do método de Newton-Raphson nesse contexto [6].

¹Uma tradução livre para *holomorphic embedding method*; na literatura de países lusófonos, é possível encontrar tanto “holomórfica” quanto “holomorfa” para se referir a uma mesma classe de funções complexas.

1.2 Objetivos e Contribuições

Originalmente, o método da incorporação holomórfica foi proposto para o problema do fluxo de potência monofásico. Este trabalho apresenta uma generalização do método da incorporação holomórfica de forma a acomodar o problema do fluxo de potência que permite descrever uma rede elétrica trifásica desequilibrada. De fato, este trabalho não é o pioneiro em se dedicar ao estudo do método nesse contexto. Dentre as publicações existentes, [7] é que mais se aproxima do objetivo deste trabalho de propor uma formulação suficientemente flexível, capaz de acomodar uma variedade de modos de controle que permitem uma representação satisfatória em regime permanente de máquinas síncronas, máquinas de indução e dispositivos de corrente alternada flexíveis do tipo shunt. Ainda assim, [7] apresentou uma formulação que pode ser dita menos abrangente em relação à proposta neste trabalho. Além disso, até então, nenhuma das publicações focadas na aplicação do método da incorporação holomórfica no contexto do problema do fluxo de potência trifásico demonstrou preocupação em caracterizar minimamente as funções algébricas originadas por sua respectiva incorporação. Esse tópico em específico recebeu uma atenção especial neste trabalho, tendo em vista que possíveis singularidades dessas funções foram discutidas.

De forma resumida, a contribuição alcançada em relação à literatura é uma generalização da incorporação holomórfica referida por canônica e, para tal, uma formulação própria para o problema do fluxo de potência trifásico foi estabelecida. Buscou-se uma formulação que, apesar de flexível na representação de dispositivos shunt controláveis, também fosse compacta. O presente documento foi estruturado de modo a apresentar esta formulação e os resultados obtidos com a sua aplicação em sistemas trifásicos presentes na literatura.

1.3 Organização

No Capítulo 2, o problema do fluxo de potência é discutido como um sistema de equações que representa os pontos de equilíbrio de um sistema físico dinâmico. Nesse contexto, o método da incorporação holomórfica é brevemente introduzido e uma revisão bibliográfica focada no mesmo também é apresentada. Por sua vez, no Capítulo 3, a formulação proposta para o problema do fluxo de potência trifásico é desenvolvida.

O método da incorporação holomórfica é efetivamente discutido no Capítulo 4. Além de uma consolidação dos seus fundamentos teóricos, é apresentado como a formulação anterior pode ser integrada à forma canônica do método. De fato, as equações utilizadas para descrever o problema do fluxo de potência trifásico ostentam

formas gerais que visam facilitar essa integração.

No Capítulo 5 é realizada a validação da metodologia proposta através da resolução de sistemas trifásicos presentes na literatura. Com objetivo de explorar a flexibilidade da formulação proposta, variações de alguns desses sistemas também foram desenvolvidas e, posteriormente, resolvidas. Por fim, no Capítulo 6 estão apresentadas as conclusões do trabalho e indicações de tópicos a serem investigados futuramente no contexto da incorporação holomórfica trifásica proposta.

Capítulo 2

O Problema do Fluxo de Potência e o Método da Incorporação Holomórfica

Em essência, um sistema elétrico de potência é um sistema físico dinâmico e, por consequência, pode ser descrito matematicamente por um conjunto de equações algébricas¹ e diferenciais no tempo. De uma forma simplificada, os fenômenos físicos envolvidos possuem natureza eletromagnética ou eletromecânica. Os efeitos transitórios associados aos fenômenos contidos no primeiro grupo costumam se estender durante intervalos de tempo com ordem de grandeza entre micro-segundos e milisegundos, enquanto que, para o segundo grupo, os intervalos de duração de efeitos transitórios podem chegar até minutos. Considerando uma escala de tempo na qual fenômenos eletromagnéticos são virtualmente instantâneos, o conjunto de equações (2.1) apresenta uma forma geral para a descrição matemática de um sistema de potência. Nesse caso, dispositivos ditos internos à rede elétrica não possuem nenhuma equação diferencial associada ou, em outras palavras, não possuem um modelo dinâmico.

Efeitos transitórios são impostos a um sistema dinâmico através das chamadas perturbações. Em um primeiro momento, tem-se o sistema dinâmico em uma condição de equilíbrio, também referida como condição de regime permanente, caracterizada matematicamente por todas as variáveis do sistema estarem constantes no tempo. Quando pelo menos uma dessas variáveis sofre uma perturbação, ou seja, sofre uma alteração em relação ao seu valor na condição de equilíbrio original, o sistema tende a buscar um novo ponto de equilíbrio (que pode ser, inclusive, numericamente idêntico ao anterior), amortecendo os referidos efeitos transitórios durante esse processo. Contudo, é possível que esses efeitos, supostamente transitórios, sejam sustentados indefinidamente de modo que um novo ponto de equilíbrio nunca

¹Neste capítulo, utilizou-se “algébrico” como sinônimo de “sem a presença de termos diferenciais”, muito embora, no rigor matemático, “algébrico” tenha um sentido mais restrito, uma vez que também não inclui termos transcendentais, como funções trigonométricas, por exemplo.

seja alcançado. Na primeira situação descrita, o sistema é dito estável frente àquela perturbação e na segunda situação, instável.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, z, u, w, v) \\ 0 = e(x, z, u, w, v) \\ 0 = h(x, z, u, w, v) \\ 0 = g(w, v) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde, x denota o vetor das variáveis diferenciais de modelos dinâmicos;

z denota o vetor das variáveis algébricas de modelos dinâmicos;

u denota o vetor das variáveis de entrada ou variáveis de controle de modelos dinâmicos;

w denota o vetor das variáveis de interface entre dispositivos considerados externos à rede elétrica e a própria rede elétrica, com exceção das tensões nodais (podem ser, por exemplo, injeções de potência ou corrente);

v denota o vetor das tensões nodais da rede elétrica;

f denota o conjunto das equações diferenciais de primeira ordem que descrevem modelos dinâmicos;

e denota o conjunto das equações algébricas que descrevem modelos dinâmicos;

h denota o conjunto de equações que relacionam variáveis de interface com modelos dinâmicos;

g denota o conjunto das equações nodais de rede.

A título de ilustração, considere o equivalente monofásico de sequência positiva do sistema elétrico trifásico em corrente alternada apresentado na Figura 2.1. O mesmo é composto por duas barras interconectadas através de uma linha de transmissão retratada pela impedância Z_{12} . Um motor de indução, conectado à Barra 2, mantém uma operação com escorregamento s_2 enquanto está submetido a uma carga mecânica representada pelo torque $T_2^{(m)}$. Por sua vez, a Barra 1 pode ser considerada uma barra infinita. A Figura 2.2.a apresenta a solução para esse sistema considerando duas perturbações distintas para a carga mecânica: um degrau que impõe um decréscimo de 15% em $T_2^{(m)}$ e um degrau que, ao contrário, impõe um acréscimo de 15% nessa mesma variável. Em ambos os casos, considerou-se que a barra infinita sustenta uma tensão de $1,05 pu$ e uma condição de equilíbrio inicial na qual $T_2^{(m)} = 1,20 pu$. A solução no tempo apresentada em color laranja configura uma situação de estabilidade, enquanto a solução apresentada em azul configura instabilidade. No primeiro caso, existe um valor de escorregamento no qual o torque

eletromagnético $T_2^{(e)}$ se reequilibra ao torque mecânico $T_2^{(m)}$. No segundo caso, isso não ocorre, e por consequência, o escorregamento tende a crescer indefinidamente como resposta ao acréscimo na carga mecânica. É importante destacar que o modelo dinâmico considerado para o motor de indução inclui apenas a aplicação da segunda lei de Newton, sendo composto, portanto, por apenas uma equação mecânica. Equações diferenciais referentes aos transitórios elétricos tanto do estator quanto do rotor foram suprimidas. Além disso, dispositivos de proteção ou regulação que poderiam auxiliar a resposta dinâmica do motor também não foram incluídos. Estritamente da forma como apresentado, o sistema é instável frente a uma perturbação em $T_2^{(m)}$ que busque um valor superior à 1, 3175 pu.

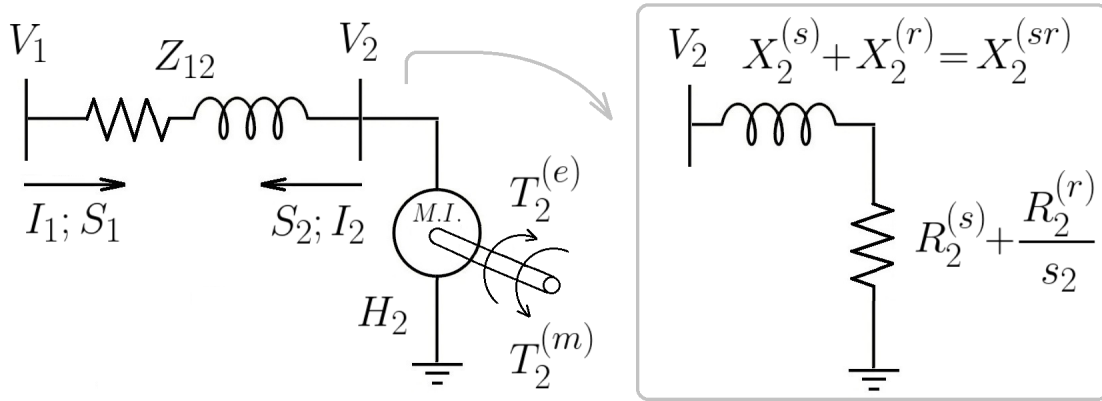


Figura 2.1: Exemplo de um sistema elétrico de potência

$$\begin{aligned}
 x &= [s_2] & z &= [T_2^{(e)}] & u &= [T_2^{(m)}] & w &= [P_2, Q_2] & v &= [M_2, \theta_2] \\
 \left(\begin{array}{l}
 \dot{x} = f(x, z, u, w, v) & e(x, z, u, w, v) = 0 \\
 \dot{s}_2 = \frac{1}{2H_2} (T_2^{(m)} - T_2^{(e)}) & T_2^{(e)} - \frac{R_2^{(r)}}{s_2} \frac{M_2 M_2}{\left(R_2^{(s)} + \frac{R_2^{(r)}}{s_2}\right)^2 + \left(X_2^{(sr)}\right)^2} = 0 \\
 h(x, z, u, w, v) = 0 & g(w, v) = 0 \\
 P_2 + \left(1 + \frac{R_2^{(s)}}{R_2^{(r)}} s_2\right) T_2^{(e)} = 0 & P_2 - \operatorname{Re} \left\{ V_2 \left(\frac{V_2 - V_1}{Z_{12}} \right)^* \right\} = 0 \\
 Q_2 + \left(0 + \frac{X_2^{(sr)}}{R_2^{(r)}} s_2\right) T_2^{(e)} = 0 & Q_2 - \operatorname{Im} \left\{ V_2 \left(\frac{V_2 - V_1}{Z_{12}} \right)^* \right\} = 0
 \end{array} \right. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

$$V_1 = M_1 e^{j\theta_1} \quad V_2 = M_2 e^{j\theta_2} \quad S_1 = P_1 + jQ_1 \quad S_2 = P_2 + jQ_2$$

Dado o seu elevado custo computacional, nem sempre é interessante (algumas vezes, nem mesmo é viável) utilizar uma simulação dinâmica como ferramenta de análise. Bem como transitórios de fenômenos eletromagnéticos foram considerados

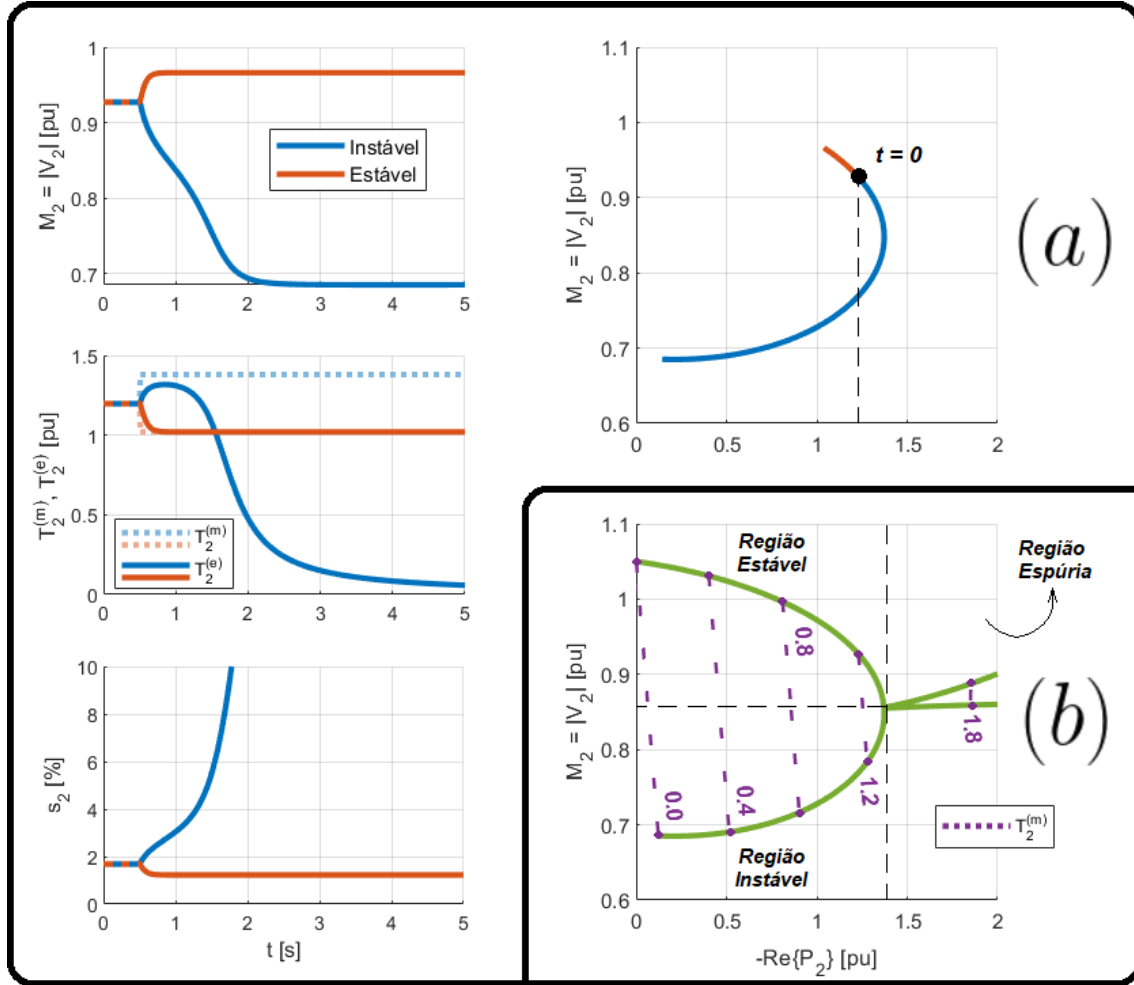


Figura 2.2: Soluções para o sistema-exemplo: **(a)** simulação dinâmica para duas entradas $T_2^{(m)}(t)$ distintas; **(b)** simulação estática para diferentes valores de $T_2^{(m)}$

$$V_1 = 1,05 + j 0,00 \text{ pu} \quad Z_{12} = 0,035 + j 0,125 \text{ pu} \quad R_2^{(s)} = 0,015 \text{ pu} \quad R_2^{(r)} = 0,010 \text{ pu}$$

$$X_2^{(s)} = 0,065 \text{ pu} \quad X_2^{(r)} = 0,175 \text{ pu} \quad X_2^{(sr)} = 0,240 \text{ pu} \quad H_2 = 1,50 \text{ s} \quad t_0 = 0,50 \text{ s}$$

$$V_2(t_0^-) = +0,9179 - j 0,1302 \text{ pu} \quad M_2(t_0^-) = 0,9271 \text{ pu} \quad \theta_2(t_0^-) = -0,1409 \text{ rad}$$

$$S_2(t_0^-) = -1,2306 - j 0,4899 \text{ pu} \quad P_2(t_0^-) = -1,2306 \text{ pu} \quad Q_2(t_0^-) = -0,4899 \text{ pu}$$

$$T_2^{(e)}(t_0^-) = 1,20 \text{ pu} \quad T_2^{(m)}(t_0^-) = 1,20 \text{ pu} \quad s_2(t_0^-) = 1,701 \%$$

$$T_2^{(m)}(t) = 1,20 [1 - 0,15 H(t - t_0)] \text{ pu} \quad (\text{estável})$$

$$= 1,20 [1 + 0,15 H(t - t_0)] \text{ pu} \quad (\text{instável})$$

instantâneos na representação de sistemas de potência disposta em (2.1), transitórios de fenômenos eletromecânicos podem ser considerados instantâneos em escalas de tempo que variam desde poucos minutos ou até mesmo horas. Nesse caso, tem-se que $\dot{x} = \vec{0}$ para o conjunto de equações (2.1), tornando-o completamente algébrico. Através de substituições, é possível isolar um segundo equacionamento algébrico, reduzido em relação ao anterior, que depende apenas de variáveis de entrada ou controle, variáveis de interface e tensões nodais da rede elétrica. Dessa forma, o problema do fluxo de potência ou problema do fluxo de carga é estabelecido. Em última análise, cada problema de fluxo de potência descreve os possíveis pontos de equilíbrio de um sistema de potência para uma determinada condição de rede, geração e carga. Por suprimir todas as equações diferenciais, esse tipo de simulação é referida como estática.

Retornando ao sistema-exemplo anterior, a Figura 2.2.b apresenta a simulação estática para valores crescentes de carga mecânica $T_2^{(m)}$, a partir de uma condição de carga mecânica nula. Essa figura concentra-se, especificamente, na relação existente entre a magnitude de tensão e a potência ativa injetada, ambos referentes a Barra 2. O conjunto dos pontos que compõem a projeção em um plano magnitude de tensão versus potência ativa costuma ser referido como curva PV. Conforme disposto em (2.3), a simplicidade do sistema-exemplo permite extrair das equações algébricas originais uma expressão que define V_2 como função tão somente de P_2 , ou ainda, uma expressão que descreve, sozinha, os pontos contidos na curva PV apresentada. Bem como um consumo de potência ativa nulo por uma resistência pode ser associado a duas condições de operação distintas (curto-circuito ou circuito-aberto), cada valor de potência ativa na curva PV está associada a dois valores de tensão.

$$\begin{aligned}
& -V_1^* \left[Z_{12} + j X_2^{(sr)} \right] V_2^2 \\
& + \left[\left(V_1 V_1^* + P_2 Z_{12} \right) \left(Z_{12} + j 2 X_2^{(sr)} \right) - P_2 Z_{12} Z_{12}^* \right] V_2^1 \\
& + V_1 \left[P_2 Z_{12} \left(Z_{12} - j 2 X_2^{(sr)} \right) - V_1 V_1^* j X_2^{(sr)} \right] V_2^0 = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Ainda que obtidas a partir de simulações estáticas, curvas PV permitem inferir informações de natureza dinâmica. Em um primeiro momento, é interessante destacar que além das soluções estáticas que representam, de fato, possíveis pontos de equilíbrio para o sistema físico, existem soluções que são puramente matemáticas ou, em outras palavras, soluções que são incoerentes sob a ótica física do problema. Essas soluções costumam ser ditas espúrias. No contexto do sistema-exemplo, soluções espúrias aparecem quando determinado valor de carga mecânica produz um consumo de potência ativa complexo. A equação (2.4), que descreve P_2 como função tão somente de $T_2^{(m)}$, permite obter que valores de carga mecânica superiores

à 1,3175 recaem na condição anteriormente descrita. Quando a carga mecânica assume este exato valor, o consumo de potência ativa na Barra 2 é 1,3724. Intuitivamente, soluções espúrias sinalizam uma condição de instabilidade do sistema dinâmico: se as condições de carga, geração e rede são fisicamente coerentes, a origem da incongruência que culmina na obtenção de uma solução espúria recai sobre a premissa da simulação estática de suprimir todas as derivadas existentes no conjunto de equações algébrico-diferencial original. Ou, equivalentemente, as condições de carga, geração e rede que produzem soluções estáticas espúrias apresentariam derivadas não nulas no conjunto de equações algébrico-diferencial original.

$$\begin{aligned}
& \left(Z_{12} + R_2^{(s)} + j X_2^{(sr)} \right) \left(Z_{12}^* + R_2^{(s)} - j X_2^{(sr)} \right) P_2^2 \\
& + \left\{ R_2^{(s)} V_1 V_1^* + T_2^{(m)} \left[2 \left(Z_{12} Z_{12}^* + X_2^{(sr)} X_2^{(sr)} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + Z_{12} \left(R_2^{(s)} - j 2 X_2^{(sr)} \right) + Z_{12}^* \left(R_2^{(s)} + j 2 X_2^{(sr)} \right) \right] \right\} P_2^1 \\
& + T_2^{(m)} \left\{ R_2^{(s)} V_1 V_1^* + T_2^{(m)} \left[Z_{12} Z_{12}^* - j X_2^{(sr)} \left(Z_{12} - Z_{12}^* + j X_2^{(sr)} \right) \right] \right\} P_2^0 = 0
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Por sua vez, soluções estáticas que efetivamente representam pontos de equilíbrio podem ser avaliadas estáveis à pequenas perturbações ou instáveis. Um sistema físico dinâmico não-linear de forma $\dot{x} = f(x, u)$ pode ser linearizado ao redor de um ponto de equilíbrio (x_0, u_0) e, portanto, ser reescrito conforme $\Delta \dot{x} = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta u$, onde A e B são matrizes de coeficientes constantes. De fato, mesmo sistemas físicos tal qual (2.1) (sistemas que incluem equações algébricas e outros conjuntos próprios de variáveis além das diferenciais e de entrada) também podem ser linearizados conforme equação anterior. Da teoria de controle linear, sabe-se que um ponto de equilíbrio é estável à pequenas perturbações quando todos os autovalores da sua respectiva matriz A possuem parte real negativa. Caso contrário, instável. Retornando ao sistema-exemplo discutido até então, a linearização de (2.2) permite obter a Figura 2.3, que apresenta os autovalores das matrizes A associadas aos pontos de equilíbrio que compõem a curva PV disposta na Figura 2.2.b. Como essas matrizes possuem dimensão 1 x 1, cada uma delas possui um único autovalor e o mesmo, necessariamente, é um número real.

Finalmente, a partir da Figura 2.3, pode-se concluir que os pontos de equilíbrio da parte superior da curva PV apresentada na Figura 2.2.b são estáveis à pequenas perturbações, enquanto os pontos de equilíbrio da parte inferior são instáveis. De fato, esse resultado não se limita ao sistema-exemplo. As respostas dinâmicas dos dispositivos frequentemente encontrados em sistemas de potência reais tornam essa afirmação verdadeira em um grande número de casos [8], de modo que pontos de equilíbrio estáveis à pequenas perturbações podem ser satisfatoriamente caracterizados por inequações envolvendo $\partial M_k / \partial P_k$, por exemplo.

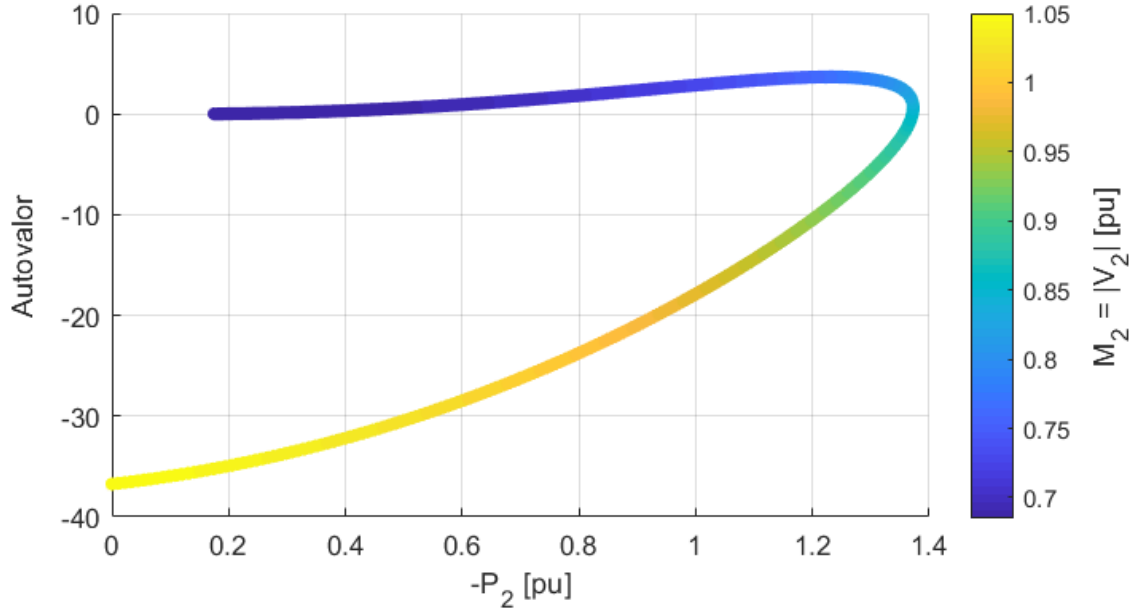


Figura 2.3: Autovalores referentes a linearização do sistema-exemplo

Nesse contexto, o ponto de equilíbrio no qual $\partial V_k / \partial P_k$ é singular também merece destaque por ser um ponto de acumulação das três regiões descritas anteriormente para a simulação estática: estável, instável e espúria. A equação (2.5) obtém este ponto para o sistema-exemplo. Por conveniência, definiu-se $\Phi_2(V_2, P_2) = 0$ para se referir a (2.3), que descreve implicitamente V_2 como função de P_2 .

$$\frac{d\Phi_2}{dP_2} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial V_2} \frac{\partial V_2}{\partial P_2} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial P_2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial V_2}{\partial P_2} = -\frac{\frac{\partial\Phi_2}{\partial P_2}}{\frac{\partial\Phi_2}{\partial V_2}} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial V_2} = 0 \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_2 = 0 \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial V_2} = 0 \end{array} \right\} P_2 = |V_1|^2 \frac{\operatorname{Re}\{Z_{12}\} \pm |Z_{12} + j X_2^{(sr)}|}{2 [\operatorname{Im}\{Z_{12}\} + X_2^{(sr)}]^2} = \begin{cases} -1, 3724 \\ +1, 6620 \end{cases}$$

O exemplo discutido até então evidencia que mesmo para um sistema de potência elementar, o problema do fluxo de potência pode ser descrito por um conjunto de equações algébricas não-linear que apresenta inúmeras soluções. Com exceção de pouquíssimos casos particulares, é impossível obter soluções em *closed form* desse problema. Sendo assim, os mais variados métodos iterativos costumam ser empregados. As limitações inerentes aos métodos iterativos são amplamente documentadas: a depender da aproximação inicial adotada, o processo iterativo pode convergir ou não; em caso de não-convergência, não existem formas práticas de identificar se o conjunto de equações, de fato, não possui solução ou se o método iterativo simplesmente falhou em obtê-la; em caso de convergência, se o conjunto de equações possui

múltiplas soluções, também não existem formas práticas que permitem relacionar as aproximações iniciais com as respectivas soluções encontradas. Por essas razões, alternativas aos métodos iterativos continuam sendo estudadas e propostas.

Em 2012, foi apresentado o método da incorporação holomórfica, que introduziu uma nova metodologia de solução ao interpretar as equações do problema do fluxo de potência sob a ótica da geometria algébrica e da análise complexa [9]. Originalmente proposto para obter um ponto de operação estável (à pequenas perturbações) de uma rede elétrica que representa um equivalente monofásico, este trabalho apresenta uma generalização do método da incorporação holomórfica de forma a acomodar o problema do fluxo de potência que permite descrever uma rede elétrica trifásica desequilibrada. Em outras palavras, a proposição original do método manteve-se focada na transmissão de um sistema de potência, enquanto este trabalho altera o foco para a distribuição.

2.1 Revisão Bibliográfica

A patente [10], registrada em 2009 por Antonio Trias, estabeleceu o método da incorporação holomórfica para obtenção de um ponto de operação estável para o equivalente monofásico de sequência positiva de um sistema de potência. Como sua própria denominação sugere, o método consiste em adicionar no conjunto de equações do problema do fluxo de potência uma dependência em relação à uma nova variável complexa, normalmente referida por s , de modo que as incógnitas originais do problema possam ser interpretadas como funções holomórficas em relação à essa nova variável. Assim, é possível reinterpretar o sistema de equações sob a ótica da análise complexa, permitindo que a solução seja encontrada através do cálculo das séries de Taylor e dos aproximantes de Padé associados a essas funções. Dentre as infinitas formulações possíveis nesse contexto, a patente se dedica a apresentação de uma incorporação que resolve um dado problema de fluxo de potência a partir da imposição de uma solução estável e trivial quando $s = 0$, representando uma condição de operação na qual não haveria circulação de corrente na rede elétrica (e, conseqüentemente, uma mesma tensão complexa se propagaria por toda a mesma).

Em 2012, por intermédio do artigo [9], o método foi efetivamente apresentado a comunidade acadêmica sob alegações que também podem ser encontradas na própria patente:

“In short, the holomorphic embedding load flow method provides a procedure to compute, with mathematically proven guarantees of success, the right solution to the desired accuracy (within the constraints of the computer arithmetic accuracy) and otherwise signals unambiguously if the

system has no solution (voltage collapse)."

"At $s = 0$, the embedding should be such that the system becomes linear and trivially simple to solve (the no-load, no-generation case). This unambiguously selects the reference solution at $s = 0$... For the purposes of the load flow method, the aim is to perform analytic continuation of the reference solution at $s = 0$ along paths that ensure single-valuedness, in other words, remaining always within the white branch... By using Padé Approximants, these are guaranteed to yield maximal analytical continuation, therefore the solution is obtained when it exists, or a divergence is obtained when it does not exist."

É importante destacar que o autor utilizou os termos “*right*” e “*white*” como sinônimos de “*stable*”. Portanto, existiu explicitamente por parte do autor, uma declaração de que o método da incorporação holomórfica era capaz de obter de forma inequívoca uma solução estável de um dado problema do fluxo de potência: na hipótese de existência de solução estável, os aproximantes de Padé obrigatoriamente convergiriam para a mesma; e na hipótese do resultado obtido pelos aproximantes de Padé não satisfazerem as equações do problema do fluxo de potência, não existiria solução estável. O único requerimento apresentado para tal, além da evidente necessidade da incorporação descrever funções holomórficas, foi a necessidade de impor uma solução estável quando $s = 0$.

Em 2015, o método da incorporação holomórfica foi explorado pelo autor em um novo artigo [11], contudo, foram apresentadas alegações que contrastam moderadamente com as anteriores:

"However, the choice of embedding is not completely harmless. Different forms of the embedding result in different algebraic curves [i.e. holomorphic functions], having different branching points... The result may be that, for powerflow cases where the operational solution [...] does exist, the additional branching points could introduce obstacles to the convergence of the Padé Approximants... For the two-bus case, it can be shown rigorously that a minimal embedding is free of this problem. For the general n -bus case, there is extensive numerical evidence as well as strong heuristic reasons to support this as well... Evidence shows that the canonical embedding is also free of problems."

"This concludes the foundations for the completeness of the method: if the operational solution exists, the method will find it, Stahl's theorem and the choice of the canonical embedding ensure that the Padé Approximants converge [...] to the solution; if the operational solution does

not exist, the method will detect so, nonconvergence of the Padé Approximants [...] necessarily implies an unfeasible powerflow.”

Neste novo artigo, o autor utilizou os termos “*operational*” e “*white*” como sinônimos de “*stable*” e manteve a expectativa de convergência inequívoca do método para uma solução estável, porém, no mérito de duas classes de incorporação específicas, as quais o mesmo se referiu como “mínima” e “canônica”. Além disso, explicou que uma demonstração matemática rigorosa das propriedades de convergência do método apenas existe para o contexto da incorporação mínima em um sistema de duas barras. O conteúdo de [12] e o Apêndice de [11] permitem inferir que o sistema de duas barras considerado é composto por uma impedância que conecta uma barra infinita a uma barra de carga que apresenta um consumo de potência aparente constante. Para um sistema de potência genérico composto por inúmeras barras, há somente uma conjectura corroborada por extensas evidências numéricas.

A título de ilustração, em (2.6) está apresentado a forma geral das equações nodais de rede e suas respectivas incorporações holomórficas, mínima e canônica. Na incorporação mínima a variável s incide apenas na injeção líquida de potência aparente, enquanto a incorporação canônica impõe uma separação prévia da matriz de admitância em uma matriz de admitância equivalente série, denotada por \tilde{Y} , e uma matriz de admitância equivalente shunt, denotada por \hat{Y} . Assim, além da injeção líquida de potência aparente, a variável de incorporação incide sobre os elementos da matriz de admitância equivalente shunt. É interessante notar que no contexto de barras que possuem cargas cujas modelagens apresentam parcelas de impedância constante, caso essas parcelas sejam mantidas externas à matriz de admitância, a incorporação mínima passa a apresentar a mesma estrutura algébrica da incorporação canônica.

$$\begin{aligned}
 V_k^* \sum_{i=1}^N Y_{ki} V_i &= S_k^* \quad (\text{equação original}) \\
 V_k^*(s^*) \sum_{i=1}^N Y_{ki} V_i(s) &= s S_k^* \quad (\text{incorporação mínima}) \\
 V_k^*(s^*) \sum_{i=1}^N \left(\tilde{Y}_{ki} + s \hat{Y}_{ki} \right) V_i(s) &= s S_k^* \quad (\text{incorporação canônica})
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tanto a patente [10] quanto o artigo [9] estabeleceram o método no contexto de sistemas de potência extremamente simplificados, não incluíam, por exemplo, a capacidade de controle de magnitude de tensão por injeção de potência reativa. De fato, em [9], o autor afirma que a generalização do método para acomodação de controles que podem ser descritos por equações algébricas é óbvia, porém, este tema seria explorado detalhadamente em uma publicação futura, na época, em estágio de

preprint. Contudo, a publicação mencionada não pôde ser encontrada em nenhum periódico. No período compreendido entre 2012 e 2015, durante o hiato de publicações do autor original, duas formulações possíveis para representação do controle de magnitude de tensão por injeção de potência reativa foram apresentadas pelo então mestrando da Universidade do Estado do Arizona, Muthu Subramanian [13, 14]. Uma delas é creditada ao próprio Trias citando uma “*personal communication*” entre eles. Nesse mesmo período, um então doutorando, também da Universidade do Estado do Arizona, Yang Feng, apresentou uma demonstração matemática rigorosa que o método poderia ser adaptado para uma obtenção inequívoca de soluções instáveis [15, 16]. Essa demonstração se restringe a um sistema de potência de duas barras, tal qual a apresentada por Trias no contexto da obtenção de soluções estáveis.

A partir de 2016, o método da incorporação holomórfica parece ter saído do ostracismo, passando a ser objeto de estudo de diversos outros autores. Os parágrafos subsequentes se dedicam a elencar os principais avanços alcançados, agrupando as publicações de acordo com o seu foco de desenvolvimento (aplicação específica, discussão dos fundamentos matemáticos ou ambos). É importante destacar que muitas das publicações listadas, provavelmente influenciadas pela leitura de [9], transmitem o entendimento que o método apresenta propriedades de convergência asseguradas por teoremas matemáticos bem estabelecidos, quando, na verdade, os teoremas frequentemente citados não garantem essas propriedades. Conforme apontado anteriormente, a rigor, existe somente uma conjectura a respeito das propriedades de convergência do método.

Dentre as publicações que mantêm-se focadas em aplicações específicas do método da incorporação holomórfica, destacam-se:

- As publicações [17, 18] realizam testes comparativos entre a incorporação holomórfica canônica e diversos métodos iterativos clássicos no contexto do problema do fluxo de potência.
- A publicação [19] propõe outras formas de incorporação, que apesar de produzirem funções holomórficas diferentes quando comparadas à incorporação holomórfica canônica, continuam apresentando a mesma solução estável e trivial quando $s = 0$: uma tensão complexa unitária se propagando por toda a rede elétrica.
- As publicações [20–24] propõem incorporações nas quais as funções holomórficas obtidas englobam pontos que coincidem com curvas PV. Para tal, a variação de s deve incidir somente sobre demandas e/ou gerações de potência ativa e/ou reativa dos barramentos presentes na rede elétrica, realizando, dessa forma, escalonamentos nesses parâmetros. Conseqüentemente, a solução para

o problema do fluxo de potência em $s = 0$ pode não ser trivial e, nesse caso, deve ser um ponto de operação conhecido *a priori*. Explorando incorporações semelhantes, as publicações [25–27] propõem metodologias de análise estática de estabilidade de tensão, incluindo, por exemplo, a determinação de barramentos “fracos”.

- As publicações [28, 29] propõem que sejam utilizadas múltiplas variáveis de incorporação de modo que cada uma delas realize, de forma independente, escalonamentos na demanda e/ou geração de potência ativa e/ou reativa de barramentos presentes na rede elétrica, seja individualmente por barramento ou em conjuntos de barramentos. Nesse caso, as funções holomórficas naturalmente se tornam funções multivariáveis, sendo possível obter recortes bidimensionais que coincidem com curvas PV. A solução para o problema do fluxo de potência em $(s_1, s_2, \dots, s_n) = (0, 0, \dots, 0)$ não é trivial, devendo ser um ponto de operação conhecido *a priori*.
- As publicações [20, 30–32] propõem incorporações holomórficas nas quais o problema de fluxo de potência representado pela condição de $s = 0$ é adaptado conforme uma aproximação de um ponto de operação.
- A publicação [33] propõe uma extensão da incorporação holomórfica canônica, onde os limites de geração de potência reativa são internalizados no sistema de equações através da aplicação do método de otimização de pontos interiores. Também propõe uma metodologia de reexpansão das séries de Taylor a partir de transformações de translação-projeção sob as quais as equações do fluxo de potência são invariantes, permitindo que esse processo, chamado pelo autor de Padé-Weierstrass, possa ser utilizado recursivamente até que uma determinada tolerância seja atendida.
- As publicações [34, 35] propõem metodologias de redução de rede não-lineares baseadas no método da incorporação holomórfica.
- A publicação [36] explora o método da incorporação holomórfica no contexto de algoritmos historicamente voltados para sistemas de distribuição radiais ou pouco malhados, como por exemplo, o algoritmo *backward-forward sweep*.
- As publicações [37–39] exploram o método da incorporação holomórfica no contexto de simulações dinâmicas. Nesse caso, a variável de incorporação s é tratada como uma representação direta do tempo no sistema de equações algébrico-diferencial.
- A publicação [40] explora o método da incorporação holomórfica no contexto do problema de otimização do despacho econômico sem restrições.

- As publicações [41, 42] implementam uma modelagem de elos de corrente contínua no contexto da incorporação holomórfica canônica. Analogamente, as publicações [43–46] implementam modelagens para diversos outros dispositivos FACTS.

Dentre as publicações que mantêm-se focadas nos fundamentos teóricos do método da incorporação holomórfica, destacam-se:

- As publicações [47–51] discutem principalmente a participação do Teorema de Stahl no estabelecimento das propriedades de convergência do método. Esse teorema descreve o domínio de convergência de aproximantes de Padé no contexto de funções algébricas.
- A publicação [52] estressa a discussão a respeito da obtenção de funções holomórficas a partir de um conjunto de equações que apresenta complexos conjugados de incógnitas. Paralelamente, [53] discute o método sob a ótica da geometria algébrica.
- As publicações [54, 55] avaliam diferentes algoritmos de cálculo de aproximantes de Padé.

Por fim, a Tabela 2.1 apresenta as publicações cujo foco de desenvolvimento é a aplicação do método da incorporação holomórfica em sistemas trifásicos desequilibrados. De fato, este trabalho não é o pioneiro em se dedicar ao estudo do método nesse contexto. Dentre as publicações existentes, [7] é que mais se aproxima do objetivo deste trabalho de propor uma formulação suficientemente flexível, capaz de acomodar uma variedade de modos de controle que permitem uma representação satisfatória em regime permanente de máquinas síncronas, máquinas de indução e dispositivos de corrente alternada flexíveis do tipo shunt. Ainda assim, [7] apresentou uma formulação que pode ser dita menos abrangente em relação à proposta nesse trabalho. Além disso, nenhuma das publicações até então demonstrou preocupação em caracterizar as funções algébricas originadas por suas respectivas incorporações, em especial, descrever as singularidades. Conforme argumentado no Capítulo 4, a separação da matriz de admitância de barra em equivalente série e equivalente shunt produz consequências adversas.

Alguns conceitos que encontram-se apenas mencionados nos parágrafos anteriores podem ser melhores entendidos com os conteúdos do Capítulo 3 e do Capítulo 4.

Tabela 2.1: Relação dos sistemas trifásicos desequilibrados que foram resolvidos em publicações que exploraram o método da incorporação holomórfica

Referência	Sistemas Elétricos de Potência Avaliados					Outros
	<i>IEEE Test Feeders</i>					
	<i>13 Nodes</i>	<i>34 Nodes</i>	<i>37 Nodes</i>	<i>123 Nodes</i>	<i>Comprehensive</i>	
Trias ¹ [56]	–	–	–	–	–	–
Asl [57]	–	–	–	–	–	✓ ²
Gangwar [58]	–	✓	–	✓	–	–
Rao [59]	–	–	–	–	–	✓ ³
Sun [7]	✓ ⁴	✓ ⁴	✓ ⁴	✓ ⁴	–	–
Sur [60, 61]	✓ ⁵	–	–	✓ ⁶	–	–

¹Por ser uma patente, não apresenta resolução de nenhum sistema trifásico específico.

²Rede totalmente equilibrada de 19 barras, porém, um desequilíbrio foi imposto pela repartição das cargas nas fases; o sistema inclui geração distribuída tratada como injeção de potência aparente.

³Rede desequilibrada de 23 barras; o sistema inclui geração distribuída com capacidade de controle de magnitude de tensão independente por fase.

⁴Sistemas sofreram alteração para inserção de geração distribuída com os modos de controle: tensão interna equilibrada, injeção de corrente equilibrada e controle de magnitude de tensão.

⁵Sistema sofreu alteração para inserção de STATCOMs tratados como admitâncias equivalentes.

⁶Sistema sofreu alteração para inserção de geração distribuída com capacidade de controle de magnitude de tensão independente por fase.

Capítulo 3

Formulação do Problema do Fluxo de Potência Trifásico

A equação (3.1) apresenta a forma matricial em bloco, também referida como a forma matricial em submatrizes, das equações nodais de uma rede elétrica trifásica composta por N barramentos trifásicos. A mesma pode ser obtida através da aplicação da primeira lei de Kirchhoff em cada fase de cada um dos N barramentos, relacionando a injeção líquida de corrente por dispositivos considerados externos à rede elétrica com as correntes em direção aos dispositivos que são considerados internos à rede elétrica e, por consequência, são contabilizados na matriz de admitância de barra. Naturalmente, as equações (3.2), (3.3) e (3.4) podem ser escritas, respectivamente, para as fases A , B e C de um mesmo barramento trifásico de índice k .

$$\begin{bmatrix} I^{(a)} \\ I^{(b)} \\ I^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^{(aa)} & Y^{(ab)} & Y^{(ac)} \\ Y^{(ba)} & Y^{(bb)} & Y^{(bc)} \\ Y^{(ca)} & Y^{(cb)} & Y^{(cc)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{(a)} \\ V^{(b)} \\ V^{(c)} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$I_k^{(a)} = \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^{(aa)} V_i^{(a)} \right) + \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^{(ab)} V_i^{(b)} \right) + \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^{(ac)} V_i^{(c)} \right) \quad (3.2)$$

$$I_k^{(b)} = \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^{(ba)} V_i^{(a)} \right) + \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^{(bb)} V_i^{(b)} \right) + \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^{(bc)} V_i^{(c)} \right) \quad (3.3)$$

$$I_k^{(c)} = \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^{(ca)} V_i^{(a)} \right) + \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^{(cb)} V_i^{(b)} \right) + \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^{(cc)} V_i^{(c)} \right) \quad (3.4)$$

Neste equacionamento, é evidente que não há uma representação explícita de um ponto de neutro para nenhum barramento trifásico. Sendo assim, elementos de rede que incluem pontos de neutro além das três fases apenas podem ser tratados através de equivalentes, aproximados ou não, que eliminam esses nodos adicionais.

Por exemplo, linhas de distribuição à quatro condutores podem ser aproximadas¹ por equivalentes à três condutores fazendo uso de redução de Kron.

Os próximos subcapítulos se dedicam a apresentar detalhadamente os modelos matemáticos considerados para os dispositivos elétricos presentes nos casos de fluxo de potência avaliados neste trabalho.

3.1 Matriz de Admitância de Barra

Basicamente, a matriz de admitância de barra é obtida organizando os somatórios das correntes que saem dos barramentos trifásicos em direção aos dispositivos série ou shunt considerados internos à rede elétrica. No contexto deste trabalho, linhas de transmissão, linhas de distribuição, transformadores e autotransformadores fazem parte desse grupo de dispositivos. Evidentemente, uma formulação baseada nas equações nodais de rede em termos de admitâncias exige a construção de matrizes de admitância primitivas para todos os dispositivos elétricos considerados internos à rede. O Apêndice A contém o detalhamento dos subvetores e das submatrizes existentes nas equações matriciais em bloco dispostas neste subcapítulo. É importante destacar que o equacionamento apresentado, no que tange à inversão das matrizes em bloco, poderia ter sido continuado com a utilização das fórmulas de Boltz-Banachiewicz e Sherman–Morrison. Contudo, a implementação realizada obtém soluções numéricas a partir das exatas formas apresentadas a seguir. A literatura contempla tanto generalizações [62, 63] quanto particularizações [64–66] deste equacionamento.

Por fim, também é importante destacar que por se tratar de uma formulação que descreve a rede elétrica trifásica explicitamente em termos de admitâncias, se faz necessário estabilizar numericamente conexões em delta de transformadores através da inserção de impedâncias trifásicas, virtualmente infinitas, conectadas em estrela.

3.1.1 Linhas de Distribuição e Transmissão

A Figura 3.1 apresenta o modelo considerado para uma linha trifásica, de distribuição ou de transmissão, que interconecta os barramentos k e m . A aplicação de conceitos elementares no contexto de circuitos elétricos permite o desenvolvimento da equação matricial em bloco (3.5).

O modelo pressupõe que as matrizes de impedância série e admitância shunt, z_{km} e y_{km} , são compostas por parâmetros concentrados. A obtenção dessas matrizes a partir das suas variações por unidade de comprimento, referidas por z'_{km} e y'_{km} ,

¹Não será uma aproximação se a referida linha de distribuição possuir seus condutores de neutro solidamente aterrados em ambas as extremidades. Nesse caso, os efeitos do neutro são perfeitamente assimilados pelos condutores de fase equivalentes obtidos pela redução de Kron.

pode ser realizada através das equações (3.6), (3.7) e (3.8), onde $\gamma_{km}^{(v)}$ representa a matriz das constantes complexas de propagação de tensão. Nessas mesmas equações, o comprimento da linha está denotado por ℓ e as funções transcendentais presentes devem ser entendidas de forma análoga à exponencial matricial. É trivial demonstrar que caso o produto $\gamma_{km}^{(v)} \cdot \ell$ seja suficientemente pequeno, a equação (3.7) pode ser aproximada por $z_{km} = z'_{km} \cdot \ell$ e a equação (3.8) por $y_{km} = y'_{km} \cdot \ell$ [67, 68].

Destaca-se que linhas monofásicas e bifásicas foram implementadas com essa mesma modelagem. Nesses casos, impedâncias mútuas relacionadas as fases ausentes são consideradas nulas, bem como as impedâncias próprias das fases ausentes são consideradas infinitas de acordo com a precisão numérica na qual as variáveis são inicializadas.

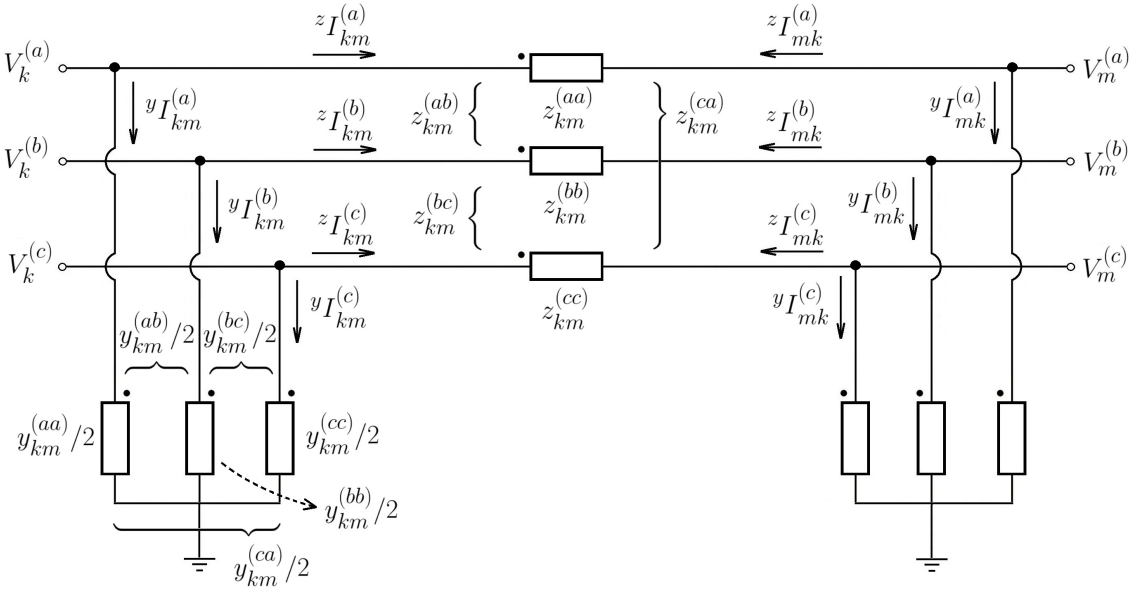


Figura 3.1: Modelagem de linhas de distribuição ou de transmissão trifásicas

$$\begin{bmatrix} I_{km}^\phi \\ I_{mk}^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z I_{km}^\phi \\ z I_{mk}^\phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y I_{km}^\phi \\ y I_{mk}^\phi \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} z_{km}^{-1} & -z_{km}^{-1} \\ -z_{km}^{-1} & z_{km}^{-1} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_{km} & 0 \\ 0 & y_{km} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V_k^\phi \\ V_m^\phi \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\gamma_{km}^{(v)} = (z'_{km} y'_{km})^{1/2} \quad (3.6)$$

$$z_{km} = \sinh\left(\gamma_{km}^{(v)} \ell\right) (\gamma_{km}^{(v)})^{-1} (z'_{km}) \quad (3.7)$$

$$y_{km} = 2 (y'_{km}) (\gamma_{km}^{(v)})^{-1} \tanh\left(\frac{\gamma_{km}^{(v)} \ell}{2}\right) \quad (3.8)$$

3.1.2 Transformadores de Dois Enrolamentos

A Figura 3.2.a apresenta o modelo clássico de transformadores monofásicos de dois enrolamentos quando as perdas de potência ativa e reativa relacionadas a magneti-

zação de seu núcleo ferro-magnético são desprezadas. É possível decompor o transformador ideal presente no modelo clássico em outros dois transformadores ideais e refletir a impedância série existente de modo que a mesma seja mantida encapsulada entre esses transformadores. O modelo equivalente recém descrito está apresentado na Figura 3.2.b.

Neste trabalho, transformadores trifásicos foram admitidos bancos de transformadores monofásicos. Os modelos que representam as configurações de conexão $Y_g - Y_g$, $\Delta - \Delta$, $Y_g - \Delta$ e $\Delta - Y_g$ estão apresentados entre as Figuras 3.3 e 3.8. Cada figura está acompanhada da equação matricial em bloco que caracteriza o seu respectivo modelo e essas equações foram obtidas através da aplicação da lei de Ohm, leis de Kirchhoff e princípio da conservação de potência em transformadores ideais. As conexões dispostas seguem o padrão de transformadores elevadores (*step-up*) e abaixadores (*step-down*) definido pela ANSI [69].

Analogamente ao realizado para a representação de linhas monofásicas e bifásicas, configurações de conexão de transformadores, que envolvem uma operação na qual pelo menos uma fase está em aberto, podem ser obtidas impondo uma impedância virtualmente infinita ao modelo de transformador monofásico associado a fase ausente. Essa mesma estratégia também se fez necessária para representar a conexão Y utilizando o equacionamento obtido a partir da conexão Y_g . Nesse caso, porém, a imposição de um valor virtualmente infinito ocorre na impedância de aterramento. Em relação ao tape a ser admitido para o modelo de transformador monofásico associado as fases ausentes, pode-se utilizar um valor unitário.

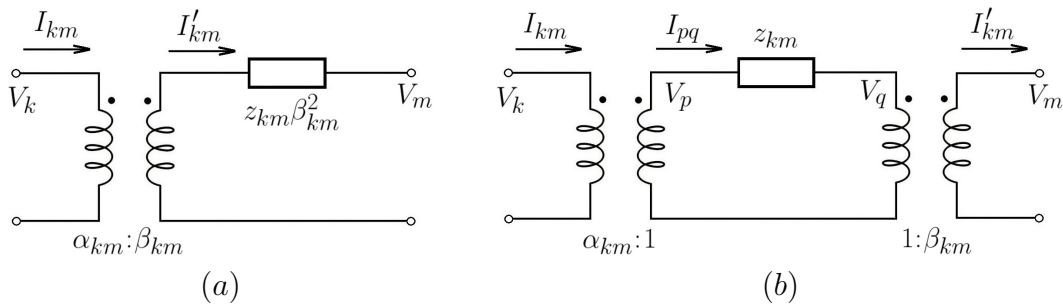


Figura 3.2: Modelagem de transformadores monofásicos de dois enrolamentos: **(a)** modelo clássico; **(b)** modelo efetivamente considerado

3.1.3 Transformadores de Dois Enrolamentos com Derivação Central

A Figura 3.9 apresenta o modelo clássico de transformadores monofásicos de dois enrolamentos com derivação central no secundário quando as perdas de potência ativa e reativa relacionadas a magnetização de seu núcleo ferro-magnético são desprezadas. Em sistemas trifásicos, o enrolamento em derivação desse tipo de transformador

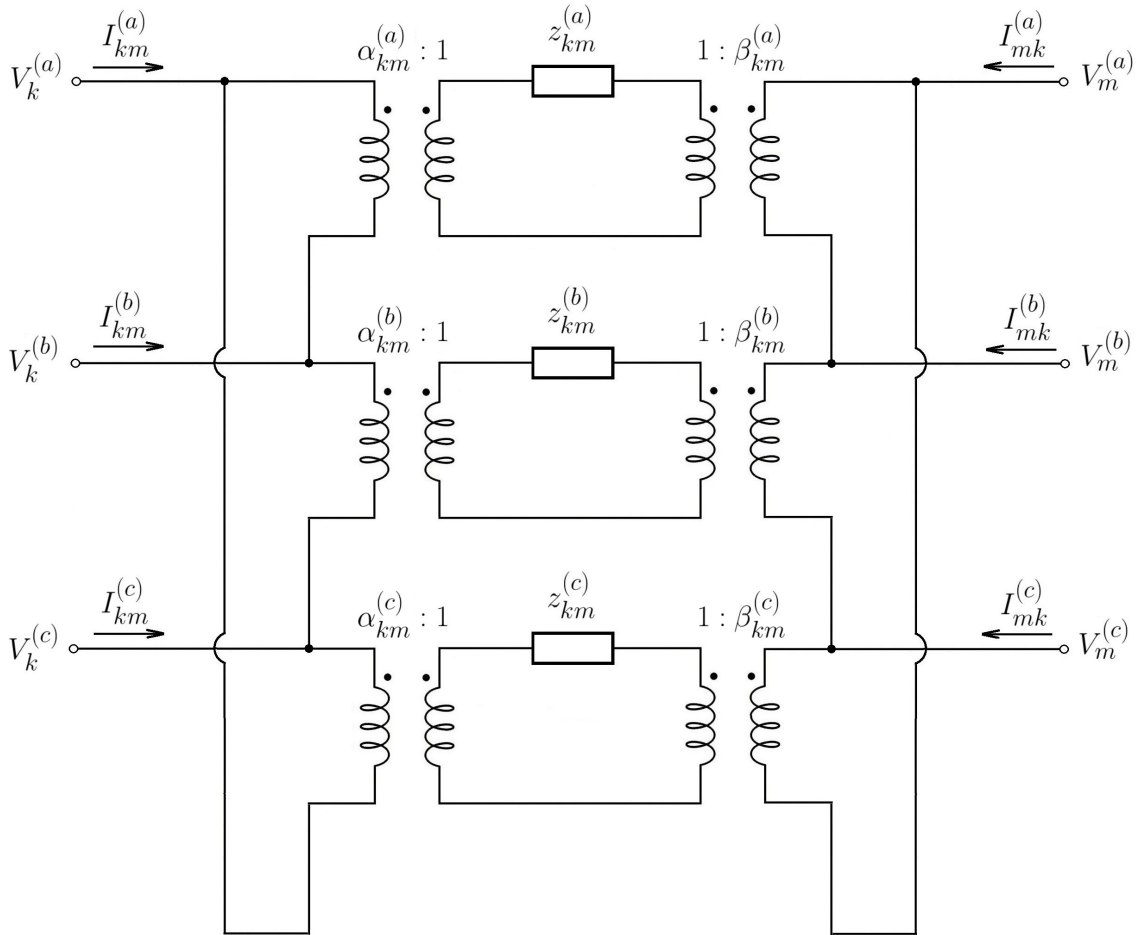


Figura 3.4: Modelagem de transformadores trifásicos em conexão $\Delta - \Delta$

$$\begin{bmatrix} I_{km}^\phi \\ I_{mk}^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{km}^\phi (\alpha_{km}^\phi)^* & 0 \\ 0 & z_{km}^\phi (\beta_{km}^\phi)^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\alpha_{km}^\phi)^{-1} & -(\beta_{km}^\phi)^{-1} \\ -(\alpha_{km}^\phi)^{-1} & (\beta_{km}^\phi)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^\phi \\ V_m^\phi \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

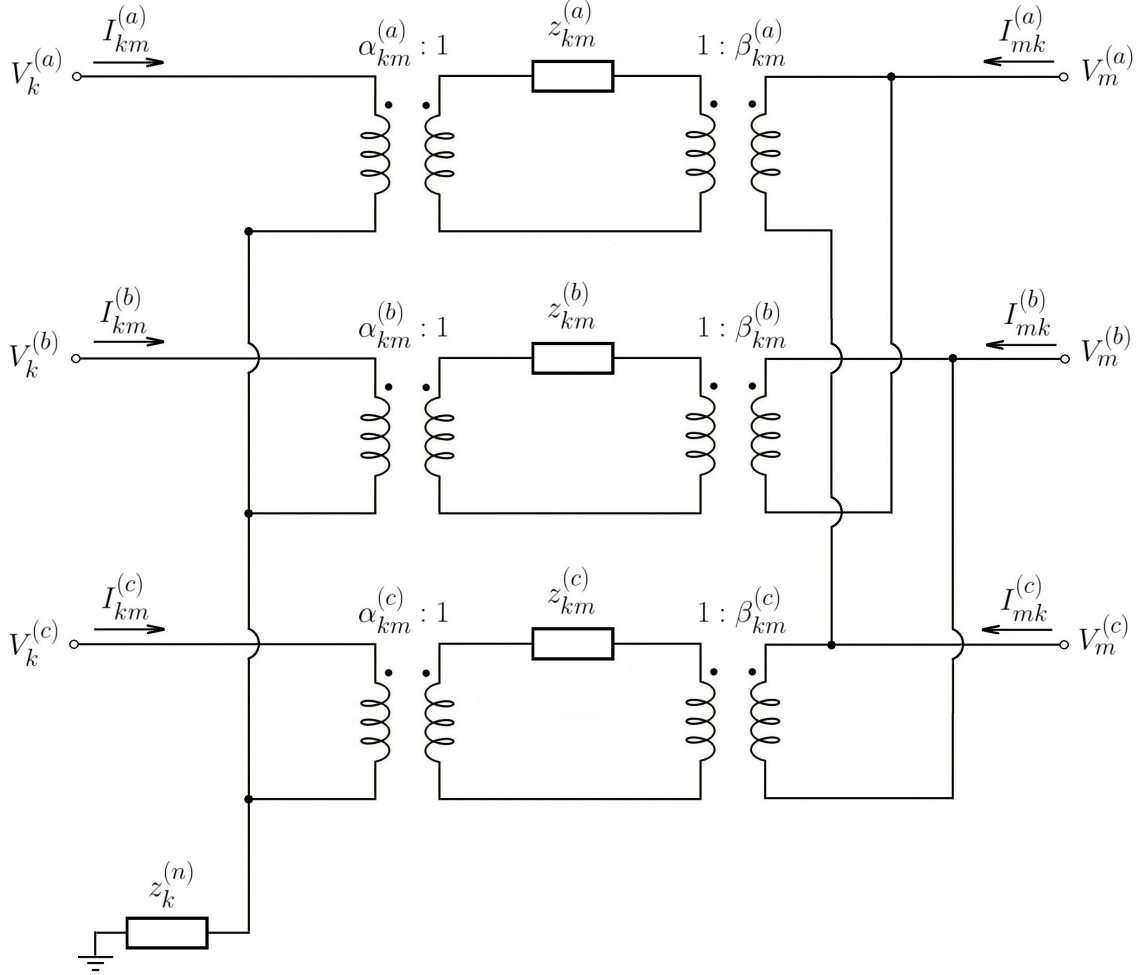


Figura 3.5: Modelagem de transformadores trifásicos elevadores em conexão $Y_g - \Delta$

$$\begin{bmatrix} I_{km}^\phi \\ I_{mk}^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{km}^\phi (\alpha_{km}^\phi)^* + (\alpha_{km}^\phi)^{-1} z_k^{(n)} C & 0 \\ -(\alpha_{km}^\phi)^{-1} z_k^{(n)} C & z_{km}^\phi (\beta_{km}^\phi)^* E \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\alpha_{km}^\phi)^{-1} & -(\beta_{km}^\phi)^{-1} \\ -(\alpha_{km}^\phi)^{-1} & (\beta_{km}^\phi)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & E A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^\phi \\ V_m^\phi \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

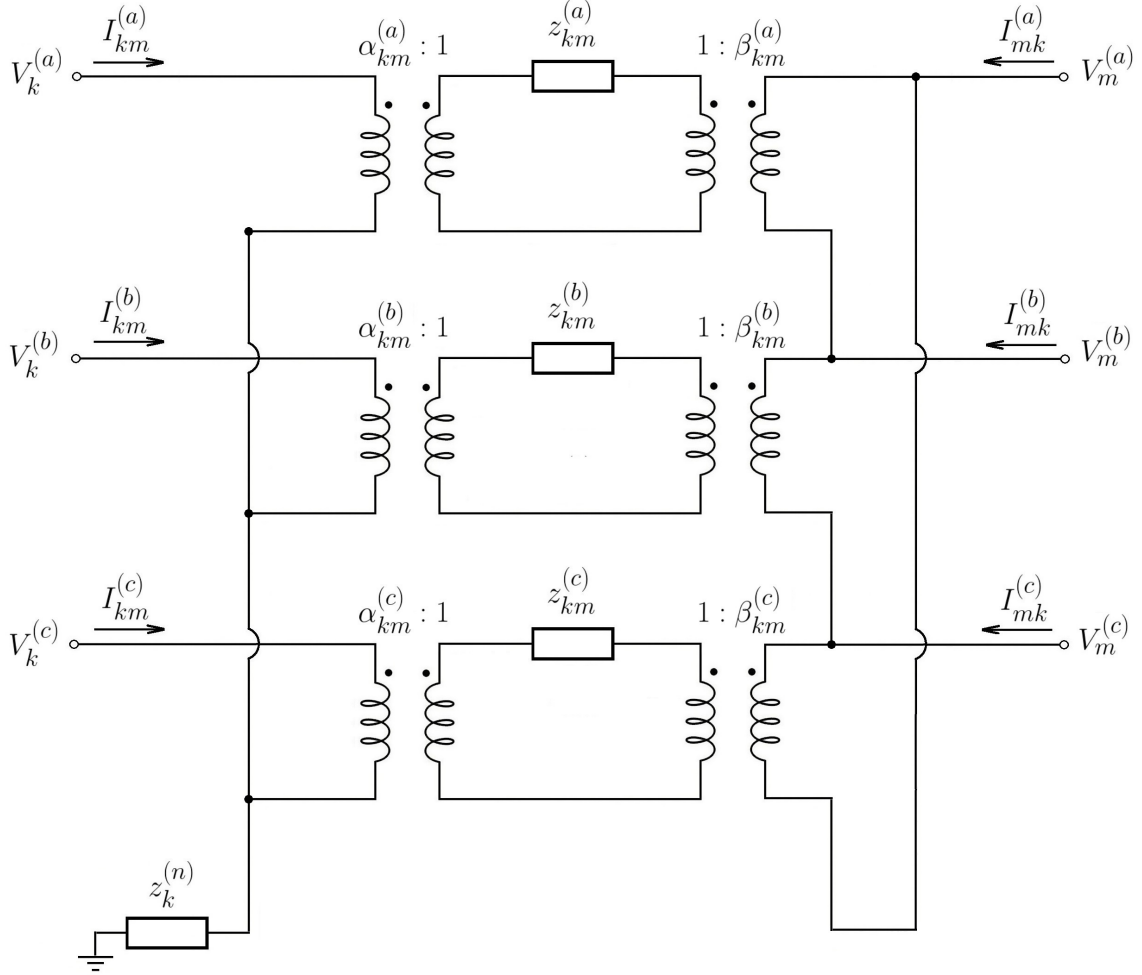


Figura 3.6: Modelagem de transformadores trifásicos abaixadores em conexão $Y_g-\Delta$

$$\begin{bmatrix} I_{km}^\phi \\ I_{mk}^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{km}^\phi (\alpha_{km}^\phi)^* + (\alpha_{km}^\phi)^{-1} z_k^{(n)} C & 0 \\ -(\alpha_{km}^\phi)^{-1} z_k^{(n)} C & z_{km}^\phi (\beta_{km}^\phi)^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\alpha_{km}^\phi)^{-1} & -(\beta_{km}^\phi)^{-1} \\ -(\alpha_{km}^\phi)^{-1} & (\beta_{km}^\phi)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^\phi \\ V_m^\phi \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

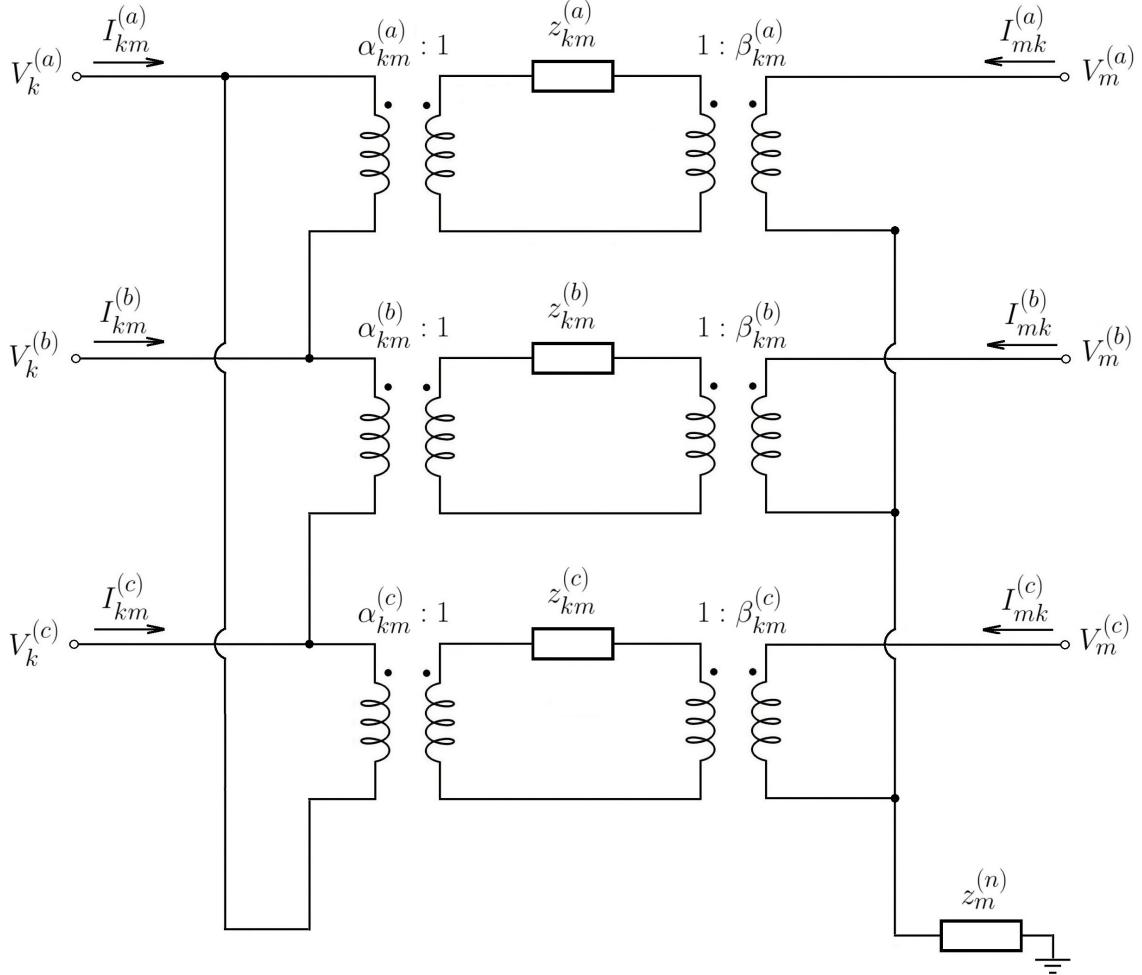


Figura 3.7: Modelagem de transformadores trifásicos elevadores em conexão $\Delta - Y_g$

$$\begin{bmatrix} I_{km}^\phi \\ I_{mk}^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{km}^\phi (\alpha_{km}^\phi)^* & -(\beta_{km}^\phi)^{-1} z_m^{(n)} C \\ 0 & z_{km}^\phi (\beta_{km}^\phi)^* + (\beta_{km}^\phi)^{-1} z_m^{(n)} C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\alpha_{km}^\phi)^{-1} & -(\beta_{km}^\phi)^{-1} \\ -(\alpha_{km}^\phi)^{-1} & (\beta_{km}^\phi)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^\phi \\ V_m^\phi \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

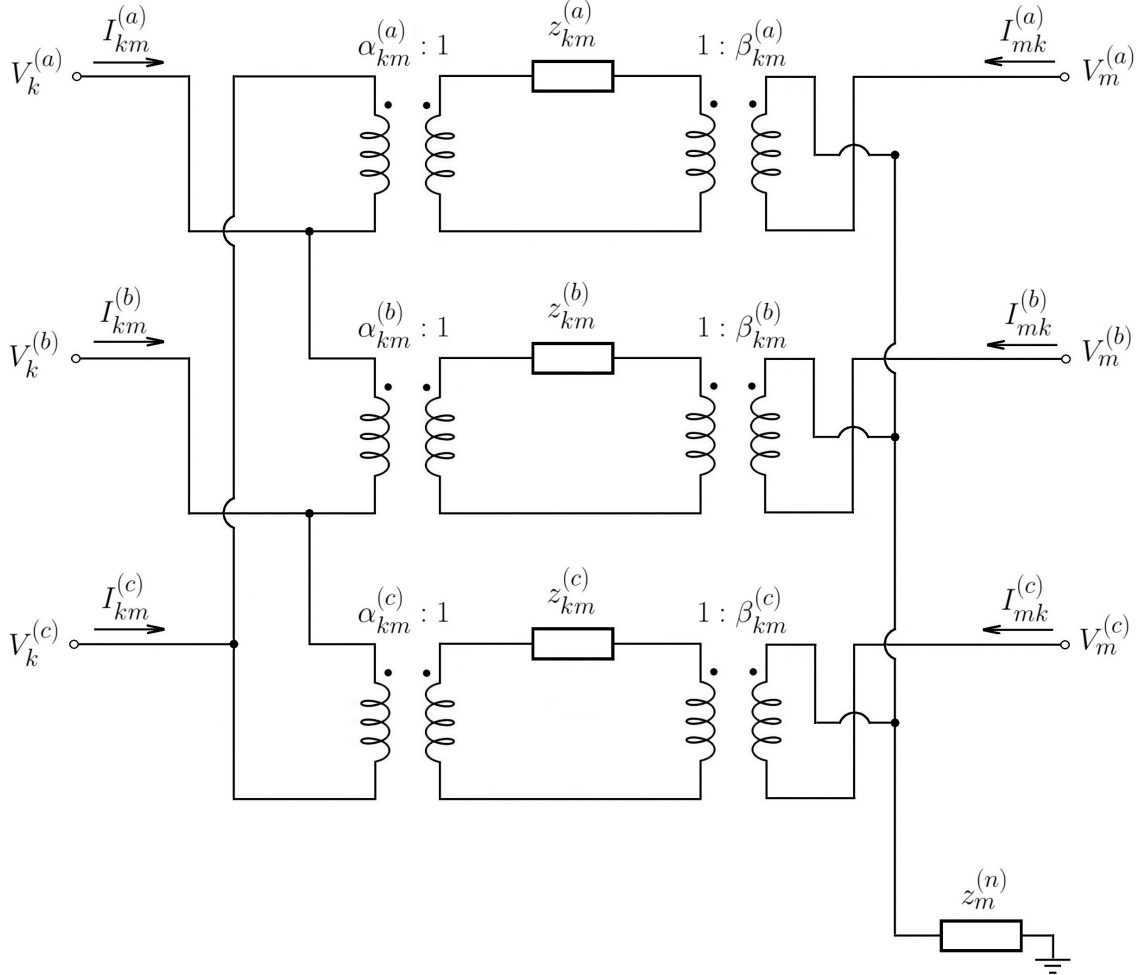


Figura 3.8: Modelagem de transformadores trifásicos abaixadores em conexão $\Delta-Y_g$

$$\begin{bmatrix} I_{km}^\phi \\ I_{mk}^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{km}^\phi (\alpha_{km}^\phi)^* & -(\beta_{km}^\phi)^{-1} z_m^{(n)} C \\ 0 & z_{km}^\phi (\beta_{km}^\phi)^* + (\beta_{km}^\phi)^{-1} z_m^{(n)} C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\alpha_{km}^\phi)^{-1} & -(\beta_{km}^\phi)^{-1} \\ -(\alpha_{km}^\phi)^{-1} & (\beta_{km}^\phi)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^\phi \\ V_m^\phi \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

costuma ser conetado em delta ou delta aberto com enrolamentos pertencentes a transformadores monofásicos convencionais [70]. Os modelos que representam as configurações de conexão $\Delta - \Delta$ e $Y_g - \Delta$ estão apresentados nas Figuras 3.10 e 3.11. Novamente, cada figura está acompanhada da equação matricial em bloco que caracteriza o seu respectivo modelo e essas equações foram obtidas através da aplicação da lei de Ohm, leis de Kirchhoff e princípio da conservação de potência em transformadores ideais. Por conveniência, apenas foram apresentados os diagramas referentes aos casos específicos no quais os enrolamentos em derivação encontram-se na fase A.

A modelagem de configurações de conexão, que envolvem uma operação na qual pelo menos uma fase está em aberto, podem ser obtidas de forma análoga ao descrito no subcapítulo para transformadores de dois enrolamentos convencionais.

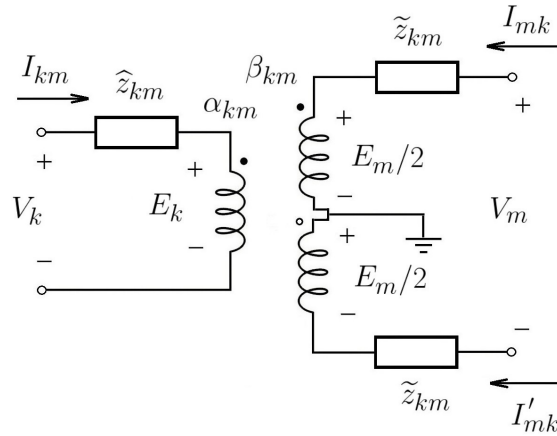


Figura 3.9: Modelagem de transformadores de dois enrolamentos com derivação central

3.1.4 Autotransformadores Reguladores de Tensão

A Figura 3.12.a apresenta o modelo clássico de autotransformadores monofásicos reguladores de tensão, usualmente referidos por “Tipo A”, quando as perdas de potência ativa e reativa relacionadas a magnetização de seu núcleo ferro-magnético são desprezadas. Entretanto, a modelagem efetivamente considerada está apresentada na Figura 3.12.b. A transição entre ambos os equivalentes pode ser realizada conforme descrito na Seção 3.1.2. Analogamente as Figuras 3.12.a e 3.12.b, têm-se as Figuras 3.12.c e 3.12.d que apresentam a modelagem dos autotransformadores monofásicos reguladores de tensão usualmente referidos por “Tipo B” [71].

É importante destacar a existência de uma chave seletora (não representada explicitamente na Figura 3.12) que proporciona duas possibilidades para a conexão em série das frações de enrolamento do autotransformador monofásico. Quando a chave seletora está em sua posição referida por *raise*, a tensão medida no enrolamento

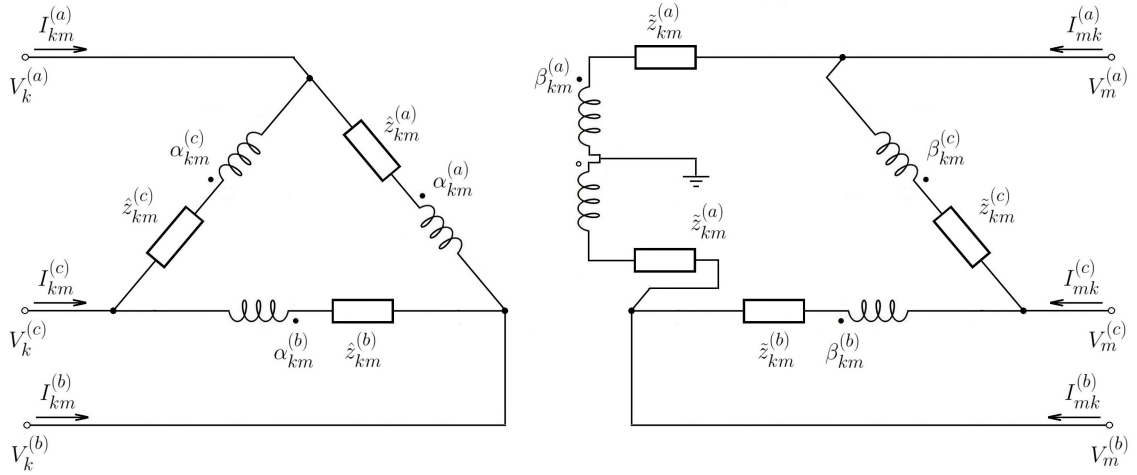


Figura 3.10: Modelagem de transformadores trifásicos com derivação central em conexão $\Delta - \Delta$

$$\begin{bmatrix} I_{km}^\phi \\ I_{mk}^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (E - k \tilde{z}_{km}^\phi K^{-1} L) (\alpha_{km}^\phi)^{-1} \beta_{km}^\phi \tilde{z}_{km}^\phi & -\tilde{z}_{km}^\phi K^{-1} \\ (\alpha_{km}^\phi)^* G + k (\beta_{km}^\phi)^* H K^{-1} L (\alpha_{km}^\phi)^{-1} \beta_{km}^\phi \tilde{z}_{km}^\phi & (\beta_{km}^\phi)^* (H K^{-1} - J) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^\phi \\ V_m^\phi \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

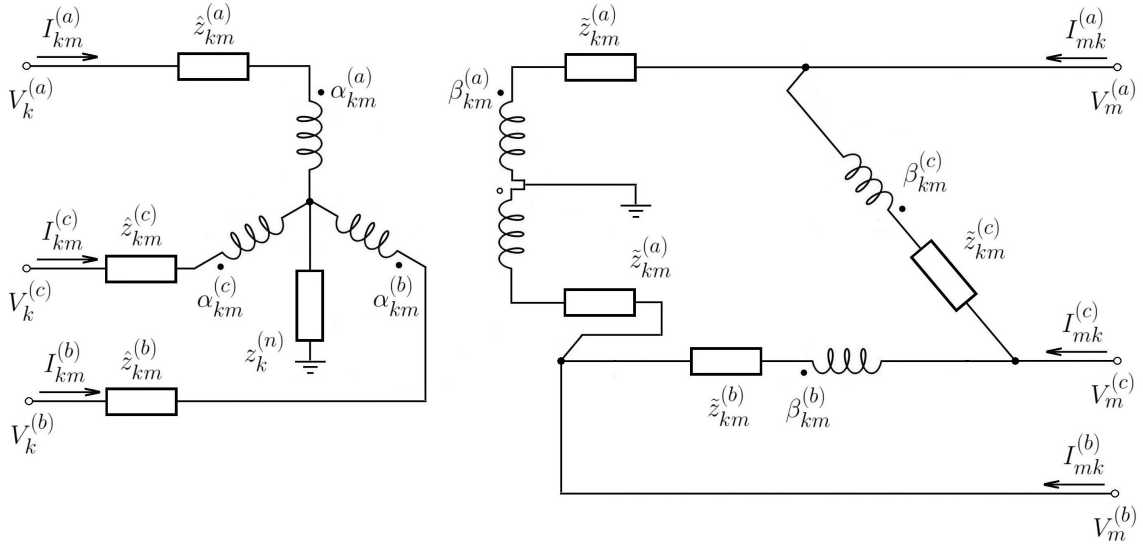


Figura 3.11: Modelagem de transformadores trifásicos com derivação central em conexão $Y_g - \Delta$

$$\begin{bmatrix} I_{km}^\phi \\ I_{mk}^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (E - k \tilde{z}_{km}^\phi K^{-1} L) (\alpha_{km}^\phi)^{-1} \beta_{km}^\phi (\tilde{z}_{km}^\phi + z_k^{(n)} C) & -\tilde{z}_{km}^\phi K^{-1} \\ (\alpha_{km}^\phi)^* G + k (\beta_{km}^\phi)^* H K^{-1} L (\alpha_{km}^\phi)^{-1} \beta_{km}^\phi (\tilde{z}_{km}^\phi + z_k^{(n)} C) & (\beta_{km}^\phi)^* (H K^{-1} - J) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^\phi \\ V_m^\phi \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

como um todo é superior a tensão medida em sua fração principal. O contrário é verificado quando a chave seletora é mantida na posição referida por *lower*. Por esse motivo, a Figura 3.12 apresenta duas indicações de polaridade para a fração de enrolamento chaveável, uma polaridade associada a posição *raise* e uma polaridade associada a posição *lower*.

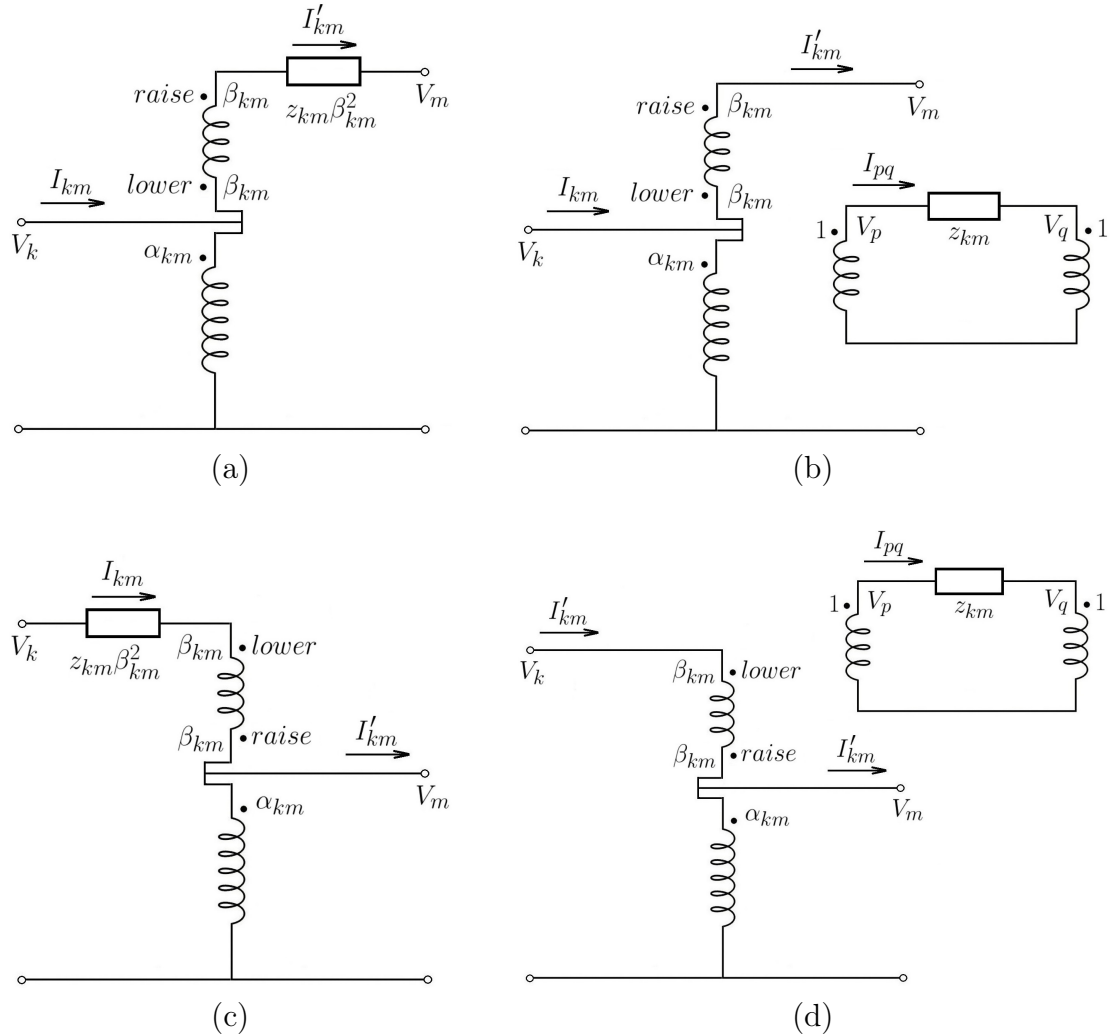


Figura 3.12: Modelagem de autotransformadores reguladores de tensão monofásicos: **(a)** modelo clássico (Tipo A); **(b)** modelo efetivamente considerado (Tipo A); **(c)** modelo clássico (Tipo B); **(d)** modelo efetivamente considerado (Tipo B)

Os reguladores de tensão trifásicos presentes nos sistemas de potência analisados neste trabalho foram considerados bancos de reguladores de tensão monofásicos. As configurações de conexão Y_g , Δ e Λ estão apresentadas entre as Figuras 3.13 e 3.18. Novamente, as figuras estão acompanhadas das equações matriciais em bloco que caracterizam seus respectivos modelos. No contexto da conexão Λ , a adição de uma impedância que tende a zero na fase que possui V_k igual a V_m permitiu a obtenção de uma relação tensão versus corrente necessária para a composição da matriz de admitância de barra.

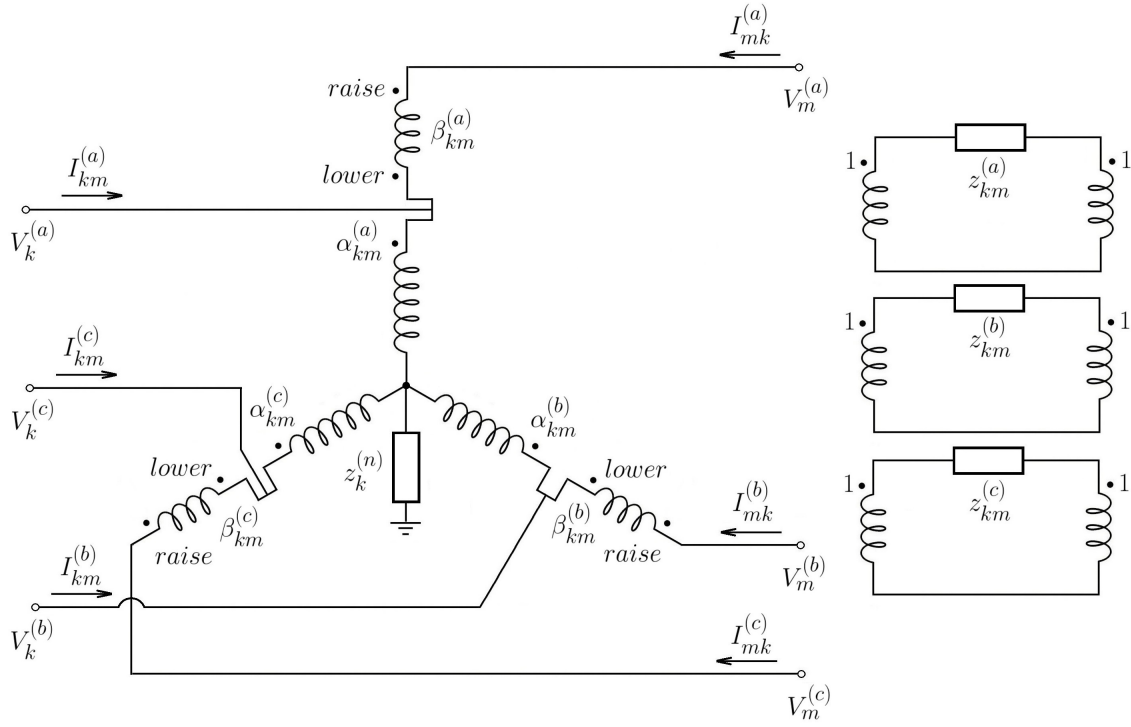


Figura 3.13: Modelagem de autotransformadores trifásicos reguladores de tensão (Tipo A) conectados em Y_g

$$\begin{bmatrix} I_{km}^\phi \\ I_{mk}^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha_{km}^\phi)^{-1} z_k^{(n)} C & (\alpha_{km}^\phi)^{-1} z_k^{(n)} C - z_{km}^\phi (\beta_{km}^\phi)^* \\ (\alpha_{km}^\phi)^* & (\alpha_{km}^\phi)^* + (\beta_{km}^\phi)^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\alpha_{km}^\phi)^{-1} + (\beta_{km}^\phi)^{-1} & -(\beta_{km}^\phi)^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^\phi \\ V_m^\phi \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

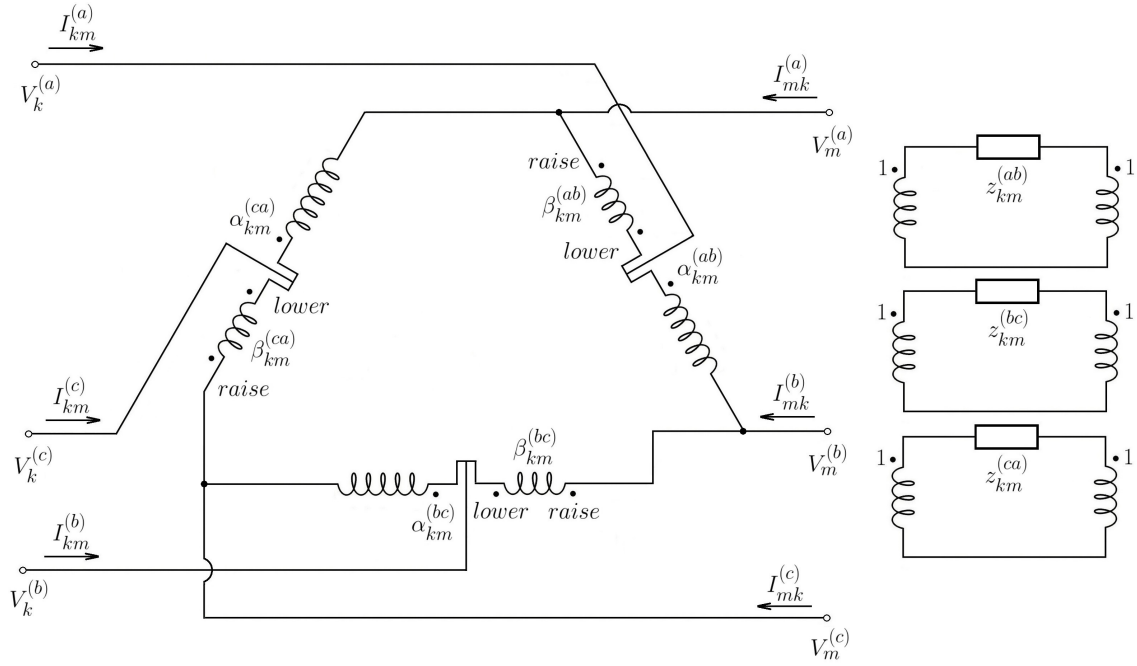


Figura 3.14: Modelagem de autotransformadores trifásicos reguladores de tensão (Tipo A) conectados em Δ

$$\begin{bmatrix} I_{km}^{\phi} \\ I_{mk}^{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{km}^{\phi\phi} (\alpha_{km}^{\phi\phi})^* [(\alpha_{km}^{\phi\phi})^* + (\beta_{km}^{\phi\phi})^*]^{-1} (\beta_{km}^{\phi\phi})^* & 0 \\ D - A [(\alpha_{km}^{\phi\phi})^* + (\beta_{km}^{\phi\phi})^*]^{-1} (\beta_{km}^{\phi\phi})^* & D \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} (\alpha_{km}^{\phi\phi})^{-1} + (\beta_{km}^{\phi\phi})^{-1} & (\alpha_{km}^{\phi\phi})^{-1} D - (\beta_{km}^{\phi\phi})^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^{\phi} \\ V_m^{\phi} \end{bmatrix}$$

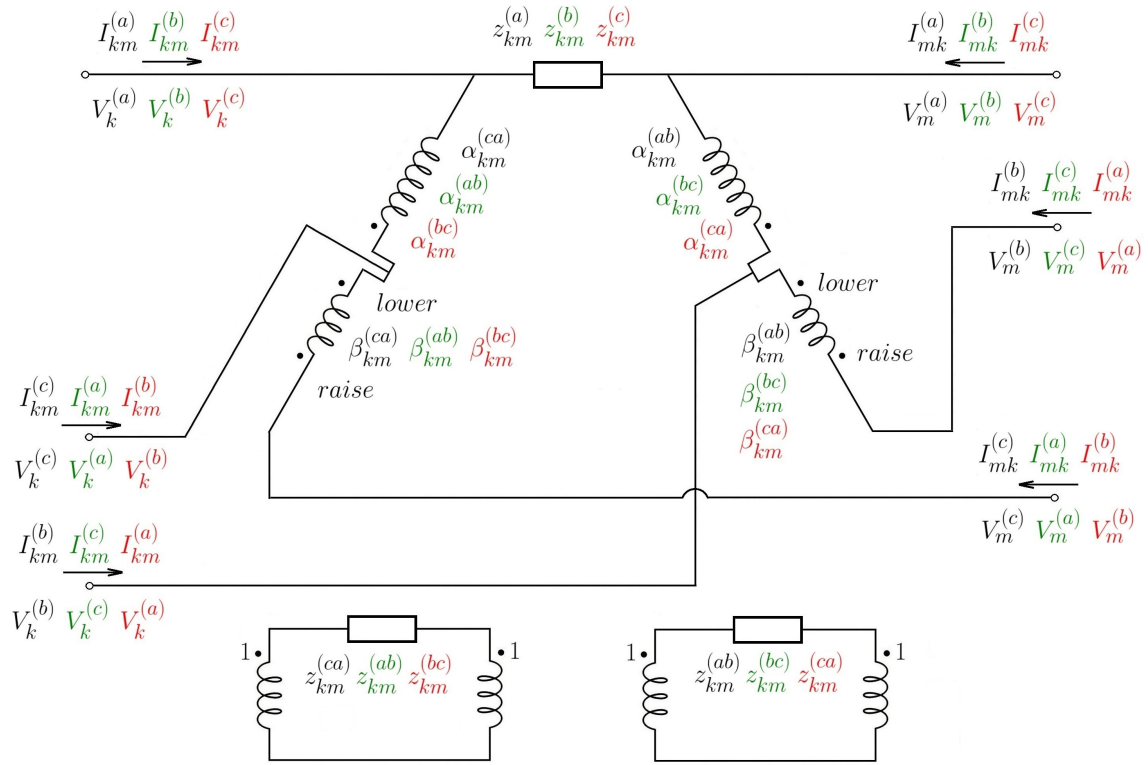


Figura 3.15: Modelagem de autotransformadores trifásicos reguladores de tensão (Tipo A) conectados em Δ : em preto as grandezas referentes à condição onde não há regulador entre as fases B e C; em verde, entre as fases C e A; e em vermelho, entre as fases A e B

$$\begin{bmatrix} I_{km}^{\phi} \\ I_{mk}^{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kK & -E z_{km}^{\phi\phi} F E (\beta_{km}^{\phi\phi})^* F + kL \\ E (\alpha_{km}^{\phi\phi})^* F + kM & E (\alpha_{km}^{\phi\phi})^* F + E (\beta_{km}^{\phi\phi})^* F + kN \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (E \alpha_{km}^{\phi\phi} F)^{-1} G + (E \beta_{km}^{\phi\phi} F)^{-1} + J & (E \alpha_{km}^{\phi\phi} F)^{-1} H - (E \beta_{km}^{\phi\phi} F)^{-1} - J \\ -J & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^{\phi} \\ V_m^{\phi} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

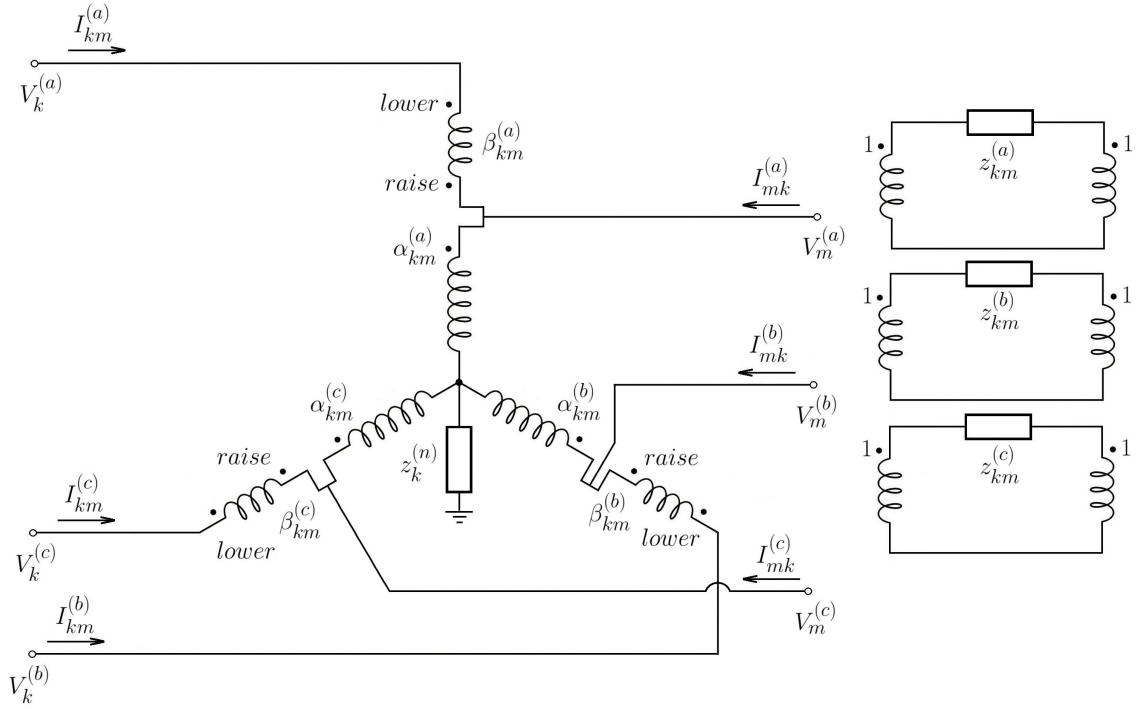


Figura 3.16: Modelagem de autotransformadores trifásicos reguladores de tensão (Tipo B) conectados em Y_g

$$\begin{bmatrix} I_{km}^\phi \\ I_{mk}^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{km}^\phi (\beta_{km}^\phi)^* + (\alpha_{km}^\phi)^{-1} z_k^{(n)} C & (\alpha_{km}^\phi)^{-1} z_k^{(n)} C \\ (\alpha_{km}^\phi)^* - (\beta_{km}^\phi)^* & (\alpha_{km}^\phi)^* \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\beta_{km}^\phi)^{-1} & (\alpha_{km}^\phi)^{-1} - (\beta_{km}^\phi)^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^\phi \\ V_m^\phi \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

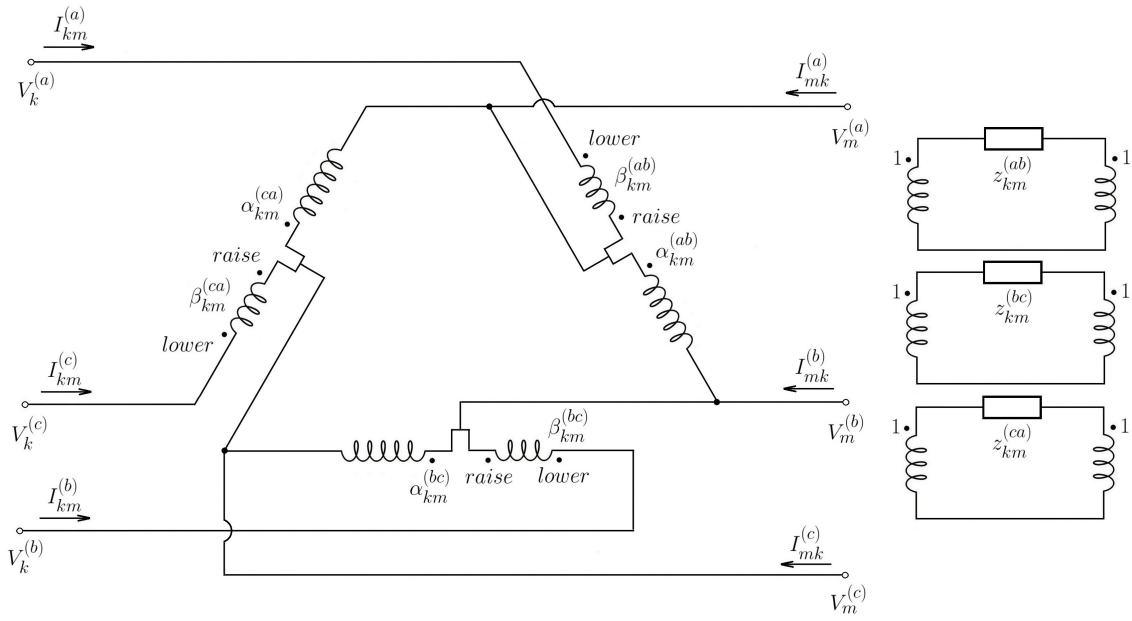


Figura 3.17: Modelagem de autotransformadores trifásicos reguladores de tensão (Tipo B) conectados em Δ

$$\begin{bmatrix} I_{km}^{\phi} \\ I_{mk}^{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{km}^{\phi\phi} (\beta_{km}^{\phi\phi})^* & 0 \\ D - A [(\alpha_{km}^{\phi\phi})^{-1} \beta_{km}^{\phi\phi}]^* & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\beta_{km}^{\phi\phi})^{-1} & (\alpha_{km}^{\phi\phi})^{-1} A - (\beta_{km}^{\phi\phi})^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^{\phi} \\ V_m^{\phi} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

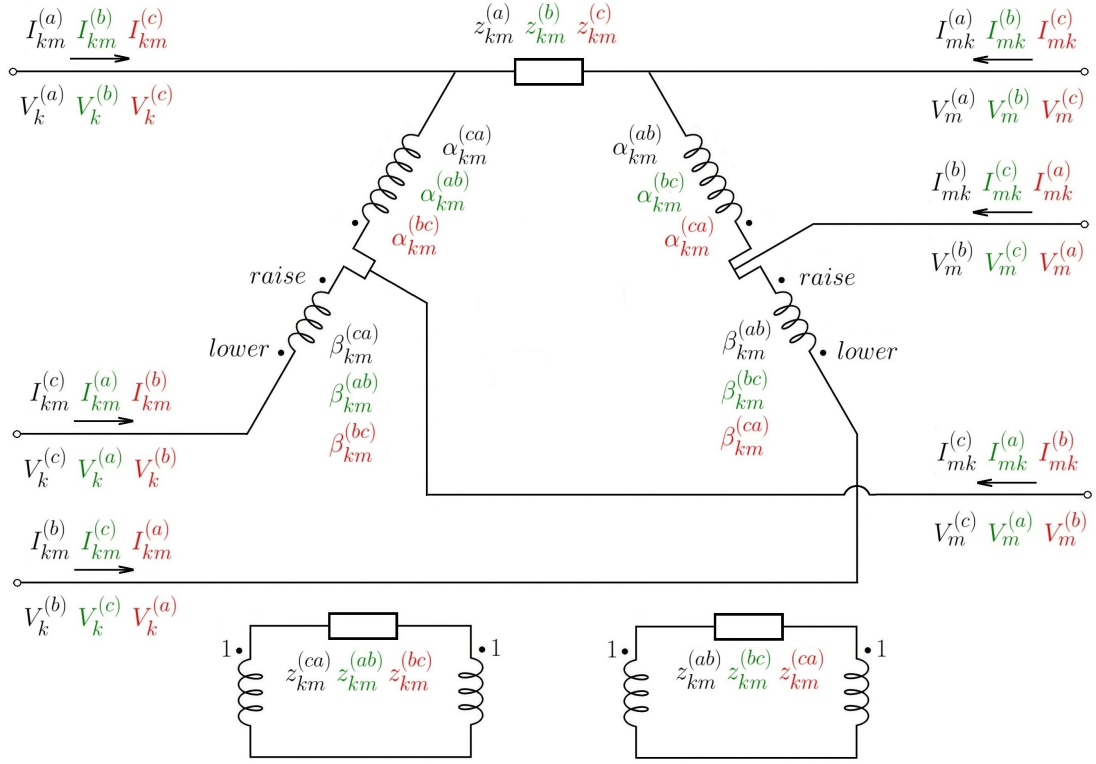


Figura 3.18: Modelagem de autotransformadores trifásicos reguladores de tensão (Tipo B) conectados em Δ : em preto as grandezas referentes à condição onde não há regulador entre as fases B e C; em verde, entre as fases C e A; e em vermelho, entre as fases A e B

$$\begin{bmatrix} I_{km}^\phi \\ I_{mk}^\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E z_{km}^{\phi\phi} F E (\beta_{km}^{\phi\phi})^* F + k K & k L \\ E (\alpha_{km}^{\phi\phi})^* F - E (\beta_{km}^{\phi\phi})^* F + k M & E (\alpha_{km}^{\phi\phi})^* F + k N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (E \alpha_{km}^{\phi\phi} F)^{-1} G + (E \beta_{km}^{\phi\phi} F)^{-1} + J & (E \alpha_{km}^{\phi\phi} F)^{-1} H - (E \beta_{km}^{\phi\phi} F)^{-1} - J \\ -J & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^\phi \\ V_m^\phi \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

É importante destacar que a modelagem apresentada não admite um tape secundário exatamente igual a zero, apenas virtualmente igual a zero. Além disso, as inversões dos produtos matriciais $(E \alpha_{km}^{\phi\phi} F)$ e $(E \beta_{km}^{\phi\phi} F)$ devem ser entendidas como, na verdade, pseudo-inversões (matrizes inversas de Moore-Penrose). Por fim, a modelagem de configurações de conexão, que envolvem uma operação na qual pelo menos uma fase está em aberto, podem ser obtidas de forma análoga ao descrito no subcapítulo para transformadores de dois enrolamentos convencionais.

3.2 Injeção Líquida de Corrente

As correntes contabilizadas como injeção líquida são provenientes de dispositivos shunt considerados externos à rede elétrica. Neste trabalho, esses dispositivos estão organizados conforme a classificação de passivos e ativos. De uma forma geral, convencionou-se que um dispositivo capaz de controlar dinamicamente uma grandeza elétrica além de potência é identificado como ativo. Do contrário, passivo.

A classificação de dispositivo shunt passivo compreende equipamentos elétricos cujo comportamento de regime permanente pode ser representado por um modelo de injeção de potência aparente descrito por uma função algébrica na qual magnitudes de tensão do barramento trifásico de conexão são suas variáveis. Conseqüentemente, estão incluídos nesse grupo, inúmeros tipos de cargas e bancos de capacitores ou reatores.

Em relação a classificação de dispositivo shunt ativo, este trabalho se restringiu à equipamentos elétricos cujos comportamentos de regime permanente podem ser satisfatoriamente representados por um modelo de fonte de tensão trifásica ideal conectada em série com uma impedância trifásica. Podem ser incluídos nesse grupo, máquinas síncronas, máquinas de indução e dispositivos de corrente alternada flexíveis, como compensadores estáticos, painéis fotovoltaicos e máquinas de indução duplamente alimentadas.

3.2.1 Dispositivos Shunt Passivos

Conforme pontuado anteriormente, os dispositivos shunt passivos foram modelados como injeções de potência aparente descritas por funções com parcelas algébricas cujas variáveis representam magnitudes de tensão dos barramentos trifásicos. Especificamente, essas parcelas possuem magnitudes de tensão de barramentos trifásicos como base e podem possuir como expoentes os números inteiros contidos no intervalo $[-2; 2]$. A principal motivação para a implementação de parcelas algébricas com expoentes negativos é possibilitar a representação de carros elétricos de recarga rápida conforme proposto na Referência [72]. É possível verificar

empiricamente que com o intervalo de expoentes inteiros implementados, parcelas com expoentes racionais entre $-2,75$ e $+2,60$, podem ser aproximadas com um erro máximo de 5% se as magnitudes de tensão tratadas como variáveis forem mantidas entre $0,50$ e $2,00$ pu. A título de ilustração, a Figura 3.19 apresenta a função $f(m) = -0.425 + m^{-1.5} + 0.25m^{0.5} + 0.175m^{2.5}$ e sua respectiva aproximação $g(m) = -0.198 - 0.332m + 0.414m^2 + 0.796m^{-1} + 0.320m^{-2}$. Formalmente, $f(m)$ consiste nos quatro primeiros termos da série de Puiseux da função $h(m) = -0.425 + \csc^2(m)\sqrt{\tan(m)}$ expandida ao redor de $m = 0$.

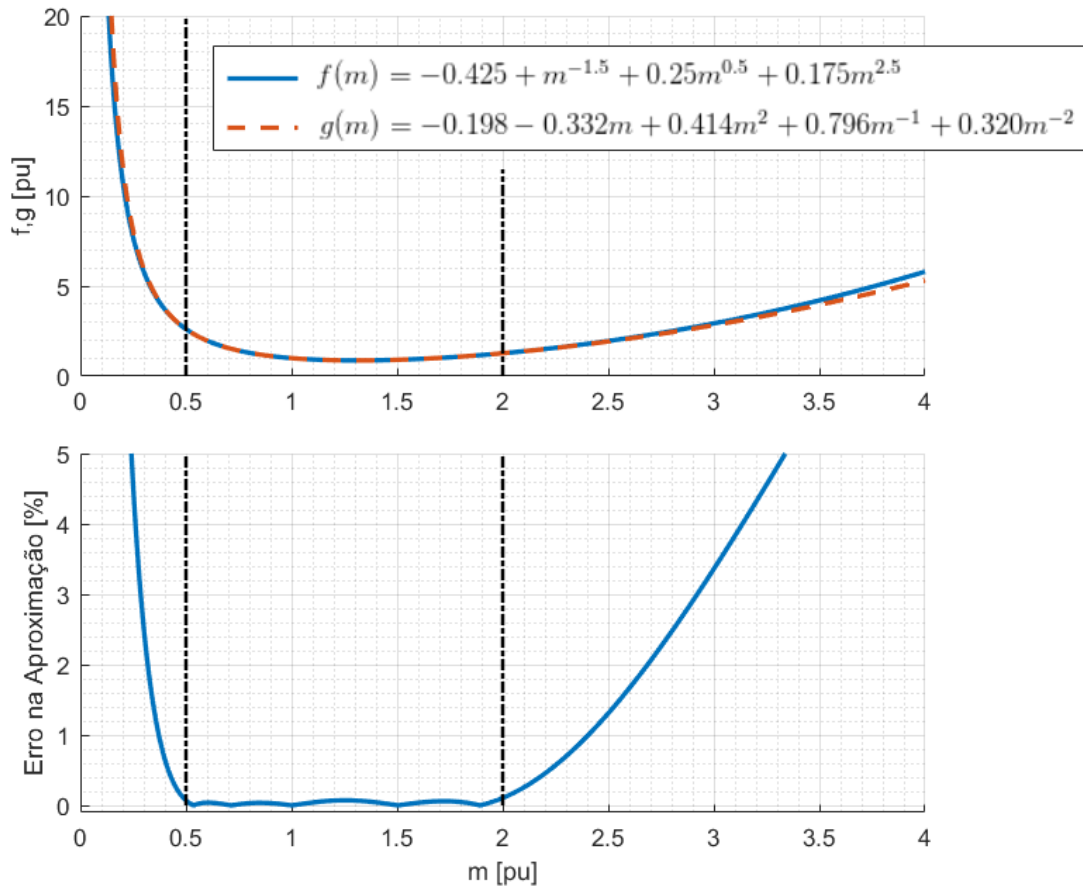


Figura 3.19: Exemplo para a possibilidade de aproximação de uma função algébrica com expoentes racionais entre $[-2,75; 2,60]$ em uma outra função algébrica com expoentes inteiros entre $[-2; 2]$

A Figura 3.20 apresenta o i -ésimo dispositivo shunt passivo conectado ao barramento trifásico k . O modelo admite um equipamento genérico composto por duas estruturas trifásicas, uma conectada em Y_g e outra conectada em Δ . Dessa forma, a injeção de corrente imposta à fase A do barramento trifásico k é dada pela equação (3.23). Por sua vez, as injeções de potência aparente, ativa e reativa envolvidas nesse equacionamento estão apresentadas genericamente em (3.24), (3.25) e (3.26), onde x pode sinalizar grandezas de fase (a, b, c) ou grandezas entre fases (ab, bc, ca). Nessa mesma formulação, $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ e μ representam as constantes associadas aos termos

das parcelas de expoentes 0, +1, +2, -1 e -2, respectivamente. Os três primeiros expoentes citados compõem o difundido modelo de carga conhecido pelo acrônimo ZIP. Essa denominação é utilizada justamente porque as constantes associadas aos termos de expoentes +2, +1 e 0 possuem respectivas correspondências físicas com impedâncias, correntes e potências. Finalmente, os índices auxiliares p e q indicam se os parâmetros descritos anteriormente referem-se à potência ativa ou potência reativa, respectivamente. Equações análogas podem ser desenvolvidas para as outras fases.

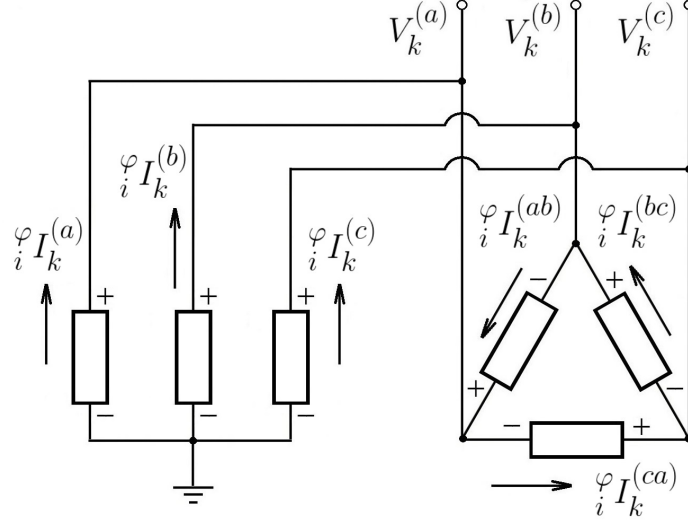


Figura 3.20: Modelagem de dispositivos shunt passivos

$$\begin{aligned} \varphi I_k^{(a)} + \varphi I_k^{(ab)} - \varphi I_k^{(ca)} &= \left(\frac{\varphi S_k^{(a)}}{V_k^{(a)}} \right)^* + \left(\frac{\varphi S_k^{(ab)}}{V_k^{(ab)}} \right)^* - \left(\frac{\varphi S_k^{(ca)}}{V_k^{(ca)}} \right)^* \\ &= \left(\frac{\varphi S_k^{(a)}}{V_k^{(a)}} \right)^* + \left(\frac{\varphi S_k^{(ab)}}{V_k^{(a)} - V_k^{(b)}} \right)^* - \left(\frac{\varphi S_k^{(ca)}}{V_k^{(c)} - V_k^{(a)}} \right)^* \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\varphi P_k^{(x)} = \text{Re} \left\{ \varphi S_k^{(x)} \right\} = \frac{p}{i} \alpha_k^{(x)} + \frac{p}{i} \beta_k^{(x)} M_k^{(x)} + \frac{p}{i} \gamma_k^{(x)} M_k^{(x)} M_k^{(x)} + \frac{p \lambda_k^{(x)}}{M_k^{(x)}} + \frac{p \mu_k^{(x)}}{M_k^{(x)} M_k^{(x)}} \quad (3.24)$$

$$\varphi Q_k^{(x)} = \text{Im} \left\{ \varphi S_k^{(x)} \right\} = \frac{q}{i} \alpha_k^{(x)} + \frac{q}{i} \beta_k^{(x)} M_k^{(x)} + \frac{q}{i} \gamma_k^{(x)} M_k^{(x)} M_k^{(x)} + \frac{q \lambda_k^{(x)}}{M_k^{(x)}} + \frac{q \mu_k^{(x)}}{M_k^{(x)} M_k^{(x)}} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \varphi S_k^{(x)} &= \left(\varphi P_k^{(x)} \right) + j \left(\varphi Q_k^{(x)} \right) \\ &= \frac{i}{i} \alpha_k^{(x)} + \frac{i}{i} \beta_k^{(x)} M_k^{(x)} + \frac{i}{i} \gamma_k^{(x)} M_k^{(x)} M_k^{(x)} + \frac{i \lambda_k^{(x)}}{M_k^{(x)}} + \frac{i \mu_k^{(x)}}{M_k^{(x)} M_k^{(x)}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Destaca-se que os sentidos considerados para as correntes circulantes e as polaridades admitidas para as diferenças de potencial estabelecem, de fato, um referencial

de injeção de potência para os dispositivos shunt passivos. Assim, uma determinada constante de potência do modelo é positiva se o dispositivo está fornecendo energia à rede elétrica e negativa se o mesmo está consumindo.

Por fim, as equações (3.27), (3.28) e (3.29) exemplificam como extrair as constantes α , β , γ , λ e μ a partir do equacionamento clássico que pode ser considerado para um modelo de carga polinomial.

$$\begin{aligned}
P &= P_0 \left[a_p \left(\frac{M}{M_0} \right)^0 + b_p \left(\frac{M}{M_0} \right)^{+1} + c_p \left(\frac{M}{M_0} \right)^{+2} + d_p \left(\frac{M}{M_0} \right)^{-1} + e_p \left(\frac{M}{M_0} \right)^{-2} \right] \\
&= \underbrace{a_p P_0}_{p\alpha} + \underbrace{b_p \frac{P_0}{M_0} M}_{p\beta} + \underbrace{c_p \frac{P_0}{M_0^2} M^2}_{p\gamma} + \underbrace{d_p P_0 M_0 \frac{1}{M}}_{p\lambda} + \underbrace{e_p P_0 M_0^2 \frac{1}{M^2}}_{p\mu}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
Q &= Q_0 \left[a_q \left(\frac{M}{M_0} \right)^0 + b_q \left(\frac{M}{M_0} \right)^{+1} + c_q \left(\frac{M}{M_0} \right)^{+2} + d_q \left(\frac{M}{M_0} \right)^{-1} + e_q \left(\frac{M}{M_0} \right)^{-2} \right] \\
&= \underbrace{a_q Q_0}_{q\alpha} + \underbrace{b_q \frac{Q_0}{M_0} M}_{q\beta} + \underbrace{c_q \frac{Q_0}{M_0^2} M^2}_{q\gamma} + \underbrace{d_q Q_0 M_0 \frac{1}{M}}_{q\lambda} + \underbrace{e_q Q_0 M_0^2 \frac{1}{M^2}}_{q\mu}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
S &= P + jQ \\
&= \underbrace{\left(a_p P_0 + j a_q Q_0 \right)}_{\alpha} + \underbrace{\left(b_p \frac{P_0}{M_0} + j b_q \frac{Q_0}{M_0} \right)}_{\beta} M + \underbrace{\left(c_p \frac{P_0}{M_0^2} + j c_q \frac{Q_0}{M_0^2} \right)}_{\gamma} M^2 \\
&\quad + \underbrace{\left(d_p P_0 M_0 + j d_q Q_0 M_0 \right)}_{\lambda} \frac{1}{M} + \underbrace{\left(e_p P_0 M_0^2 + j e_q Q_0 M_0^2 \right)}_{\mu} \frac{1}{M^2}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

onde, M_0 denota um valor de magnitude de tensão utilizado como referência;

P_0 denota a potência ativa aferida quando a tensão aplicada a carga tem magnitude igual ao valor de referência;

Q_0 denota a potência reativa aferida quando a tensão aplicada a carga tem magnitude igual ao valor de referência;

a_p , b_p , c_p , d_p e e_p denotam constantes reais associadas a potência ativa;

a_q , b_q , c_q , d_q e e_q denotam constantes reais associadas a potência reativa.

3.2.2 Dispositivos Shunt Ativos

A decomposição em componentes simétricas foi utilizada na modelagem dos dispositivos shunt ativos. Conforme a Figura 3.21 e a equação (3.30), a representação em cada sequência resume-se a uma fonte de tensão ideal conectada em série com uma impedância que compreende possíveis efeitos de acoplamento entre as sequências. Em outras palavras, o modelo consiste em um equivalente Thévenin trifásico decomposto nas sequências zero, positiva e negativa. Evidentemente, é possível descrever esse mesmo modelo como um equivalente Norton trifásico, ou seja, como uma fonte de corrente trifásica ideal conectada em paralelo com uma admitância trifásica, conforme apresentado na equação (3.31). As grandezas elétricas presentes nos equivalentes relacionam-se através das equações (3.32) e (3.33).

Admitindo que $a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{j120^\circ}$, as equações (3.34) e (3.35) apresentam as matrizes que permitem a transformação de fasores de grandezas elétricas em componentes de fase para componentes simétricas e vice-versa. Por sua vez, as transformações das matrizes de impedância ou admitância podem ser realizadas conforme (3.36) e (3.37). Finalmente, a equação (3.38) apresenta como obter a injeção de corrente na fase A do barramento trifásico k imposta por seu respectivo dispositivo shunt ativo. Equações análogas podem ser desenvolvidas para as outras fases. Por fim, destaca-se que a formulação implementada considera que cada barramento trifásico possui um único dispositivo shunt ativo.

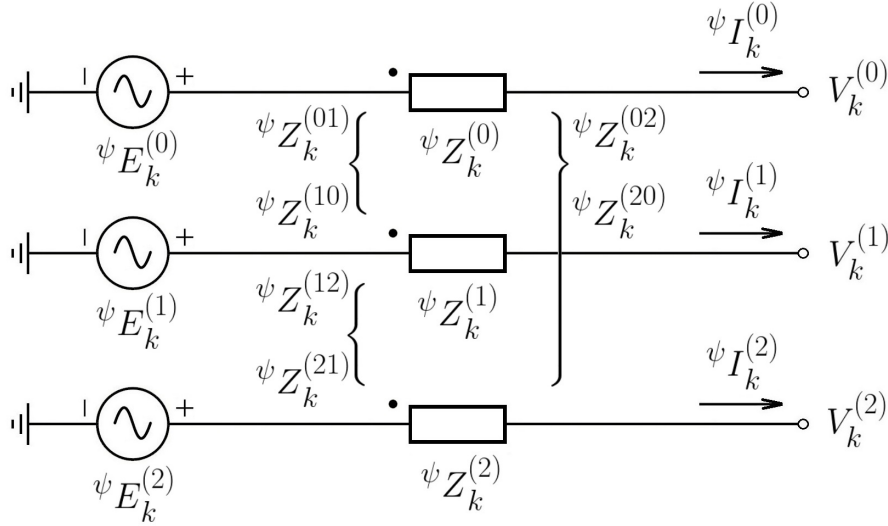


Figura 3.21: Modelagem de dispositivos shunt ativos

$$\begin{bmatrix} \psi E_k^{(0)} \\ \psi E_k^{(1)} \\ \psi E_k^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi Z_k^{(0)} & \psi Z_k^{(01)} & \psi Z_k^{(02)} \\ \psi Z_k^{(10)} & \psi Z_k^{(1)} & \psi Z_k^{(12)} \\ \psi Z_k^{(20)} & \psi Z_k^{(21)} & \psi Z_k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi I_k^{(0)} \\ \psi I_k^{(1)} \\ \psi I_k^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_k^{(0)} \\ V_k^{(1)} \\ V_k^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\begin{bmatrix} \psi J_k^{(0)} \\ \psi J_k^{(1)} \\ \psi J_k^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi Y_k^{(0)} & \psi Y_k^{(01)} & \psi Y_k^{(02)} \\ \psi Y_k^{(10)} & \psi Y_k^{(1)} & \psi Y_k^{(12)} \\ \psi Y_k^{(20)} & \psi Y_k^{(21)} & \psi Y_k^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k^{(0)} \\ V_k^{(1)} \\ V_k^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi I_k^{(0)} \\ \psi I_k^{(1)} \\ \psi I_k^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\begin{bmatrix} \psi Y_k^{(0)} & \psi Y_k^{(01)} & \psi Y_k^{(02)} \\ \psi Y_k^{(10)} & \psi Y_k^{(1)} & \psi Y_k^{(12)} \\ \psi Y_k^{(20)} & \psi Y_k^{(21)} & \psi Y_k^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi Z_k^{(0)} & \psi Z_k^{(01)} & \psi Z_k^{(02)} \\ \psi Z_k^{(10)} & \psi Z_k^{(1)} & \psi Z_k^{(12)} \\ \psi Z_k^{(20)} & \psi Z_k^{(21)} & \psi Z_k^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} \psi J_k^{(0)} \\ \psi J_k^{(1)} \\ \psi J_k^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi Z_k^{(0)} & \psi Z_k^{(01)} & \psi Z_k^{(02)} \\ \psi Z_k^{(10)} & \psi Z_k^{(1)} & \psi Z_k^{(12)} \\ \psi Z_k^{(20)} & \psi Z_k^{(21)} & \psi Z_k^{(2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \psi E_k^{(0)} \\ \psi E_k^{(1)} \\ \psi E_k^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\begin{bmatrix} (A) \\ (B) \\ (C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0) \\ (1) \\ (2) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} (0) \\ (1) \\ (2) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A) \\ (B) \\ (C) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\begin{bmatrix} (0) & (01) & (02) \\ (10) & (1) & (12) \\ (20) & (21) & (2) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a) & (ab) & (ac) \\ (ba) & (b) & (bc) \\ (ca) & (cb) & (c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\begin{bmatrix} (a) & (ab) & (ac) \\ (ba) & (b) & (bc) \\ (ca) & (cb) & (c) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0) & (01) & (02) \\ (10) & (1) & (12) \\ (20) & (21) & (2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\psi I_k^{(a)} = \left(\frac{\psi S_k^{(a)}}{V_k^{(a)}} \right)^* = \frac{\psi P_k^{(a)} - j \psi Q_k^{(a)}}{*V_k^{(a)}} \quad (3.38)$$

As subseções a seguir apresentam de forma introdutória os principais equipamentos elétricos cujos respectivos modos de controle impõem comportamentos de regime permanente que podem ser satisfatoriamente representados pela modelagem implementada.

Máquinas Síncronas

Máquinas síncronas são equipamentos construídos para serem perfeitamente balanceados, portanto, o acoplamento entre seqüências e as tensões internas de seqüência zero e negativa podem ser desprezados no modelo genérico considerado para os dispositivos shunt ativos. Conforme apresentado em [8, 73–77], as impedâncias de seqüência podem ser obtidas a partir da aplicação da Transformação de Park. De uma forma simplificada, essa transformação permite que as grandezas elétricas faso-

riais do estator sejam referidas para um par de eixos ortogonais dq que se movimenta com a mesma velocidade angular do rotor. Assim, é possível descrever a operação balanceada (em sequência positiva, negativa e zero) de máquinas síncronas através de um sistema de equações diferenciais no qual todas as indutâncias presentes são invariantes no tempo ou podem ser satisfatoriamente aproximadas como tal. O aterramento da máquina, quando houver, deve ser devidamente contabilizado na sequência zero.

As possibilidades de regulação de frequência, tensão e fator de potência tornam máquinas síncronas elementos dinâmicos em um sistema elétrico. No caso da regulação de frequência, uma malha de controle relacionada a turbina da máquina síncrona atua diretamente na fonte primária de energia de modo a alterar o torque mecânico imposto ao rotor da máquina. A equação diferencial que rege o funcionamento mecânico de uma máquina síncrona garante que a regulação de frequência naturalmente seja responsável pela manutenção do equilíbrio entre a demanda líquida de energia elétrica instantânea (incluindo possíveis perdas na rede elétrica) e a geração de potência ativa por parte das máquinas síncronas que participam ativamente do controle de frequência. Por ser uma análise em regime permanente, o problema do fluxo de potência se mantém totalmente alheio à essa dinâmica e, portanto, as máquinas síncronas podem ser consideradas com uma geração de potência ativa constante. Porém, é evidente que o balanço entre demanda, geração e perda de potência ativa deve ser atendido inclusive em regime permanente. Consequentemente, cada ilha elétrica deve possuir uma máquina síncrona cuja geração de potência ativa é considerada desconhecida *a priori* e, dessa forma, ser responsável pelo fechamento do balanço de potência ativa. Essas mesmas máquinas síncronas também serão as referências angulares de todos os outros fasores associados às suas respectivas ilhas elétricas.

Tanto a regulação de tensão, mais precisamente, regulação de magnitude de tensão, quanto a regulação de fator de potência, consistem em malhas de controle relacionadas com a excitatriz da máquina síncrona. Essas malhas de controle atuam diretamente na tensão contínua imposta ao enrolamento de campo da máquina. A regulação de tensão permite controlar uma magnitude de tensão associada ao barramento no qual a máquina está efetivamente conectada ou, até mesmo, uma magnitude de tensão associada a um barramento remoto. Normalmente, reguladores de tensão comerciais fornecem as possibilidades de controle de magnitude de tensão fase-neutro, fase-fase e de sequência positiva [77]. Por sua vez, a regulação de fator de potência permite controlar o fator de potência que relaciona as gerações de potência ativa e reativa realizadas pela máquina, ou ainda, controlar diretamente a geração de potência reativa [78].

Torna-se evidente, portanto, que cada máquina síncrona é capaz de regular duas

grandezas simultaneamente (uma através da malha de controle relacionada a turbina e outra através da malha de controle relacionada a excitatriz). Em outras palavras, possui dois graus de liberdade de controle.

Os diversos limites operacionais das máquinas síncronas como, por exemplo, as máximas correntes suportadas pelos enrolamentos de campo e de armadura, podem ser utilizados para obtenção de uma curva no plano “Geração de Potência Ativa x Geração de Potência Reativa” chamada curva de capacidade. Qualquer ponto no interior da região bidimensional delimitada por essa curva representa um ponto de operação realizável pela máquina sem nenhum tipo de sobrecarga. Uma vez que existem limites de condução de corrente e as referidas curvas são definidas em um plano de potência, cada máquina síncrona possui, na verdade, uma família de curvas de capacidade na qual cada uma dessas curvas está associada a um determinado valor de magnitude de tensão terminal. Outro detalhe importante é que as curvas de capacidade são obtidas supondo uma operação de regime permanente perfeitamente balanceada. De qualquer forma, o nível máximo de desbalanço suportado em regime permanente pelas máquinas síncronas não costuma ser elevado. Por exemplo, existem normas que estabelecem uma suportabilidade de corrente de sequência negativa em regime permanente entre 5% e 10% [77, 79]. A Figura 3.22 ilustra uma família de curvas de capacidade obtida de acordo com a metodologia didática apresentada em [80]. Parâmetros típicos de uma máquina síncrona de polos lisos foram utilizados.

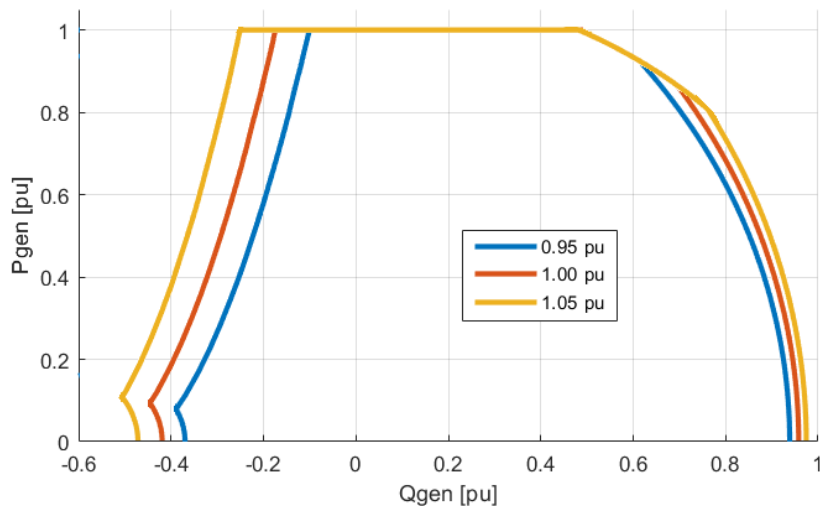


Figura 3.22: Família de curvas de capacidade para uma máquina síncrona de polos lisos típica: cada curva corresponde a uma determinada magnitude de tensão terminal

Naturalmente, as malhas de controle referentes aos sistemas de regulação incluem lógicas internas para garantir que a máquina síncrona se mantenha operando entre os seus limites operacionais. Na formulação proposta para o problema do fluxo

de potência trifásico, tal como ocorre em diversas outras formulações presentes na literatura, é conveniente utilizar as curvas de capacidade na emulação dessas lógicas internas de controle. A conveniência existe porque as curvas de capacidade condensam informações de uma gama de limites operacionais relacionando apenas duas variáveis, geração de potência ativa e reativa, que são diretamente acessíveis pelo modelo genérico considerado para os dispositivos shunt ativos. Dessa maneira, é possível inferir facilmente se uma determinada solução obtida para o problema do fluxo de potência é plausível ou não sob a ótica das máquinas síncronas existentes na rede elétrica. Não apenas isso, como as próprias correções a serem realizadas no problema de fluxo de potência visando a obtenção de uma solução plausível tornam-se facilitadas. Por exemplo, se o limite máximo de geração de potência reativa de uma determinada máquina síncrona com regulação de tensão estiver violado em uma primeira solução, pode ser estabelecido um novo problema de fluxo de potência no qual essa mesma máquina síncrona é considerada com regulação de fator de potência. Evidentemente, o valor de referência para a nova regulação atuante deve ser calculado de modo que a geração de potência reativa seja rigorosamente igual ao limite anteriormente violado.

Máquinas de Indução

Conforme apresentado em [8, 73–77], o modelo matemático de máquinas de indução também é desenvolvido a partir da aplicação da Transformação de Park. E novamente, sua utilização permite descrever a operação balanceada (em sequência positiva, negativa e zero) de uma máquina rotativa através de um sistema de equações diferenciais no qual todas as indutâncias presentes são invariantes no tempo ou podem ser satisfatoriamente aproximadas como tal. Desse modo, os circuitos equivalentes de sequência apresentados na Figura 3.23 podem ser obtidos para uma máquina de indução do tipo gaiola de esquilo ou rotor bobinado em curto-circuito. Comparando-os com o modelo genérico considerado para os dispositivos shunt ativos, tanto o acoplamento entre as sequências, quanto as tensões internas de sequência zero, positiva e negativa, podem ser desprezados. Sendo assim, as impedâncias presentes nos modelos relacionam-se através das equações (3.39), (3.40) e (3.41).

$$\psi Z_k^{(0)} = r_0 + j x_0 \quad (3.39)$$

$$\psi Z_k^{(1)} = [r_s + j x_s] + \left[\left(\frac{r_r}{u} + j x_r \right) \parallel r_m \parallel (j x_m) \right] \quad (3.40)$$

$$\psi Z_k^{(2)} = [r_s + j x_s] + \left[\left(\frac{r_r}{2-u} + j x_r \right) \parallel r_m \parallel (j x_m) \right] \quad (3.41)$$

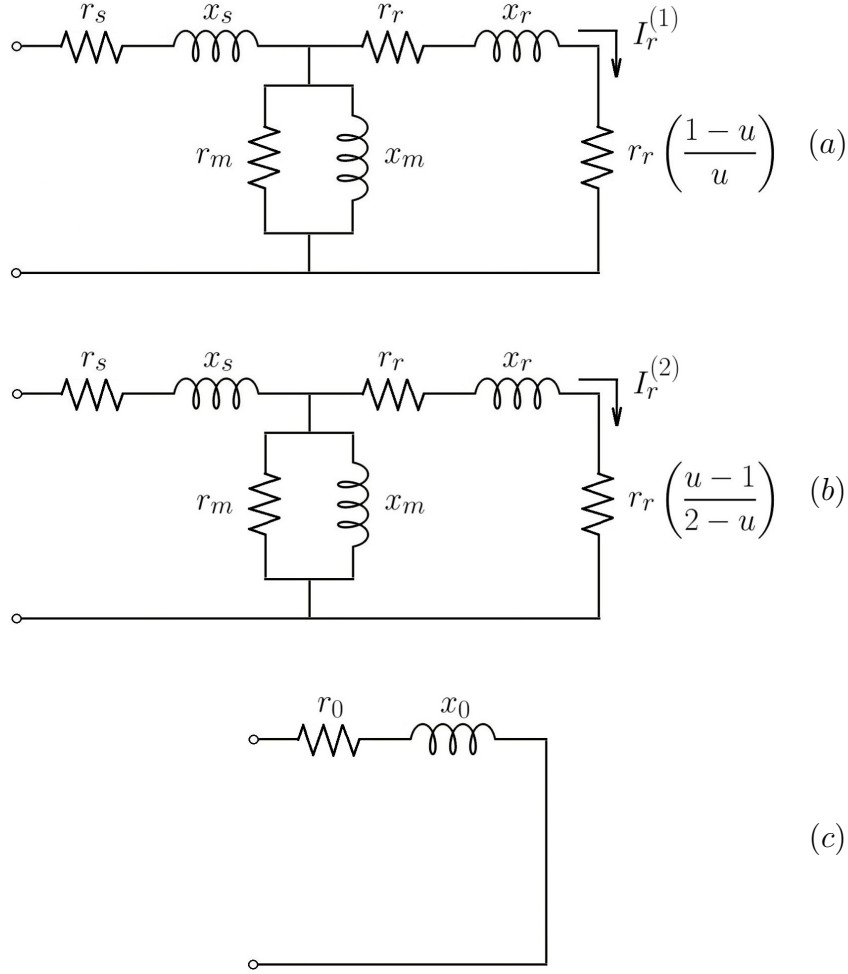


Figura 3.23: Circuitos equivalentes de regime permanente para uma máquina de indução: **(a)** sequência positiva; **(b)** sequência negativa; **(c)** sequência zero

A carga mecânica de uma máquina de indução costuma ser modelada por um polinômio de segundo grau em relação ao escorregamento e , e, em regime permanente, o torque imposto pela carga mecânica deve ser igual à soma do torque associado a potência dissipada em $r_r (1 - u)/u$ (resistor presente no circuito equivalente de sequência positiva) com o torque associado a potência dissipada em $r_r (u - 1)/(2 - u)$ (resistor presente no circuito equivalente de sequência negativa). Utilizando o sistema por unidade, as equações (3.42), (3.43) e (3.44) podem ser escritas.

$$T_1 + T_2 = t(\alpha + \beta u + \gamma u^2) \quad (3.42)$$

$$T_1 = \frac{1}{1 - u} \left[r_r \left(\frac{1 - u}{u} \right) * I_r^{(1)} I_r^{(1)} \right] = \frac{r_r}{u} * I_r^{(1)} I_r^{(1)} \quad (3.43)$$

$$T_2 = \frac{1}{1 - u} \left[r_r \left(\frac{u - 1}{2 - u} \right) * I_r^{(2)} I_r^{(2)} \right] = -\frac{r_r}{2 - u} * I_r^{(2)} I_r^{(2)} \quad (3.44)$$

Compensadores Estáticos (SVC & STATCOM)

De forma simplificada, dispositivos eletroeletrônicos de potência podem ser descritos como componentes elétricos convencionais cujas conexões com o sistema são intermediadas por componentes eletrônicos, nomeadamente tiristores ou transistores, que impõem um determinado regime de chaveamento. Os tiristores permitem um controle explícito dos seus instantes de fechamento, enquanto os transistores permitem um controle explícito tanto dos instantes de fechamento quanto dos instantes de abertura. No contexto de equipamentos de compensação reativa, bancos de capacitores e/ou reatores shunt são os componentes elétricos que compõem os dispositivos eletroeletrônicos de potência. Por sua vez, se os componentes eletrônicos presentes forem tiristores, ter-se-á os chamados *Shunt Var Compensators* (SVC). Se forem transistores, ter-se-á os chamados *Static Synchronous Compensators* (STATCOM).

Em uma análise de regime permanente, extraíndo a frequência fundamental das expressões analíticas das formas de onda de tensão e corrente aferidas na interface entre um SVC e a rede elétrica, torna-se evidente que é possível representar um SVC por um determinado valor de susceptância que varia de acordo com o regime de chaveamento dos tiristores [81]. Normalmente, costuma-se definir o regime de chaveamento de um tiristor através de uma variável de controle denominada ângulo de disparo (representando o acionamento dos tiristores em relação à uma função senoidal na frequência fundamental da rede elétrica). De uma forma geral, para uma conexão trifásica de um banco de SVCs monofásicos idênticos, é possível obter uma operação desequilibrada especificando um ângulo de disparo independentemente por fase. Analogamente, é possível obter uma operação equilibrada especificando um único ângulo de disparo de referência que é devidamente sincronizado para as três fases [82].

No caso de um STATCOM, a extração da frequência fundamental das expressões analíticas das formas de onda aferidas na interface entre o dispositivo eletroeletrônico e a rede elétrica, em regime permanente, permite concluir que é possível representá-lo por uma fonte de tensão senoidal ideal em série com uma impedância [81]. Existe uma grande variedade de estratégias de chaveamento e topologias que podem ser implementadas para os tiristores. Em sua versão mais simples, têm-se uma modulação PWM cujas variáveis de controle são a amplitude e a frequência de modulação. Um STATCOM trifásico admite que essas variáveis sejam tratadas individualmente por fase, permitindo modos de operação sofisticados como, por exemplo, a manutenção de uma injeção de corrente equilibrada [79, 82].

Em última análise, um SVC monofásico apresenta um grau de liberdade de controle, consequência do ângulo de disparo ser ajustável. No contexto da representação de um SVC por uma susceptância, o único grau de liberdade existente é traduzido

pelo próprio valor dessa susceptância variável. Por sua vez, um STATCOM monofásico apresenta dois graus de liberdade de controle, consequência da possibilidade de ajuste tanto da amplitude quanto da frequência de modulação. No contexto da representação de um STATCOM por uma fonte de tensão ideal em série com uma impedância, os graus de liberdade existentes são traduzidos pela tensão complexa (magnitude e ângulo) da fonte de tensão ideal.

Compensadores estáticos são constituídos apenas por elementos armazenadores de energia (não possuindo elementos que desempenhem o papel de fonte de energia) e, portanto, são incapazes de sustentar uma injeção de potência instantânea na rede elétrica em regime permanente. Por esse motivo, desprezando possíveis perdas de energia, tanto o SVC quanto o STATCOM não consomem nem injetam potência ativa da rede elétrica no contexto do problema de fluxo de potência. No caso do SVC, sua própria representação por uma susceptância garante isso. Contudo, uma vez que fontes de tensão não possuem limitações quanto a geração de potência ativa, o mesmo não pode ser dito em relação à representação de um STATCOM, sendo necessário, portanto, a perda de um grau de liberdade de controle para garantir essa condição.

Por fim, ambos os compensadores estáticos são utilizados majoritariamente para o controle de magnitude de tensão terminal. É comum que esse controle seja realizado com a imposição de uma correção no valor especificado, sendo esta correção dependente da magnitude de corrente circulante ou da geração de potência reativa. Nesse contexto, uma condição operativa que, para manutenção do controle de tensão, tende a infringir o intervalo de valores de susceptância alcançáveis por um determinado SVC, impõe, na verdade, uma situação na qual o SVC é mantido em um valor fixo de susceptância e há uma consequente perda do controle de tensão. No caso de um STATCOM, costuma-se descrever seus limites operacionais através de valores mínimos e máximos de geração de potência reativa, uma vez que, tal qual máquinas síncronas, STATCOMs são capazes de sustentar uma elevada geração de potência reativa mesmo com uma deterioração acentuada da magnitude de tensão em seus terminais [83]. A título de ilustração, a Figura 3.24 apresenta as curvas características de “Geração de Potência Reativa x Magnitude de Tensão Terminal”, tanto para SVCs quanto para STATCOMs.

Outros Equipamentos Baseados em Eletrônica de Potência

Conforme pontuado na subseção anterior, por possuírem como componentes elétricos somente capacitores e/ou reatores, tanto SVCs quanto STATCOMs são virtualmente incapazes de injetar ou consumir potência ativa da rede elétrica em uma análise de regime permanente. Contudo, outros equipamentos baseados em eletrônica de potência o fazem, como por exemplo, baterias, máquinas de indução duplamente

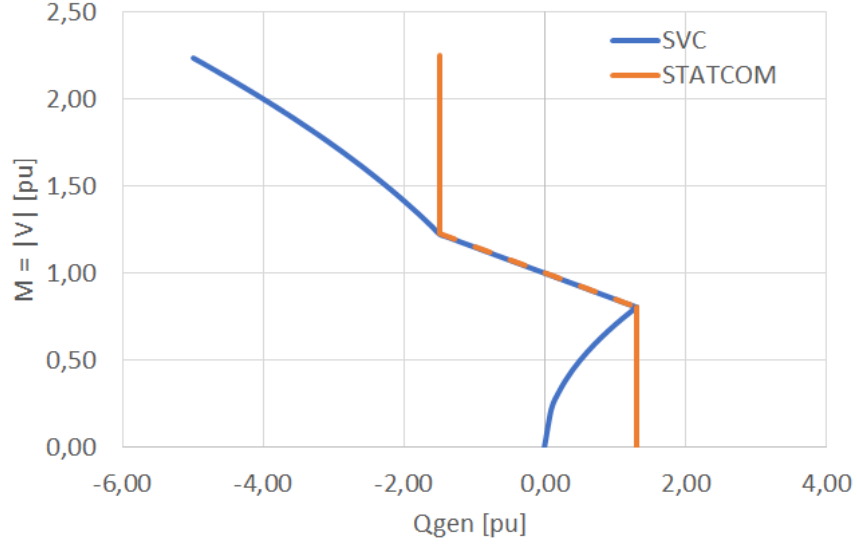


Figura 3.24: Características QV representativas de SVCs e STATCOMs

alimentadas e painéis fotovoltaicos. No contexto da formulação implementada, esses dispositivos podem ser tratados tal como STATCOMs, porém, conforme evidenciado neste mesmo parágrafo, seria possível especificar uma injeção ou consumo de potência ativa diferente de zero.

3.3 Sistema de Equações

Utilizando os modelos matemáticos apresentados, a injeção líquida de corrente na fase A do barramento trifásico k pode ser descrita genericamente pela equação (3.45). Desenvolvendo equações análogas para as outras fases e reescrevendo o sistema de equações em função das injeções líquidas de potência (em detrimento das injeções líquidas de corrente), a princípio, cada barramento trifásico introduz três equações complexas e seis incógnitas complexas, nomeadamente, $V_k^{(a)}$, $V_k^{(b)}$, $V_k^{(c)}$, $\psi S_k^{(a)}$, $\psi S_k^{(b)}$ e $\psi S_k^{(c)}$. O desequilíbrio entre o número de equações e incógnitas é anulado explorando características intrínsecas e modos de controle dos dispositivos shunt ativos.

$$I_k^{(a)} = \psi I_k^{(a)} + \left(\sum_i \varphi I_k^{(a)} + \varphi I_k^{(ab)} - \varphi I_k^{(ca)} \right) = \psi I_k^{(a)} + \varphi I_k^{(a)} + \varphi I_k^{(ab)} - \varphi I_k^{(ca)} \quad (3.45)$$

A partir desse sistema de equações pode ser isolado um outro sistema no qual somente as tensões de fase são mantidas como incógnitas. Nesse caso, interpretando sob a ótica do conjunto dos números reais, cada barramento trifásico introduz seis incógnitas e restam igualmente seis equações por barramento. É evidente que as referidas equações não possuem outras incógnitas em sua constituição, isto é, qualquer variável existente nas mesmas que não seja proveniente de uma tensão de fase

é, na verdade, apenas um parâmetro ou um valor especificado. Sendo necessário lidar com incógnitas que fogem à regra anterior, um número de equações superior à seis será imperativo para manutenção do equilíbrio do sistema matemático. As equações gerais utilizadas na composição do sistema descrito estão dispostas na Tabela 3.1. Valores de injeção de potência ativa e reativa por parte dos dispositivos shunt ativos, tensão, magnitude de tensão e ângulo de tensão de barramento e torque mecânico admitidos conhecidos ou especificados foram denotados, respectivamente, por p , q , v , m , ϑ e t . Além disso, a letra grega σ representa constantes que podem ser convenientemente modificadas. Por fim, destaca-se que apesar de todas as equações apresentadas pertencerem essencialmente ao conjunto dos números complexos, algumas delas revelam-se apenas uma única equação real. As Equações IV, V, VII e VIII, fazendo uso somente de operações aritméticas básicas, são capazes de isolar a parte real, a parte imaginária, a magnitude e o ângulo de um número complexo. Em específico, a Equação IV, ao efetuar a soma de um número complexo com seu conjugado, permite isolar sua parte real; a Equação V, ao efetuar a subtração, permite isolar sua parte imaginária; a Equação VII, ao efetuar a multiplicação, permite isolar sua magnitude; e a Equação VIII, ao efetuar a divisão, permite isolar seu argumento. Essas quatro equações são generalizações de equacionamentos desenvolvidos originalmente em [14, 84].

É possível estabelecer um paralelo entre essa formulação para o problema do fluxo de potência trifásico e a formulação clássica do problema do fluxo de potência monofásico ou de sequência positiva e suas classificações de barramento PQ , PV , $V\theta$ e $Q\theta^2$. Se um determinado dispositivo shunt ativo possuir seis graus de liberdade de controle, o barramento trifásico associado ao mesmo introduz ao sistema matemático somente equações categorizadas entre IV e VIII. Nesse caso, sendo especificado duas variáveis por fase, cada fase desse barramento poderia ser representada por uma classificação independente das outras. O conteúdo do parágrafo anterior também se estende a barramentos trifásicos sem nenhum dispositivo shunt ativo associado, ou seja, sem nenhum grau de liberdade de controle. Nesse caso, porém, todas as três fases seriam classificadas como PQ e apenas são introduzidas equações categorizadas entre IV e V. De fato, se a rede elétrica em estudo possuir um nível de desbalanço desprezível, é possível aproximar que as fases associadas a qualquer barramento trifásico presente na referida rede elétrica podem ser classificadas independentemente. Nessa condição, em última análise, o problema do fluxo de potência trifásico se resume a uma generalização primitiva do monofásico, na qual cada uma das fases associadas aos barramentos trifásicos pode ser tratada como um barramento monofásico independente. As equações categorizadas entre I e III

²Entende-se por barra $Q\theta$ o tratamento dado a uma barra $V\theta$ que atingiu um dos seus limites de geração de potência reativa.

Tabela 3.1: Equações implementadas para o problema do fluxo de potência trifásico

	Equação Complexa	Núm. de Eq. Reais
I	$\sigma_k^{(a)} \psi I_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} \psi I_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} \psi I_k^{(c)} = 0$	2
II	$\sigma_k^{(0)} \psi J_k^{(0)} + \sigma_k^{(1)} \psi J_k^{(1)} + \sigma_k^{(2)} \psi J_k^{(2)} = 0$	2
III	$\sigma_k^{(0)} \psi Y_k^{(0)} + \sigma_k^{(1)} \psi Y_k^{(1)} + \sigma_k^{(2)} \psi Y_k^{(2)} = 0$	2
IV	$\frac{1}{2} \left[\left(\sigma_k^{(a)} \psi S_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} \psi S_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} \psi S_k^{(c)} \right)^* + \left(\sigma_k^{(a)} \psi S_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} \psi S_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} \psi S_k^{(c)} \right) \right] = p_k^{(x)}$	1
V	$\frac{j}{2} \left[\left(\sigma_k^{(a)} \psi S_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} \psi S_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} \psi S_k^{(c)} \right)^* - \left(\sigma_k^{(a)} \psi S_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} \psi S_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} \psi S_k^{(c)} \right) \right] = q_k^{(x)}$	1
VI	$\sigma_k^{(a)} V_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} V_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} V_k^{(c)} = v_k^{(x)}$	2
VII	$\left(\sigma_k^{(a)} V_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} V_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} V_k^{(c)} \right) \left(\sigma_k^{(a)} V_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} V_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} V_k^{(c)} \right)^* = m_k^{(x)} m_k^{(x)}$	1
VIII	$\frac{\left(\sigma_k^{(a)} V_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} V_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} V_k^{(c)} \right)}{\left(\sigma_k^{(a)} V_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} V_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} V_k^{(c)} \right)^*} = e^{j 2 \vartheta_k^{(x)}}$	1
IX	$T_k^{(1)} - T_k^{(2)} = t_k \left[\sigma_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} (1 - U_k) + \sigma_k^{(c)} (1 - U_k)^2 \right]$	1

são necessárias justamente para permitir que dispositivos shunt ativos cujos graus de liberdade de controle são inferiores a seis tenham um tratamento matemático rigoroso. A Referência [82] apresenta uma formulação de fluxo de potência trifásico que se enquadra na primeira descrição, enquanto as Referências [77, 85] apresentam formulações que se enquadram na segunda.

3.3.1 Equação I

Definindo W_k como o inverso multiplicativo de V_k e utilizando que um número complexo multiplicado pelo seu conjugado resume-se a sua magnitude ao quadrado (ou seja, $V_k V_k^* = M_k M_k$ e $W_k W_k^* = G_k G_k$), o termo $\sigma_k^{(a)} \psi I_k^{(a)}$ da Equação I pode ser reescrito conforme (3.46). Expressões análogas podem ser desenvolvidas

para os outros dois termos presentes nessa mesma equação, $\sigma_k^{(b)} \psi I_k^{(b)}$ e $\sigma_k^{(c)} \psi I_k^{(c)}$. A Tabela 3.2 apresenta possíveis combinações de valores para as constantes σ e suas respectivas interpretações físicas no contexto da Equação I.

$$\begin{aligned} \sigma_k^{(a)} \psi I_k^{(a)} &= \sigma_k^{(a)} \left[I_k^{(a)} - \left(\varphi I_k^{(a)} + \varphi I_k^{(ab)} - \varphi I_k^{(ca)} \right) \right] \\ &= \sigma_k^{(a)} \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^{(aa)} V_i^{(a)} + Y_{ki}^{(ab)} V_i^{(b)} + Y_{ki}^{(ac)} V_i^{(c)} \right) - \sigma_k^{(a)} \left(\sum_{x \in \{a^+, ab^+, ca^-\}} * \gamma_k^{(x)} V_k^{(x)} \right. \\ &\quad \left. + * W_k^{(x)} \left[* \alpha_k^{(x)} + * \beta_k^{(x)} M_k^{(x)} + * \lambda_k^{(x)} G_k^{(x)} + * \mu_k^{(x)} G_k^{(x)} G_k^{(x)} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Tabela 3.2: Constantes σ no contexto da Equação I

Constante			Comportamento do Dispositivo Shunt Ativo
$\sigma_k^{(a)}$	$\sigma_k^{(b)}$	$\sigma_k^{(c)}$	
1	0	0	sem injeção de corrente na fase <i>A</i>
0	1	0	sem injeção de corrente na fase <i>B</i>
0	0	1	sem injeção de corrente na fase <i>C</i>
1/3	1/3	1/3	sem injeção de corrente de sequência 0
1/3	$a/3$	$a^2/3$	sem injeção de corrente de sequência 1
1/3	$a^2/3$	$a/3$	sem injeção de corrente de sequência 2
1	1	0	conexão bifásica entre as fases <i>A</i> e <i>B</i>
0	1	1	conexão bifásica entre as fases <i>B</i> e <i>C</i>
1	0	1	conexão bifásica entre as fases <i>C</i> e <i>A</i>

Da forma como apresentada até então, a Equação I descreve o controle exercido pelo dispositivo shunt ativo conectado ao barramento trifásico k em suas respectivas injeções de corrente na rede elétrica. Contudo, conforme apresentado em (3.47), essa equação pode ser facilmente modificada para representar uma situação na qual o dispositivo shunt ativo conectado ao barramento trifásico k exerce um controle remoto em correntes circulantes entre os barramentos trifásicos j e i . No contexto dessa variante da Equação I, as constantes σ podem assumir os mesmos valores apresentados anteriormente na Tabela 3.2 e suas interpretações físicas são análogas. Um detalhamento do termo $\sigma_k^{(a)} I_{ji}^{(a)}$ pode ser encontrado em (3.48).

É possível ainda que o termo $\sigma_k^{(a)} I_{ji}^{(a)}$ descreva a corrente que atravessa um dispositivo série específico entre os barramentos trifásicos j e i . Estritamente como apresentada, a equação (3.48) descreve a corrente circulante no equivalente série entre os barramentos trifásicos j e i .

$$\sigma_k^{(a)} I_{ji}^{(a)} + \sigma_k^{(b)} I_{ji}^{(b)} + \sigma_k^{(c)} I_{ji}^{(c)} = 0 \quad (3.47)$$

$$\sigma_k^{(a)} I_{ji}^{(a)} = \sigma_k^{(a)} \left[-Y_{ji}^{(aa)} \left(V_j^{(a)} - V_i^{(a)} \right) - Y_{ji}^{(ab)} \left(V_j^{(b)} - V_i^{(b)} \right) - Y_{ji}^{(ac)} \left(V_j^{(c)} - V_i^{(c)} \right) \right] \quad (3.48)$$

3.3.2 Equação II

Os três termos presentes na Equação II podem ser reescritos conforme (3.49), (3.50) e (3.51). É importante ressaltar que o desenvolvimento parcial apresentado evidencia estruturas semelhantes as existentes nas Equações I e VI, sendo necessário apenas adaptar convenientemente as constantes $\sigma_k^{(a)}$, $\sigma_k^{(b)}$ e $\sigma_k^{(c)}$ presentes nessas equações. Por consequência, o desenvolvimento matemático não foi concluído e termos envolvendo $\psi I_k^{(a)}$, $\psi I_k^{(b)}$ e $\psi I_k^{(c)}$ continuam aparecendo em (3.49), (3.50) e (3.51) além de, é claro, tensões de barramentos trifásicos. A Tabela 3.3 apresenta possíveis combinações de valores para as constantes σ no contexto da Equação II e suas correspondências em relação às constantes σ presentes nas Equações I e VI. Ainda no contexto da Equação II, as admitâncias de sequência existentes no modelo genérico considerado para os dispositivos shunt ativos seguem duas possibilidades: (i) são efetivamente constantes, ou seja, meros parâmetros conhecidos *a priori*; (ii) são incógnitas para o problema, porém, podem ser descritas por expressões em *closed-form* e devidamente substituídas.

$$\begin{aligned} \sigma_k^{(0)} \psi J_k^{(0)} &= \sigma_k^{(0)} \left(\psi Y_k^{(00)} V_k^{(0)} + \psi Y_k^{(01)} V_k^{(1)} + \psi Y_k^{(02)} V_k^{(2)} + \psi I_k^{(0)} \right) \\ &= \sigma_k^{(0)} \left(\frac{\psi Y_k^{(00)}}{3} \left[V_k^{(a)} + V_k^{(b)} + V_k^{(c)} \right] + \frac{\psi Y_k^{(01)}}{3} \left[V_k^{(a)} + a V_k^{(b)} + a^2 V_k^{(c)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi Y_k^{(02)}}{3} \left[V_k^{(a)} + a^2 V_k^{(b)} + a V_k^{(c)} \right] + \frac{1}{3} \left[\psi I_k^{(a)} + \psi I_k^{(b)} + \psi I_k^{(c)} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \sigma_k^{(1)} \psi J_k^{(1)} &= \sigma_k^{(1)} \left(\psi Y_k^{(10)} V_k^{(1)} + \psi Y_k^{(11)} V_k^{(0)} + \psi Y_k^{(12)} V_k^{(2)} + \psi I_k^{(1)} \right) \\ &= \sigma_k^{(1)} \left(\frac{\psi Y_k^{(10)}}{3} \left[V_k^{(a)} + a V_k^{(b)} + a^2 V_k^{(c)} \right] + \frac{\psi Y_k^{(11)}}{3} \left[V_k^{(a)} + V_k^{(b)} + V_k^{(c)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi Y_k^{(12)}}{3} \left[V_k^{(a)} + a^2 V_k^{(b)} + a V_k^{(c)} \right] + \frac{1}{3} \left[\psi I_k^{(a)} + a \psi I_k^{(b)} + a^2 \psi I_k^{(c)} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \sigma_k^{(2)} \psi J_k^{(2)} &= \sigma_k^{(2)} \left(\psi Y_k^{(20)} V_k^{(2)} + \psi Y_k^{(21)} V_k^{(0)} + \psi Y_k^{(22)} V_k^{(1)} + \psi I_k^{(2)} \right) \\ &= \sigma_k^{(2)} \left(\frac{\psi Y_k^{(20)}}{3} \left[V_k^{(a)} + a^2 V_k^{(b)} + a V_k^{(c)} \right] + \frac{\psi Y_k^{(21)}}{3} \left[V_k^{(a)} + V_k^{(b)} + V_k^{(c)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi Y_k^{(22)}}{3} \left[V_k^{(a)} + a V_k^{(b)} + a^2 V_k^{(c)} \right] + \frac{1}{3} \left[\psi I_k^{(a)} + a^2 \psi I_k^{(b)} + a \psi I_k^{(c)} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Tabela 3.3: Constantes σ no contexto da Equação II

Constante $\sigma_k^{(0)}$ $\sigma_k^{(1)}$ $\sigma_k^{(2)}$ (Equação II)			Constante $\sigma_k^{(a)}$ $\sigma_k^{(b)}$ $\sigma_k^{(c)}$ (Equação I)			$\sigma_k^{(a)}$	Constante $\sigma_k^{(b)}$ (Equação VI)	$\sigma_k^{(c)}$	Comp. do Disp. Shunt Ativo
1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \sum_{x \in \{0,01,02\}} \psi Y_k^{(x)}$	$\frac{1}{3} \sum_{\substack{x \in \{0,01,02\} \\ y \in \{0,1,2\}}} \psi Y_k^{(x)} a^y$	$\frac{1}{3} \sum_{\substack{x \in \{0,01,02\} \\ y \in \{0,2,1\}}} \psi Y_k^{(x)} a^y$	sem tensão interna de sequência 0
0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a^2}{3}$	$\frac{1}{3} \sum_{x \in \{1,10,12\}} \psi Y_k^{(x)}$	$\frac{1}{3} \sum_{\substack{x \in \{1,10,12\} \\ y \in \{1,0,2\}}} \psi Y_k^{(x)} a^y$	$\frac{1}{3} \sum_{\substack{x \in \{1,10,12\} \\ y \in \{2,0,1\}}} \psi Y_k^{(x)} a^y$	sem tensão interna de sequência 1
0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{a^2}{3}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{1}{3} \sum_{x \in \{2,20,21\}} \psi Y_k^{(x)}$	$\frac{1}{3} \sum_{\substack{x \in \{2,20,21\} \\ y \in \{2,0,1\}}} \psi Y_k^{(x)} a^y$	$\frac{1}{3} \sum_{\substack{x \in \{2,20,21\} \\ y \in \{1,0,2\}}} \psi Y_k^{(x)} a^y$	sem tensão interna de sequência 2
1	1	1	1	0	0	$\psi Y_k^{(a)}$	$\psi Y_k^{(ab)}$	$\psi Y_k^{(ac)}$	sem tensão interna na fase A
1	a^2	a	0	1	0	$\psi Y_k^{(ba)}$	$\psi Y_k^{(b)}$	$\psi Y_k^{(bc)}$	sem tensão interna na fase B
1	a	a^2	0	0	1	$\psi Y_k^{(ca)}$	$\psi Y_k^{(cb)}$	$\psi Y_k^{(c)}$	sem tensão interna na fase C

A Equação II, ao invés de ser escrita seguindo o equivalente Norton trifásico, pode ser escrita seguindo o equivalente Thévenin trifásico, conforme (3.52). É evidente que todo o desenvolvimento apresentado para a primeira variante da Equação II pode ser analogamente estendido para esse caso.

$$\sigma_k^{(0)} \psi E_k^{(0)} + \sigma_k^{(1)} \psi E_k^{(1)} + \sigma_k^{(2)} \psi E_k^{(2)} = 0 \quad (3.52)$$

3.3.3 Equação III

Admitindo que, no modelo considerado para os dispositivos shunt ativos, as sequências zero, positiva e negativa apresentam tensões internas nulas e não possuem acoplamento entre si, os três termos presentes na Equação III podem ser reescritos conforme (3.53), (3.54) e (3.55). De forma análoga ao que pôde ser verificado anteriormente para Equação II, o desenvolvimento parcial apresentado para a Equação III também evidencia estruturas semelhantes as existentes na Equação I, sendo apenas necessário adaptar as constantes $\sigma_k^{(a)}$, $\sigma_k^{(b)}$ e $\sigma_k^{(c)}$ convenientemente. Por esse motivo, novamente, o desenvolvimento matemático não foi concluído. A Tabela 3.4 apresenta possíveis combinações de valores para as constantes σ no contexto da Equação III e suas correspondências em relação às constantes σ presentes na Equação I. É importante destacar que, nesse caso, para haver uma correspondência entre as equações citadas, as constantes σ não podem ser meras constantes: é necessário

que as mesmas possuam tensões de barra em sua composição.

$$\sigma_k^{(0)} \psi Y_k^{(0)} = -\sigma_k^{(0)} \frac{\psi I_k^{(0)}}{V_k^{(0)}} = -\sigma_k^{(0)} \frac{\psi I_k^{(a)} + \psi I_k^{(b)} + \psi I_k^{(c)}}{V_k^{(a)} + V_k^{(b)} + V_k^{(c)}} \quad (3.53)$$

$$\sigma_k^{(1)} \psi Y_k^{(1)} = -\sigma_k^{(1)} \frac{\psi I_k^{(1)}}{V_k^{(1)}} = -\sigma_k^{(1)} \frac{\psi I_k^{(a)} + a \psi I_k^{(b)} + a^2 \psi I_k^{(c)}}{V_k^{(a)} + a V_k^{(b)} + a^2 V_k^{(c)}} \quad (3.54)$$

$$\sigma_k^{(2)} \psi Y_k^{(2)} = -\sigma_k^{(2)} \frac{\psi I_k^{(2)}}{V_k^{(2)}} = -\sigma_k^{(2)} \frac{\psi I_k^{(a)} + a^2 \psi I_k^{(b)} + a \psi I_k^{(c)}}{V_k^{(a)} + a^2 V_k^{(b)} + a V_k^{(c)}} \quad (3.55)$$

Tabela 3.4: Constantes σ no contexto da Equação III

Constante $\sigma_k^{(0)}$ $\sigma_k^{(1)}$ $\sigma_k^{(2)}$ (Equação III)			$\sigma_k^{(a)}$	Constante $\sigma_k^{(b)}$ (Equação I)	$\sigma_k^{(c)}$	Comportamento do Disp. Shunt Ativo
1	-1	0	$(1-a)V_k^{(b)}$ $-(a^2-1)V_k^{(c)}$	$(a-a^2)V_k^{(c)}$ $-(1-a)V_k^{(a)}$	$(a^2-1)V_k^{(a)}$ $-(a-a^2)V_k^{(b)}$	impedâncias de seq. 0 e seq. 1 iguais
0	1	-1	$V_k^{(b)} - V_k^{(c)}$	$V_k^{(c)} - V_k^{(a)}$	$V_k^{(a)} - V_k^{(b)}$	impedâncias de seq. 1 e seq. 2 iguais
1	0	-1	$(1-a^2)V_k^{(b)}$ $-(a-1)V_k^{(c)}$	$(a^2-a)V_k^{(c)}$ $-(1-a^2)V_k^{(a)}$	$(a-1)V_k^{(a)}$ $-(a^2-a)V_k^{(b)}$	impedâncias de seq. 0 e seq. 2 iguais

A Equação III, ao invés de ser escrita em termos de admitância, pode ser escrita em termos de impedância, conforme (3.56). É evidente que todo o desenvolvimento apresentado para a primeira variante da Equação III pode ser analogamente estendido para esse caso.

$$\sigma_k^{(0)} \psi Z_k^{(0)} + \sigma_k^{(1)} \psi Z_k^{(1)} + \sigma_k^{(2)} \psi Z_k^{(2)} = 0 \quad (3.56)$$

3.3.4 Equações IV e V

O termo ${}^* \sigma_k^{(a)} \psi S_k^{(a)}$ presente nas Equações IV e V pode ser reescrito conforme (3.57). Expressões análogas podem ser desenvolvidas para os outros dois termos existentes, ${}^* \sigma_k^{(b)} \psi S_k^{(b)}$ e ${}^* \sigma_k^{(c)} \psi S_k^{(c)}$. Novamente, um desenvolvimento matemático parcial foi apresentado uma vez que pode ser traçado um paralelo com a Equação I ao adaptar convenientemente as constantes $\sigma_k^{(a)}$, $\sigma_k^{(b)}$ e $\sigma_k^{(c)}$ presentes na mesma. A Tabela 3.5 apresenta possíveis combinações de valores para as constantes σ e suas respectivas interpretações físicas no contexto das Equações IV e V, além das correspondências em relação às constantes σ presentes na Equação I. É importante destacar que, bem como no caso da Equação III, para haver uma correspondência em relação à Equação I, suas constantes σ não podem ser meras constantes: é necessário que as

mesmas possuam tensões de barra em sua composição.

$$*\sigma_k^{(a)} \psi S_k^{(a)} = *\sigma_k^{(a)} *V_k^{(a)} \psi I_k^{(a)} \quad (3.57)$$

Tabela 3.5: Constantes σ no contexto das Equações IV e V

Constante $\sigma_k^{(a)} \quad \sigma_k^{(b)} \quad \sigma_k^{(c)}$ (Equações IV e V)			Constante $\sigma_k^{(a)} \quad \sigma_k^{(b)} \quad \sigma_k^{(c)}$ (Equação I)			$p_k^{(x)}, q_k^{(x)}$ (x)	Comportamento do Dispositivo Shunt Ativo
1	0	0	$*V_k^{(a)}$	0	0	(a)	controle da potência ativa (Eq. IV) ou reativa (Eq. V) injetada na fase A
0	1	0	0	$*V_k^{(b)}$	0	(b)	controle da potência ativa (Eq. IV) ou reativa (Eq. V) injetada na fase B
0	0	1	0	0	$*V_k^{(c)}$	(c)	controle da potência ativa (Eq. IV) ou reativa (Eq. V) injetada na fase C
1	1	1	$*V_k^{(a)}$	$*V_k^{(b)}$	$*V_k^{(c)}$	(3ϕ)	controle da potência ativa (Eq. IV) ou reativa (Eq. V) trifásica injetada

Da forma como apresentadas até então, as Equações IV e V descrevem o controle exercido pelo dispositivo shunt ativo conectado ao barramento trifásico k em suas respectivas injeções de potência na rede elétrica. Contudo, conforme apresentado em (3.58) e (3.59), essas equações podem ser facilmente modificadas para representar uma situação na qual o dispositivo shunt ativo conectado ao barramento trifásico k exerce um controle remoto em fluxos de potência entre os barramentos trifásicos j e i . No contexto dessas variantes das Equações IV e V, as constantes σ podem assumir os mesmos valores apresentados anteriormente na Tabela 3.5 e suas interpretações físicas são análogas. Um detalhamento do termo $*\sigma_k^{(a)} *S_{ji}^{(a)}$ pode ser encontrado em (3.60).

$$\frac{1}{2} \left[\left(\sigma_k^{(a)} S_{ji}^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_{ji}^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_{ji}^{(c)} \right)^* + \left(\sigma_k^{(a)} S_{ji}^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_{ji}^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_{ji}^{(c)} \right) \right] = p_k^{(x)} \quad (3.58)$$

$$\frac{j}{2} \left[\left(\sigma_k^{(a)} S_{ji}^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_{ji}^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_{ji}^{(c)} \right)^* - \left(\sigma_k^{(a)} S_{ji}^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_{ji}^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_{ji}^{(c)} \right) \right] = q_k^{(x)} \quad (3.59)$$

$$*\sigma_k^{(a)} *S_{ji}^{(a)} = *\sigma_k^{(a)} *V_j^{(a)} I_{ji}^{(a)} \quad (3.60)$$

Também é possível que as Equações IV e V descrevam injeções de potência impostas pelo dispositivo shunt ativo conectado ao barramento trifásico k , porém, relacionando-as com injeções de potência impostas pelo dispositivo shunt ativo conectado ao barramento trifásico j , conforme (3.61) e (3.62). Em última análise, essas variantes são capazes de representar fatores de participação de geração entre

grupos de dispositivos shunt ativos.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_k^{(a)} S_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_k^{(c)} \right)^* + \left(\sigma_k^{(a)} S_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_k^{(c)} \right) \right] - \sigma_{kj}^{(x)} \\ \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_k^{(a)} S_j^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_j^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_j^{(c)} \right)^* + \left(\sigma_k^{(a)} S_j^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_j^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_j^{(c)} \right) \right] = p_k^{(x)} \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{j}{2} \left[\left(\sigma_k^{(a)} S_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_k^{(c)} \right)^* - \left(\sigma_k^{(a)} S_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_k^{(c)} \right) \right] - \sigma_{kj}^{(x)} \\ \frac{j}{2} \left[\left(\sigma_k^{(a)} S_j^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_j^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_j^{(c)} \right)^* - \left(\sigma_k^{(a)} S_j^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_j^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_j^{(c)} \right) \right] = q_k^{(x)} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Finalmente, as Equações IV e V também podem ser escritas de modo a estabelecer um fator de potência fixo para injeções de potência impostas pelo dispositivo shunt ativo conectado ao barramento trifásico k , mesmo que essas injeções sejam desconhecidas *a priori*. Para este objetivo, está apresentada a equação (3.63).

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_k^{(a)} S_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_k^{(c)} \right)^* + \left(\sigma_k^{(a)} S_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_k^{(c)} \right) \right] - \sigma_k^{(x)} \\ \frac{j}{2} \left[\left(\sigma_k^{(a)} S_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_k^{(c)} \right)^* - \left(\sigma_k^{(a)} S_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} S_k^{(b)} + \sigma_k^{(c)} S_k^{(c)} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.63)$$

É evidente que, tanto (3.61) e (3.62) quanto (3.63), podem ser facilmente modificadas para explorar fatores de participação e fatores de potência no contexto de fluxos de potência entre barramentos trifásicos.

3.3.5 Equações VI, VII e VIII

A Tabela 3.6 apresenta as possíveis combinações de valores para as constantes σ e suas respectivas interpretações físicas no contexto das Equações VI, VII e VIII. Essas equações foram expostas anteriormente admitindo um controle local, isto é, admitindo que o dispositivo shunt ativo conectado ao barramento trifásico k controla grandezas referentes à esse mesmo barramento trifásico. Para imposição de um controle remoto, é necessário apenas substituir as tensões identificadas com índice k por tensões identificadas com índice j . Nesse caso, o dispositivo shunt ativo conectado ao barramento trifásico k controlaria grandezas associadas ao barramento trifásico j .

Conforme pontuado na Seção 3.2.2, é comum que compensadores estáticos de potência reativa controlem magnitudes de tensão impondo uma correção no valor de referência de acordo com uma determinada magnitude de corrente circulante ou uma determinada geração de potência reativa. Nesse contexto, a Equação VII pode ser modificada conforme (3.64) para permitir que o valor de magnitude de tensão especificado seja subtraído de um valor de geração de potência reativa multiplicado

por um fator pré-ajustado referido como *slope*.

$$M_j^{(x)} M_j^{(x)} = \left(\sigma_k^{(a)} V_j^{(a)} + \sigma_k^{(b)} V_j^{(b)} + \sigma_k^{(c)} V_j^{(c)} \right) \left(\sigma_k^{(a)} V_j^{(a)} + \sigma_k^{(b)} V_j^{(b)} + \sigma_k^{(c)} V_j^{(c)} \right)^* = \left[m_k^{(x)} - u_k^{(y)} \psi Q_k^{(y)} \right]^2 \quad (3.64)$$

Tabela 3.6: Constantes σ no contexto das Equações VI, VII e VIII

Constante			$v_k^{(x)}, m_k^{(x)}, \vartheta_k^{(x)}$ (x)	Comportamento do Dispositivo Shunt Ativo
$\sigma_k^{(a)}$	$\sigma_k^{(b)}$	$\sigma_k^{(c)}$		
1	0	0	(a)	controle da tensão (Eq. VI), magnitude de tensão (Eq. VII) ou ângulo de tensão (Eq. VIII) da fase A
0	1	0	(b)	controle da tensão (Eq. VI), magnitude de tensão (Eq. VII) ou ângulo de tensão (Eq. VIII) da fase B
0	0	1	(c)	controle da tensão (Eq. VI), magnitude de tensão (Eq. VII) ou ângulo de tensão (Eq. VIII) da fase C
1	-1	0	(ab)	controle da tensão (Eq. VI), magnitude de tensão (Eq. VII) ou ângulo de tensão (Eq. VIII) entre as fases A e B
0	1	-1	(bc)	controle da tensão (Eq. VI), magnitude de tensão (Eq. VII) ou ângulo de tensão (Eq. VIII) entre as fases B e C
-1	0	1	(ca)	controle da tensão (Eq. VI), magnitude de tensão (Eq. VII) ou ângulo de tensão (Eq. VIII) entre as fases C e A
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	(0)	controle da tensão (Eq. VI), magnitude de tensão (Eq. VII) ou ângulo de tensão (Eq. VIII) de sequência 0
$\frac{1}{3}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a^2}{3}$	(1)	controle da tensão (Eq. VI), magnitude de tensão (Eq. VII) ou ângulo de tensão (Eq. VIII) de sequência 1
$\frac{1}{3}$	$\frac{a^2}{3}$	$\frac{a}{3}$	(2)	controle da tensão (Eq. VI), magnitude de tensão (Eq. VII) ou ângulo de tensão (Eq. VIII) de sequência 2

3.3.6 Equação IX

Contrastando com as outras equações apresentadas até então, a Equação IX é constituída por variáveis que não estão explicitamente representadas no modelo genérico considerado para os dispositivos shunt ativos. De fato, o comportamento de regime permanente caracterizado pela Equação IX é inerente somente a um equipamento elétrico específico, máquinas de indução, e requer, portanto, expressões do modelo matemático que representa exclusivamente esse equipamento.

Conforme os parâmetros apresentados na Figura 3.23, é possível aproximar que $r_m \rightarrow \infty$ e $(2 - u) \rightarrow 2$. Nesse caso, o lado esquerdo da Equação IX pode ser reescrito utilizando (3.65) e (3.66). No contexto dessa equação, as constantes σ estão limitadas ao conjunto dos número reais. As mesmas compõem um modelo

quadrático de carga mecânica cujo torque imposto à máquina de indução depende, em última análise, da velocidade desenvolvida pelo rotor da máquina. Por fim, é importante destacar que o escorregamento, representado por U_k , é uma incógnita para a Equação IX.

$$T_k^{(1)} = \frac{3 r_k^{(r)} [x_k^{(m)}]^2 U_k V_k^{(1)} * V_k^{(1)}}{\left([x_k^{(smr)}]^2 + [r_k^{(s)} x_k^{(mr)}]^2 \right) U_k^2 + 2 r_k^{(s)} r_k^{(r)} [x_k^{(m)}]^2 U_k + [r_k^{(r)}]^2 \left([r_k^{(s)}]^2 + [x_k^{(sm)}]^2 \right)} \quad (3.65)$$

$$T_k^{(2)} = \frac{6 r_k^{(r)} [x_k^{(m)}]^2 V_k^{(2)} * V_k^{(2)}}{4 \left([x_k^{(smr)}]^2 + [r_k^{(s)} x_k^{(mr)}]^2 + r_k^{(s)} r_k^{(r)} [x_k^{(m)}]^2 \right) + [r_k^{(r)}]^2 \left([r_k^{(s)}]^2 + [x_k^{(sm)}]^2 \right)} \quad (3.66)$$

onde, $x_k^{(smr)} = x_k^{(s)} x_k^{(r)} + x_k^{(s)} x_k^{(m)} + x_k^{(m)} x_k^{(r)}$, $x_k^{(sm)} = x_k^{(s)} + x_k^{(m)}$ e $x_k^{(mr)} = x_k^{(m)} + x_k^{(r)}$

3.3.7 Modos de Controle

A Tabela 3.7 apresenta características construtivas e controles secundários que podem ser representados através da formulação proposta, enquanto as Tabelas 3.8 e 3.9 apresentam, efetivamente, modos de controle que podem ser representados, relacionando-os com equipamentos elétricos existentes. O equacionamento que reflete a ausência de um dispositivo shunt ativo conectado ao barramento trifásico, bem como o equacionamento que assegura uma referência angular para o sistema de equações, também estão sendo referidos como “modos de controle”. Da mesma forma, também estão incluídos comportamentos de regime permanente ocasionados por condições operativas nas quais variáveis de controle estão saturadas por atingirem seus limites operacionais.

Destaca-se que o controle de torque mecânico disponível para máquinas de indução exige sete equações reais, uma vez que o escorregamento também é uma incógnita para o conjunto de equações correspondente. Além disso, é importante ressaltar que existem contextos específicos nos quais equações são perfeitamente intercambiáveis. Por exemplo, para uma condição de impedância interna de sequência zero virtualmente infinita, o equacionamento que impõe uma tensão interna de sequência zero nula pode ser substituído pelo equacionamento que impõe diretamente uma injeção de corrente de sequência zero nula. Analogamente, a ausência de injeção de corrente em uma fase pode ser representada tanto pelo equacionamento que impõe efetivamente uma circulação de corrente nula na referida fase ou pelo equacionamento que impõe que não há injeção de potência ativa e reativa na mesma.

Após assumir um determinado modo de controle para cada conjunto “barramento trifásico - dispositivo shunt ativo”, um problema de fluxo de potência trifásico pode ser estabelecido e resolvido. Posterior a essa primeira solução, algoritmos que alteram os modos de controle vigentes de acordo com os limites operacionais das variáveis

Tabela 3.7: Controles secundários e características construtivas

Controle Secundário / Imposição Construtiva	Equação	Comportamento do Dispositivo Shunt Ativo
Injeção de Corrente Equilibrada	I	sem injeção de corrente de seq. 0
	I	sem injeção de corrente de seq. 2
Tensão Equilibrada	VI	controle da tensão de seq. 0 com $v_k^{(x)} = v_k^{(0)} = 0$
	VI	controle da tensão de seq. 2 com $v_k^{(x)} = v_k^{(2)} = 0$
Tensão Interna Equilibrada	II	sem tensão interna de seq. 0
	II	sem tensão interna de seq. 2
Ausência de Tensão Interna (Δ ou Y)	I	sem injeção de corrente de seq. 0
	II	sem tensão interna de seq. 1
	II	sem tensão interna de seq. 2
Ausência de Tensão Interna (Y_g)	II	sem tensão interna de seq. 0
	II	sem tensão interna de seq. 1
	II	sem tensão interna de seq. 2
Ausência de Tensão Interna (referencial ABC)	II	sem tensão interna na fase A
	II	sem tensão interna na fase B
	II	sem tensão interna na fase C
Impedância Interna Equilibrada (Δ ou Y)	I	sem injeção de corrente de seq. 0
	III	impedâncias de seq. 1 e seq. 2 iguais
Impedância Interna Equilibrada (Y_g)	III	impedâncias de seq. 0 e seq. 1 iguais
	III	impedâncias de seq. 1 e seq. 2 iguais
Monofásico (Fase A)	I	sem injeção de corrente na fase B
	I	sem injeção de corrente na fase C
Monofásico (Fase B)	I	sem injeção de corrente na fase A
	I	sem injeção de corrente na fase C
Monofásico (Fase C)	I	sem injeção de corrente na fase A
	I	sem injeção de corrente na fase B
Incapacidade de Gerar Potência Ativa (Trifásico)	IV	controle da potência ativa trifásica injetada com $p_k^{(x)} = p_k^{(3\phi)} = 0$
Incapacidade de Gerar Potência Ativa (Fase A)	IV	controle da potência ativa injetada na fase A com $p_k^{(x)} = p_k^{(a)} = 0$
Incapacidade de Gerar Potência Ativa (Fase B)	IV	controle da potência ativa injetada na fase B com $p_k^{(x)} = p_k^{(b)} = 0$
Incapacidade de Gerar Potência Ativa (Fase C)	IV	controle da potência ativa injetada na fase C com $p_k^{(x)} = p_k^{(c)} = 0$

Tabela 3.8: Modos de Controle dos Dispositivos Shunt Ativos (Parte 1)

Dispositivo Shunt Ativo	Modo de Controle	Equacionamento
Nenhum	-	sem injeção de corrente na fase A sem injeção de corrente na fase B sem injeção de corrente na fase C
Máquina Síncrona	Ref. Angular & Mag. de Tensão	tensão interna equilibrada controle de tensão
	Ref. Angular & Geração Reativa	tensão interna equilibrada controle de ângulo de tensão controle de injeção de potência reativa
	Geração Ativa & Mag. de Tensão	tensão interna equilibrada controle de injeção de potência ativa controle de magnitude de tensão
	Geração Ativa & Geração Reativa	tensão interna equilibrada controle de injeção de potência ativa controle de injeção de potência reativa
Máquina de Indução	Escorregamento	ausência de tensão interna (Δ , Y ou Y_g)
	Torque Mecânico	ausência de tensão interna (Δ , Y ou Y_g) modelo quadrático de carga mecânica
SVC Trifásico	Mag. de Tensão	impedância interna equilibrada (Δ , Y ou Y_g) incapacidade de gerar potência ativa (trifásico) controle de magnitude de tensão
	Mag. de Tensão (conexão em Y_g)	incapacidade de gerar potência ativa (fase A) incapacidade de gerar potência ativa (fase B) incapacidade de gerar potência ativa (fase C) controle de magnitude de tensão controle de magnitude de tensão controle de magnitude de tensão
	Mag. de Tensão (conexão em Δ)	sem injeção de corrente de sequência zero incapacidade de gerar potência ativa (trifásico) controle de magnitude de tensão controle de magnitude de tensão controle de magnitude de tensão
	Âng. de Disparo Susceptância	ausência de tensão interna (Δ , Y , Y_g ou ref. ABC) ausência de tensão interna (Δ , Y , Y_g ou ref. ABC)

Tabela 3.9: Modos de Controle dos Dispositivos Shunt Ativos (Parte 2)

Dispositivo Shunt Ativo	Modo de Controle	Equacionamento
SVC Monofásico	Mag. de Tensão	monofásico (fase A , B ou C) incapacidade de gerar potência ativa (fase A , B ou C) controle de magnitude de tensão
	Âng. de Disparo	monofásico (fase A , B ou C) sem tensão interna (fase A , B ou C)
	Susceptância	monofásico (fase A , B ou C) sem tensão interna (fase A , B ou C)
STATCOM Trifásico	Mag. de Tensão	tensão interna ou injeção de corrente equilibrada incapacidade de gerar potência ativa (trifásico) controle de magnitude de tensão
	Geração Reativa	tensão interna ou injeção de corrente equilibrada incapacidade de gerar potência ativa (trifásico) controle de injeção de potência reativa
STATCOM Monofásico	Mag. de Tensão	monofásico (fase A , B ou C) incapacidade de gerar potência ativa (fase A , B ou C) controle de magnitude de tensão
	Geração Reativa	monofásico (fase A , B ou C) incapacidade de gerar potência ativa (fase A , B ou C) controle de injeção de potência reativa
Outros Equip. de Eletrônica de Potência Trifásicos	Geração Ativa & Mag. de Tensão	tensão interna ou injeção de corrente equilibrada controle de injeção de potência ativa controle de magnitude de tensão
	Geração Ativa & Geração Reativa	tensão interna ou injeção de corrente equilibrada controle de injeção de potência ativa controle de injeção de potência reativa
Outros Equip. de Eletrônica de Potência Monofásicos	Geração Ativa & Mag. de Tensão	monofásico (fase A , B ou C) controle de injeção de potência ativa controle de magnitude de tensão
	Geração Ativa & Geração Reativa	monofásico (fase A , B ou C) controle de injeção de potência ativa controle de injeção de potência reativa

de controle podem ser avaliados. Caso seja sinalizado a necessidade de alteração de pelo menos um modo de controle, um outro problema de fluxo de potência trifásico deve ser estabelecido e resolvido. Assim o processo continua até que os referidos algoritmos sinalizem que nenhum modo de controle deve ser alterado. Naturalmente, essas sucessivas avaliações de plausibilidade dos pontos de operação obtidos podem requerer a utilização de equações relacionadas aos modelos matemáticos específicos dos equipamentos representados. De fato, isso ocorrerá sempre que for necessário lidar com variáveis que não estão diretamente acessíveis no modelo genérico considerado para os dispositivos shunt ativos. É possível citar, por exemplo, o ângulo de disparo em um compensador estático de reativos.

Por fim, é importante pontuar que tapes de transformadores ou autotransformadores reguladores de tensão podem sofrer um tratamento semelhante ao descrito no parágrafo anterior. De fato, no contexto do equacionamento apresentado até então, espera-se que os problemas de fluxo de potência trifásico não considerem tapes explicitamente como variáveis. Em outras palavras, valores constantes são atribuídos aos mesmos na composição do sistema de equações e, sendo assim, é necessário atualizá-los através de algoritmos externos que estabelecem novos problemas de fluxo de potência. Evidentemente, outra abordagem possível consiste em tratar os tapes como variáveis contínuas mesmo que, a rigor, sejam variáveis inteiras. Nesse caso, seria necessário introduzir na formulação de fluxo de potência trifásico apresentada um conceito análogo aos dispositivos shunt ativos, porém, para acomodar dispositivos série ativos.

Capítulo 4

Formulação do Método da Incorporação Holomórfica

De uma forma simplificada, o método da incorporação holomórfica consiste em adaptar o sistema de equações do problema do fluxo de potência e interpretá-lo sob a ótica das áreas da matemática denominadas análise complexa e geometria algébrica. Uma nova variável complexa é incorporada nas equações de modo que suas incógnitas originais possam ser enxergadas como funções holomórficas em relação a essa nova variável. Neste trabalho, a variável de incorporação está sendo representada por s . É conveniente realizar a incorporação de modo que $s = 0$ corresponda a um problema de fluxo de potência cuja solução é conhecida *a priori*, ou pelo menos, pode ser trivialmente obtida, e que $s = 1$ corresponda ao problema de fluxo de potência de interesse, que deseja-se obter a solução, de fato. No contexto da incorporação holomórfica canônica aplicada a um equivalente monofásico de sequência positiva, o problema do fluxo de potência em $s = 0$ compreende uma solução estável, trivial e inequívoca: a tensão complexa $1\angle 0^\circ$ se propagando por toda a rede elétrica.

A presença do complexo conjugado de incógnitas no problema do fluxo de potência torna impossível a definição de funções holomórficas diretamente. É necessário reunir o sistema de equações a sua imagem conjugada e substituir o conjugado de incógnitas por variáveis independentes. Desse modo, pode ser obtido um sistema de equações perfeitamente algébrico e funções algébricas são naturalmente holomórficas [86]. A título de ilustração, considere o sistema de equações (4.1) que representa o problema de fluxo de potência monofásico em sua forma elementar: com exceção à barra de referência, apenas existem barras de carga de potência constante. Sua extensão conforme explicado no início deste parágrafo encontra-se em (4.2). É possível demonstrar que (4.2) corresponde a forma retangular de (4.1) reescrita utilizando as substituições de variável $\text{Re}\{V_k\} = \frac{1}{2}(\bar{V}_k + V_k)$ e $\text{Im}\{V_k\} = \frac{j}{2}(\bar{V}_k - V_k)$. Por consequência, sob a ótica da geometria algébrica, não existe distinção entre (4.2) e a forma retangular de (4.1). Inclusive, bem como a forma retangular de (4.1) apenas

reproduz soluções do problema do fluxo de potência quando as restrições implícitas $\text{Re}\{V_k\} \in \mathbb{R}$ e $\text{Im}\{V_k\} \in \mathbb{R}$ são respeitadas para todo k , o sistema de equações estendido (4.2) se limita a reproduzir soluções do problema do fluxo de potência quando $\overline{V}_k = V_k^*$ para todo k . Em algumas publicações, essa condição costuma ser referida como *Reflection Condition*.

$$\sum_{i=1}^N V_k^* Y_{ki} V_i = S_k^*, \quad k \in \text{PQ} \quad (4.1)$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \overline{V}_k Y_{ki} V_i = S_k^* \\ \sum_{i=1}^N V_k Y_{ki}^* \overline{V}_i = S_k \end{pmatrix}, \quad k \in \text{PQ} \quad (4.2)$$

Sob a ótica da análise complexa, existe uma aparente incongruência em esperar que a função $\overline{V}_k(s)$ englobe a função $[V_k(s)]^* = V_k^*(s)$, uma vez que se Ω denota o domínio de holomorfia de $V_k(s)$, pode-se demonstrar que $V_k^*(s)$ não conserva a holomorfia em nenhum ponto de Ω . Essa aparente incongruência é explicada com base no Princípio de Reflexão de Schwarz: na verdade, $\overline{V}_k(s)$ engloba $V_k^*(s^*)$. E a função $V_k^*(s^*)$ conserva a holomorfia de $V_k(s)$, sendo igualmente possível demonstrar que a mesma é holomórfica na imagem conjugada de Ω [84].

Existe a necessidade que as funções advindas da incorporação sejam holomórficas porque, dessa forma, é possível descrevê-las através de séries de Taylor [87]. O problema do fluxo de potência pode ser, então, reduzido ao cálculo dos coeficientes dessas séries. Utilizando expansões em série de Taylor ao redor de $s = 0$, os coeficientes de ordem zero coincidem com a solução do problema do fluxo de potência conhecida *a priori*. Por sua vez, os coeficientes de ordem superior podem ser obtidos recursivamente através de sistemas lineares. Enquanto complicações relacionadas a precisão numérica não se manifestarem, quanto maior o número de coeficientes calculados, melhor as séries truncadas representam as funções originais. É importante destacar que existem pelo menos duas formas distintas de escrever os sistemas lineares. Retornando ao exemplo ilustrativo anterior, utilizando (4.2) como referência, pode-se escrever sistemas lineares complexos cujas variáveis são os coeficientes das séries de Taylor das funções $\overline{V}_k(s)$ e $V_k(s)$. Contudo, como as séries de Taylor são obtidas ao redor de um ponto que é solução de um problema de fluxo de potência (e, conseqüentemente, a condição $\overline{V}_k = V_k^*$ é satisfeita para todo k nesse ponto), pode-se utilizar (4.1) como referência e escrever sistemas lineares reais cujas variáveis são as partes reais e imaginárias das funções $V_k(s)$. As Tabelas 4.1 e 4.2 comparam, no contexto do exemplo ilustrativo, ambas as abordagens citadas.

Teoremas notáveis da análise complexa garantem que séries de Taylor apenas convergem para as funções originais em discos centrados nos respectivos pontos de

Tabela 4.1: Exemplo de obtenção dos sistemas lineares que permitem o cálculo dos coeficientes das séries de Taylor (Parte 1)

Eq.	$\sum_{i=1}^N V_k^*(s^*) Y_{ki} V_i(s) = s S_k^*$ $\sum_{i=1}^N Y_{ki} \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_k^*[n] s^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_i[n] s^n \right) = s S_k^*$ $\sum_{i=1}^N Y_{ki} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{m=0}^n V_k^*[m] V_i[n-m] = s S_k^*$ $\sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{i=1}^N Y_{ki} \sum_{m=0}^n V_k^*[m] V_i[n-m] = s S_k^*$	$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \bar{V}_k(s) Y_{ki} V_i(s) = s S_k^* \\ \sum_{i=1}^N V_k(s) Y_{ki}^* \bar{V}_i(s) = s S_k \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{V}_k[n] s^n \right) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_i[n] s^n \right) = s S_k^* \\ \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^* \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_k[n] s^n \right) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{V}_i[n] s^n \right) = s S_k \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{m=0}^n \bar{V}_k[m] V_i[n-m] \right) = s S_k^* \\ \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^* \sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{m=0}^n V_k[m] \bar{V}_i[n-m] \right) = s S_k \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{i=1}^N Y_{ki} \sum_{m=0}^n \bar{V}_k[m] V_i[n-m] \right) = s S_k^* \\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* \sum_{m=0}^n V_k[m] \bar{V}_i[n-m] \right) = s S_k \end{cases}$
$n = 0$	$\sum_{i=1}^N Y_{ki} V_k^*[0] V_i[0] = 0$ $V_k^*[0] \sum_{i=1}^N Y_{ki} V_i[0] = 0$ $\sum_{i=1}^N Y_{ki} V_i[0] = 0$	$\begin{cases} \sum_{i=1}^N Y_{ki} \bar{V}_k[0] V_i[0] = 0 \\ \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* V_k[0] \bar{V}_i[0] = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \bar{V}_k[0] \sum_{i=1}^N Y_{ki} V_i[0] = 0 \\ V_k[0] \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* \bar{V}_i[0] = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^N Y_{ki} V_i[0] = 0 \\ \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* \bar{V}_i[0] = 0 \end{cases}$

Tabela 4.2: Exemplo de obtenção dos sistemas lineares que permitem o cálculo dos coeficientes das séries de Taylor (Parte 2)

$n = 1$	$\sum_{i=1}^N Y_{ki} (V_k^*[0] V_i[n] + V_k^*[n] V_i[0]) = S_k^*$ $V_k^*[n] \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki} V_i[0] \right) + \sum_{i=1}^N Y_{ki} V_k^*[0] V_i[n] = S_k^*$ $\begin{cases} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N Y_{ki} V_k^*[0] V_i[n] \right\} = \operatorname{Re} \{S_k^*\} \\ \operatorname{Im} \left\{ \sum_{i=1}^N Y_{ki} V_k^*[0] V_i[n] \right\} = \operatorname{Im} \{S_k^*\} \end{cases}$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \{Y_{ki} V_k^*[0]\} \operatorname{Re} \{V_i[n]\} \\ \quad - \operatorname{Im} \{Y_{ki} V_k^*[0]\} \operatorname{Im} \{V_i[n]\} = \operatorname{Re} \{S_k^*\} \\ \sum_{i=1}^N \operatorname{Im} \{Y_{ki} V_k^*[0]\} \operatorname{Re} \{V_i[n]\} \\ \quad + \operatorname{Re} \{Y_{ki} V_k^*[0]\} \operatorname{Im} \{V_i[n]\} = \operatorname{Im} \{S_k^*\} \end{cases}$	$\begin{cases} \sum_{i=1}^N Y_{ki} (\overline{V_k}[0] V_i[n] + \overline{V_k}[n] V_i[0]) = S_k^* \\ \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* (V_k[0] \overline{V_i}[n] + V_k[n] \overline{V_i}[0]) = S_k \end{cases}$ $\begin{cases} \overline{V_k}[n] \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki} V_i[0] \right) + \sum_{i=1}^N Y_{ki} \overline{V_k}[0] V_i[n] = S_k^* \\ V_k[n] \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^* \overline{V_i}[0] \right) + \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* V_k[0] \overline{V_i}[n] = S_k \end{cases}$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^N Y_{ki} \overline{V_k}[0] V_i[n] = S_k^* \\ \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* V_k[0] \overline{V_i}[n] = S_k \end{cases}$
$n \geq 2$	$\sum_{i=1}^N Y_{ki} \left(V_k^*[0] V_i[n] + V_k^*[n] V_i[0] + \sum_{m=1}^{n-1} V_k^*[m] V_i[n-m] \right) = 0$ $\sum_{i=1}^N Y_{ki} (V_k^*[0] V_i[n] + V_k^*[n] V_i[0]) = \sum_{i=1}^N Y_{ki} \sum_{m=1}^{n-1} V_k^*[m] V_i[n-m]$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^N \operatorname{Re} \{Y_{ki} V_k^*[0]\} \operatorname{Re} \{V_i[n]\} \\ \quad - \operatorname{Im} \{Y_{ki} V_k^*[0]\} \operatorname{Im} \{V_i[n]\} = \\ \quad - \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^N Y_{ki} \sum_{m=1}^{n-1} V_k^*[m] V_i[n-m] \right\} \\ \sum_{i=1}^N \operatorname{Im} \{Y_{ki} V_k^*[0]\} \operatorname{Re} \{V_i[n]\} \\ \quad + \operatorname{Re} \{Y_{ki} V_k^*[0]\} \operatorname{Im} \{V_i[n]\} = \\ \quad - \operatorname{Im} \left\{ \sum_{i=1}^N Y_{ki} \sum_{m=1}^{n-1} V_k^*[m] V_i[n-m] \right\} \end{cases}$	$\begin{cases} \sum_{i=1}^N Y_{ki} \left(\overline{V_k}[0] V_i[n] + \overline{V_k}[n] V_i[0] + \sum_{m=1}^{n-1} \overline{V_k}[m] V_i[n-m] \right) = 0 \\ \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* \left(V_k[0] \overline{V_i}[n] + V_k[n] \overline{V_i}[0] + \sum_{m=1}^{n-1} V_k[m] \overline{V_i}[n-m] \right) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^N Y_{ki} (\overline{V_k}[0] V_i[n] + \overline{V_k}[n] V_i[0]) = \\ \quad - \sum_{i=1}^N Y_{ki} \sum_{m=1}^{n-1} \overline{V_k}[m] V_i[n-m] \\ \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* (V_k[0] \overline{V_i}[n] + V_k[n] \overline{V_i}[0]) = \\ \quad - \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* \sum_{m=1}^{n-1} V_k[m] \overline{V_i}[n-m] \end{cases}$ $\begin{cases} \sum_{i=1}^N Y_{ki} \overline{V_k}[0] V_i[n] = - \sum_{i=1}^N Y_{ki} \sum_{m=1}^{n-1} \overline{V_k}[m] V_i[n-m] \\ \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* V_k[0] \overline{V_i}[n] = - \sum_{i=1}^N Y_{ki}^* \sum_{m=1}^{n-1} V_k[m] \overline{V_i}[n-m] \end{cases}$

expansão e cujos raios se estendem até a singularidade mais próxima [88, 89]. Por sua vez, teoremas notáveis relacionados a teoria do potencial garantem o aproximante de Padé diagonal como a máxima extensão analítica de uma série de Taylor na ausência da equação que define a função original [90, 91]. Diante disso, desde a sua proposição, o método da incorporação holomórfica prevê a utilização de aproximantes de Padé como possível recurso para obtenção da solução em $s = 1$. Enquanto séries de Taylor são meros polinômios, aproximantes de Padé são razões entre dois polinômios. A princípio, uma série de ordem n permite a obtenção de $\frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)$ aproximantes distintos, correspondentes as diferentes combinações de ordem para os polinômios presentes no numerador e denominador. Os aproximantes referidos como “diagonais” apresentam polinômios de mesma ordem tanto no numerador quanto no denominador. Evidentemente, os polinômios presentes no melhor aproximante de Padé diagonal que pode ser obtido a partir de uma série de Taylor de ordem n , assumem uma ordem de $\frac{n}{2}$ para n par e uma ordem de $\frac{n-1}{2}$ para n ímpar.

Uma vez que um mesmo problema de fluxo de potência pode possuir inúmeras soluções, as funções advindas da incorporação podem ser multivaloradas. O conceito de função multivalorada é perfeitamente ilustrável pela equação algébrica $w^2 + z^2 = 1$. Considerando que essa equação define implicitamente w como função de z , $w = f(z)$ é uma função multivalorada porque para cada valor de z são produzidos dois valores em w , nomeadamente, $w_1 = +\sqrt{1 - z^2}$ e $w_2 = -\sqrt{1 - z^2}$. Porém, tanto séries de Taylor quanto aproximantes de Padé são recortes monovalorados das funções originais, portanto, apenas são capazes de reproduzir uma única solução em $s = 1$.

Nesse contexto, é importante pontuar que mesmo os aproximantes de Padé diagonais não garantem a obtenção de uma solução em $s = 1$. Em outras palavras, ainda que os aproximantes tenham a capacidade de expandir o domínio de convergência quando comparados as séries, não é garantido que o ponto $s = 1$ pertença a esse domínio expandido. Além disso, mesmo que a solução utilizada em $s = 0$ seja uma solução dita estável, não é garantido que a solução em $s = 1$ mantenha essa propriedade. Contudo, em [11], o autor conjectura que, tratando-se da incorporação holomórfica canônica, ambas as preposições anteriores sejam naturalmente satisfeitas por uma questão de plausibilidade física. Em suas próprias palavras, se e somente se existir solução estável para um dado problema de fluxo de potência, o intervalo $0 < s \leq 1$ sob o eixo real estaria contido no domínio de convergência dos aproximantes de Padé diagonais. De fato, essa conjectura pôde ser formalmente provada verdadeira no caso específico de um equivalente de rede monofásico composto por uma barra de referência e uma barra de carga de potência constante. Até o presente momento, porém, não há uma demonstração para redes elétricas arbitrárias, apenas extensas evidências empíricas corroboram sua validade.

A argumentação de plausibilidade desenvolvida pelo referido autor é fundamentada a partir do entendimento de que uma condição de nulidade de injeção líquida de potência aparente, em rigorosamente todas as barras da rede elétrica, somente poderia ser associada a uma única solução estável. A correspondência física dessa solução seria todos os dispositivos shunt, ativos e passivos, estarem em circuito aberto. Outras soluções que também satisfazem essa condição de nulidade necessariamente envolveriam barras cujos respectivos dispositivos shunt estariam em curto-circuito e, portanto, corresponderiam aos pontos de operação instáveis.

4.1 Incorporação Holomórfica Canônica Monofásica

Um equivalente de rede monofásico composto por uma barra de referência e uma barra de carga pode ser representado matematicamente pelo sistema de equações (4.3). Sua primeira equação descreve a tensão complexa que é imposta pela barra de referência. Na sequência, admitindo um consumo de potência caracterizado por um modelo polinomial que segue o desenvolvimento apresentado na Seção 3.2.1, tem-se a equação nodal de rede associada a barra de carga. Uma última equação, necessária devido a presença da parcela de corrente constante no modelo de carga, descreve a relação matemática entre a tensão complexa da barra de carga e a sua respectiva magnitude. Conforme pontuado no início deste capítulo, como primeira etapa para obter um sistema de equações efetivamente algébrico (e que, portanto, manifesta analiticidade e holomorfia), é necessário reunir (4.3) a sua imagem conjugada, dando origem ao sistema de equações (4.4). É interessante notar que a natureza física do problema permite identificar M_2 como sendo, a princípio, uma variável puramente real e, por consequência, a imagem conjugada de $V_2 V_2^* = M_2 M_2$ é idêntica a própria. Em uma segunda etapa, que antecede a incorporação propriamente dita, o complexo conjugado de incógnitas é substituído por variáveis independentes, denotadas por um sobrescrito barrado, permitindo, finalmente, a formação do sistema de equações algébrico apresentado em (4.5).

$$\begin{cases} V_1 = v_1 & ; & V_2^* (Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2) = \alpha_2^* + \beta_2^* M_2 + \gamma_2^* M_2 M_2 \\ & & V_2 V_2^* = M_2 M_2 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} V_1 = v_1 & ; & V_2^* (Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2) = \alpha_2^* + \beta_2^* M_2 + \gamma_2^* M_2 M_2 \\ \bar{V}_1^* = \bar{v}_1^* & ; & \bar{V}_2 (Y_{21}^* \bar{V}_1^* + Y_{22}^* \bar{V}_2^*) = \alpha_2 + \beta_2 M_2 + \gamma_2 M_2 M_2 \\ & & V_2 V_2^* = M_2 M_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} V_1 = v_1 & ; & \bar{V}_2 (Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2) = \alpha_2^* + \beta_2^* M_2 + \gamma_2^* M_2 M_2 \\ \bar{V}_1 = v_1^* & ; & V_2 (Y_{21}^* \bar{V}_1 + Y_{22}^* \bar{V}_2) = \alpha_2 + \beta_2 M_2 + \gamma_2 M_2 M_2 \\ & & V_2 \bar{V}_2 = M_2 M_2 \end{cases} \quad (4.5)$$

Seguindo a incorporação holomórfica canônica, o sistema de equações (4.5) é reescrito conforme (4.6). É importante destacar que para impor uma tensão unitária se propagando por toda a rede elétrica em $s = 0$, a tensão da barra de referência é feita unitária, bem como dispositivos shunt contabilizados de forma externa à matriz de admitância não injetam, nem consomem, potência. Além disso, é necessário intervir na própria matriz de admitância, reescrevendo-a como a soma de uma matriz de admitância equivalente série, \tilde{Y} , e uma matriz de admitância equivalente shunt, \hat{Y} . Os elementos da matriz de admitância equivalente shunt também acabam por ser anulados em $s = 0$ para permitir a solução $1 \angle 0^\circ$ em todas as barras da rede elétrica. As equações que definem os elementos de ambas as matrizes de admitância equivalentes estão apresentadas em (4.7).

$$\begin{cases} V_1 = 1 + (v_1 - 1) s \\ \bar{V}_1 = 1 + (v_1^* - 1) s \\ \bar{V}_2 \left(-\tilde{Y}_{22} V_1 + \left[\tilde{Y}_{22} + \hat{Y}_{22} s \right] V_2 \right) = s (\alpha_2^* + \beta_2^* M_2 + \gamma_2^* M_2 M_2) \\ V_2 \left(-\tilde{Y}_{22}^* \bar{V}_1 + \left[\tilde{Y}_{22}^* + \hat{Y}_{22}^* s \right] \bar{V}_2 \right) = s (\alpha_2 + \beta_2 M_2 + \gamma_2 M_2 M_2) \\ V_2 \bar{V}_2 = M_2 M_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} i \neq k : \tilde{Y}_{ki} = Y_{ki} & ; & \hat{Y}_{ki} = 0 \\ Y_{ki} = \tilde{Y}_{ki} + \hat{Y}_{ki}, & i = k : \tilde{Y}_{ki} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N Y_{kj} & ; & \hat{Y}_{ki} = \sum_{j=1}^N Y_{kj} \end{cases} \quad (4.7)$$

Fazendo uso de técnicas de eliminação de variáveis para sistemas polinomiais multivariados, é possível obter a equação implícita, apresentada parcialmente em (4.8), que extrai V_2 do sistema de equações original tão somente como função de s . As possibilidades de singularidade para funções algébricas multivaloradas se resumem aos chamados polos e aos chamados pontos de ramificação [86]. Informalmente, polos podem ser entendidos como pontos onde uma função algébrica multivalorada tende para o infinito. Por sua vez, informalmente, pontos de ramificação podem ser entendidos como pontos onde os valores assumidos pela função algébrica multivalorada apresentam multiplicidade. O resultado anterior é interessante justamente porque evidencia a existência de um polo em $s = -\tilde{Y}_{22} / (\hat{Y}_{22} - \gamma_2^*)$ que não possui

uma natureza puramente matemática. Em última análise, a necessidade de anular dispositivos shunt em $s = 0$ faz com que tanto os elementos da matriz de admitância equivalente shunt, denotados por \widehat{Y} , quanto as parcelas de impedância constante dos dispositivos shunt passivos, denotadas por γ , sejam funções de s . Portanto, era previsível o aparecimento de um valor em s que pode ser entendido como uma condição de ressonância paralelo entre essas admitâncias e os elementos da matriz de admitância equivalente série denotados por \widetilde{Y} .

$$\begin{aligned}
& \widetilde{Y}_{22}^* \widetilde{Y}_{22}^* \left[1 + s(v_1^* - 1) \right]^2 \left[\widetilde{Y}_{22} + s \left(\widehat{Y}_{22} - \gamma_2^* \right) \right]^2 V_2^4 \\
& \quad + (\dots) V_2^3 \\
& \quad + (\dots) V_2^2 \\
& \quad + (\dots) V_2^1 \\
& + s^2 \alpha_2^2 \widetilde{Y}_{22} \left[1 + s(v_1 - 1) \right]^2 V_2^0 = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Substituindo a barra de carga por uma barra de magnitude de tensão controlada através de uma máquina síncrona, o sistema de equações (4.9) pode ser escrito seguindo a incorporação holomórfica canônica. Utilizando o mesmo processo de eliminação de variáveis mencionado anteriormente, é possível obter a equação (4.10). Essa equação demonstra que polos de ressonância paralelo não podem ser introduzidos por barras de tensão controlada. Intuitivamente, a existência de uma equação a parte que garante o valor da magnitude de tensão de uma determinada barra, tornaria impossível o aparecimento de uma singularidade desse tipo na função em s que descreve a tensão desta barra. De fato, a equação $V_k \overline{V}_k = 1 + (m_k^2 - 1) s$ permite inferir que um valor finito de s apenas seria capaz de produzir $V_k \rightarrow \infty$ se e somente se $\overline{V}_k \rightarrow 0$ nesse mesmo ponto.

$$\begin{cases}
V_1 = 1 + (v_1 - 1) s \\
\overline{V}_1 = 1 + (v_1^* - 1) s \\
\overline{V}_2 \left(-\widetilde{Y}_{22} V_1 + \left[\widetilde{Y}_{22} + \widehat{Y}_{22} s \right] V_2 \right) + V_2 \left(-\widetilde{Y}_{22}^* \overline{V}_1 + \left[\widetilde{Y}_{22}^* + \widehat{Y}_{22}^* s \right] \overline{V}_2 \right) = 2 p_2 s \\
V_2 \overline{V}_2 = 1 + (m_2 m_2 - 1) s
\end{cases} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
& \widetilde{Y}_{22}^* \left[1 + s(v^* - 1) \right] V_2^2 \\
& - \left\{ \left[\left(\widetilde{Y}_{22} + \widetilde{Y}_{22}^* \right) + s \left(\widehat{Y}_{22} + \widehat{Y}_{22}^* \right) \right] \left[1 + s(m_2^2 - 1) \right] - 2 p_2 s \right\} V_2^1 \\
& + \widetilde{Y}_{22} \left[1 + s(v - 1) \right] \left[1 + s(m_2^2 - 1) \right] V_2^0 = 0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Dado que essa singularidade não é puramente matemática (a mesma reflete uma condição inerente ao problema físico), é de se esperar que esses resultados possam

ser generalizados para uma rede elétrica arbitrária de N barras. Ou seja, cada barra que não tenha sua tensão controlada, potencialmente, introduz um polo de ressonância paralelo. Nesse caso, é evidente que quanto maior $\left| \widehat{Y}_{kk} - \gamma_k^* \right|$ for em relação a $\left| \widetilde{Y}_{kk} \right|$, mais próximo de $s = 0$ a barra k impõe um polo de ressonância paralelo e, conseqüentemente, mais provável que haja uma exaustão da precisão numérica de modo a impedir a obtenção da solução.

Essa discussão, presente originalmente em [84], também se faz necessária neste trabalho porque o polo de ressonância paralelo é potencialmente problemático no contexto do fluxo de potência trifásico em, pelo menos, duas situações relativamente comuns: (a) quando existem bancos de transformadores ou autotransformadores trifásicos com impedâncias virtualmente nulas; (b) quando existem bancos de transformadores ou autotransformadores trifásicos, conectados em $Y - \Delta$ ou $\Delta - Y$, com pelo menos uma fase em aberto. A título de exemplo, considere uma Barra m conectada tão somente a uma Barra k através de um banco de transformador trifásico $Y - \Delta$, originalmente equilibrado, porém, com a fase A em aberto. As matrizes que representam os elementos equivalentes trifásicos, série e shunt, enxergados pela Barra m estão apresentadas em (4.11). A soma $\left(\widetilde{Y}_{mm} + \widehat{Y}_{mm} s \right)$ produz ao menos uma coluna nula quando $s = 0$ e quando $s = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$. Por conseqüência, esses valores de s possivelmente configuram polos de ressonância paralelo introduzidos pela barra m .

$$\widetilde{Y}_{mm} = \frac{y_{km}}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix} ; \quad \widehat{Y}_{mm} = \frac{y_{km}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3}-1 \\ 0 & 1-\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3}-1 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

É possível adaptar a incorporação holomórfica canônica monofásica de modo que os elementos da matriz de admitância equivalente shunt sejam mantidos em $s = 0$. Nesse caso, não apenas perde-se a solução de uma tensão unitária se propagando por toda rede elétrica, como eventualmente a solução em $s = 0$ não pode ser obtida de forma trivial. A equação (4.12) apresenta a aplicação dessa incorporação holomórfica canônica adaptada em um equivalente monofásico composto por uma barra de referência e uma barra de carga. A constante ω , limitada pelo intervalo $0 \leq \omega \leq 1$, determina o quanto de admitância dos elementos shunt equivalentes será anulado em $s = 0$, de modo que, se $\omega = 1$, tem-se a incorporação holomórfica canônica tradicional. A equação implícita que define V_2 como função de s , apresentada parcialmente em (4.13), revela que o polo de ressonância paralelo torna-se $s = - \left(\widetilde{Y}_{22} + (1 - \omega) \widehat{Y}_{22} \right) / \left(\omega \widehat{Y}_{22} - \gamma_2^* \right)$. De fato, é possível ainda eliminá-lo completamente. Basta que as parcelas de impedância constante representadas em γ sejam contabilizadas na própria matriz de admitância de barra e o valor de constante

ω utilizado seja zero. Nesse caso, ter-se-ia uma incorporação análoga à mínima.

$$\begin{cases} V_1 = 1 + (v_1 - 1) s \\ \bar{V}_1 = 1 + (v_1^* - 1) s \\ \bar{V}_2 \left(-\tilde{Y}_{22} V_1 + \left[\tilde{Y}_{22} + (1 - \omega) \hat{Y}_{22} + \omega \hat{Y}_{22} s \right] V_2 \right) = s (\alpha_2^* + \beta_2^* M_2 + \gamma_2^* M_2 M_2) \\ V_2 \left(-\tilde{Y}_{22}^* \bar{V}_1 + \left[\tilde{Y}_{22}^* + (1 - \omega) \hat{Y}_{22}^* + \omega \hat{Y}_{22}^* s \right] \bar{V}_2 \right) = s (\alpha_2 + \beta_2 M_2 + \gamma_2 M_2 M_2) \\ V_2 \bar{V}_2 = M_2 M_2 \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{Y}_{22}^* \tilde{Y}_{22} \left[1 + s (v_1^* - 1) \right]^2 \left[\tilde{Y}_{22} + (1 - \omega) \hat{Y}_{22} + s \left(\omega \hat{Y}_{22} - \gamma_2^* \right) \right]^2 V_2^4 \\ & \qquad \qquad \qquad + (\dots) V_2^3 \\ & \qquad \qquad \qquad + (\dots) V_2^2 \\ & \qquad \qquad \qquad + (\dots) V_2^1 \\ & + s^2 \alpha_2^2 \tilde{Y}_{22} \left[1 + s (v_1 - 1) \right]^2 V_2^0 = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Em [84], avaliou-se eliminar possíveis barras que introduzem polos de ressonância paralelo problemáticos utilizando redução de Kron. A limitação dessa estratégia reside no fato que apenas podem ser eliminadas barras cujas injeções líquidas de corrente são nulas. Se em sistemas de transmissão um número considerável de barras satisfazem essa condição, o mesmo não pode ser dito sobre sistemas de distribuição.

Por fim, a estratégia de sucessivas re-expansões das séries de Taylor apresentada em [33], possivelmente, também é uma alternativa para a exaustão da precisão numérica devido a polos de ressonância paralelo nas proximidades de $s = 0$. O problema, porém, é o número de re-expansões que podem ser necessárias para recuperação da solução em $s = 1$, uma vez que a singularidade estaria muito próxima do próprio ponto inicial de expansão.

4.2 Incorporação Holomórfica Canônica Trifásica

Conforme pontuado anteriormente, a incorporação holomórfica canônica monofásica é realizada de modo que o problema de fluxo de potência em $s = 0$ compreende uma solução estável, trivial e inequívoca: a tensão complexa $1\angle 0^\circ$ se propagando por toda a rede elétrica. Uma generalização óbvia para o problema do fluxo de potência trifásico é realizar a incorporação de modo que a solução estável, trivial e inequívoca seja uma tensão de magnitude unitária e com apenas componente de sequência positiva. Em outras palavras, uma solução na qual a tensão complexa $1\angle 0^\circ$ se propaga pela fase A , a tensão complexa $1\angle -120^\circ$ se propaga pela fase B e a tensão

complexa $1\angle+120^\circ$ se propaga pela fase C . Contudo, analogamente ao desenvolvido no Subcapítulo 4.1, constantes ω foram introduzidas para permitir uma moderação do quanto de admitância dos elementos shunt equivalentes é anulado em $s = 0$. De forma a ser mais generalista em relação ao proposto no subcapítulo anterior, admitiu-se que tais constantes podem ser diferentes por barramento trifásico. Além disso, também foram incluídas constantes ω voltadas para as admitâncias equivalentes de dispositivos shunt passivos e ativos, ω^φ e ω^ψ , respectivamente. Nesse caso, é evidente que a solução em $s = 0$ passa a ser dependente dos valores considerados para as constantes ω , de modo que a solução trivial descrita no início deste parágrafo é válida somente se $\omega_k = \omega_k^\varphi = \omega_k^\psi = 1$ para todo k . A princípio, qualquer outra combinação de valores para tais constantes impõe uma solução não-trivial em $s = 0$. A equação (4.14) apresenta a incorporação recém-discutida aplicada ao lado direito da forma geral das equações nodais de rede disposta no início do Capítulo 3. Por conveniência, apenas está apresentado o equacionamento referente à fase A .

$$\sum_{i=1}^N \left[\left(1 - \omega_k + \omega_k s\right) \widehat{Y}_{ki}^{(aa)} + \widetilde{Y}_{ki}^{(aa)} \right] V_i^{(a)}(s) + \left[\left(1 - \omega_k + \omega_k s\right) \widehat{Y}_{ki}^{(ab)} + \widetilde{Y}_{ki}^{(ab)} \right] V_i^{(b)}(s) + \left[\left(1 - \omega_k + \omega_k s\right) \widehat{Y}_{ki}^{(ac)} + \widetilde{Y}_{ki}^{(ac)} \right] V_i^{(c)}(s) \quad (4.14)$$

A título de comparação, as equações a seguir apresentam as incorporações realizadas, em outras publicações, ao lado direito da forma geral das equações nodais de rede. Novamente, por conveniência, apenas está apresentado o equacionamento referente à fase A . É importante destacar que as respectivas formulações foram adaptadas para a notação utilizada neste trabalho.

$$\sum_{i=1}^N \left[s \widehat{Y}_{ki}^{(aa)} + \widetilde{Y}_{ki}^{(aa)} \right] V_i^{(a)}(s) + s Y_{ki}^{(ab)} V_i^{(b)}(s) + s Y_{ki}^{(ac)} V_i^{(c)}(s) \quad [56] \quad (4.15)$$

$$\sum_{i=1}^N \left[s \widehat{Y}_{ki}^{(aa)} + \widetilde{Y}_{ki}^{(aa)} \right] U_i^{(a)}(s) + \left[s \widehat{Y}_{ki}^{(ab)} + \widetilde{Y}_{ki}^{(ab)} \right] a^2 U_i^{(b)}(s) + \left[s \widehat{Y}_{ki}^{(ac)} + \widetilde{Y}_{ki}^{(ac)} \right] a U_i^{(c)}(s) \quad [57] \quad (4.16)$$

$$\sum_{i=1}^N \left[s \widehat{Y}_{ki}^{(aa)} + \widetilde{Y}_{ki}^{(aa)} \right] V_i^{(a)}(s) + \left[s \widehat{Y}_{ki}^{(ab)} + \widetilde{Y}_{ki}^{(ab)} \right] V_i^{(b)}(s) + \left[s \widehat{Y}_{ki}^{(ac)} + \widetilde{Y}_{ki}^{(ac)} \right] V_i^{(c)}(s) \quad [58] \quad (4.17)$$

$$\left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^{(aa)} V_i^{(a)}(s) + Y_{ki}^{(ab)} V_i^{(b)}(s) + Y_{ki}^{(ac)} V_i^{(c)}(s) \right) - (1 - s) \left(\sum_{i=1}^N Y_{ki}^{(aa)} + a^2 Y_{ki}^{(ab)} + a Y_{ki}^{(ac)} \right) \quad [59] \quad (4.18)$$

$$\sum_{i=1}^N \left[s \widehat{Y}_{ki}^{(aa)} + \widetilde{Y}_{ki}^{(aa)} \right] V_i^{(a)}(s) + Y_{ki}^{(ab)} V_i^{(b)}(s) + Y_{ki}^{(ac)} V_i^{(c)}(s) \quad [7] \quad (4.19)$$

$$\sum_{i=1}^N Y_{ki}^{(aa)} V_i^{(a)}(s) + Y_{ki}^{(ab)} V_i^{(b)}(s) + Y_{ki}^{(ac)} V_i^{(c)}(s) \quad [60, 61] \quad (4.20)$$

As próximas seções se dedicam a apresentar a incorporação holomórfica canônica proposta para o fluxo de potência trifásico, seguindo o equacionamento detalhado no Subcapítulo 3.3. Apenas estão efetivamente apresentadas as incorporações desenvolvidas para as equações em seus estados originais, conforme Tabela 3.1. Para as variantes dessas equações que também foram discutidas no Subcapítulo 3.3, as incorporações desenvolvidas são análogas. É importante ressaltar que optou-se por desenvolver sistemas lineares reais para obtenção dos coeficientes das séries de Taylor e, sendo assim, os complexos conjugados de incógnitas foram tratados diretamente como funções em s^* e não como funções em s independentes.

4.2.1 Equação I

Em (4.21) está apresentada a incorporação holomórfica implementada para a Equação I, enquanto (4.22) apresenta um detalhamento do termo $\psi I_k^{(a)}(s)$. Os termos $\psi I_k^{(b)}(s)$ e $\psi I_k^{(c)}(s)$ podem ser escritos de maneira similar.

$$\sigma_k^{(a)} \psi I_k^{(a)}(s) + \sigma_k^{(b)} \psi I_k^{(b)}(s) + \sigma_k^{(c)} \psi I_k^{(c)}(s) = (1-s) \psi I_k^{(x)}[0] \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^N \sum_{x \in \{a^+, b^+, c^+\}} \left[(1 - \omega_k + \omega_k s) \widehat{Y}_{ki}^{(ax)} + \widetilde{Y}_{ki}^{(ax)} \right] V_i^{(x)}(s) \right) - \left(\sum_{x \in \{a^+, ab^+, ca^-\}} (1 - \omega_k^\varphi + \omega_k^\varphi s) {}^* \gamma_k^{(x)} V_k^{(x)}(s) \right) \\ & - s \left(\sum_{x \in \{a^+, ab^+, ca^-\}} {}^* W_k^{(x)}(s^*) \left[{}^* \alpha_k^{(x)} + {}^* \beta_k^{(x)} \right] M_k^{(x)}(s) + {}^* \lambda_k^{(x)} G_k^{(x)}(s) + {}^* \mu_k^{(x)} G_k^{(x)}(s) G_k^{(x)}(s) \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

4.2.2 Equação II

Em (4.23) está apresentada a incorporação holomórfica implementada para a Equação II.

$$\begin{aligned} (1-s) \psi J_k^{(x)}[0] &= \sigma_k^{(0)} \psi J_k^{(0)}(s) + \sigma_k^{(1)} \psi J_k^{(1)}(s) + \sigma_k^{(2)} \psi J_k^{(2)}(s) \\ &= \frac{1}{3} \left[\sigma_k^{(0)} + \sigma_k^{(1)} + \sigma_k^{(2)} \right] \left[\psi I_k^{(a)}(s) + \sum_{x \in \{a^+, b^+, c^+\}} (1 - \omega_k^\psi + \omega_k^\psi s) \psi Y_k^{(ax)} V_k^{(x)}(s) \right] \\ &+ \frac{1}{3} \left[\sigma_k^{(0)} + a \sigma_k^{(1)} + a^2 \sigma_k^{(2)} \right] \left[\psi I_k^{(b)}(s) + \sum_{x \in \{a^+, b^+, c^+\}} (1 - \omega_k^\psi + \omega_k^\psi s) \psi Y_k^{(bx)} V_k^{(x)}(s) \right] \\ &+ \frac{1}{3} \left[\sigma_k^{(0)} + a^2 \sigma_k^{(1)} + a \sigma_k^{(2)} \right] \left[\psi I_k^{(c)}(s) + \sum_{x \in \{a^+, b^+, c^+\}} (1 - \omega_k^\psi + \omega_k^\psi s) \psi Y_k^{(cx)} V_k^{(x)}(s) \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.2.3 Equação III

Em (4.24) e (4.25) está apresentada a incorporação holomórfica implementada para a Equação III. Conforme pontuado na Seção 3.3.3, tanto as tensões internas quanto os possíveis acoplamentos entre as sequências foram desconsiderados no desenvolvimento dessa equação. Além disso, uma vez que apenas foram vislumbrados comportamentos de regime permanente nos quais as constantes σ assumem valores não-nulos em duplas, definiu-se os índices u e v como representativos para as mesmas.

$$\begin{aligned}
(1-s)\psi Y_k^{(x)}[0] &= \sigma_k^{(0)}\psi Y_k^{(0)}(s) + \sigma_k^{(1)}\psi Y_k^{(1)}(s) + \sigma_k^{(2)}\psi Y_k^{(2)}(s) \\
&= \sigma_k^{(u)}\psi Y_k^{(u)}(s) + \sigma_k^{(v)}\psi Y_k^{(v)}(s) \\
&= -\sigma_k^{(u)}\frac{\psi I_k^{(u)}(s)}{V_k^{(u)}(s)} - \sigma_k^{(v)}\frac{\psi I_k^{(v)}(s)}{V_k^{(v)}(s)}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
(1-s)\psi Y_k^{(x)}[0]V_k^{(u)}(s)V_k^{(v)}(s) &= -\sigma_k^{(u)}\psi I_k^{(u)}(s)V_k^{(v)}(s) - \sigma_k^{(v)}\psi I_k^{(v)}(s)V_k^{(u)}(s) \\
&= -\sum_{x \in \{a^+, b^+, c^+\}} \left[\sigma_k^{(u)}\rho_k^{(ux)}V_k^{(v)}(s) + \sigma_k^{(v)}\rho_k^{(vx)}V_k^{(u)}(s) \right] \psi I_k^{(x)}(s)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

4.2.4 Equações IV e V

Em (4.26) e (4.27) estão apresentadas, respectivamente, as incorporações holomórficas implementadas para as Equações IV e V. Naturalmente, tem-se que ${}^*\sigma_k^{(a)}\psi S_k^{(a)}(s^*) = {}^*\sigma_k^{(a)}{}^*V_k^{(a)}(s^*)\psi I_k^{(a)}(s)$ e equações análogas podem ser escritas para as outras fases.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left[{}^*\sigma_k^{(a)}\psi S_k^{(a)}(s^*) + {}^*\sigma_k^{(b)}\psi S_k^{(b)}(s^*) + {}^*\sigma_k^{(c)}\psi S_k^{(c)}(s^*) + \sigma_k^{(a)}\psi S_k^{(a)}(s) \right. \\
\left. + \sigma_k^{(b)}\psi S_k^{(b)}(s) + \sigma_k^{(c)}\psi S_k^{(c)}(s) \right] &= s p_k^{(x)} + (1-s)\psi P_k^{(x)}[0] = \psi P_k^{(x)}(s)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
\frac{j}{2} \left[{}^*\sigma_k^{(a)}\psi S_k^{(a)}(s^*) + {}^*\sigma_k^{(b)}\psi S_k^{(b)}(s^*) + {}^*\sigma_k^{(c)}\psi S_k^{(c)}(s^*) - \sigma_k^{(a)}\psi S_k^{(a)}(s) \right. \\
\left. - \sigma_k^{(b)}\psi S_k^{(b)}(s) - \sigma_k^{(c)}\psi S_k^{(c)}(s) \right] &= s q_k^{(x)} + (1-s)\psi Q_k^{(x)}[0] = \psi Q_k^{(x)}(s)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

4.2.5 Equações VI, VII e VIII

Em (4.28), (4.29) e (4.30) estão apresentadas, respectivamente, as incorporações holomórficas implementadas para as Equações VI, VII e VIII.

$$\sigma_k^{(a)}V_j^{(a)}(s) + \sigma_k^{(b)}V_j^{(b)}(s) + \sigma_k^{(c)}V_j^{(c)}(s) = s v_k^{(x)} + (1-s)V_j^{(x)}[0] = V_j^{(x)}(s) \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
M_j^{(x)}(s)M_j^{(x)}(s) &= \left[\sigma_k^{(a)}V_j^{(a)}(s) + \sigma_k^{(b)}V_j^{(b)}(s) + \sigma_k^{(c)}V_j^{(c)}(s) \right] \left[{}^*\sigma_k^{(a)}{}^*V_j^{(a)}(s^*) \right. \\
&\quad \left. + {}^*\sigma_k^{(b)}{}^*V_j^{(b)}(s^*) + {}^*\sigma_k^{(c)}{}^*V_j^{(c)}(s^*) \right] = \left[s m_k^{(x)} + (1-s)M_j^{(x)}[0] - u_k^{(y)}\psi Q_k^{(y)}(s) \right]^2
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\frac{V_j^{(x)}(s)}{{}^*V_j^{(x)}(s^*)} = \frac{\sigma_k^{(a)} V_j^{(a)}(s) + \sigma_k^{(b)} V_j^{(b)}(s) + \sigma_k^{(c)} V_j^{(c)}(s)}{{}^*\sigma_k^{(a)} {}^*V_j^{(a)}(s^*) + {}^*\sigma_k^{(b)} {}^*V_j^{(b)}(s^*) + {}^*\sigma_k^{(c)} {}^*V_j^{(c)}(s^*)} = e^{j2(s\vartheta_k^{(x)} + (1-s)\theta_j^{(x)}[0])} \quad (4.30)$$

Destaca-se que o termo $\psi Q_k^{(y)}(s)$ presente em (4.29) pode ser escrito conforme o lado esquerdo de (4.27). Além disso, é importante ressaltar que, a rigor, (4.30) não é uma equação algébrica devido a presença do termo exponencial. Contudo, como a função exponencial é uma função inteira, ou seja, é analítica por todo o plano complexo, (4.30) pode ser entendida como uma equação algébrica ao substituir o termo exponencial por sua respectiva série de Taylor, truncada conforme conveniência.

4.2.6 Equação IX

Em (4.31) está apresentada a incorporação holomórfica implementada para a Equação IX. Os termos $T_k^{(1)}(s)$ e $T_k^{(2)}(s)$ podem ser escritos seguindo (4.32) e (4.33), respectivamente.

$$T_k^{(1)}(s) - T_k^{(2)}(s) = s t_k \left[\sigma_k^{(a)} + \sigma_k^{(b)} [1 - U_k(s)] + \sigma_k^{(c)} [1 - U_k(s)]^2 \right] + (1 - s) T_k[0] \quad (4.31)$$

$$T_k^{(1)}(s) = \frac{3 r_k^{(r)} [x_k^{(m)}]^2 U_k(s) V_k^{(1)}(s) {}^*V_k^{(1)}(s^*)}{\left([x_k^{(smr)}]^2 + [r_k^{(s)} x_k^{(mr)}]^2 \right) U_k^2(s) + 2 r_k^{(s)} r_k^{(r)} [x_k^{(m)}]^2 U_k(s) + [r_k^{(r)}]^2 \left([r_k^{(s)}]^2 + [x_k^{(sm)}]^2 \right)} \quad (4.32)$$

$$T_k^{(2)}(s) = \frac{6 r_k^{(r)} [x_k^{(m)}]^2 V_k^{(2)}(s) {}^*V_k^{(2)}(s^*)}{4 \left([x_k^{(smr)}]^2 + [r_k^{(s)} x_k^{(mr)}]^2 + r_k^{(s)} r_k^{(r)} [x_k^{(m)}]^2 \right) + [r_k^{(r)}]^2 \left([r_k^{(s)}]^2 + [x_k^{(sm)}]^2 \right)} \quad (4.33)$$

Conforme pontuado no Subcapítulo 3.3, a Equação IX descreve uma única equação real e o escorregamento U_k representa uma incógnita para a mesma. Isto significa que, quando a Equação IX compõe a caracterização matemática do dispositivo shunt ativo conectado ao barramento trifásico k , são necessárias sete equações reais para ser atingido o equilíbrio entre o número de equações e incógnitas introduzidas por este barramento. De fato, conforme também pontuado no Subcapítulo 3.3, a Equação IX refere-se somente a um equipamento específico, máquina de indução, operando em um modo de controle específico, controle de torque mecânico. Sua utilização, portanto, ocorre sempre acompanhada da Equação II nas três combinações de constantes σ que impõem tensões internas de sequência zero, positiva e negativa nulas. Nesse contexto, as equações (4.34), (4.35) e (4.36) apresentam as expressões em *closed-form* das admitâncias de sequência necessárias para composição da Equação II. É interessante destacar que a admitância de sequência positiva é efetivamente uma função de s uma vez que depende do escorregamento. Por esse motivo, é conveniente utilizar um valor unitário para ω_k^ψ nesse caso.

$$\psi Y_k^{(0)} = \frac{1}{r_k^{(0)} + j x_k^{(0)}} \quad (4.34)$$

$$\psi Y_k^{(1)}(s) = \frac{r_k^{(r)} + j x_k^{(mr)} U_k(s)}{\left[r_k^{(s)} r_k^{(r)} - x_k^{(smr)} U_k(s) \right] + j \left[r_k^{(r)} x_k^{(sm)} + r_k^{(s)} x_k^{(mr)} U_k(s) \right]} \quad (4.35)$$

$$\psi Y_k^{(2)} = \frac{r_k^{(r)} + j 2 x_k^{(mr)}}{\left[r_k^{(s)} r_k^{(r)} - 2 x_k^{(smr)} \right] + j \left[r_k^{(r)} x_k^{(sm)} + 2 r_k^{(s)} x_k^{(mr)} \right]} \quad (4.36)$$

4.2.7 Problema do Fluxo de Potência Trifásico em $s = 0$

De uma forma geral, a incorporação holomórfica apresentada nas seções anteriores é incapaz de produzir sistemas lineares em $s = 0$ se as constantes ω não assumirem um valor unitário para todo k . Isso significa que, a princípio, a solução para o problema de fluxo de potência trifásico descrito pela condição de $s = 0$ não tem uma obtenção trivial. Este inconveniente parece levar a um impasse porque a obtenção da solução de um problema não-linear (o problema de fluxo de potência de interesse, que é descrito pela incorporação holomórfica na condição de $s = 1$) impõe a necessidade de obter a solução de um segundo problema igualmente não-linear (o problema de fluxo de potência representado na condição de $s = 0$). Com objetivo de desfazer esse impasse, constantes desconhecidas *a priori* foram introduzidas na incorporação, nomeadamente, $\psi I_k^{(x)}[0]$, $\psi J_k^{(x)}[0]$, $\psi Y_k^{(x)}[0]$, $\psi P_k^{(x)}[0]$, $\psi Q_k^{(x)}[0]$, $V_j^{(x)}[0]$, $M_j^{(x)}[0]$, $\theta_j^{(x)}[0]$ e $T_k[0]$. Essas constantes concedem graus de liberdade ao problema de fluxo de potência representado na condição de $s = 0$ de modo que o mesmo não precisa ser diretamente resolvido. Em seu lugar, é resolvido um problema de fluxo de potência linear e as constantes citadas são adaptadas de forma que o problema de fluxo de potência representado na condição de $s = 0$ apresente a mesma solução do problema de fluxo de potência linear resolvido. Evidentemente, a incorporação holomórfica precisou ser idealizada de maneira tal que essas constantes acompanham o problema de fluxo de potência em $s = 0$, porém, são completamente anuladas quando $s = 1$. Dessa forma, não há alteração no problema de fluxo de potência de interesse.

Nesse contexto, o problema de fluxo de potência linear empregado pode ser, justamente, uma linearização do problema de fluxo de potência representado na condição de $s = 0$. Nesse caso, inicialmente, é necessário arbitrar valores para as referidas constantes. Então, após a solução do sistema linear, essas constantes devem ter os seus valores corrigidos para que o problema de fluxo de potência representado na condição de $s = 0$ seja satisfeito em sua forma não-linear original. Outra possibilidade que emerge como escolha óbvia é empregar o problema de fluxo de potência linear caracterizado pela sustentação de uma tensão equilibrada no barramento trifásico utilizado como referência angular e pela ausência de injeção líquida de corrente nas três fases de todos os barramentos restantes. Independentemente do sistema linear empregado, quanto mais as constantes $\psi I_k^{(x)}[0]$, $\psi J_k^{(x)}[0]$, $\psi Y_k^{(x)}[0]$, $\psi P_k^{(x)}[0]$, $\psi Q_k^{(x)}[0]$ e $T_k[0]$ se aproximarem de zero, maior a proximidade do fluxo de

potência representado na condição de $s = 0$ em relação a uma condição de operação na qual não há circulação de corrente na rede elétrica.

É interessante notar que essa abordagem não representa uma alteração substancial na incorporação holomórfica canônica. De fato, há apenas uma diferença sutil na estratégia de adequação da condição de $s = 0$. Ao invés da própria incorporação holomórfica naturalmente impor um problema de fluxo de potência cuja solução é trivial em $s = 0$, a condição de $s = 0$ está sendo parcialmente ajustada a partir de uma solução trivial. Em essência, essa é a mesma estratégia presente em [20, 30, 32].

Finalmente, a Figura 4.1 sumariza uma visão geral da incorporação holomórfica canônica proposta através de um fluxograma.

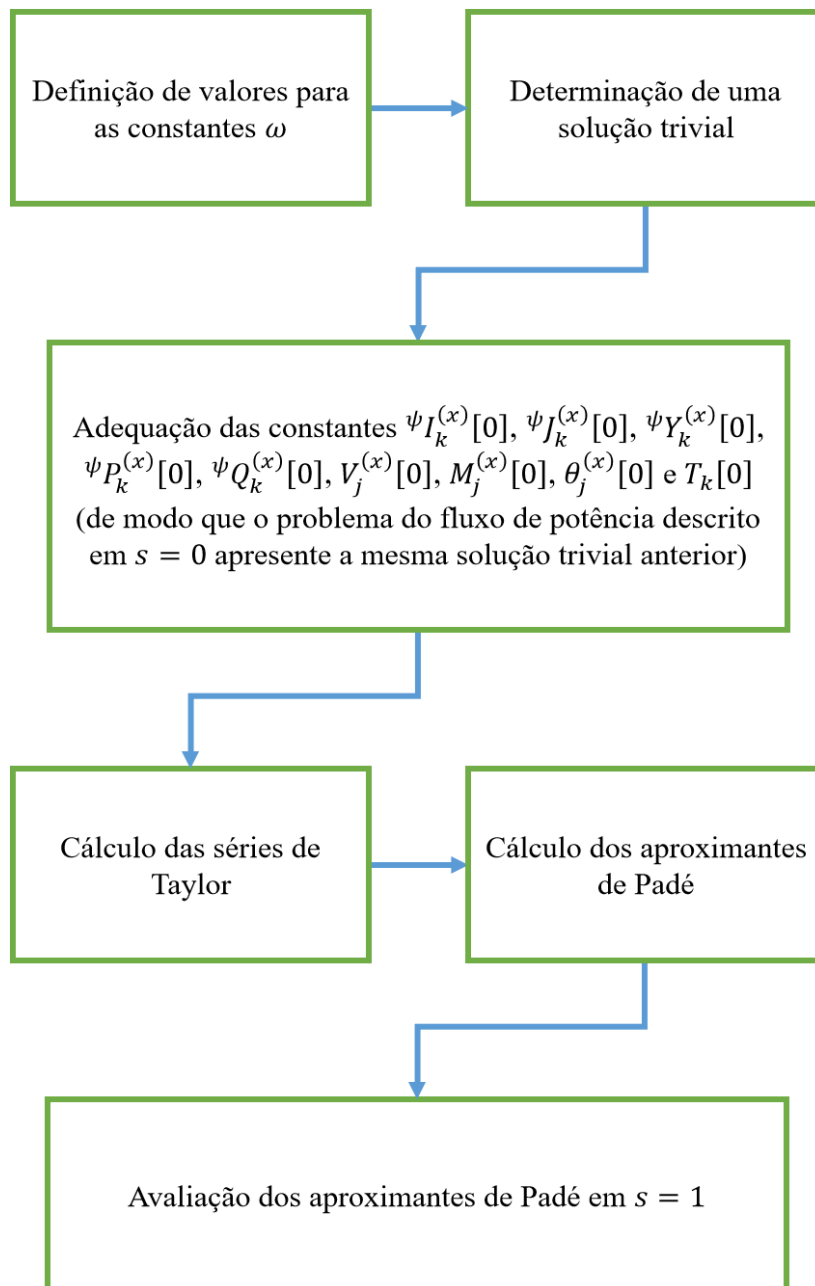


Figura 4.1: Visão geral da incorporação holomórfica canônica proposta

Capítulo 5

Resultados e Discussões

Neste capítulo estão apresentados os resultados da aplicação da incorporação holomorfa proposta em problemas de fluxo de potência trifásicos presentes na literatura e problemas didáticos idealizados com objetivo de explorar a flexibilidade da formulação proposta na representação de diferentes modos de controle. A menos que explicitamente seja dito o contrário, as séries de Taylor foram obtidas até os seus respectivos trigésimos coeficientes, permitindo a obtenção de aproximantes de Padé diagonais cujos polinômios apresentam ordem quinze. Além disso, admitiu-se $\omega_k = \omega_k^\psi = 0$ e $\omega_k^\varphi = 1$ para todo k (com exceção de barramentos trifásicos contactados à máquinas de indução operando com cargas mecânicas constantes, onde considerou-se $\omega_k^\psi = 1$ para a equação que descreve a sequência positiva). E o problema de fluxo de potência imposto pela condição de $s = 0$ compreende a solução do sistema linear complexo caracterizado pela sustentação de uma tensão equilibrada no barramento trifásico utilizado como referência angular e pela ausência de injeção líquida de corrente nas três fases de todos os barramentos restantes. De forma a minimizar os ajustes necessários para a compatibilização entre a solução deste sistema linear e a solução do problema de fluxo de potência representado em $s = 0$, os valores admitidos para as constantes ω foram internalizados no próprio sistema linear.

Ainda em uma contextualização geral das simulações, é importante pontuar que a implementação realizada trata todos os barramentos como trifásicos, mesmo barramentos que, a rigor, são bifásicos ou monofásicos. Portanto, conforme explicado ao longo do Capítulo 3, os dispositivos elétricos trifásicos modelados podem precisar assumir impedâncias virtualmente infinitas. Além disso, as simulações foram conduzidas desconsiderando limites operacionais e admitindo tapes fixos tanto para os transformadores quanto para os autotransformadores reguladores de tensão. Portanto, conforme explicado na Seção 3.3.7, não foram necessários algoritmos externos para corrigir os tapes ou alterar os modos de controle de acordo com os limites operacionais. Sendo assim, cada problema de fluxo de potência trifásico resolvido

corresponde, de fato, ao estabelecimento de um único problema de fluxo de potência, ou ainda, de um único sistema de equações em específico.

A Tabela 5.1 apresenta as máximas diferenças percentuais encontradas entre os valores de tensão complexa reportados na literatura e obtidos pela incorporação holomórfica proposta, além de sumarizar algumas características dos sistemas elétricos que originaram esses casos de fluxo de potência trifásico. Um total de onze sistemas elétricos foram avaliados dentre os quais nove podem ser associados à distribuição e dois podem ser associados à transmissão. Alguns deles foram resolvidos no contexto de diferentes casos, ou seja, no contexto de diferentes condições de rede, carga e geração. Nenhuma das diferenças percentuais encontradas superou a margem de 1%. É importante ressaltar que, historicamente, algumas publicações utilizaram a palavra *node* (nodo ou nó, em língua portuguesa) para designar um ponto elétrico multifásico, enquanto atualmente é comum encontrar a utilização de *node* para designar cada uma das fases de um ponto elétrico multifásico, que por sua vez é intitulado *bus* (barra ou barramento, em língua portuguesa).

A primeira parte dos subcapítulos a seguir concentra-se em descrever brevemente os referidos sistemas de teste, apresentando resultados selecionados e as distribuições estratificadas por fase das diferenças percentuais encontradas entre os valores de tensão complexa reportados e obtidos. Em alguns casos, nota-se que as fases originaram distribuições de diferenças percentuais não-uniformes entre si, manifestando disparidades entre suas médias e quartis. É possível que isto possa ser explicado pela já mencionada necessidade de impor impedâncias virtualmente infinitas para a representação de segmentos bifásicos e monofásicos, além de chaves seccionadoras em estado aberto, em conjunto com a necessidade diametralmente oposta de impor impedâncias virtualmente nulas para a representação de autotransformadores reguladores de tensão ideais ou chaves seccionadoras em estado fechado. De fato, as diferentes abordagens possíveis nesse contexto, além da própria dificuldade em definir de forma satisfatória valores numéricos que seriam “virtualmente nulos” e “virtualmente infinitos”, podem justificar até mesmo o fato das máximas diferenças encontradas terem alcançado a ordem de grandeza de 0,005 *pu* em primeiro lugar. Evidentemente, por existir um *trade-off* entre deteriorar a estabilidade numérica e melhorar essas representações de zero e infinito, uma escolha conservadora tende na direção de aceitar uma pior representação.

Nos subcapítulos restantes, estão apresentados os resultados obtidos ao aplicar a incorporação holomórfica proposta em (a) dez casos desenvolvidos a partir de um sistema didático composto por quatro barramentos trifásicos, (b) um caso desenvolvido a partir de um sistema teste de pequeno porte presente na literatura e (c) um último caso que também foi desenvolvido a partir de um sistema teste presente na literatura, porém, de grande porte. O objetivo com essa segunda sequência de si-

Tabela 5.1: Sistemas trifásicos presentes na literatura que foram avaliados

Sistema Trifásico	Número de Barramentos Trifásicos ¹	Número de Dispositivos Série ²	X/R ³	Máxima Diferença Percentual ⁴
<i>IEEE 4-Node Test Feeder</i> ⁵	4 (+ 0)	3	2,0	0,09%
<i>IEEE Wye-Delta Center Tapped Transformer Test Feeder</i> ⁵	4 (+ 0)	3	0,4 – 3,2	0,13%
<i>IEEE 13-Node Test Feeder</i>	13 (+ 2)	12	0,4 – 3,2	0,03%
<i>IEEE 34-Node Test Feeder</i>	34 (+ 21)	33	0,5 – 0,7	0,07%
<i>IEEE 37-Node Test Feeder</i>	37 (+ 1)	36	0,3 – 1,0	0,01%
<i>IEEE 123-Node Test Feeder</i>	125 (+ 4)	129	0,5 – 2,0	0,07%
<i>IEEE Comprehensive Test Feeder</i>	72 (+ 7)	72	0,1 – 0,8	0,55%
<i>IEEE North American Low Voltage Test System (normal operation)</i> ⁶	390 (+ 0)	1.315	0,5 – 1,4	0,24%
<i>IEEE North American Low Voltage Test System (feeder 6 out of service)</i> ⁶	390 (+ 0)	1.305	0,5 – 1,4	0,31%
<i>IEEE European Low Voltage Test Feeder (on-peak snapshot)</i>	907 (+ 0)	906	0,0 – 0,8	0,19%
<i>TPC 345 kV (Case 2 or B)</i> ⁷	24 (+ 0)	36	9,9 – 13,6	0,12%
<i>TPC 345 kV (Case 3 or C)</i> ⁷	24 (+ 0)	36	9,9 – 13,6	0,13%
<i>WSCC 9-Bus System</i> ⁵	9 (+ 0)	9	4,4 – 8,5	0,03%

¹Número de barramentos trifásicos efetivamente existentes e, entre parênteses, o número de barramentos trifásicos fictícios adicionados para representação de cargas distribuídas ou autotransformadores reguladores de tensão;

²Número de dispositivos série existentes, incluindo transformadores, autotransformadores, chaves seccionadoras, linhas de transmissão e distribuição;

³Relação X/R das configurações de linhas de transmissão e distribuição existentes;

⁴Máxima diferença percentual encontrada entre as tensões complexas reportadas na literatura e obtidas através da incorporação holomórfica proposta;

⁵Os resultados apresentados para esses sistemas trifásicos agrupam simulações de diferentes casos, que exploram conexões de transformadores distintas e/ou uma operação em contingência;

^{6,7}Apesar de estarem apresentados como sistemas trifásicos distintos, representam diferentes casos em um mesmo sistema trifásico.

mulações é explorar a formulação proposta em sua totalidade, ao impor uma grande variedade de condições operativas para os dispositivos shunt ativos.

5.1 *IEEE Test Feeders*

5.1.1 *1990s Test Feeders*

Na década de 90, seis alimentadores de média tensão foram propostos como sistemas de teste para algoritmos de solução do problema do fluxo de potência trifásico. Tanto os dados elétricos dos alimentadores quanto seus pontos de operação podem ser encontrados nos respectivos relatórios técnicos disponibilizados em [92]. De uma forma geral, com exceção dos barramentos das subestações de distribuição, tratados como máquinas síncronas “infinitas”, os sistemas apenas apresentam dispositivos shunt que foram tratados como passivos: cargas residenciais em estrela ou delta e motores de indução operando com escorregamento constante. Adicionalmente as informações dispostas nos relatórios técnicos, os resultados foram recriados considerando:

- Cargas distribuídas localizadas em um ponto fictício congruente ao ponto médio da sua respectiva linha de transmissão;
- Reguladores de tensão sendo do “Tipo A” com 16 tapes e uma variação máxima de 10% no número de espiras do enrolamento principal.

Na Figura 5.1 estão diagramadas as diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas nos relatórios técnicos e as tensões complexas obtidas. Em nenhum dos seis sistemas de teste foram obtidas tensões com um desvio superior a 0,13%. Por sua vez, a Tabela 5.2 apresenta as injeções de potência aferidas nas subestações de distribuição, além das menores magnitudes de tensão de sequência positiva e dos maiores desequilíbrios de tensão entre as fases de um mesmo barramento que puderam ser observados nos alimentadores. Esses resultados apontam que todos esses sistemas de teste apresentam desequilíbrios consideráveis de carga entre as fases e alguns apresentam até mesmo subtensões severas.

5.1.2 *Comprehensive Test Feeder*

Um último alimentador de média tensão foi proposto como sistema-teste em 2010. Conforme sua própria denominação sugere, é um alimentador que, de fato, abrange uma miríade de equipamentos elétricos que podem ser encontrados em sistemas de distribuição. Seu diagrama unifilar está apresentado na Figura 5.2. Novamente, os dados necessários para composição de um problema de fluxo de potência trifásico

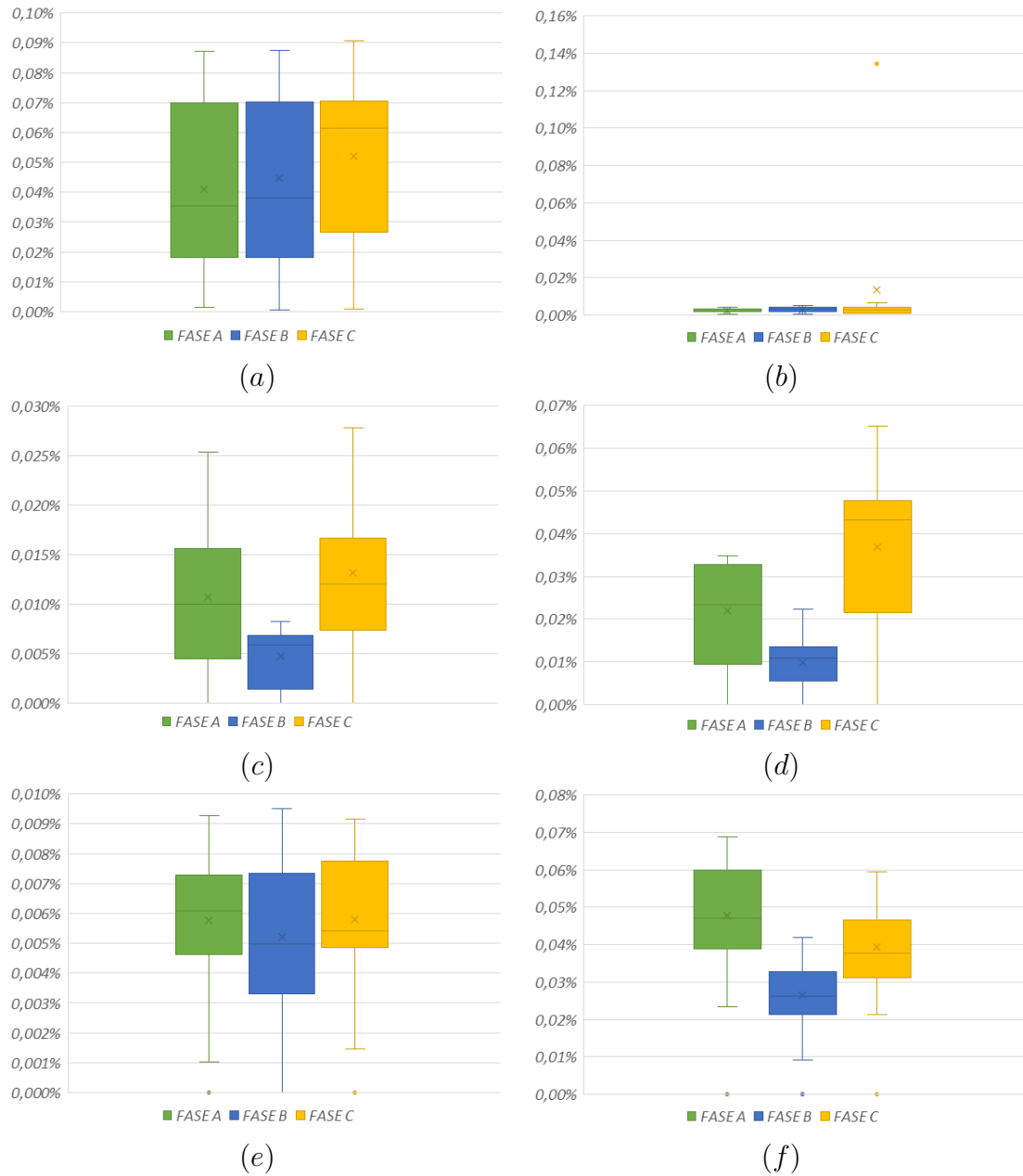


Figura 5.1: Diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas e obtidas (*IEEE 1990s Test Feeders*): **(a)** 4 Nodes; **(b)** *Wye-Delta Center Tapped Transformer*; **(c)** 13 Nodes; **(d)** 34 Nodes; **(e)** 37 Nodes; **(f)** 123 Nodes

Tabela 5.2: Resultados Selecionados (*IEEE 1990s Test Feeders*)

Sistema Trifásico	Subestação de Distribuição		Tensão Complexa								
	[kW]	[kvar]	menor magnitude			maior desequilíbrio					
			[pu]	[°]	[pu]	[°]					
<i>4 Nodes</i> ¹	A	852,01	2.937,30	4	A	0,6961	-37,47	4	A	0,6961	-37,47
	B	3.169,09	-81,54		B	0,9107	-154,78		B	0,9107	-154,78
	C	0,00	0,00		C	0,8635	72,32		C	0,8635	72,32
	3 ϕ	4.021,10	2.855,76		+	0,8193	-40,04		+	0,8193	-40,04
<i>Center Tapped Transformer</i> ²	A	28,69	10,02	4	A	0,8409	-0,79	4	A	0,8409	-0,79
	B	0,00	0,00		B	0,8356	178,90		B	0,8356	178,90
	C	6,87	11,53		C	1,4290	90,30		C	1,4290	90,30
	3 ϕ	35,56	21,56		+	0,9595	-30,27		+	0,9595	-30,27
<i>13 Nodes</i>	A	1.251,39	681,41	634	A	0,9940	-3,23	675	A	0,9835	-5,55
	B	977,34	373,38		B	1,0218	-122,22		B	1,0553	-122,52
	C	1.348,48	669,61		C	0,9961	117,35		C	0,9760	116,04
	3 ϕ	3.577,20	1.724,39		+	1,0039	-2,70		+	1,0047	-3,97
<i>34 Nodes</i>	A	759,08	171,86	890	A	0,9167	-5,21	814	A	0,9467	-2,26
	B	666,66	90,17		B	0,9237	-126,77		B	0,9945	-122,70
	C	617,06	28,60		C	0,9176	113,95		C	0,9893	118,00
	3 ϕ	2.042,80	290,62		+	0,9192	-6,01		+	0,9768	-2,32
<i>37 Nodes</i>	A	895,43	565,72	740	A	1,0125	1,68	724	A	1,0380	1,94
	B	683,87	389,45		B	0,9665	-120,05		B	0,9735	-120,56
	C	942,52	294,28		C	1,0013	117,44		C	1,0050	118,30
	3 ϕ	2.521,82	1.249,45		+	0,9930	-0,31		+	1,0052	-0,08
<i>123 Nodes</i>	A	1.463,95	583,81	66	A	0,9859	-3,48	66	A	0,9859	-3,48
	B	963,55	343,42		B	1,0217	-121,85		B	1,0217	-121,85
	C	1.193,22	398,49		C	0,9956	117,72		C	0,9956	117,72
	3 ϕ	3.620,71	1.325,72		+	1,0010	-2,53		+	1,0010	-2,53

¹Os resultados apresentados referem-se ao caso *Step-Down Open Grounded Wye – Delta*;

²Os resultados apresentados referem-se ao caso *Lagging Open Grounded Wye – Delta*.

estão disponíveis em [92], bem como o relatório contendo sua respectiva solução. Uma vez que este relatório apenas apresenta magnitudes de tensão (e não tensões complexas), optou-se por recriar o *Comprehensive Test Feeder* em um *software open source* de análise de sistemas de energia elétrica denominado OpenDSS [93]. Adicionalmente as informações dispostas em [92], reproduziu-se esse sistema-teste considerando:

- Cargas distribuídas localizadas em um ponto fictício congruente ao ponto médio da sua respectiva linha de transmissão;
- Reguladores de tensão sendo do “Tipo B” com 16 tapes e uma variação máxima de 10% no número de espiras do enrolamento principal;
- Máquinas de Indução operando com escorregamento constante foram modeladas como dispositivos shunt passivos de impedância constante;
- Máquinas de Indução operando com consumo de potência ativa e fator de potência constantes foram modeladas como dispositivos shunt passivos de potência constante;
- Máquinas de Indução operando com consumo de potência ativa constante foram modeladas como dispositivos shunt ativos de torque constante (realizando as devidas adaptações de acordo com a solução original).

A Figura 5.3 apresenta as diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas pelo OpenDSS e as tensões complexas obtidas. Nenhum desvio superior a 0,55% pôde ser encontrado. Por sua vez, entre as Tabelas 5.3 e 5.6 estão apresentadas as tensões fase-terra referentes ao ponto de operação obtido. De fato, este alimentador se mostra mais complexo que os anteriores por explorar inúmeras conexões de transformadores em aberto ou em delta com derivação central aterrada, além de impor sucessivas defasagens angulares entre a subestação de distribuição e as cargas. Conseqüentemente, por exemplo, existem pontos elétricos associados à Fase *B* que assumem tensões fase-terra com ângulos próximos de -215° enquanto pontos elétricos associados à Fase *C* assumem tensões fase-terra com ângulos próximos de $+25^\circ$. Além disso, podem ser verificadas sobretensões e subtensões severas em tensões fase-terra mesmo que suas respectivas tensões fase-fase estejam coerentes. Os resultados exemplificados neste parágrafo estão destacados na Tabela 5.7.

5.1.3 *Low Voltage Test Systems*

Entre os anos de 2014 e 2015, dois novos sistemas-teste foram propostos, dessa vez focados especificamente na baixa tensão. De acordo com os países aos quais são representativos, foram intitulados *North American Low Voltage Test System* (ou *Low*

Tabela 5.3: Ponto de Operação (*IEEE Comprehensive Test Feeder*, Parte 1)

		Tensão		Injeção de Potência					Tensão		Injeção de Potência		
		[pu]	[°]		[kW]	[kvar]			[pu]	[°]		[kW]	[kvar]
700	A	1,0001	0,02	A	1.249,63	432,45	701	A	0,9956	-33,49	A	0,00	0,00
	B	1,0003	-120,01	B	1.446,92	334,21		B	1,0063	-153,24	B	0,00	0,00
	C	0,9997	119,99	C	1.432,19	553,32		C	0,9949	86,08	C	0,00	0,00
	+	1,0000	0,00	3 ϕ	4.128,73	1.319,97		+	0,9989	-33,55	3 ϕ	0,00	0,00
702	A	1,0460	-33,49	A	0,00	0,00	703	A	1,0439	-33,51	A	0,00	0,00
	B	1,0428	-153,24	B	0,00	0,00		B	1,0413	-153,29	B	0,00	0,00
	C	1,0493	86,08	C	0,00	0,00		C	1,0471	86,06	C	0,00	0,00
	+	1,0460	-33,55	3 ϕ	0,00	0,00		+	1,0441	-33,58	3 ϕ	0,00	0,00
704	A	1,0425	-33,66	A	0,00	0,00	705	A	1,2822	-63,10	A	0,00	0,00
	B	1,0413	-153,33	B	0,00	0,00		B	0,9088	-171,87	B	0,00	0,00
	C	1,0444	86,03	C	0,00	0,00		C	0,9593	42,76	C	0,00	0,00
	+	1,0427	-33,65	3 ϕ	0,00	0,00		+	1,0348	-64,16	3 ϕ	0,00	0,00
706	A	1,2275	-64,51	A	0,00	0,00	707	A	1,2270	-64,52	A	0,00	0,00
	B	0,9088	-171,87	B	0,00	0,00		B	0,9077	-171,87	B	0,00	0,00
	C	0,9127	43,64	C	0,00	0,00		C	0,9119	43,66	C	0,00	0,00
	+	1,0025	-64,29	3 ϕ	0,00	0,00		+	1,0017	-64,29	3 ϕ	0,00	0,00
708	A	0,8917	-51,51	A	-43,60	-9,04	709	A	-	-	A	-	-
	B	0,8829	161,36	B	-31,40	-30,96		B	0,9068	-171,89	B	0,00	0,00
	C	-	-	C	-	-		C	0,9110	43,67	C	0,00	0,00
	+	-	-	3 ϕ	-75,00	-40,00		+	-	-	3 ϕ	0,00	0,00
710	A	-	-	A	-	-	711	A	-	-	A	-	-
	B	0,9743	-154,89	B	-80,00	-30,00		B	0,9061	-171,91	B	0,00	0,00
	C	-	-	C	-	-		C	0,9103	43,68	C	0,00	0,00
	+	-	-	3 ϕ	-80,00	-30,00		+	-	-	3 ϕ	0,00	0,00
712	A	-	-	A	-	-	713	A	1,0439	-33,51	A	0,00	0,00
	B	0,8540	-154,71	B	-34,51	-14,79		B	1,0413	-153,29	B	0,00	0,00
	C	0,8547	25,30	C	-29,61	-10,86		C	1,0471	86,06	C	0,00	0,00
	+	-	-	3 ϕ	-64,13	-25,65		+	1,0441	-33,58	3 ϕ	0,00	0,00
714	A	1,0159	-34,32	A	-80,00	-30,00	716	A	1,0115	-4,34	A	-5,11	-3,33
	B	1,0139	-154,09	B	-80,00	-30,00		B	1,0171	-124,40	B	-5,18	-3,56
	C	1,0191	85,29	C	-80,00	-30,00		C	1,0134	115,36	C	-4,97	-3,44
	+	1,0163	-34,37	3 ϕ	-240,00	-89,99		+	1,0140	-4,46	3 ϕ	-15,26	10,33
717	A	1,0220	-33,93	A	0,00	0,00	718	A	1,0415	-33,93	A	0,00	0,00
	B	1,0266	-153,80	B	0,00	0,00		B	-	-	B	-	-
	C	1,0210	85,49	C	0,00	0,00		C	-	-	C	-	-
	+	1,0232	-34,08	3 ϕ	0,00	0,00		+	-	-	3 ϕ	0,00	0,00
719	A	1,0410	-33,93	A	0,00	0,00	720	A	0,8899	-34,55	A	-3,53	-1,46
	B	-	-	B	-	-		B	0,8895	145,44	B	-4,32	-1,72
	C	-	-	C	-	-		C	-	-	C	-	-
	+	-	-	3 ϕ	0,00	0,00		+	-	-	3 ϕ	-7,85	-3,18
721	A	0,8751	-34,39	A	-4,51	-1,88	722	A	0,8656	-34,33	A	-4,66	-1,36
	B	0,8727	145,58	B	-5,51	-2,20		B	0,8648	145,66	B	-3,80	-1,08
	C	-	-	C	-	-		C	-	-	C	-	-
	+	-	-	3 ϕ	-10,02	-4,08		+	-	-	3 ϕ	-8,46	-2,44

Tabela 5.4: Ponto de Operação (*IEEE Comprehensive Test Feeder*, Parte 2)

		Tensão		Injeção de Potência					Tensão		Injeção de Potência		
		[pu]	[°]	[kW]	[kvar]			[pu]	[°]	[kW]	[kvar]		
723	A	0,8635	-34,29	A	-1,78	-0,74	724	A	0,8681	-34,21	A	-8,21	-3,34
	B	0,8613	145,68	B	-2,16	-0,86		B	0,8598	145,69	B	-9,99	-3,98
	C	-	-	C	-	-		C	-	-	C	-	-
	+	-	-	3 ϕ	-3,94	-1,60		+	-	-	3 ϕ	-18,20	-7,32
725	A	0,8560	-34,06	A	-3,97	-1,45	726	A	0,8503	-33,94	A	-4,71	-1,95
	B	0,8466	145,84	B	-3,23	-1,20		B	0,8372	145,92	B	-5,62	-2,28
	C	-	-	C	-	-		C	-	-	C	-	-
	+	-	-	3 ϕ	-7,20	-2,65		+	-	-	3 ϕ	-10,33	-4,23
727	A	0,9954	-34,40	A	0,00	0,00	728	A	0,9685	-64,92	A	-14,76	-6,38
	B	1,0064	-154,49	B	0,00	0,00		B	0,9795	175,10	B	-12,33	-10,75
	C	0,9873	84,64	C	0,00	0,00		C	0,9743	54,53	C	-9,91	-6,23
	+	0,9963	-34,75	3 ϕ	0,00	0,00		+	0,9741	-65,10	3 ϕ	-37,00	-23,36
729	A	-	-	A	-	-	730	A	-	-	A	-	-
	B	1,0063	-154,49	B	0,00	0,00		B	0,8971	-171,36	B	-44,79	4,64
	C	-	-	C	-	-		C	0,8914	40,59	C	-40,21	-19,64
	+	-	-	3 ϕ	0,00	0,00		+	-	-	3 ϕ	-85,00	-15,00
731	A	0,9739	-34,85	A	0,00	0,00	732	A	0,8264	-34,97	A	-10,92	-4,97
	B	0,9910	-155,00	B	0,00	0,00		B	0,8281	145,03	B	-7,28	-2,35
	C	0,9574	83,82	C	0,00	0,00		C	1,4606	53,81	C	0,00	0,00
	+	0,9741	-35,34	3 ϕ	0,00	0,00		+	0,9644	-65,60	3 ϕ	-18,20	-7,32
733	A	0,8124	-34,53	A	-4,67	-2,10	734	A	0,8085	-34,18	A	-1,85	-3,68
	B	0,8206	144,99	B	-2,53	-0,82		B	0,8138	144,87	B	-4,98	-0,03
	C	1,4545	54,06	C	0,00	0,00		C	1,4489	54,19	C	-6,54	-5,37
	+	0,9550	-65,45	3 ϕ	-7,20	-2,92		+	0,9490	-65,29	3 ϕ	-13,37	-9,08
735	A	0,9705	-34,93	A	0,00	0,00	736	A	1,0541	-34,93	A	0,00	111,12
	B	0,9885	-155,09	B	0,00	0,00		B	1,0502	-155,09	B	0,00	110,29
	C	0,9525	83,68	C	0,00	0,00		C	1,0584	83,68	C	0,00	112,02
	+	0,9704	-35,44	3 ϕ	0,00	0,00		+	1,0542	-35,45	3 ϕ	0,00	333,43
737	A	-	-	A	-	-	738	A	-	-	A	-	-
	B	1,0476	-155,07	B	0,00	0,00		B	1,0474	-155,07	B	0,00	0,00
	C	1,0581	83,55	C	0,00	0,00		C	1,0581	83,54	C	0,00	0,00
	+	-	-	3 ϕ	0,00	0,00		+	-	-	3 ϕ	0,00	0,00
739	A	1,5536	-67,46	A	-15,62	-7,62	740	A	1,0253	-68,43	A	-27,44	-7,01
	B	0,8951	-155,24	B	-11,44	-10,71		B	0,9966	174,05	B	-28,20	-15,39
	C	0,8954	24,76	C	-15,08	-1,59		C	1,0489	54,15	C	-21,91	-14,02
	+	1,0345	-66,35	3 ϕ	-42,14	-19,92		+	1,0234	-66,75	3 ϕ	-77,55	-36,42
741	A	1,0421	-35,10	A	0,00	0,00	742	A	1,0407	-35,13	A	0,00	0,00
	B	1,0429	-155,32	B	0,00	0,00		B	1,0419	-155,33	B	0,00	0,00
	C	1,0431	83,44	C	0,00	0,00		C	1,0407	83,42	C	0,00	0,00
	+	1,0426	-35,66	3 ϕ	0,00	0,00		+	1,0410	-35,68	3 ϕ	0,00	0,00
743	A	1,0149	-66,56	A	-80,94	-40,31	744	A	1,0352	-35,25	A	0,00	0,00
	B	1,0240	174,09	B	-81,80	-41,32		B	1,0383	-155,35	B	0,00	0,00
	C	1,0295	53,32	C	-82,74	-41,11		C	1,0304	83,37	C	0,00	0,00
	+	1,0228	-66,38	3 ϕ	-245,48	-122,74		+	1,0346	-35,74	3 ϕ	0,00	0,00

Tabela 5.5: Ponto de Operação (*IEEE Comprehensive Test Feeder*, Parte 3)

		Tensão		Injeção de Potência					Tensão		Injeção de Potência		
		[pu]	[°]		[kW]	[kvar]			[pu]	[°]		[kW]	[kvar]
745	A	1,0421	-35,10	A	0,00	0,00	746	A	1,0415	-35,11	A	0,00	0,00
	B	1,0429	-155,32	B	0,00	0,00		B	1,0426	-155,33	B	0,00	0,00
	C	1,0431	83,44	C	0,00	0,00		C	1,0425	83,42	C	0,00	0,00
	+	1,0426	-35,66	3 ϕ	0,00	0,00		+	1,0421	-35,68	3 ϕ	0,00	0,00
747	A	1,0278	-35,29	A	0,00	0,00	748	A	1,5089	-66,43	A	-19,61	-12,14
	B	1,0357	-155,73	B	0,00	0,00		B	0,8832	-156,41	B	-22,50	-21,26
	C	1,0285	83,03	C	0,00	0,00		C	0,8826	23,59	C	-31,67	-10,81
	+	1,0306	-36,00	3 ϕ	0,00	0,00		+	1,0127	-66,42	3 ϕ	-73,78	-44,21
749	A	1,0274	-35,30	A	0,00	0,00	750	A	1,0282	-35,21	A	0,00	0,00
	B	1,0356	-155,74	B	0,00	0,00		B	1,0360	-155,66	B	0,00	0,00
	C	1,0281	83,02	C	0,00	0,00		C	1,0288	83,10	C	0,00	0,00
	+	1,0303	-36,01	3 ϕ	0,00	0,00		+	1,0309	-35,92	3 ϕ	0,00	0,00
751	A	1,0208	-34,97	A	47,68	-30,50	752	A	1,0104	-35,78	A	0,00	0,00
	B	1,0395	-155,31	B	48,34	-33,97		B	1,0278	-156,42	B	0,00	0,00
	C	1,0250	83,95	C	49,51	-32,86		C	1,0117	82,35	C	0,00	0,00
	+	1,0284	-35,44	3 ϕ	145,53	-97,33		+	1,0165	-36,62	3 ϕ	0,00	0,00
753	A	1,0102	-35,79	A	0,00	0,00	754	A	1,0250	-6,23	A	0,00	0,00
	B	1,0278	-156,43	B	0,00	0,00		B	1,0293	-127,89	B	0,00	0,00
	C	1,0116	82,34	C	0,00	0,00		C	1,0012	112,73	C	0,00	0,00
	+	1,0164	-36,62	3 ϕ	0,00	0,00		+	1,0184	-7,13	3 ϕ	0,00	0,00
755	A	1,0249	-6,24	A	0,00	52,53	756	A	0,9882	-36,84	A	-48,83	-19,53
	B	1,0292	-127,91	B	0,00	52,96		B	1,0187	-157,28	B	-31,13	-15,57
	C	1,0011	112,72	C	0,00	50,11		C	0,9869	81,25	C	-73,04	-34,09
	+	1,0183	-7,14	3 ϕ	0,00	155,56		+	0,9978	-37,62	3 ϕ	-153,00	-69,19
757	A	1,0087	-35,85	A	0,00	0,00	758	A	1,0086	-35,85	A	0,00	0,00
	B	1,0271	-156,49	B	0,00	0,00		B	-	-	B	-	-
	C	1,0103	82,29	C	0,00	0,00		C	-	-	C	-	-
	+	1,0153	-36,68	3 ϕ	0,00	0,00		+	-	-	3 ϕ	0,00	0,00
759	A	0,8917	-52,98	A	-20,38	-4,74	760	A	1,0074	-35,92	A	0,00	101,48
	B	0,9007	160,17	B	-14,62	-15,26		B	1,0262	-156,56	B	0,00	105,31
	C	-	-	C	-	-		C	1,0089	82,22	C	0,00	101,80
	+	-	-	3 ϕ	-35,00	-20,00		+	1,0141	-36,75	3 ϕ	0,00	308,59
761	A	1,0073	-35,92	A	0,00	0,00	762	A	0,9975	-36,26	A	-16,04	-9,47
	B	1,0262	-156,56	B	0,00	0,00		B	1,0148	-157,42	B	-15,89	-10,40
	C	1,0089	82,22	C	0,00	0,00		C	0,9885	82,29	C	-14,90	-9,00
	+	1,0140	-36,75	3 ϕ	0,00	0,00		+	1,0002	-37,13	3 ϕ	-46,83	-28,87
763	A	1,0073	-35,92	A	0,00	0,00	764	A	0,8507	-67,20	A	-17,00	-6,37
	B	1,0261	-156,56	B	0,00	0,00		B	1,5326	-157,52	B	-10,96	-4,70
	C	1,0088	82,22	C	0,00	0,00		C	0,8500	112,79	C	-17,23	-13,39
	+	1,0140	-36,75	3 ϕ	0,00	0,00		+	1,0018	-37,38	3 ϕ	-45,19	-24,46
765	A	1,0062	-35,94	A	0,00	0,00	766	A	1,0185	-69,72	A	0,00	0,00
	B	1,0252	-156,58	B	0,00	0,00		B	1,0098	175,49	B	0,00	0,00
	C	1,0077	82,20	C	0,00	0,00		C	0,9708	49,94	C	0,00	0,00
	+	1,0130	-36,77	3 ϕ	0,00	0,00		+	0,9987	-68,08	3 ϕ	0,00	0,00

Tabela 5.6: Ponto de Operação (*IEEE Comprehensive Test Feeder*, Parte 4)

	Tensão		Injeção de Potência		Tensão		Injeção de Potência						
	[pu]	[°]	[kW]	[kvar]	[pu]	[°]	[kW]	[kvar]					
767	A	1,0665	-68,13	A	0,00	0,00	768	A	1,0665	-68,13	A	0,44	53,61
	B	0,9971	175,12	B	0,00	0,00	B	0,9971	175,12	B	-2,33	49,92	
	C	0,9857	50,49	C	0,00	0,00	C	0,9857	50,49	C	1,89	49,49	
	+	1,0159	-67,51	3 ϕ	0,00	0,00	+	1,0159	-67,51	3 ϕ	0,00	153,02	
769	A	1,5138	-67,85	A	-6,51	-1,41	770	A	0,9886	-68,89	A	-168,31	-96,43
	B	0,8642	-157,84	B	-15,34	-11,15	B	0,9880	171,55	B	-125,31	-87,58	
	C	0,8640	22,09	C	-19,13	-4,43	C	0,9948	51,36	C	-156,38	-55,99	
	+	1,0033	-67,86	3 ϕ	-40,98	-16,99	+	0,9904	-68,66	3 ϕ	-450,00	-240,00	
771	A	1,0062	-35,94	A	0,00	0,00	772	A	-	-	A	-	-
	B	1,0252	-156,58	B	0,00	0,00	B	0,9982	173,59	B	-50,00	-25,00	
	C	1,0077	82,20	C	0,00	0,00	C	1,0019	52,08	C	-50,00	-25,00	
	+	1,0129	-36,77	3 ϕ	0,00	0,00	+	-	-	3 ϕ	-100,00	-50,00	

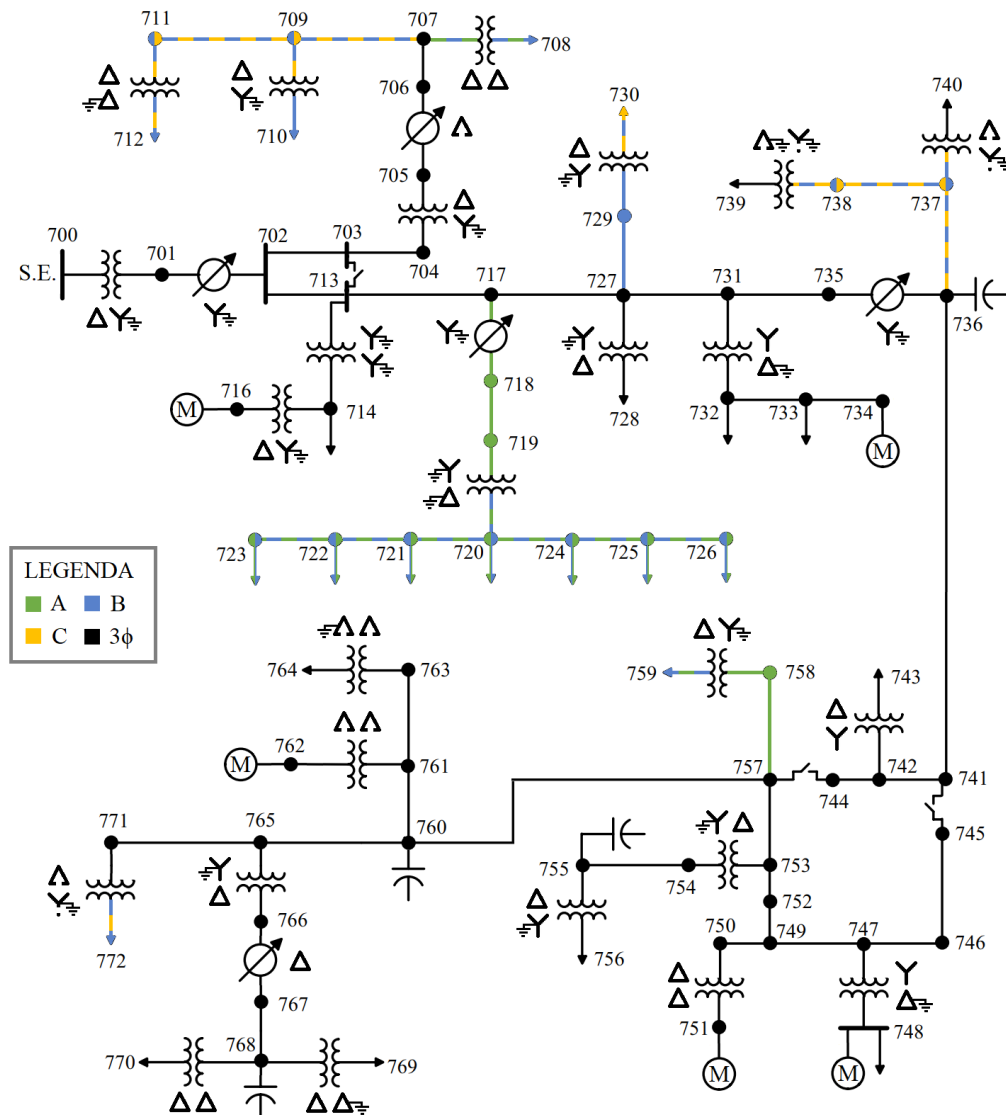


Figura 5.2: Diagrama Unifilar (*IEEE Comprehensive Test Feeder*) [92]

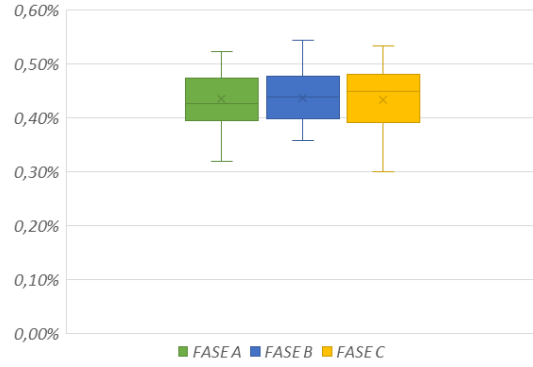


Figura 5.3: Diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas e obtidas (*IEEE Comprehensive Test Feeder*)

Tabela 5.7: Resultados Seleccionados (*IEEE Comprehensive Test Feeder*)

		Tensão Fase-Terra		Tensão Fase-Fase				Tensão Fase-Terra		Tensão Fase-Fase			
		[pu]	[°]	[pu]	[°]			[pu]	[°]	[pu]	[°]		
720	A	0,8899	-34,55	AB	1,0273	-34,56	712	A	-	-	AB	-	-
	B	0,8895	145,44	BC	-	-	B	0,8540	-154,71	BC	0,9865	-154,71	
	C	-	-	CA	-	-	C	0,8547	25,30	CA	-	-	
705	A	1,2822	-63,10	AB	1,0360	-34,45	764	A	0,8507	-67,20	AB	1,0144	-6,48
	B	0,9088	-171,87	BC	1,0297	-154,08	B	1,5326	-157,52	BC	1,0095	-128,44	
	C	0,9593	42,76	CA	1,0387	86,04	C	0,8500	112,79	CA	0,9819	112,79	

Voltage Networked Test System) e *European Low Voltage Test Feeder*. O sistema referido como norte-americano é constituído por oito alimentadores primários em média tensão que são responsáveis por atender uma rede em baixa tensão altamente malhada, enquanto o sistema referido como europeu é totalmente radial. As Figuras 5.4 e 5.5 apresentam os respectivos diagramas unifilares. Por incluírem um detalhamento da baixa tensão, são sistemas que demandam um maior número de barramentos trifásicos para serem representados, tornando-os sistemas que podem ser considerados de grande porte. Conforme sumarizado na Tabela 5.1, o sistema norte-americano é composto por 390 barramentos trifásicos, enquanto o sistema europeu é composto por 907 barramentos trifásicos.

Na Figura 5.6 estão diagramadas as diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas nos relatórios técnicos disponíveis em [92] e as tensões complexas obtidas. No contexto do sistema norte-americano, dois casos distintos foram avaliados, condição de operação normal e condição de operação em contingência de um dos alimentadores. No contexto do sistema europeu, por conveniência, apenas o período de carga pesada foi avaliado. Em nenhum dos problemas de fluxo de potência trifásico resolvidos foram obtidas tensões com um desvio superior a 0,31%. Por sua vez, a Tabela 5.8 apresenta as injeções de potência aferidas nas subestações

de distribuição, além das menores magnitudes de tensão de sequência positiva e dos maiores desequilíbrios de tensão entre as fases de um mesmo barramento.

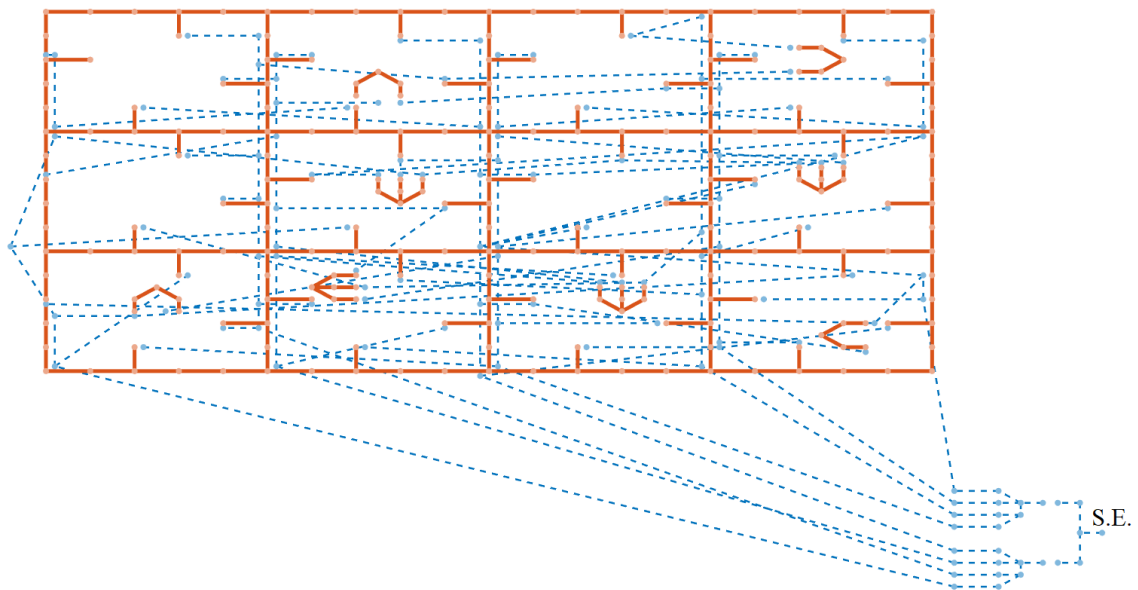


Figura 5.4: Diagrama Unifilar (*IEEE North American Low Voltage Test System*): em azul, os alimentadores primários em média tensão; em laranja, a rede em baixa tensão propriamente dita

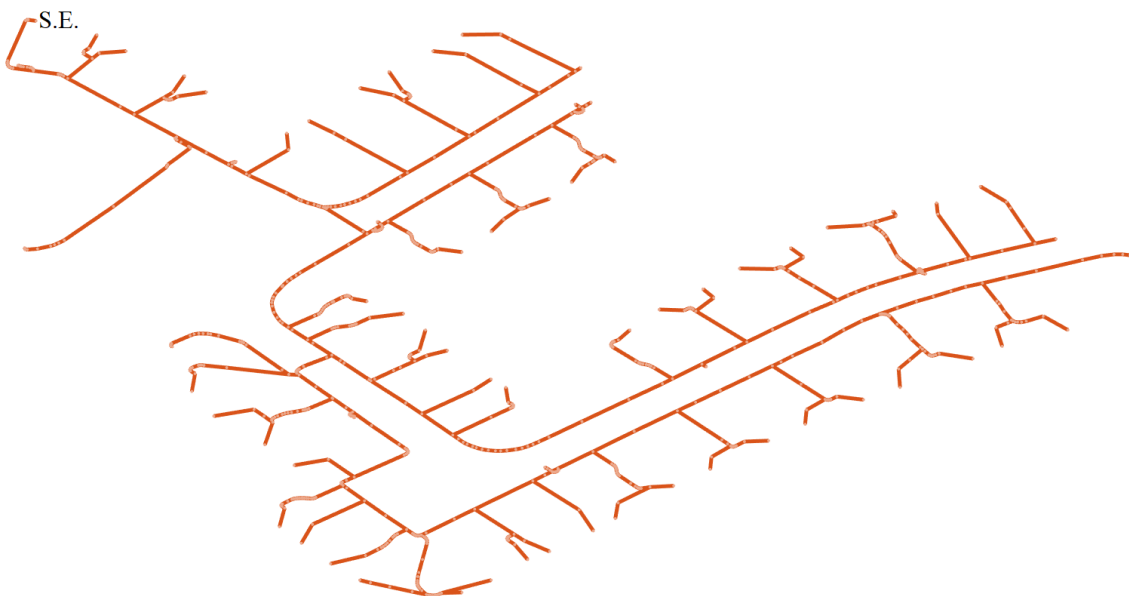


Figura 5.5: Diagrama Unifilar (*IEEE European Low Voltage Test Feeder*)

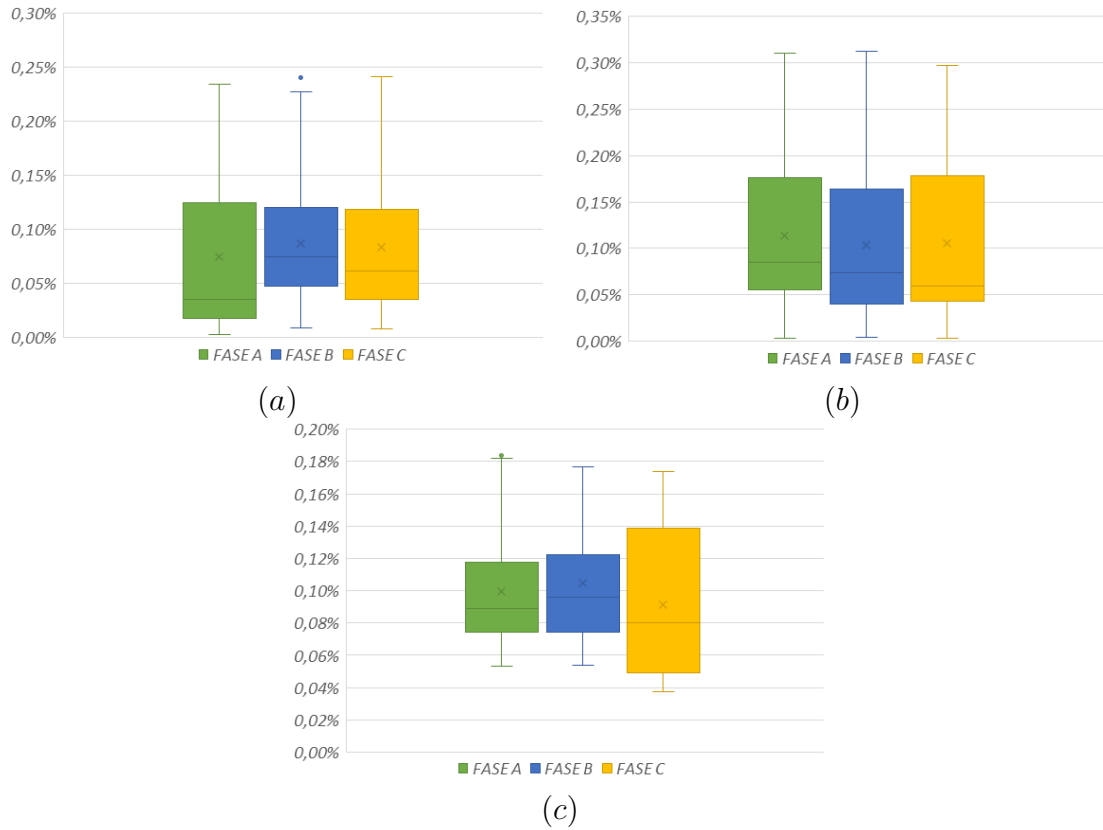


Figura 5.6: Diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas e obtidas (*Low Voltage Test Systems*): **(a)** *North American (normal operation)*; **(b)** *North American (feeder 6 out)*; **(c)** *European*

Tabela 5.8: Resultados Seleccionados (*Low Voltage Test Systems*)

Sistema Trifásico	Subestação de Distribuição [kW] [kvar]		Tensão Complexa								
			menor magnitude			maior desequilíbrio					
				[pu]	[°]		[pu]	[°]			
<i>North American (normal operation)</i>	A	14.370,16	9.729,29	S47	A	0,9901	-33,35	S203	A	1,0045	-33,11
	B	14.173,43	9.793,14		B	0,9930	-153,47		B	1,0012	-152,93
	C	14.216,99	9.590,55		C	0,9949	86,64		C	1,0082	87,05
	3 ϕ	42.760,58	29.112,99		+	0,9927	-33,39		+	1,0046	-33,00
<i>North American (feeder 6 out)</i>	A	14.423,05	9.944,18	S38	A	0,9492	-34,23	S38	A	0,9492	-34,23
	B	14.218,41	10.006,89		B	0,9549	-154,85		B	0,9549	-154,85
	C	14.266,92	9.798,03		C	0,9656	85,36		C	0,9656	85,36
	3 ϕ	42.908,39	29.749,10		+	0,9565	-34,57		+	0,9565	-34,57
<i>European (on-peak snapshot)</i>	A	28,40	3,60	562	A	1,0231	-28,87	639	A	1,0282	-28,89
	B	17,96	15,33		B	0,9993	-150,51		B	0,9945	-150,44
	C	13,04	0,44		C	1,0609	89,45		C	1,0610	89,38
	3 ϕ	59,41	19,37		+	1,0277	-29,98		+	1,0278	-29,98

5.2 TPC 345 kV System

Os dados elétricos e diferentes pontos de operação de parte do sistema de transmissão em 345 kV administrado pela empresa *Taiwan Power Company* foram apresentados originalmente em [94]. Na tentativa de recriar esses resultados, algumas inconsistências, provavelmente ocasionadas por erros de digitação, puderam ser identificadas nos dados elétricos:

- Na Tabela 1 da referida publicação, o consumo de potência reativa na Barra 14 deve ser 150 Mvar e não 250 Mvar;
- Na Tabela 1 da referida publicação, as configurações das linhas de transmissão devem ser 945D e não 954D;
- Na Tabela 2 da referida publicação, o elemento [2, 5] da matriz de admitância shunt referente à configuração 945D deve ser $(-j 0, 5529)$ e não $(-j 0, 5599)$;
- Na Tabela 2 da referida publicação, o elemento [5, 6] da matriz de impedância série referente à configuração 795Q deve ser $(0, 1225 + j 0, 5153)$ e não $(0, 1225 + j 0, 1553)$;
- Na Tabela 2 da referida publicação, o elemento [4, 6] da matriz de admitância shunt referente à configuração 795Q deve ser $(-j 0, 5222)$ e não $(-j 0, 222)$.

A Figura 5.7 apresenta as diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas em [77, 94, 95] e as tensões complexas obtidas. Para ambos os casos em análise, foram obtidas tensões com desvios inferiores a 0,13%. O caso referido por “2” em [77] ou “B” em [94, 95] apresenta desbalanço nas linhas de transmissão, porém, cargas totalmente equilibradas. Por sua vez, o caso referido por “3” em [77] ou “C” em [94, 95] impõe um desbalanceamento de carga na Barra 14, *ceteris paribus*. Esse sistema de transmissão de 345 kV é composto por oito máquinas síncronas ou equivalentes que apresentam controles de magnitude de tensão de sequência positiva e injeção de potência ativa trifásica (evidentemente, com exceção da máquina responsável pela referência angular). A Figura 5.8 apresenta o seu diagrama unifilar enquanto a Tabela 5.9 apresenta resultados de fluxo de potência selecionados.

5.3 WSCC 9-Bus System

Os dados elétricos do equivalente de sequência positiva de um sistema de transmissão de 230 kV proposto pelo *Western Systems Coordinating Council* podem ser encontrados em [96]. Por sua vez, em [77], dados elétricos para as sequências negativa e zero foram estimados e diferentes condições de carga, geração e rede foram avaliadas, conforme abaixo:

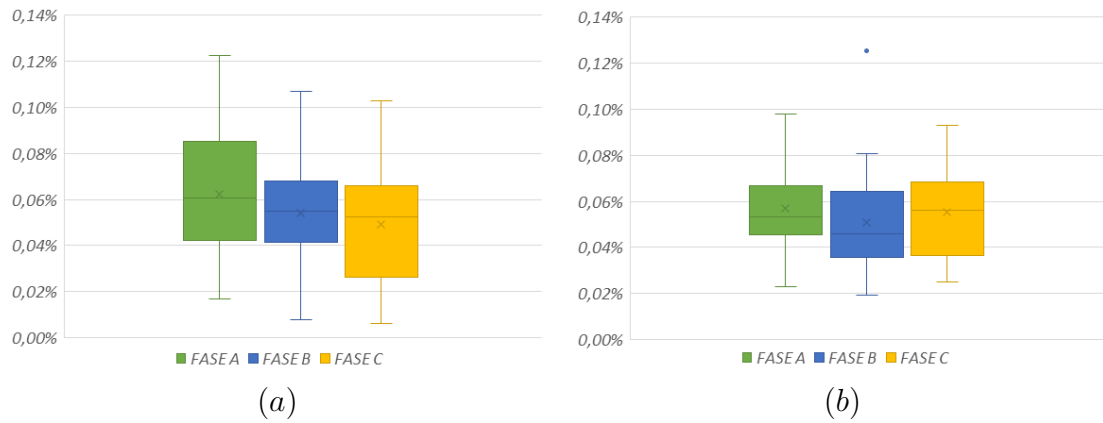


Figura 5.7: Diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas e obtidas (*TPC 345 kV System*): (a) *Case 2 or B*; (b) *Case 3 or C*

Tabela 5.9: Resultados Seleccionados (*TPC 345 kV System*)

-	Barramento de Referência		Tensão Complexa								
	[MW]	[Mvar]	menor magnitude		maior desequilíbrio						
			[pu]	[°]	[pu]	[°]					
<i>Case 2 or B</i>	A	229,68	45,40	41	A	0,9515	6,38	41	A	0,9515	6,38
	B	230,24	43,18		B	0,9688	-113,24		B	0,9688	-113,24
	C	231,96	44,10		C	0,9788	126,47		C	0,9788	126,47
	3φ	691,88	132,68		+	0,9663	6,54		+	0,9663	6,54
<i>Case 3 or C</i>	A	226,21	50,06	41	A	0,9537	6,64	14	A	1,0057	20,12
	B	228,67	39,27		B	0,9746	-113,06		B	0,9982	-100,07
	C	237,23	43,55		C	0,9705	126,04		C	0,9808	138,04
	3φ	692,11	132,98		+	0,9662	6,54		+	0,9948	19,37

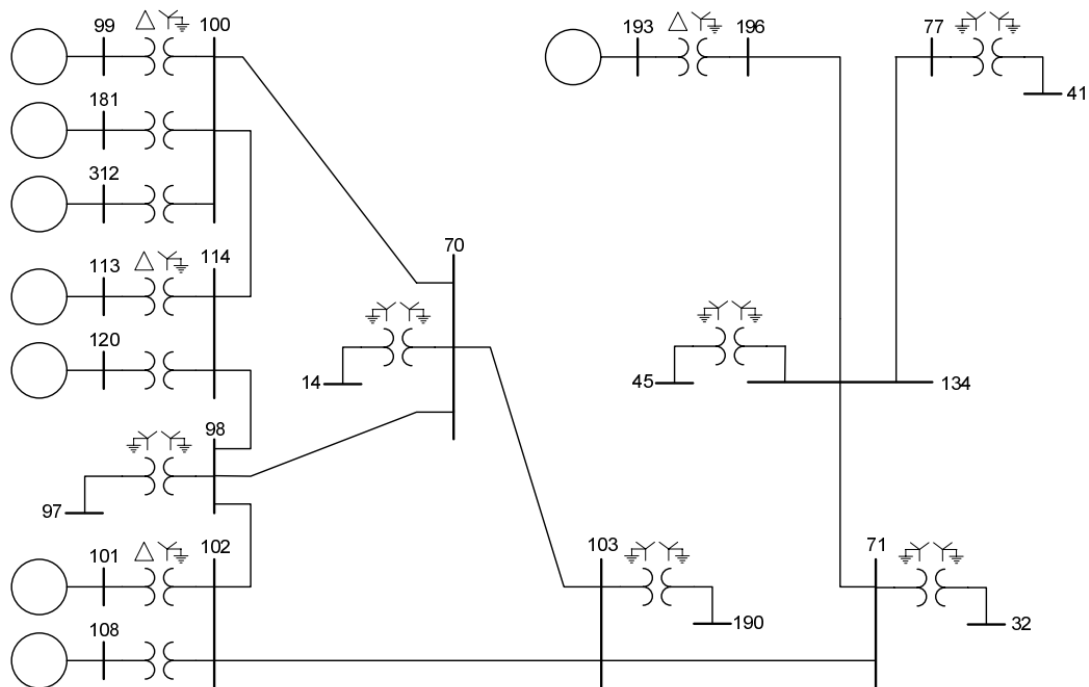


Figura 5.8: Diagrama Unifilar (*TPC 345 kV System*) [77]

- Caso 1: sistema em operação normal com cargas levemente desbalanceadas;
- Caso 2: sistema em operação normal com cargas altamente desbalanceadas;
- Caso 3: idêntico ao Caso 2, porém, explora controles de magnitude de tensão não-usuais nas três máquinas síncronas existentes (em oposição a convencional regulação de sequência positiva, optou-se por regulação da fase *A*, regulação fase-fase *BC* e regulação da média aritmética entre as três fases);
- Caso 4: sistema em contingência (abertura monopolar de uma das linhas de transmissão existentes, com as fases sãs incluindo resistências de 5 mΩ em cada terminal, representando chaves não-ideais) com cargas altamente desbalanceadas (tal qual o Caso 2 e o Caso 3);
- Caso 5: sistema em contingência (tal qual o Caso 4), porém, com as cargas substituídas por motores de indução operando com torque mecânico constante.

A topologia desse sistema, representada na Figura 5.9, pode ser descrita como um anel triangular, onde cada um dos vértices possui conexão com uma máquina síncrona equivalente através de um transformador. Além disso, nos pontos médios de cada um dos lados do triângulo existe um barramento de carga. A Figura 5.10 apresenta, para os Casos entre 1 e 4, as diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas em [77] e as tensões complexas obtidas. Para o Caso 3, é importante destacar que o controle de média aritmética entre as três magnitudes de tensão de fase não foi implementado, sendo, portanto, substituído pelo controle de magnitude de tensão de sequência positiva. Evidentemente, houve necessidade de ajustar o valor de referência do regulador de tensão (para a manutenção de 1,0250 pu como média de magnitude de tensão de fase na máquina de interesse, ajustou-se sua sequência positiva para 1,0229 pu).

Por fim, a Tabela 5.10 apresenta os pontos de operação referentes aos Casos 4 e 5, que retratam uma operação em contingência caracterizada pela abertura monopolar da Fase *A* da linha de transmissão que interconecta os Barramentos 5 e 7. Além disso, o Caso 4 impõe uma redistribuição das cargas, limitando-as somente às fases *B* e *C*. Conseqüentemente, torna-se um caso altamente desbalanceado, apresentando subtensões severas na Fase *B* e, ao mesmo tempo, sobretensões severas na Fase *A*. Por sua vez, o Caso 5 substitui as cargas originais por motores de indução operando com torque mecânico constante, apresentando, portanto, um nível de desbalanço consideravelmente menor quando comparado ao Caso 4. Para o Caso 5, é importante ressaltar que os valores reportados em [77] foram obtidos com o tratamento matemático correto do torque de sequência negativa de uma máquina de indução, enquanto na formulação implementada neste trabalho, o tratamento

dado ao torque de sequência negativa é uma aproximação. A Tabela 5.11 detalha os resultados referentes aos motores de indução.

Tabela 5.10: Pontos de Operação (*WSCC 9-Bus System*, Casos 4 e 5)

		Caso 4				Caso 5							
		Tensão		Injeção de Potência		Tensão		Injeção de Potência					
		[pu]	[°]	[MW]	[Mvar]	[pu]	[°]	[MW]	[Mvar]				
1	A	1,1177	0,56	A	-18,99	-14,71	1	A	1,0291	-0,60	A	36,88	32,19
	B	0,9859	-123,30	B	55,36	40,99		B	1,0417	-119,29	B	21,76	29,27
	C	1,0192	122,58	C	42,04	32,71		C	1,0493	119,89	C	20,46	30,21
	+	1,0400	0,00	3 ϕ	78,41	58,99		+	1,0400	0,00	3 ϕ	79,10	91,67
2	A	1,1188	14,77	A	18,33	-10,86	2	A	1,0449	16,25	A	42,71	13,28
	B	0,9885	-112,24	B	75,95	26,05		B	1,0338	-106,93	B	61,00	10,36
	C	0,9730	135,12	C	68,72	22,71		C	0,9972	134,76	C	59,30	15,83
	+	1,0250	12,63	3 ϕ	163,00	37,90		+	1,0250	14,70	3 ϕ	163,00	39,47
3	A	1,1250	8,65	A	2,03	-14,42	3	A	1,0293	8,08	A	26,71	8,08
	B	0,9864	-118,89	B	44,01	13,22		B	1,0296	-112,83	B	29,38	6,27
	C	0,9697	129,07	C	38,96	9,77		C	1,0162	127,61	C	28,92	8,48
	+	1,0250	6,37	3 ϕ	85,00	8,57		+	1,0250	7,62	3 ϕ	85,00	22,83
4	A	1,1408	2,03	A	0,00	0,00	4	A	0,9770	-4,24	A	0,00	0,00
	B	0,9192	-129,36	B	0,00	0,00		B	0,9938	-121,38	B	0,00	0,00
	C	0,9663	118,35	C	0,00	0,00		C	1,0002	117,96	C	0,00	0,00
	+	1,0054	-2,60	3 ϕ	0,00	0,00		+	0,9901	-2,54	3 ϕ	0,00	0,00
5	A	1,2065	5,07	A	0,00	0,00	5	A	0,8970	-11,89	A	-37,29	-21,07
	B	0,7472	-136,23	B	-62,50	-25,00		B	0,9540	-122,90	B	-45,56	-24,67
	C	0,9487	110,00	C	-62,50	-25,00		C	0,9225	117,42	C	-42,15	-34,15
	+	0,9553	-5,35	3 ϕ	-125,00	-50,00		+	0,9219	-5,70	3 ϕ	-125,00	-79,89
6	A	1,2053	6,91	A	0,00	0,00	6	A	0,9553	-3,72	A	-29,32	-17,56
	B	0,8149	-133,87	B	-45,00	-15,00		B	0,9688	-122,36	B	-30,71	-18,50
	C	0,9605	112,08	C	-45,00	-15,00		C	0,9644	117,39	C	-29,96	-19,50
	+	0,9816	-3,56	3 ϕ	-90,00	-30,00		+	0,9628	-2,89	3 ϕ	-89,99	-55,56
7	A	1,1374	13,22	A	0,00	0,00	7	A	1,0239	11,96	A	0,00	0,00
	B	0,9501	-120,96	B	0,00	0,00		B	1,0210	-113,15	B	0,00	0,00
	C	0,9386	127,01	C	0,00	0,00		C	0,9738	128,19	C	0,00	0,00
	+	1,0034	6,84	3 ϕ	0,00	0,00		+	1,0055	9,01	3 ϕ	0,00	0,00
8	A	1,1836	13,30	A	0,00	0,00	8	A	0,9906	6,73	A	-37,77	-23,16
	B	0,8722	-126,85	B	-50,00	-17,50		B	0,9920	-116,46	B	-33,91	-23,53
	C	0,9454	119,42	C	-50,00	-17,50		C	0,9635	124,32	C	-33,11	-17,77
	+	0,9892	3,07	3 ϕ	-100,00	-35,00		+	0,9818	4,87	3 ϕ	-104,79	-64,46
9	A	1,1476	8,50	A	0,00	0,00	9	A	1,0166	5,51	A	0,00	0,00
	B	0,9661	-123,54	B	0,00	0,00		B	1,0201	-115,65	B	0,00	0,00
	C	0,9546	124,83	C	0,00	0,00		C	1,0027	124,75	C	0,00	0,00
	+	1,0188	3,57	3 ϕ	0,00	0,00		+	1,0131	4,87	3 ϕ	0,00	0,00

Tabela 5.11: Operação das Máquinas de Indução (*WSCC 9-Bus System*, Caso 5)

—	Reportados			Obtidos		
	M1	M2	M3	M1	M2	M3
Consumo de Potência Ativa [MW]	125,0	90,0	105,0	125,0	90,0	104,8
Consumo de Potência Reativa [Mvar]	79,9	55,6	64,6	79,9	55,6	64,5
Escorregamento [%]	7,72	6,78	6,42	7,69	6,77	6,41
Tensão de Seq. Negativa [%]	4,16	0,75	2,55	4,16	0,75	2,56
Corrente de Seq. Negativa [%]	16,30	2,96	10,03	16,36	2,96	10,05
Tensão de Seq. Zero [%]	5,97	0,85	0,79	5,97	0,85	0,79
Corrente de Seq. Zero [%]	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

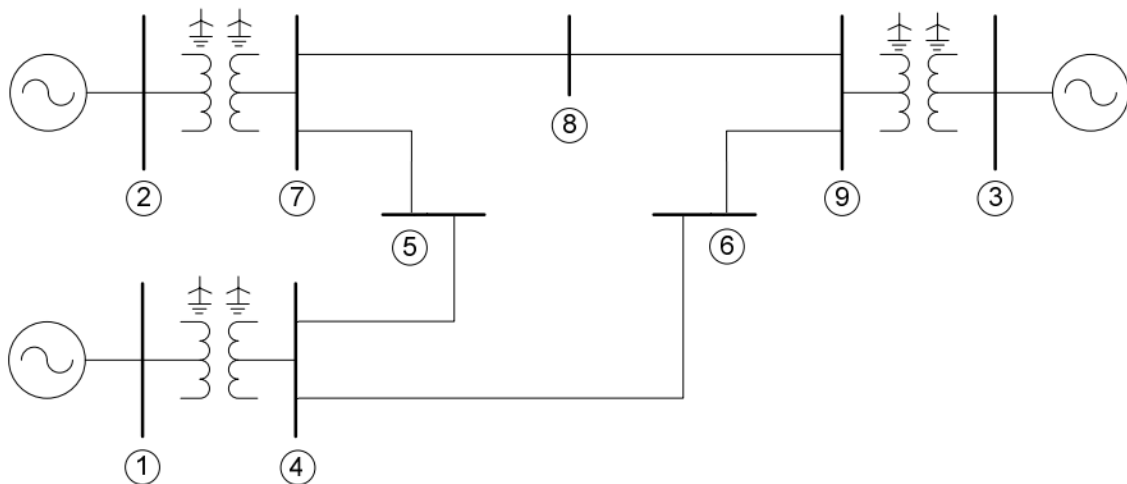


Figura 5.9: Diagrama Unifilar (*WSCC 9-Bus System*) [77]

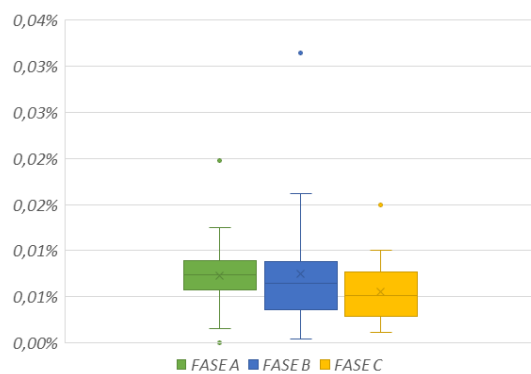


Figura 5.10: Diferenças percentuais entre as tensões complexas reportadas e obtidas (*WSCC 9-Bus System*)

5.4 Sistema Didático

Até então, os problemas de fluxo de potência trifásico resolvidos não apresentaram uma grande variedade de condições operativas para os dispositivos shunt ativos e, portanto, não foram capazes de explorar a formulação proposta em sua totalidade. Para tal, um sistema didático de quatro barramentos trifásicos foi estudado em dez casos distintos. Os resultados obtidos foram validados de forma indireta utilizando a versão acadêmica do *software* de análise de sistemas de energia elétrica denominado Simulight [77, 97]. Por validação indireta, deve-se entender que os diferentes modos de controle não foram recriados no programa, mas verificou-se através do mesmo que as condições de geração e carga dos pontos de operação obtidos, de fato, representavam as condições operativas desejadas. A única exceção para essa metodologia de validação foi o Caso 10, uma vez que máquinas de indução possuem um modelo *built-in* no próprio programa.

As Tabelas 5.12, 5.13 e 5.14 apresentam o sistema considerado e descrevem detalhadamente os diferentes casos estudados. Por sua vez, iniciando na Figura 5.11 e terminando na Figura 5.20 estão apresentados os resultados, caso por caso. Por conveniência, as figuras estão acompanhadas da solução em forma tabular e de descrições dos modos de controle vigentes para os dispositivos shunt ativos. Em todos os casos avaliados, há um dispositivo shunt ativo conectado ao Barramento 1, enquanto no Barramento 2, apenas em oito dos dez casos foram explorados dispositivos shunt ativos.

Tabela 5.12: Descrição do Sistema Didático e seus respectivos casos (Parte 1)

—	Modo de Controle do Dispositivo Shunt Ativo	
	Barramento Trifásico 1	Barramento Trifásico 2
Caso 1	<ul style="list-style-type: none"> · Tensão Interna Equilibrada · Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva) 	<ul style="list-style-type: none"> · Nenhum
Caso 2	<ul style="list-style-type: none"> · Tensão Interna Equilibrada · Controle de Ângulo de Tensão (Sequência Positiva) · Controle de Injeção de Potência Reativa (Trifásica) 	<ul style="list-style-type: none"> · Injeção de Corrente Equilibrada · Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica) · Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva)
Caso 3	<ul style="list-style-type: none"> · Tensão Interna Equilibrada · Controle de Ângulo de Tensão (Sequência Positiva) · Controle de Injeção de Potência Reativa (Trifásica) 	<ul style="list-style-type: none"> · Tensão Terminal Equilibrada · Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica, Fator de Participação) · Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva)

Tabela 5.13: Descrição do Sistema Didático e seus respectivos casos (Parte 2)

–	Modo de Controle do Dispositivo Shunt Ativo	
	Barramento Trifásico 1	Barramento Trifásico 2
Caso 4	<ul style="list-style-type: none"> · Tensão Interna Equilibrada · Controle de Ângulo de Tensão (Sequência Positiva) · Controle de Injeção de Potência Reativa (Trifásica) 	<ul style="list-style-type: none"> · Monofásico (Fase B) · Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica, Fator de Potência) · Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva)
Caso 5	<ul style="list-style-type: none"> · Tensão Interna Equilibrada · Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva) 	<ul style="list-style-type: none"> · Impedância Interna Equilibrada (Sequência Zero Aberta, Δ ou Y) · Incapacidade de Gerar Potência Ativa (Trifásico) · Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva, Slope)
Caso 6	<ul style="list-style-type: none"> · Tensão Interna Equilibrada · Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva): 	<ul style="list-style-type: none"> · Impedância Interna Equilibrada (Sequência Zero Fechada, Y_g) · Incapacidade de Gerar Potência Ativa (Trifásico) · Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva, Slope)
Caso 7	<ul style="list-style-type: none"> · Tensão Interna Equilibrada · Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva) 	<ul style="list-style-type: none"> · Injeção de Corrente Equilibrada (Controle Remoto, Linha 1–2) · Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica, Remoto, Linha 1–2) · Controle de Injeção de Potência Reativa (Trifásica, Remoto, Linha 1–2)
Caso 8	<ul style="list-style-type: none"> · Tensão Interna Equilibrada · Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva) 	<ul style="list-style-type: none"> · Injeção de Corrente Equilibrada (Controle Remoto, Linha 1–2) · Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica, Fator de Potência, Remoto, Linha 1–2) · Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva)
Caso 9	<ul style="list-style-type: none"> · Tensão Interna Equilibrada · Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva, Remoto, Barramento 2) 	<ul style="list-style-type: none"> · Nenhum, porém, há um dispositivo shunt passivo que inclui expoentes negativos
Caso 10	<ul style="list-style-type: none"> · Tensão Interna Equilibrada · Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva, Remoto, Barramento 2) 	<ul style="list-style-type: none"> · Máquina de Indução (Modelo Quadrático de Carga Mecânica)

Tabela 5.14: Descrição do Sistema Didático e seus respectivos casos (Parte 3)

Linha	Configuração ¹	Comprimento
1 – 2	602	0,60 km
2 – 3	607	0,30 km
2 – 4	603	0,15 km

¹Conforme Relatório Técnico do *IEEE 13-Node Test Feeder*

Barramento	Fase	Cargas ²	
		Potência Ativa	Fator de Potência
3	A	600 kW	0,80
4	B	1.200 kW	0,92
4	C	800 kW	0,92

²Todas as cargas são do tipo potência constante

		Dispositivo Shunt Passivo ou Ativo (Barramento 2)			
		Caso 9 (Passivo)		Caso 10 (Ativo)	
Dispositivo Shunt Ativo (Barramento 1)		Carga entre as Fases A e C		Máquina de Indução	
5.000 kVA	4,16 kV	$P_0 = 500 \text{ kW}$	$\text{fp} = 0,80$	$T_0 = 670 \text{ HP}$	$R_s = 3,10\%$
$R_0 = 1,80\%$	$X_0 = 8,00\%$	$I^{+1} = 25\%$	$I^{-1} = 15\%$	$(1 - u)^0 = 35\%$	$X_s = 10,0\%$
$R_1 = 0,50\%$	$X_1 = 4,50\%$	$Z^{+1} = 10\%$	$Z^{-1} = 35\%$	$(1 - u)^1 = 15\%$	$R_r = 1,80\%$
$R_2 = 0,50\%$	$X_2 = 4,50\%$	$P = 15\%$		$(1 - u)^2 = 50\%$	$X_r = 18,0\%$
				4,16 kV	$X_m = 320\%$
		Casos 5 e 6 (Ativo), SVC			
		500 kVA	4,16 kV	Slope de 10%	0,02%/kvar

Barramento	Tensão, Magnitude [<i>pu</i>] / Ângulo [°]				Injeção de Potência, Ativa [kW] / Reativa [kvar]			
	A	B	C	+	A	B	C	3φ
1	1,0515	1,0397	1,0590	1,0500	657,78	1.341,81	820,21	2.819,80
	30,69	-90,74	150,04	30,00	474,28	684,97	391,70	1.550,96
2	1,0069	0,9430	1,0264	0,9914	0,00	0,00	0,00	0,00
	31,19	-94,09	148,37	28,55	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,9724	-	-	-	-600,00	-	-	-600,00
	31,76	-	-	-	-450,00	-	-	-450,00
4	-	0,9001	1,0131	-	-	-1.200,00	-800,00	-2.000,00
	-	-94,71	147,59	-	-	-511,20	-340,80	-852,00

Barramento 1 · Tensão Interna Equilibrada
· Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva): 1,05∠30° pu

Barramento 2 · Nenhum

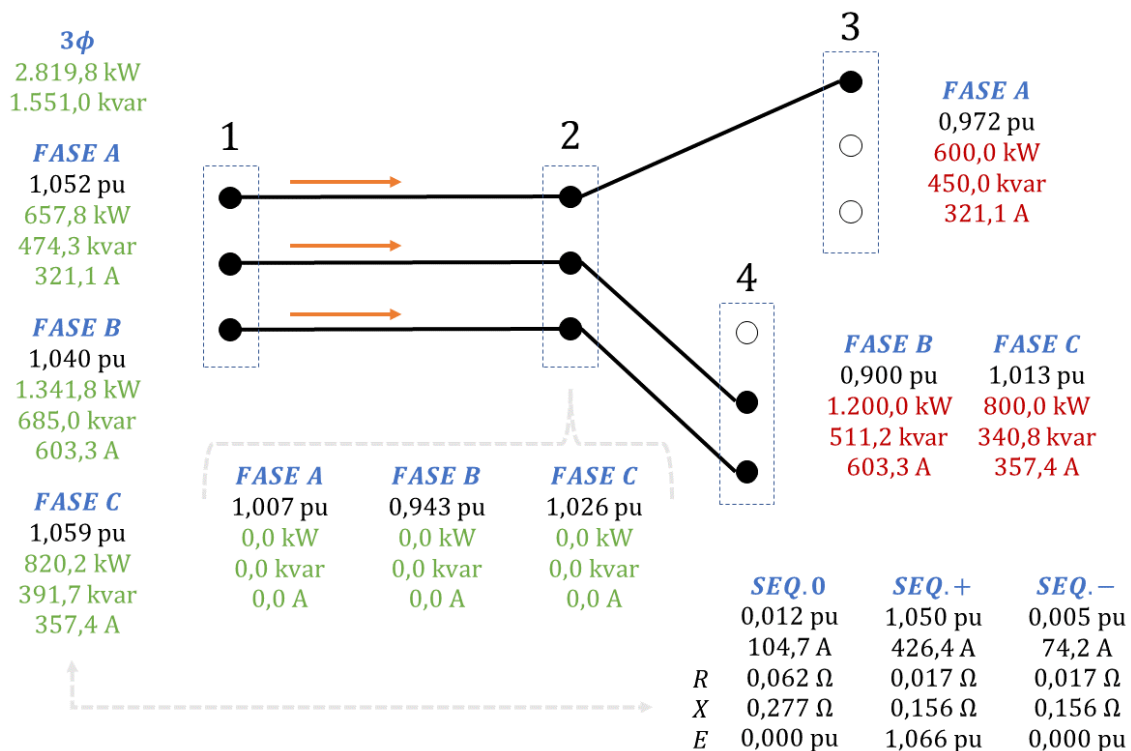


Figura 5.11: Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 1)

Barramento	Tensão, Magnitude [pu] / Ângulo [°]				Injeção de Potência, Ativa [kW] / Reativa [kvar]			
	A	B	C	+	A	B	C	3φ
1	1,0763	1,0655	1,0837	1,0751	478,89	1.155,24	640,27	2.274,40
	30,64	-90,70	150,04	30,00	463,04	658,29	378,67	1.500,00
2	1,0386	0,9788	1,0594	1,0250	168,80	158,94	172,26	500,00
	31,51	-93,38	148,91	29,06	5,37	-8,51	-2,35	-5,49
3	1,0052	-	-	-	-600,00	-	-	-600,00
	32,03	-	-	-	-450,00	-	-	-450,00
4	-	0,9377	1,0465	-	-	-1.200,00	-800,00	-2.000,00
	-	-93,94	148,17	-	-	-511,20	-340,80	-852,00

· Tensão Interna Equilibrada
 Barramento 1 · Controle de Ângulo de Tensão (Sequência Positiva): 30,0°
 · Controle de Injeção de Potência Reativa (Trifásica): 1.500 kvar

· Injeção de Corrente Equilibrada
 Barramento 2 · Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica): 500 kW
 · Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva): 1,025 pu

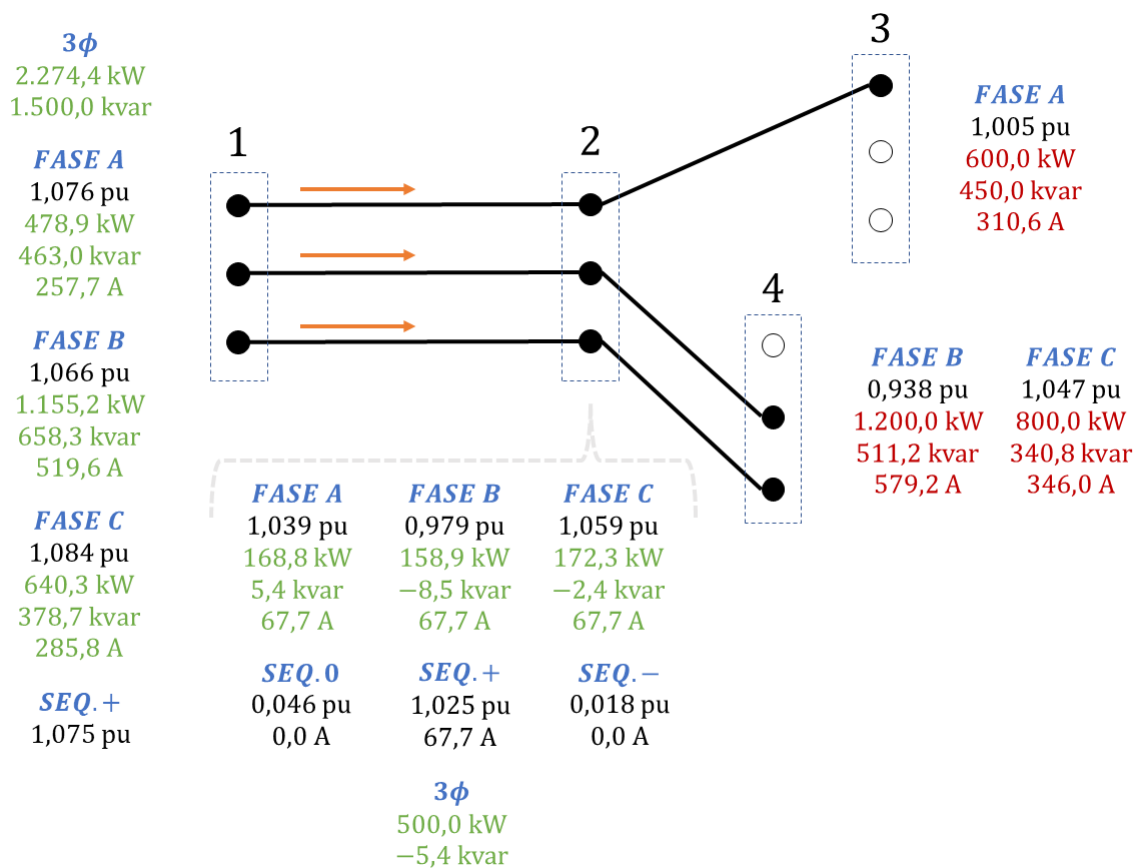


Figura 5.12: Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 2)

Barramento	Tensão, Magnitude [pu] / Ângulo [°]				Injeção de Potência, Ativa [kW] / Reativa [kvar]			
	A	B	C	+	A	B	C	3φ
1	1,0728 29,97	1,0734 -89,95	1,0754 149,98	1,0739 30,00	764,13 535,35	695,67 519,14	742,77 445,50	2.202,57 1.500,00
2	1,0250 29,13	1,0250 -90,87	1,0250 149,13	1,0250 29,13	-112,65 -41,33	570,84 56,69	92,45 -58,04	550,64 -42,68
3	0,9912 29,67	-	-	-	-600,00 -450,00	-	-	-600,00 -450,00
4	-	0,9860 -91,35	1,0109 148,39	-	-	-1.200,00 -511,20	-800,00 -340,80	-2.000,00 -852,00

Barramento 1

- Tensão Interna Equilibrada
- Controle de Ângulo de Tensão (Sequência Positiva): 30,0°
- Controle de Injeção de Potência Reativa (Trifásica): 1.500 kvar

Barramento 2

- Tensão Terminal Equilibrada
- Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica, Fator de Participação): 25% da Injeção do Barramento 1
- Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva): 1,025 pu

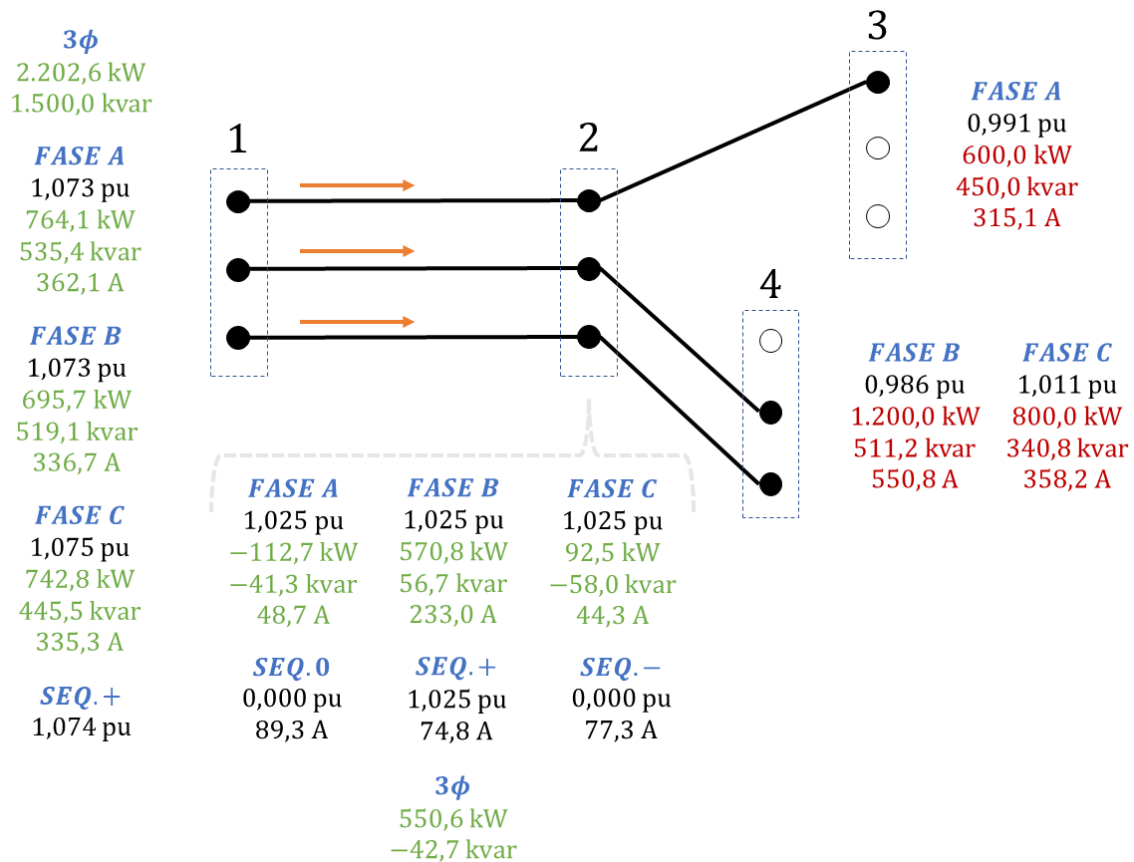


Figura 5.13: Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 3)

Barramento	Tensão, Magnitude [pu] / Ângulo [°]				Injeção de Potência, Ativa [kW] / Reativa [kvar]			
	A	B	C	+	A	B	C	3φ
1	1,0812	1,0716	1,0880	1,0802	653,18	1.272,05	820,97	2.746,20
	30,59	-90,62	150,02	30,00	473,97	637,13	388,90	1.500,00
2	1,0380	0,9840	1,0545	1,0250	0,00	50,12	0,00	50,12
	30,96	-93,58	148,48	28,66	0,00	21,35	0,00	21,35
3	1,0047	-	-	-	-600,00	-	-	-600,00
	31,49	-	-	-	-450,00	-	-	-450,00
4	-	0,9431	1,0415	-	-	-1.200,00	-800,00	-2.000,00
	-	-94,13	147,75	-	-	-511,20	-340,80	-852,00

· Tensão Interna Equilibrada
 Barramento 1 · Controle de Ângulo de Tensão (Sequência Positiva): 30,0°
 · Controle de Injeção de Potência Reativa (Trifásica): 1.500 kvar

· Monofásico (Fase B)
 Barramento 2 · Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica, Fator de Potência): 0,92
 · Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva): 1,025 pu

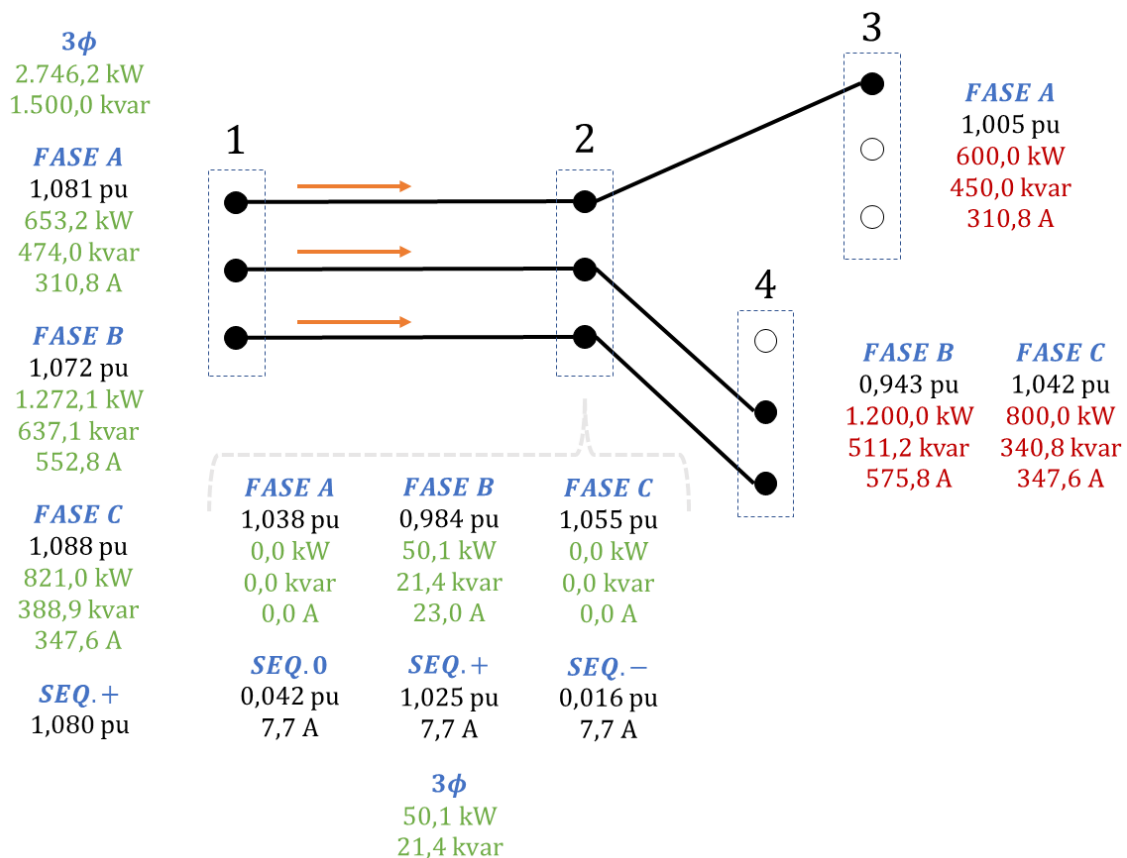


Figura 5.14: Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 4)

Barra-mento	Tensão, Magnitude [pu] / Ângulo [°]				Injeção de Potência, Ativa [kW] / Reativa [kvar]			
	A	B	C	+	A	B	C	3φ
1	1,0515	1,0397	1,0590	1,0500	657,35	1.337,84	817,95	2.813,14
	30,68	-90,73	150,04	30,00	418,79	631,17	337,84	1.387,80
2	1,0094	0,9460	1,0289	0,9941	-2,51	1,45	1,06	0,00
	31,08	-94,18	148,26	28,44	53,27	48,54	52,90	154,70
3	0,9750	-	-	-	-600,00	-	-	-600,00
	31,64	-	-	-	-450,00	-	-	-450,00
4	-	0,9033	1,0157	-	-	-1.200,00	-800,00	-2.000,00
	-	-94,79	147,48	-	-	-511,20	-340,80	-852,00

Barraamento 1 · Tensão Interna Equilibrada
· Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva): $1,05\angle 30^\circ pu$

Barraamento 2 · Impedância Interna Equilibrada (Sequência Zero Aberta, Δ ou Y)
· Incapacidade de Gerar Potência Ativa (Trifásico)
· Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva, Slope): $1,025 pu$; $0,02\%/kvar$

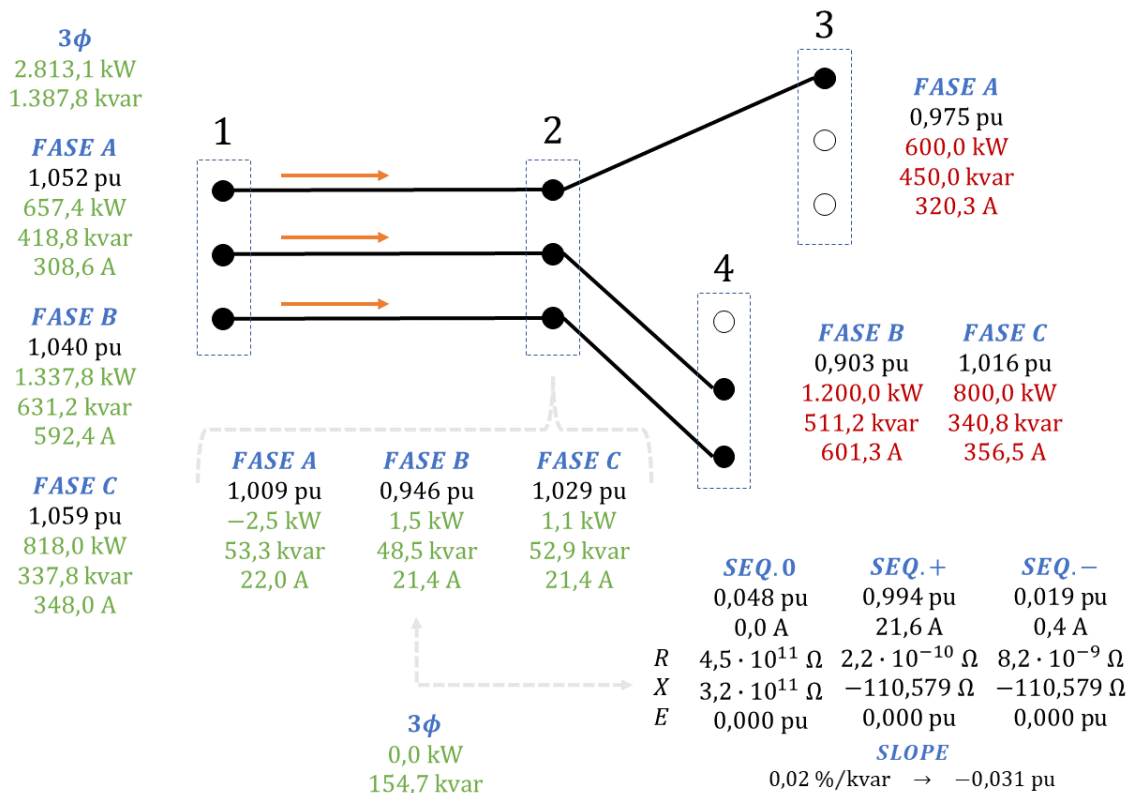


Figura 5.15: Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 5)

Barramento	Tensão, Magnitude [pu] / Ângulo [°]				Injeção de Potência, Ativa [kW] / Reativa [kvar]			
	A	B	C	+	A	B	C	3φ
1	1,0516	1,0395	1,0591	1,0500	654,77	1.339,93	818,81	2.813,51
	30,69	-90,74	150,04	30,00	418,71	633,97	335,67	1.388,34
2	1,0096	0,9454	1,0293	0,9940	0,00	0,00	0,00	0,00
	31,11	-94,19	148,24	28,44	53,07	46,54	55,16	154,76
3	0,9752	-	-	-	-600,00	-	-	-600,00
	31,67	-	-	-	-450,00	-	-	-450,00
4	-	0,9026	1,0161	-	-	-1.200,00	-800,00	-2.000,00
	-	-94,80	147,45	-	-	-511,20	-340,80	-852,00

Barramento 1 · Tensão Interna Equilibrada
· Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva): 1,05∠30° pu

Barramento 2 · Impedância Interna Equilibrada (Sequência Zero Fechada, Y_g)
· Incapacidade de Gerar Potência Ativa (Trifásico)
· Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva, Slope): 1,025 pu;
0,02%/kvar

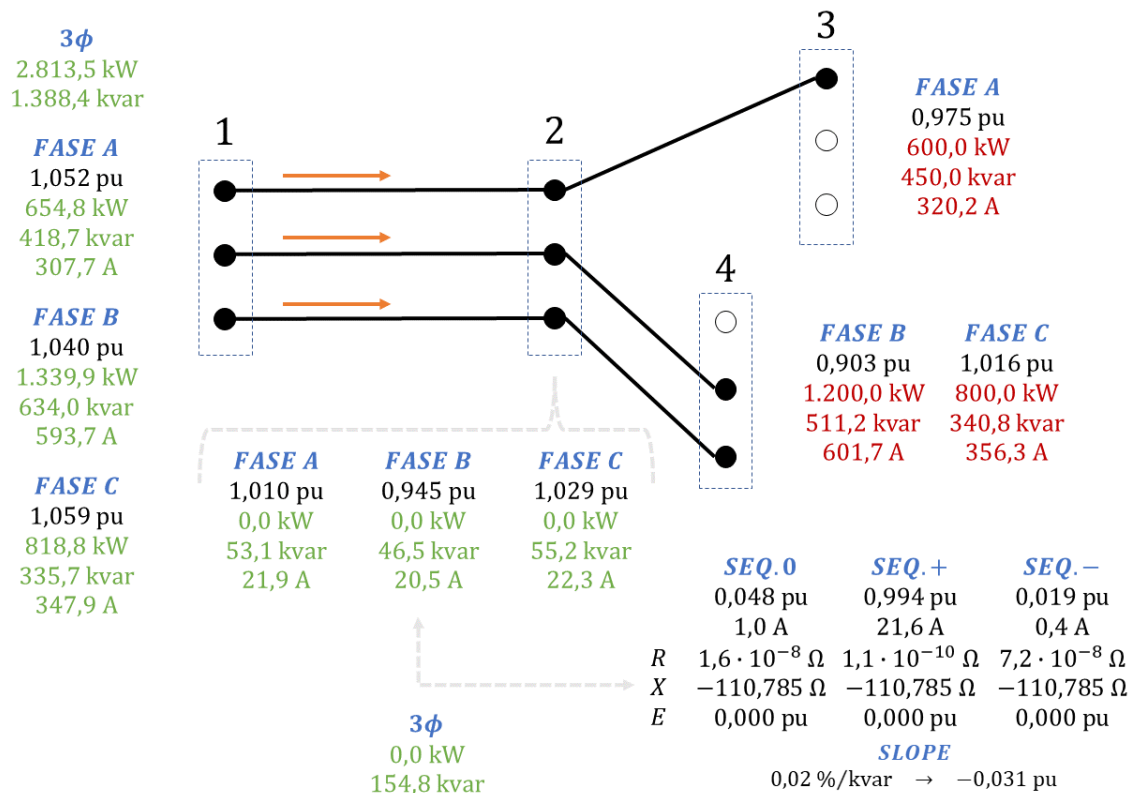


Figura 5.16: Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 6)

Barramento	Tensão, Magnitude [pu] / Ângulo [°]				Injeção de Potência, Ativa [kW] / Reativa [kvar]			
	A	B	C	+	A	B	C	3φ
1	1,0500 30,00	1,0500 -90,00	1,0500 150,00	1,0500 30,00	666,67 283,32	666,67 283,33	666,67 283,33	2.000,00 849,98
2	1,0160 28,86	1,0134 -91,30	1,0085 148,90	1,0127 28,82	-25,12 198,28	594,59 283,70	161,44 96,81	730,91 578,79
3	0,9819 29,41	-	-	-	-600,00 -450,00	-	-	-600,00 -450,00
4	-	0,9740 -91,79	0,9941 148,13	-	-	-1.200,00 -511,20	-800,00 -340,80	-2.000,00 -852,00

Barramento 1 · Tensão Interna Equilibrada
· Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva): 1,05∠30° pu

Barramento 2 · Injeção de Corrente Equilibrada (Controle Remoto, Linha 1-2)
· Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica, Remoto, Linha 1-2): 2.000 kW
· Controle de Injeção de Potência Reativa (Trifásica, Remoto, Linha 1-2): 850 kvar

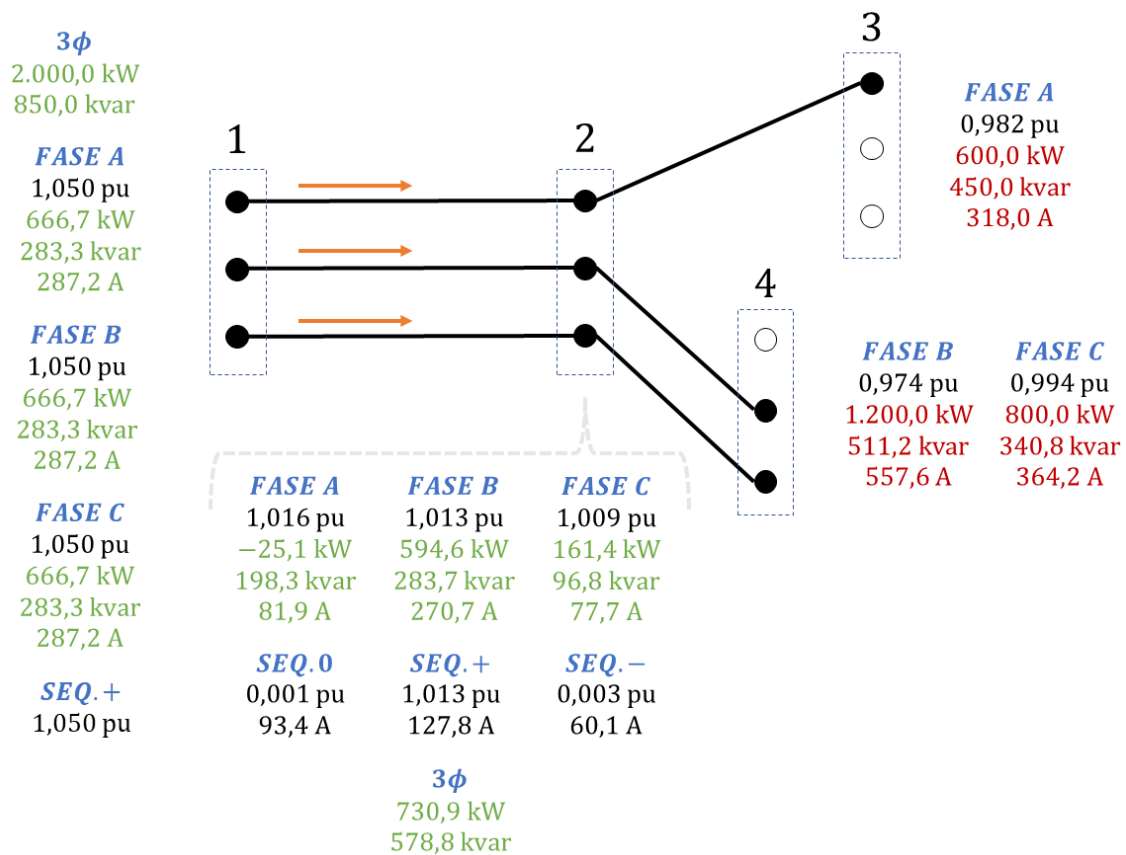


Figura 5.17: Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 7)

Barra-mento	Tensão, Magnitude [pu] / Ângulo [$^{\circ}$]				Injeção de Potência, Ativa [kW] / Reativa [$kvar$]			
	A	B	C	+	A	B	C	3ϕ
1	1,0500	1,0500	1,0500	1,0500	624,14	624,14	624,14	1.872,42
	30,00	-90,00	150,00	30,00	265,87	265,88	265,88	797,63
2	1,0182	1,0157	1,0111	1,0150	15,30	634,79	201,32	851,40
	28,94	-91,21	148,97	28,90	212,98	297,98	111,28	622,24
3	0,9841	-	-	-	-600,00	-	-	-600,00
	29,48	-	-	-	-450,00	-	-	-450,00
4	-	0,9763	0,9967	-	-	-1.200,00	-800,00	-2.000,00
	-	-91,70	148,21	-	-	-511,20	-340,80	-852,00

Barramento 1 · Tensão Interna Equilibrada
· Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva): $1,05\angle 30^{\circ} pu$

Barramento 2 · Injeção de Corrente Equilibrada (Controle Remoto, Linha 1–2)
· Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica, Fator de Potência, Remoto, Linha 1–2): 0,92
· Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva): $1,015 pu$

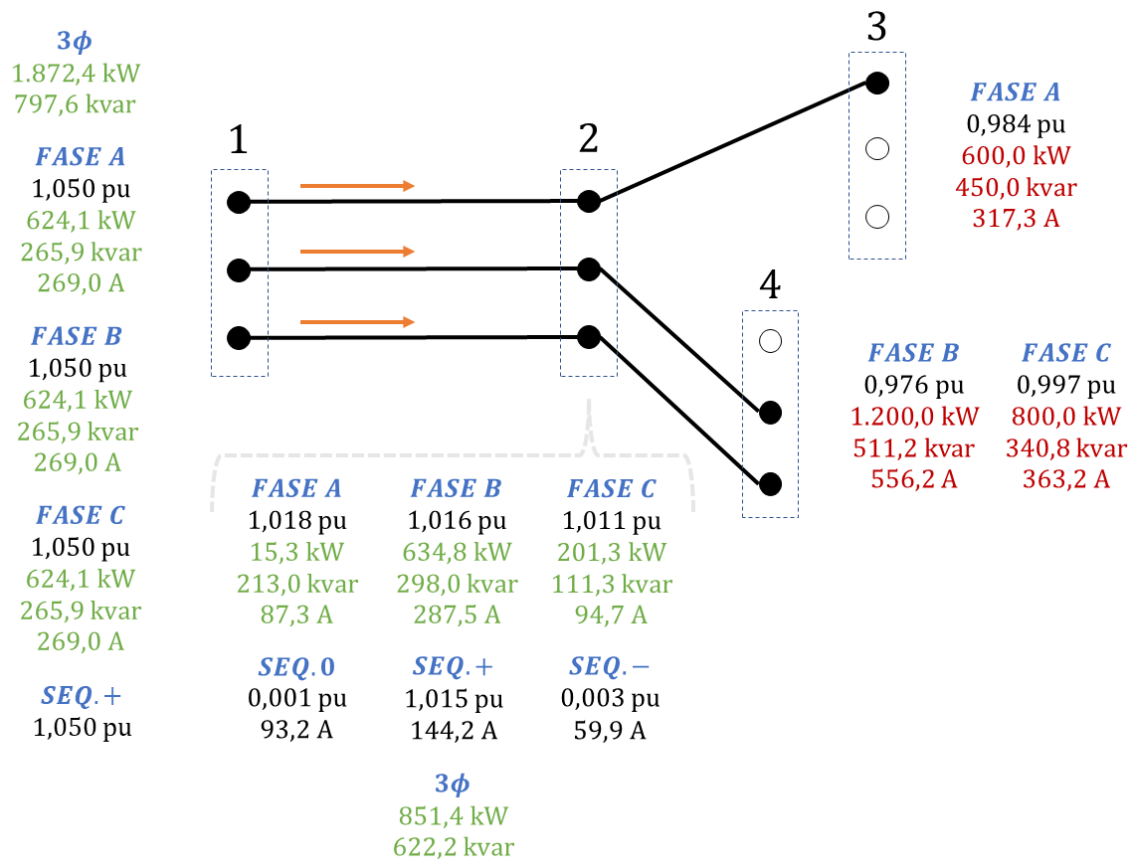


Figura 5.18: Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 8)

Barra- mento	Tensão, Magnitude [pu] / Ângulo [°]				Injeção de Potência, Ativa [kW] / Reativa [kvar]			
	A	B	C	+	A	B	C	3φ
	1	1,0882 32,17	1,0876 -88,93	1,1019 151,28	1,0925 31,51	809,82 835,69	1.322,63 663,17	1.211,89 456,37
2	1,0248 32,92	0,9989 -91,96	1,0534 149,02	1,0250 30,00	-127,45 -337,45	0,00 0,00	-369,14 -34,99	-496,59 -372,44
3	0,9909 33,46	-	-	-	-600,00 -450,00	-	-	-600,00 -450,00
4	-	0,9588 -92,49	1,0402 148,30	-	-	-1.200,00 -511,20	-800,00 -340,80	-2.000,00 -852,00

-
- Barramento 1 · Tensão Interna Equilibrada
· Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva, Remoto, Barramento 2): $1,025\angle 30^\circ pu$
-
- Barramento 2 · Nenhum, porém, há um dispositivo shunt passivo que inclui expoentes negativos
-

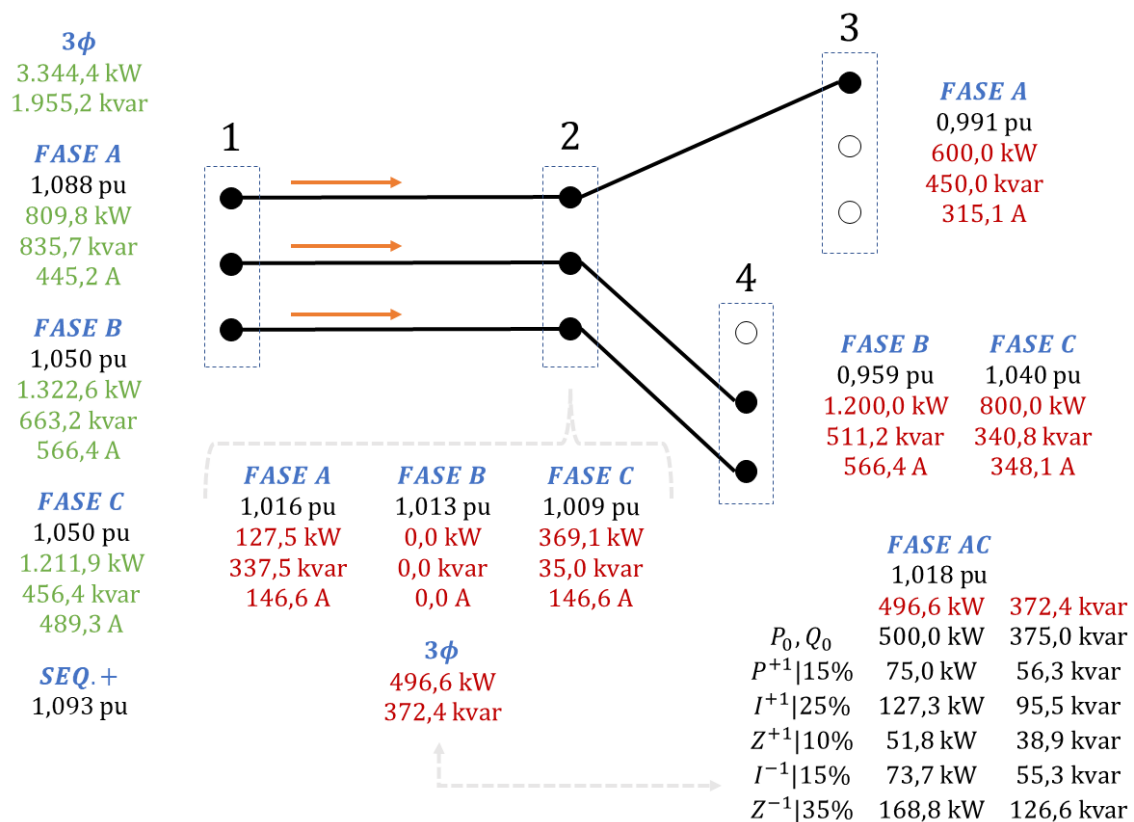


Figura 5.19: Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 9)

Barra- mento	Tensão, Magnitude [pu] / Ângulo [°]				Injeção de Potência, Ativa [kW] / Reativa [kvar]			
	A	B	C	+	A	B	C	3φ
	1	1,0937 32,21	1,0831 -89,09	1,1014 151,60	1,0927 31,58	836,85 607,41	1.507,01 788,90	1.015,86 503,60
2	1,0395 32,49	0,9802 -92,44	1,0572 149,82	1,0250 30,00	-168,46 -122,12	-156,04 -87,10	-184,17 -97,51	-508,67 -306,73
3	1,0062 33,01	-	-	-	-600,00 -450,00	-	-	-600,00 -450,00
4	-	0,9391 -93,00	1,0442 149,08	-	-	-1.200,00 -511,20	-800,00 -340,80	-2.000,00 -852,00

- Tensão Interna Equilibrada
- Barramento 1 · Controle de Tensão Complexa (Sequência Positiva, Remoto, Barramento 2): $1,025\angle 30^\circ$ pu
- Barramento 2 · Máquina de Indução (Modelo Quadrático de Carga Mecânica)

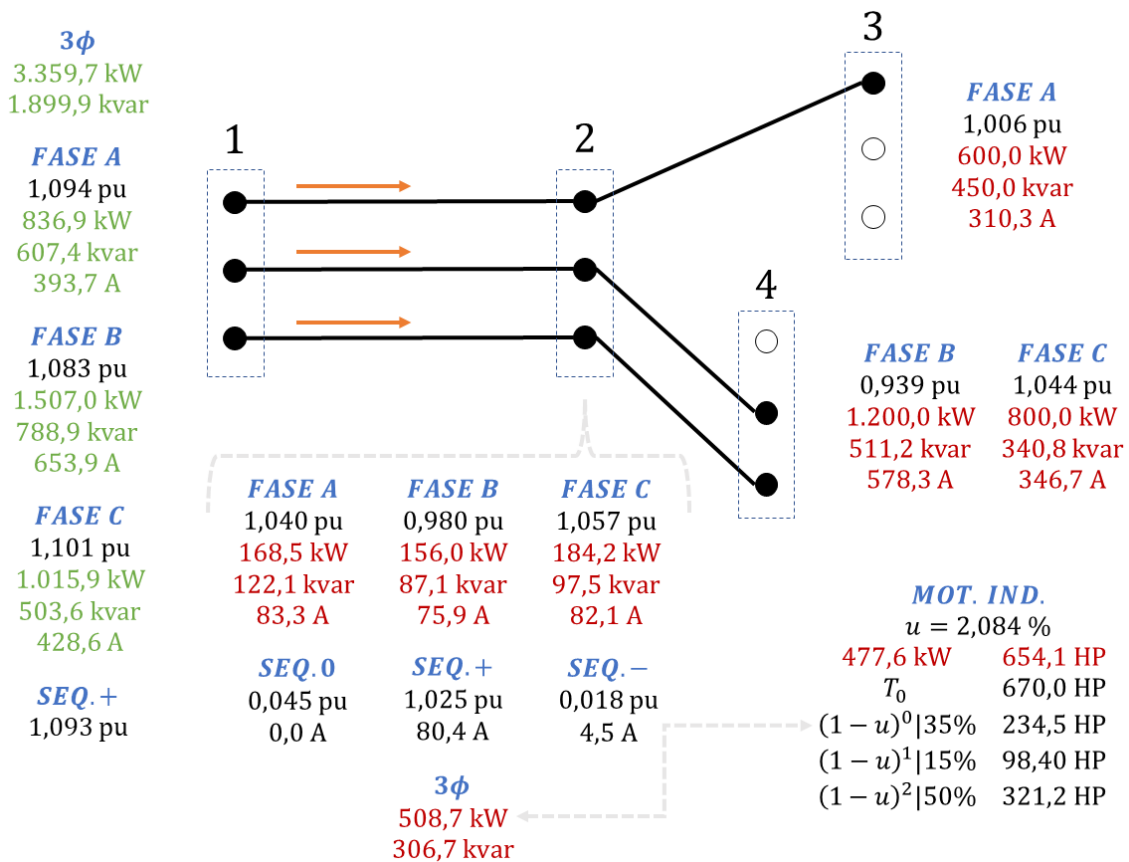


Figura 5.20: Ponto de Operação do Sistema Didático (Caso 10)

5.5 *IEEE 13-Node Test Feeder* (Modificado)

Algumas das condições operativas não-usuais, que foram exploradas anteriormente no sistema didático, foram exploradas novamente em um sistema de pequeno porte presente na literatura, o *IEEE 13-Node Test Feeder*. A Tabela 5.15 descreve as condições operativas dos dispositivos shunt ativos adicionados. Por sua vez, iniciando na Figura 5.21 e terminando na Figura 5.24, o ponto de operação do sistema modificado está apresentado, fase por fase. A título de comparação, o ponto de operação do sistema em sua condição original também foi incluído. Esses mesmos resultados estão apresentados em formato tabular nas Tabelas 5.16 e 5.17.

De uma forma geral, o sistema *IEEE 13-Node Test Feeder* é um alimentador constituído por um tronco principal através das linhas 650–632 e 632–671. No ponto de operação original, cerca de 3.971,1 kVA, a um fator de potência de 0,9008, estão sendo fornecidos pela subestação da concessionária (Barramento 650). Por sua vez, do Barramento 632 em direção ao Barramento 671, cerca de 2.864,7 kVA estão sendo distribuídos a um fator de potência de 0,9416. As modificações nesse sistema inserem três dispositivos shunt ativos que utilizam o Barramento 671 como ponto de acesso ao tronco principal. Em conjunto, esses dispositivos sustentarão na Linha 632–671 uma circulação de corrente equilibrada e uma distribuição de potência ativa de 500 kW (ambos tendo o Barramento 632 como ponto de medição), enquanto mantém uma magnitude de tensão de sequência positiva de 1,050 pu no Barramento 671. Os fatores de participação de geração de potência ativa entre eles foram especificados em 14,3%, 57,1% e 28,6%. Além disso, um deles é monofásico (Fase A) e sua injeção segue um fator de potência de 0,92. Outro é trifásico e apresenta uma injeção de corrente equilibrada. Sobre o terceiro, não há comentários adicionais a serem realizados porque, em última análise, foram os seus graus de liberdade que foram cedidos para a realização dos controles sobre a Linha 632–671.

Se originalmente a subestação da concessionária fornece 3.577,2 kW para o alimentador, dentre os quais 2.697,3 kW são distribuídos pela Linha 632–671, é possível estimar *a priori* que os três dispositivos shunt ativos devem gerar cerca de 2.197,3 kW em conjunto para sustentar um fluxo de 500,0 kW nessa mesma Linha 632–671. De fato, mesmo essa estimativa grosseira (por ignorar tanto a alteração nas perdas de potência ativa quanto a alteração no consumo de potência ativa pelas cargas que não são do tipo potência constante), está apenas 0,50% distante do valor efetivamente encontrado, 2.208,9 kW, indicando que o ponto de operação obtido para o caso modificado é coerente em relação ao ponto de operação original. Além disso, não existem contrassensos nas injeções de potência, por fase, dos dispositivos shunt ativos. Esses tipos de teste de sanidade podem ser interessantes porque, para a maioria dos modos de controle não-usuais que podem ser impostos pelos dispositivos

Tabela 5.15: Dispositivos shunt ativos adicionados ao *IEEE 13-Node Test Feeder*

Barramento 652	<ul style="list-style-type: none"> · Monofásico (Fase A) · Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica, Fator de Participação): 25% da Injeção do Barramento 675 · Controle de Injeção de Potência Reativa (Trifásica, Fator de Potência): 0,92
Barramento 675	<ul style="list-style-type: none"> · Injeção de Corrente Equilibrada (Controle Remoto, Linha 632–671) · Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica, Remoto, Linha 632–671): 500 kW · Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva, Remoto, Barramento 671): 1,050 pu
Barramento 680	<ul style="list-style-type: none"> · Injeção de Corrente Equilibrada · Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica, Fator de Participação): 50% da Injeção do Barramento 675 · Controle de Injeção de Potência Reativa (Trifásica, Fator de Participação): 50% da Injeção do Barramento 675

Tabela 5.16: Pontos de Operação (*IEEE 13-Node Test Feeder*, Parte 1)

		Original				Modificado							
		Tensão		Injeção de Potência		Tensão		Injeção de Potência					
		[pu]	[°]	[kW]	[kvar]	[pu]	[°]	[kW]	[kvar]				
650	A	1,0000	-0,00	A	1.251,39	681,41	650	A	1,0000	-0,00	A	333,23	72,24
	B	1,0000	-120,00	B	977,34	373,38	B	1,0000	-120,00	B	625,22	188,25	
	C	1,0000	120,00	C	1.348,48	669,61	C	1,0000	120,00	C	375,11	197,84	
	+	1,0000	-0,00	3 ϕ	3.577,20	1.724,39	+	1,0000	0,00	3 ϕ	1.333,57	458,34	
652	A	0,9825	-5,24	A	-123,56	-83,02	652	A	1,0601	-0,42	A	-143,84	-96,65
	B	-	-	B	-	-	B	-	-	B	-	-	
	C	-	-	C	-	-	C	-	-	C	-	-	
	+	-	-	3 ϕ	-123,56	-83,02	+	-	-	3 ϕ	-143,84	-96,65	
											A	315,56	134,43
											B	-	-
											C	-	-
											3 ϕ	315,56	134,43
675	A	0,9835	-5,55	A	-485,00	3,46	675	A	1,0501	-0,67	A	-485,00	30,55
	B	1,0553	-122,52	B	-68,00	162,74	B	1,0386	-121,99	B	-68,00	155,74	
	C	0,9760	116,04	C	-290,00	-21,48	C	1,0699	119,15	C	-290,00	16,92	
	+	1,0047	-3,97	3 ϕ	-843,00	144,72	+	1,0528	-1,17	3 ϕ	-843,00	203,21	
											A	381,57	250,98
											B	145,45	57,20
											C	735,23	234,65
											3 ϕ	1.262,25	542,82
680	A	0,9900	-5,29	A	0,00	0,00	680	A	1,0538	-0,41	A	209,73	92,42
	B	1,0529	-122,34	B	0,00	0,00	B	1,0390	-121,60	B	208,64	86,82	
	C	0,9779	116,03	C	0,00	0,00	C	1,0660	119,23	C	212,75	92,17	
	+	1,0067	-3,84	3 ϕ	0,00	0,00	+	1,0529	-0,93	3 ϕ	631,13	271,42	

Tabela 5.17: Pontos de Operação (*IEEE 13-Node Test Feeder*, Parte 2)

		Original				Modificado				
		Tensão		Injeção de Potência		Tensão		Injeção de Potência		
		[pu]	[°]	[kW]	[kvar]	[pu]	[°]	[kW]	[kvar]	
611	A	-	-	A	-	-	A	-	-	
	B	-	-	B	-	-	B	-	-	
	C	0,9739	115,78	C	-165,57	16,94	C	1,0594	118,72	
	+	-	-	3 ϕ	-165,57	16,94	+	-	-	
632	A	1,0210	-2,49	A	0,00	0,00	632	A	1,0526	-0,21
	B	1,0420	-121,72	B	0,00	0,00	B	1,0339	-121,46	
	C	1,0175	117,83	C	0,00	0,00	C	1,0608	119,26	
	+	1,0268	-2,12	3 ϕ	0,00	0,00	+	1,0491	-0,80	
633	A	1,0180	-2,55	A	0,00	0,00	633	A	1,0497	-0,27
	B	1,0401	-121,77	B	0,00	0,00	B	1,0320	-121,50	
	C	1,0149	117,83	C	0,00	0,00	C	1,0583	119,25	
	+	1,0243	-2,16	3 ϕ	0,00	0,00	+	1,0466	-0,83	
634	A	0,9940	-3,23	A	-160,00	-110,00	634	A	1,0265	-0,90
	B	1,0218	-122,22	B	-120,00	-90,00	B	1,0134	-121,97	
	C	0,9961	117,35	C	-120,00	-90,00	C	1,0402	118,81	
	+	1,0039	-2,70	3 ϕ	-400,00	-290,00	+	1,0267	-1,35	
645	A	-	-	A	-	-	645	A	-	-
	B	1,0328	-121,90	B	-170,00	-125,00	B	1,0247	-121,64	
	C	1,0155	117,86	C	0,00	0,00	C	1,0587	119,28	
	+	-	-	3 ϕ	-170,00	-125,00	+	-	-	
646	A	-	-	A	-	-	646	A	-	-
	B	1,0311	-121,98	B	-161,49	-0,56	B	1,0230	-121,72	
	C	1,0135	117,90	C	-79,18	-137,56	C	1,0566	119,33	
	+	-	-	3 ϕ	-240,67	-138,12	+	-	-	
671	A	0,9900	-5,29	A	-383,84	-206,73	671	A	1,0505	-0,57
	B	1,0529	-122,34	B	-396,54	-240,35	B	1,0368	-121,81	
	C	0,9779	116,03	C	-374,62	-212,91	C	1,0628	119,04	
	+	1,0067	-3,84	3 ϕ	-1.155,00	-660,00	+	1,0500	-1,11	
684	A	0,9881	-5,32	A	0,00	0,00	684	A	1,0539	-0,47
	B	-	-	B	-	-	B	-	-	
	C	0,9759	115,92	C	0,00	0,00	C	1,0613	118,86	
	+	-	-	3 ϕ	0,00	0,00	+	-	-	
692	A	0,9900	-5,30	A	-42,84	-122,70	692	A	1,0505	-0,57
	B	1,0529	-122,34	B	0,00	0,00	B	1,0368	-121,81	
	C	0,9779	116,03	C	-125,54	-26,86	C	1,0628	119,04	
	+	1,0067	-3,84	3 ϕ	-168,38	-149,56	+	1,0500	-1,11	

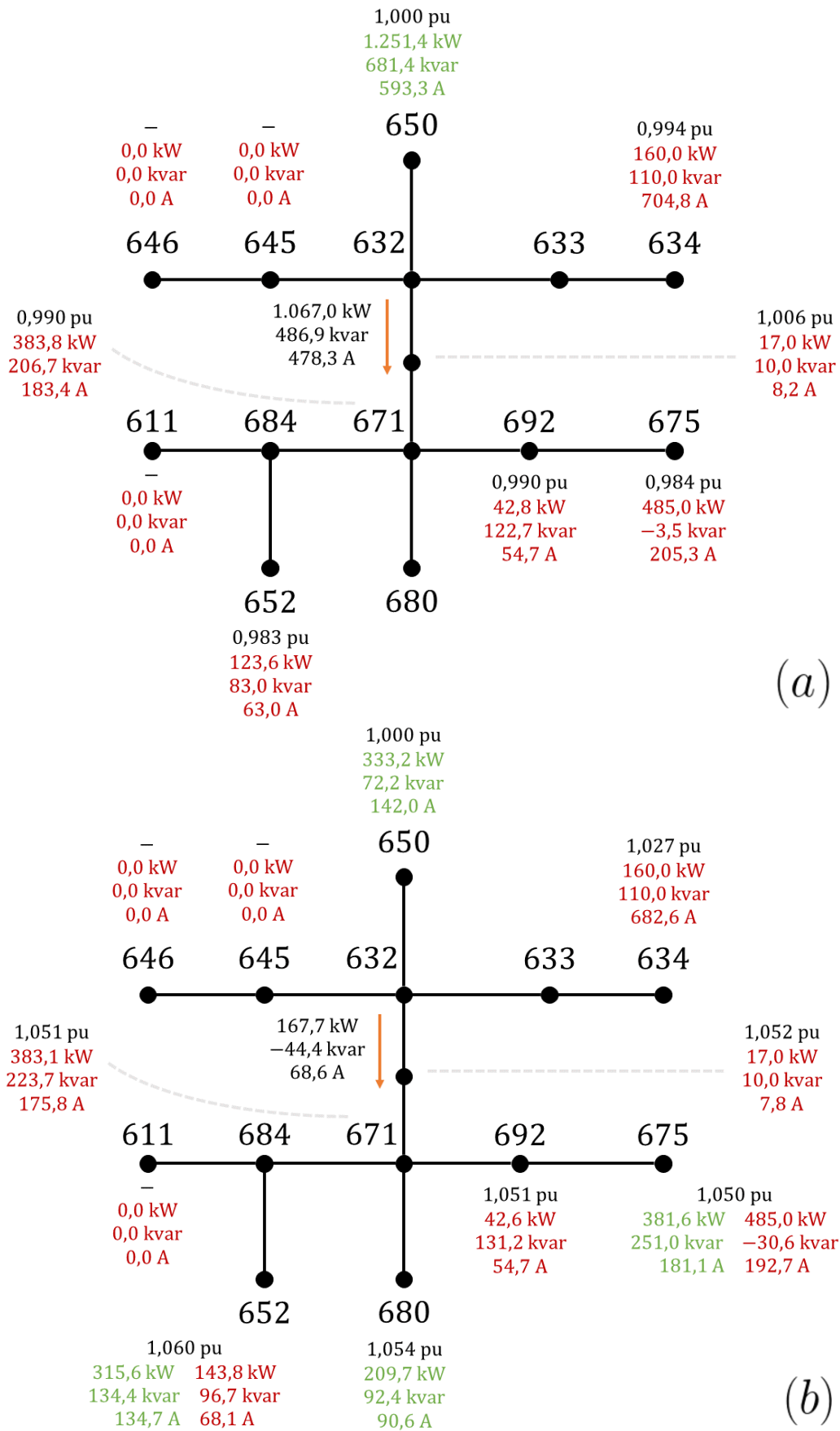


Figura 5.21: Ponto de Operação do *IEEE 13-Node Test Feeder* (Fase A): (a) Original; (b) Modificado

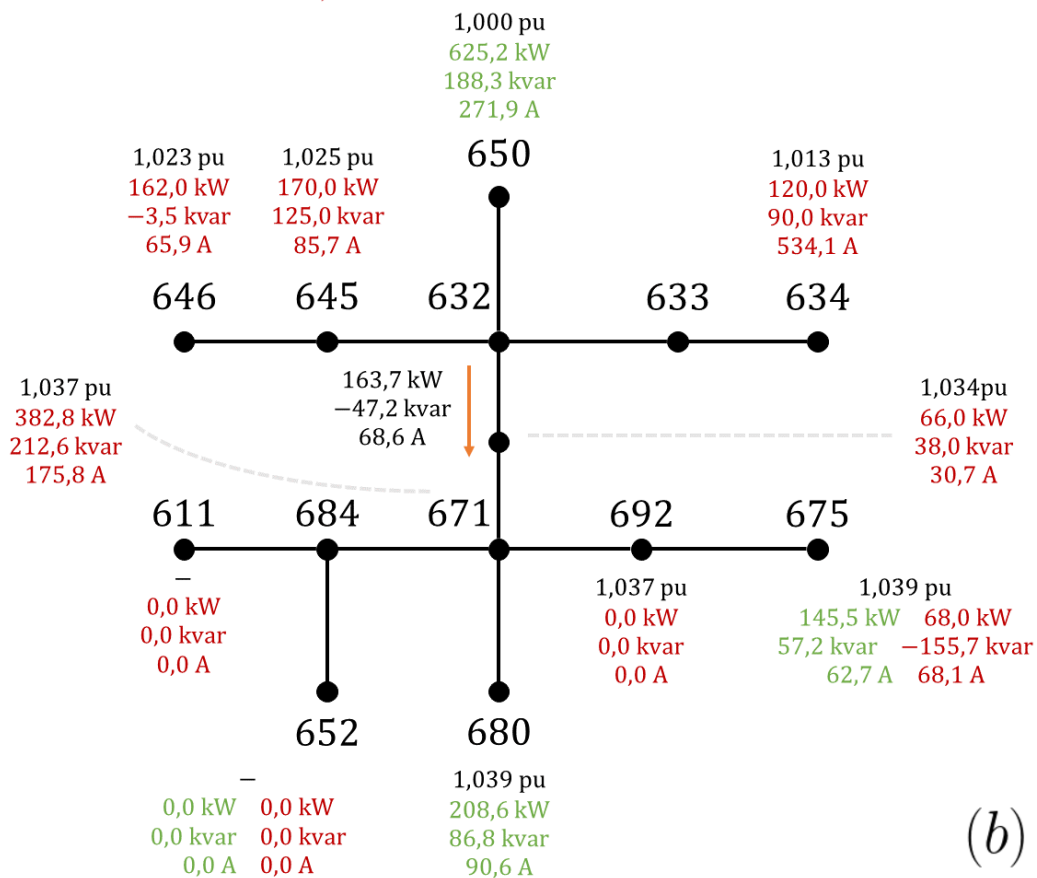
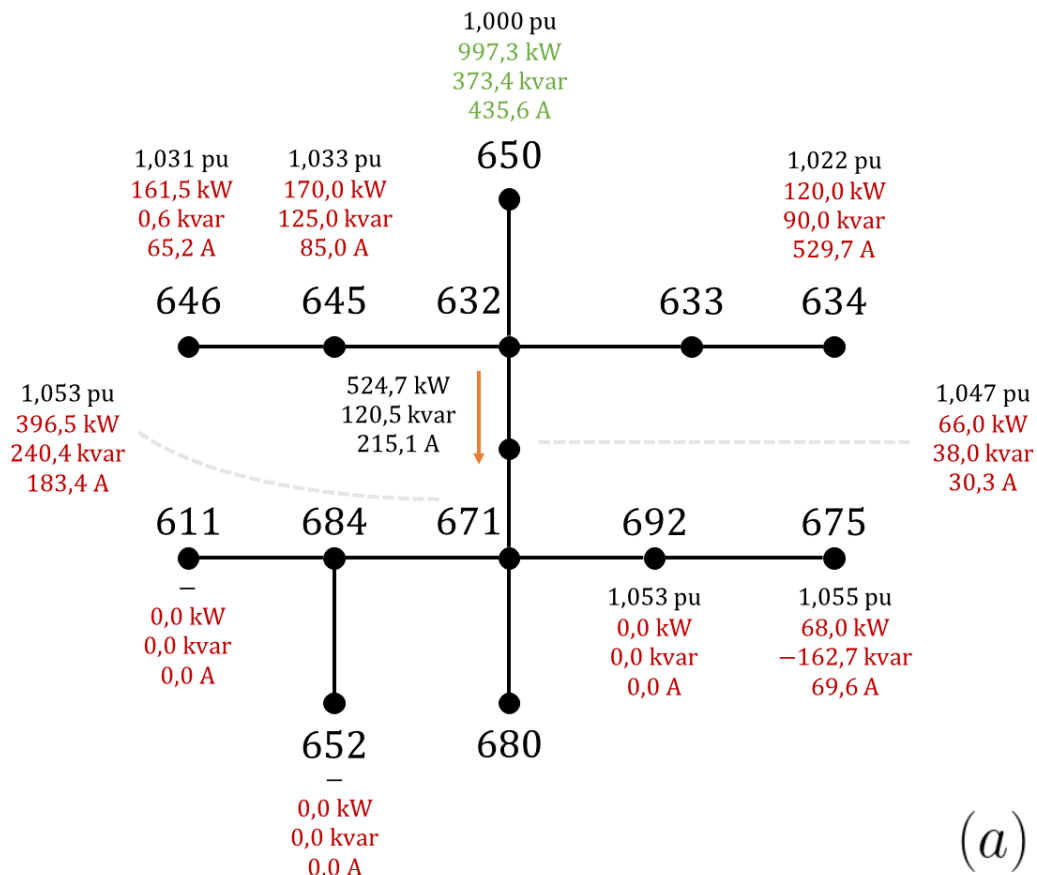


Figura 5.22: Ponto de Operação do *IEEE 13-Node Test Feeder* (Fase B): (a) Original; (b) Modificado

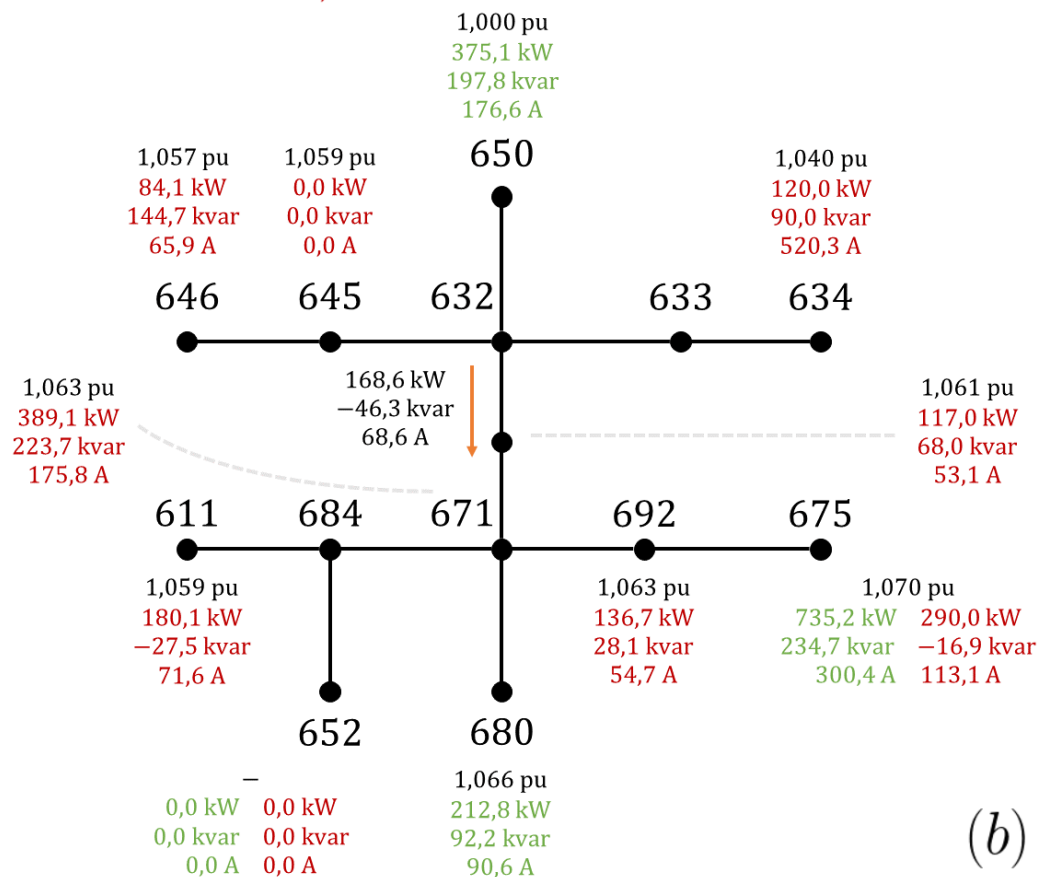
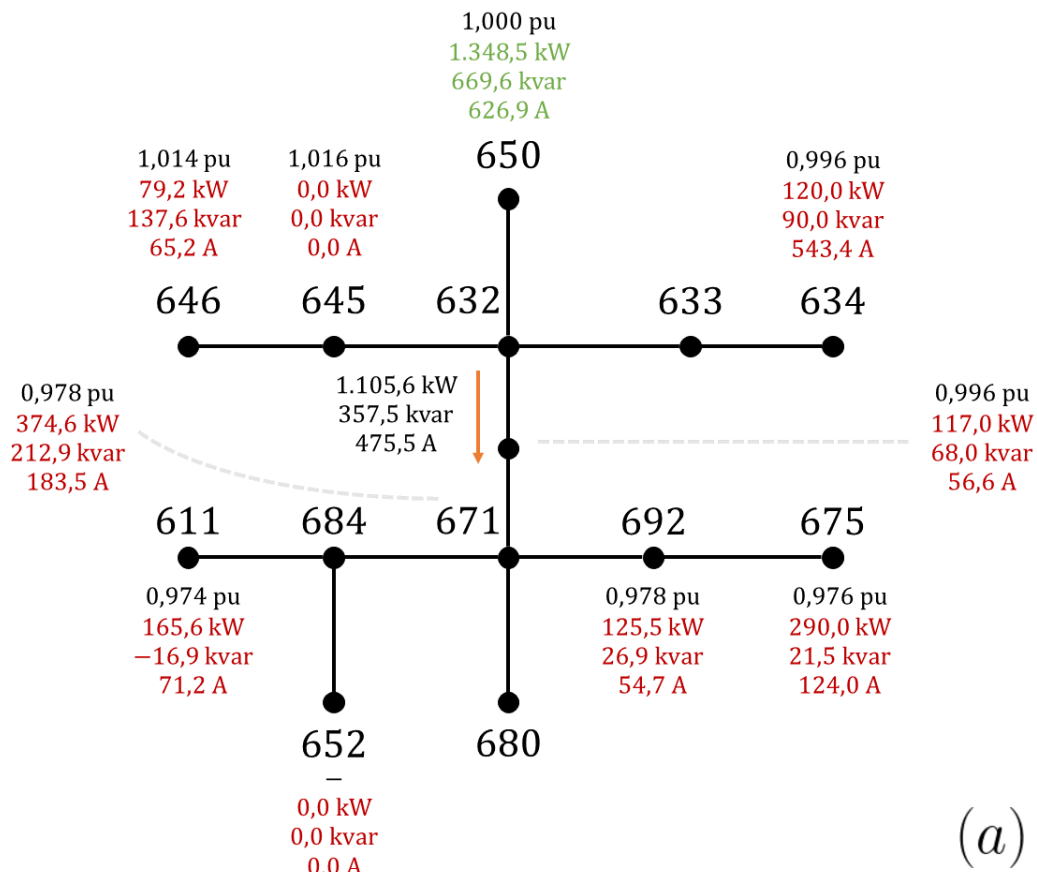


Figura 5.23: Ponto de Operação do *IEEE 13-Node Test Feeder* (Fase C): (a) Original; (b) Modificado

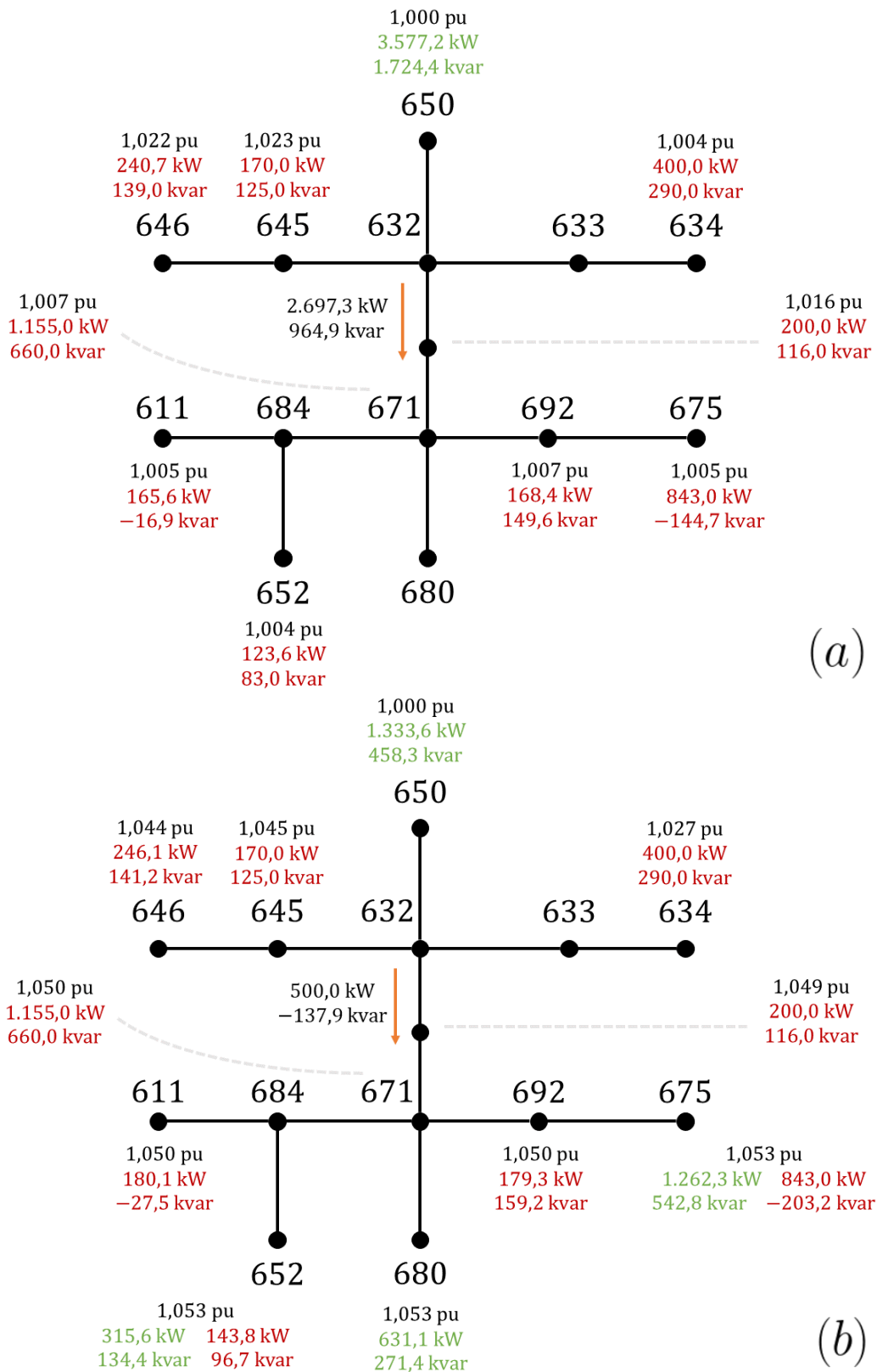


Figura 5.24: Ponto de Operação do *IEEE 13-Node Test Feeder* (Tensões de Sequência Positiva e Fluxos de Potência Trifásicos): (a) Original; (b) Modificado

shunt ativos, se não em todos, a existência de uma controlabilidade satisfatória não é óbvia. No mínimo, depende tanto das distâncias elétricas relativas entre os dispositivos envolvidos quanto dos próprios valores assumidos pelas grandezas elétricas controladas. Portanto, reconhecer *a priori* se as condições operativas impostas são, de fato, razoáveis pode não ser uma tarefa trivial. Por exemplo, abordando especificamente o caso *IEEE 13-Node Test Feeder Modificado*, foram impostos controles de magnitude tensão remotos, fatores de participação de geração entre múltiplos dispositivos shunt, além de dispositivos shunt controlando grandezas elétricas que circulam em dispositivos série.

5.6 *IEEE North American Low Voltage Test System (Modificado)*

Sem compromisso em retratar uma situação realista, a modelagem de dispositivos shunt ativos também foi explorada em um sistema de médio porte, o *IEEE North American Low Voltage Test System*. Conforme a Figura 5.25, 20 SVCs trifásicos conectados em delta e de tensão nominal 0,208 kV foram inseridos na rede em baixa tensão. Originalmente, duas condições operativas distintas tinham sido apresentadas para o sistema *North American*, operação normal e operação em contingência do sexto alimentador. O objetivo com a inserção dos compensadores estáticos é recriar o perfil de tensão do primeiro caso citado no segundo. Ou seja, com o sexto alimentador em contingência, os barramentos trifásicos que possuem SVCs associados terão suas magnitudes de tensão controladas nos respectivos valores aferidos em operação normal. Duas opções de controle distintas foram exploradas para os SVCs, imposição de ângulos de disparo sincronizados e imposição de ângulos de disparo independentes. Quando há uma sincronização dos ângulos de disparo entre as fases, as susceptâncias equivalentes na frequência fundamental podem ser mantidas equilibradas. Quando os disparos são realizados de forma independente, essas susceptâncias terminam desequilibradas. Sendo assim, em uma operação sincronizada, resta apenas um grau de liberdade para o controle de magnitudes de tensão, enquanto em uma operação independente, três graus de liberdade são preservados. Para o primeiro caso, as respectivas magnitudes de tensão de sequência positiva foram controladas, em contrapartida, para o segundo, as respectivas magnitudes de tensão fase-terra foram controladas, fase por fase.

As Tabelas 5.18 e 5.19 descrevem especificamente os modos de controle utilizados pelos dispositivos shunt ativos para a composição de ambos os casos. Por sua vez, as Tabelas 5.20, 5.21 e 5.22 apresentam resultados selecionados dos pontos de operação obtidos. É interessante notar que quase metade dos SVCs estariam operando na

região indutiva, possivelmente porque os pontos de instalação dos compensadores são eletricamente próximos e os barramentos que sofreram os maiores afundamentos de tensão com a perda do sexto alimentador (S6, S47 e S93) passaram a injetar, sozinhos, cerca de 2,5 Mvar no sistema. Além disso, é interessante notar que comparando as opções de controle para os ângulos de disparo, as injeções trifásicas de

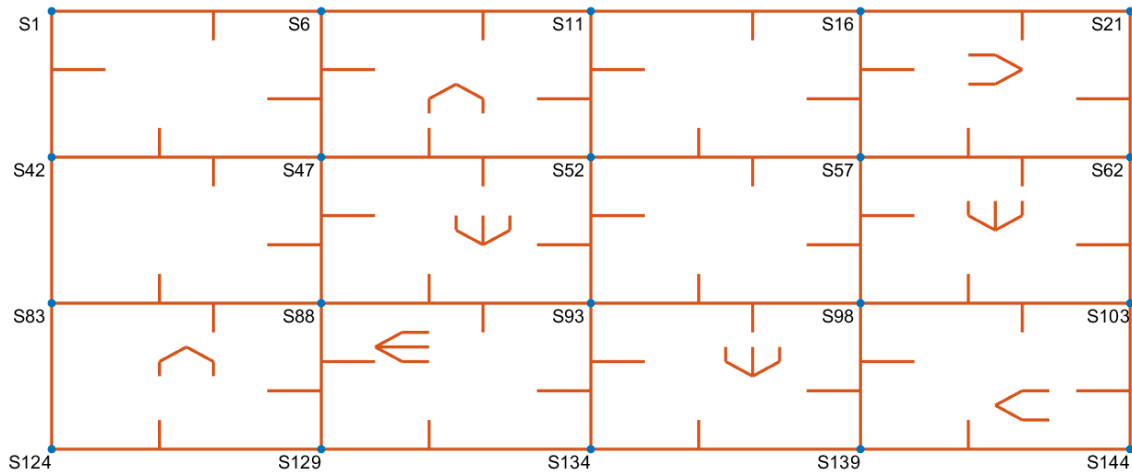


Figura 5.25: Dispositivos shunt ativos adicionados ao *IEEE North American Low Voltage Test System*: em azul, estão destacados os barramentos trifásicos que receberam adição de SVCs

Tabela 5.18: Dispositivos shunt ativos adicionados ao *IEEE North American Low Voltage Test System* (Susceptâncias Equilibradas)

Barramentos S1, S6, S11, S16, S21, S42, S47, S52, S57, S62, S83, S88, S93, S98, S103, S124, S129, S134, S139, S144;
<ul style="list-style-type: none"> · Impedância Interna Equilibrada (Sequência Zero Aberta, Δ) · Incapacidade de Gerar Potência Ativa (Trifásico) · Controle de Magnitude de Tensão (Sequência Positiva): valor verificado em operação normal

Tabela 5.19: Dispositivos shunt ativos adicionados ao *IEEE North American Low Voltage Test System* (Susceptâncias Desequilibradas)

Barramentos S1, S6, S11, S16, S21, S42, S47, S52, S57, S62, S83, S88, S93, S98, S103, S124, S129, S134, S139, S144;
<ul style="list-style-type: none"> · Sem injeção de corrente de sequência zero · Incapacidade de Gerar Potência Ativa (Trifásico) · Controle de Magnitude de Tensão (Fase A): valor verificado em operação normal · Controle de Magnitude de Tensão (Fase B): valor verificado em operação normal · Controle de Magnitude de Tensão (Fase C): valor verificado em operação normal

Tabela 5.20: Resultados Seleccionados (*IEEE North American Low Voltage Test System*, Magnitudes de Tensão, Parte 1)

Barramento Trifásico		Magnitude de Tensão [pu]			
		casos originais		casos modificados	
		<i>normal operation</i>	<i>feeder 6 out of service</i>	susceptâncias equilibradas	susceptâncias desequilibradas
S1	A	0,9947	0,9878	0,9947	0,9947
	B	0,9968	0,9899	0,9966	0,9968
	C	0,9975	0,9907	0,9977	0,9975
	+	0,9963	0,9894	0,9963	0,9963
S6	A	0,9977	0,9718	0,9948	0,9977
	B	0,9984	0,9748	0,9985	0,9984
	C	0,9995	0,9799	1,0023	0,9995
	+	0,9985	0,9755	0,9985	0,9985
S11	A	0,9994	0,9939	0,9994	0,9994
	B	0,9992	0,9936	0,9991	0,9992
	C	0,9997	0,9941	0,9998	0,9997
	+	0,9994	0,9939	0,9994	0,9994
S16	A	0,9968	0,9934	0,9969	0,9968
	B	0,9976	0,9940	0,9976	0,9976
	C	0,9981	0,9945	0,9981	0,9981
	+	0,9975	0,9940	0,9975	0,9975
S21	A	0,9945	0,9914	0,9946	0,9945
	B	0,9960	0,9928	0,9960	0,9960
	C	0,9970	0,9938	0,9970	0,9970
	+	0,9959	0,9927	0,9959	0,9958
S42	A	0,9960	0,9846	0,9953	0,9960
	B	0,9971	0,9862	0,9971	0,9971
	C	0,9989	0,9889	0,9996	0,9989
	+	0,9973	0,9866	0,9973	0,9973
S47	A	0,9901	0,9628	0,9870	0,9901
	B	0,9930	0,9688	0,9934	0,9930
	C	0,9949	0,9743	0,9976	0,9949
	+	0,9927	0,9686	0,9927	0,9927
S52	A	0,9918	0,9814	0,9914	0,9918
	B	0,9930	0,9832	0,9931	0,9930
	C	0,9947	0,9851	0,9950	0,9947
	+	0,9932	0,9832	0,9932	0,9932
S57	A	0,9910	0,9886	0,9912	0,9910
	B	0,9933	0,9906	0,9932	0,9933
	C	0,9943	0,9915	0,9942	0,9943
	+	0,9929	0,9902	0,9929	0,9929
S62	A	1,0003	0,9975	1,0003	1,0003
	B	1,0011	0,9982	1,0011	1,0011
	C	1,0020	0,9991	1,0020	1,0020
	+	1,0011	0,9983	1,0011	1,0011

Tabela 5.21: Resultados Seleccionados (*IEEE North American Low Voltage Test System*, Magnitudes de Tensão, Parte 2)

Barramento Trifásico		Magnitude de Tensão [pu]			
		casos originais		casos modificados	
		<i>normal operation</i>	<i>feeder 6 out of service</i>	susceptâncias equilibradas	susceptâncias desequilibradas
S83	A	0,9998	0,9865	0,9988	0,9998
	B	0,9997	0,9872	0,9999	0,9997
	C	1,0014	0,9901	1,0023	1,0014
	+	1,0003	0,9879	1,0003	1,0003
S88	A	0,9933	0,9875	0,9933	0,9933
	B	0,9945	0,9886	0,9944	0,9945
	C	0,9964	0,9904	0,9964	0,9964
	+	0,9947	0,9888	0,9947	0,9947
S93	A	0,9932	0,9698	0,9912	0,9932
	B	0,9941	0,9727	0,9944	0,9941
	C	0,9968	0,9777	0,9984	0,9968
	+	0,9947	0,9734	0,9947	0,9947
S98	A	0,9961	0,9862	0,9955	0,9961
	B	0,9967	0,9873	0,9966	0,9967
	C	0,9992	0,9908	0,9999	0,9992
	+	0,9973	0,9881	0,9973	0,9973
S103	A	1,0009	0,9998	1,0011	1,0009
	B	1,0012	0,9997	1,0011	1,0012
	C	1,0024	1,0008	1,0023	1,0024
	+	1,0015	1,0001	1,0015	1,0015
S124	A	1,0034	0,9985	1,0034	1,0034
	B	1,0037	0,9986	1,0036	1,0037
	C	1,0046	0,9996	1,0047	1,0046
	+	1,0039	0,9989	1,0039	1,0039
S129	A	0,9963	0,9930	0,9965	0,9963
	B	0,9977	0,9940	0,9975	0,9977
	C	0,9991	0,9953	0,9991	0,9991
	+	0,9977	0,9941	0,9977	0,9977
S134	A	0,9992	0,9849	0,9986	0,9992
	B	0,9981	0,9841	0,9980	0,9981
	C	1,0003	0,9877	1,0010	1,0003
	+	0,9992	0,9856	0,9992	0,9992
S139	A	0,9990	0,9941	0,9991	0,9990
	B	0,9991	0,9939	0,9990	0,9991
	C	1,0003	0,9951	1,0003	1,0003
	+	0,9995	0,9943	0,9995	0,9995
S144	A	0,9974	0,9956	0,9975	0,9974
	B	0,9970	0,9949	0,9969	0,9970
	C	0,9988	0,9966	0,9987	0,9988
	+	0,9977	0,9957	0,9977	0,9977

Tabela 5.22: Resultados Seleccionados (*IEEE North American Low Voltage Test System*, Bancos de Capacitores e Reatores Equivalentes)

Bar. Trif.	Capacidade Nominal dos Bancos de Capacitores ou Reatores Equivalentes [kvar]		Bar. Trif.	Capacidade Nominal dos Bancos de Capacitores ou Reatores Equivalentes [kvar]			
	susceptâncias equilibradas	susceptâncias desequilibradas		susceptâncias equilibradas	susceptâncias desequilibradas		
S1	AB	-47,62	-60,23	S83	AB	109,75	123,02
	BC	-47,62	-41,37		BC	109,75	100,67
	CA	-47,62	-42,35		CA	109,75	105,73
	3 ϕ	-142,86	-143,95		3 ϕ	329,24	329,41
S6	AB	198,04	231,26	S88	AB	-59,17	-79,77
	BC	198,04	182,14		BC	-59,17	-48,64
	CA	198,04	183,68		CA	-59,17	-50,70
	3 ϕ	594,11	597,08		3 ϕ	-177,52	-179,11
S11	AB	-35,13	-47,08	S93	AB	323,21	360,87
	BC	-35,13	-29,39		BC	323,21	299,22
	CA	-35,13	-30,05		CA	323,21	313,13
	3 ϕ	-105,38	-106,52		3 ϕ	969,63	973,22
S16	AB	8,53	7,22	S98	AB	101,82	112,46
	BC	8,53	9,55		BC	101,82	96,80
	CA	8,53	8,45		CA	101,82	96,30
	3 ϕ	25,59	25,22		3 ϕ	305,45	305,57
S21	AB	3,97	2,99	S103	AB	-35,68	-41,59
	BC	3,97	4,27		BC	-35,68	-31,24
	CA	3,97	3,91		CA	-35,68	-33,94
	3 ϕ	11,92	11,17		3 ϕ	-107,04	-106,77
S42	AB	24,80	22,90	S124	AB	-3,54	-6,38
	BC	24,80	24,85		BC	-3,54	-1,71
	CA	24,80	26,16		CA	-3,54	-2,42
	3 ϕ	74,39	73,91		3 ϕ	-10,63	-10,51
S47	AB	338,57	393,40	S129	AB	-32,84	-38,53
	BC	338,57	304,70		BC	-32,84	-28,97
	CA	338,57	322,11		CA	-32,84	-31,67
	3 ϕ	1.015,71	1.020,20		3 ϕ	-98,53	-99,16
S52	AB	47,14	37,55	S134	AB	103,47	108,37
	BC	47,14	47,93		BC	103,47	101,53
	CA	47,14	54,23		CA	103,47	100,60
	3 ϕ	141,41	139,70		3 ϕ	310,42	310,50
S57	AB	-34,41	-43,45	S139	AB	-4,34	-10,53
	BC	-34,41	-28,13		BC	-4,34	-0,49
	CA	-34,41	-31,52		CA	-4,34	-2,13
	3 ϕ	-103,24	-103,10		3 ϕ	-13,03	-13,15
S62	AB	10,34	10,03	S144	AB	-8,76	-9,77
	BC	10,34	10,37		BC	-8,76	-8,19
	CA	10,34	10,08		CA	-8,76	-8,74
	3 ϕ	31,03	30,48		3 ϕ	-26,29	-26,70

potência reativa obtidas são semelhantes. Contudo, em alguns barramentos específicos as diferenças entre fases podem ser consideráveis, por exemplo, no barramento S47.

5.7 *IEEE European Low Voltage Test Feeder* (Modificado)

Por fim, algumas condições operativas não-usuais foram novamente exploradas em um sistema presente na literatura, porém, dessa vez de grande porte, o *IEEE European Low Voltage Test Feeder*. Conforme a Figura 5.26, 66 máquinas síncronas idênticas, de 1 kVA e 0,416 kV, foram inseridas no alimentador. Suas impedâncias de sequência zero e negativa foram admitidas $(0 + j 0,0400) pu$ e $(0 + j 0,0254) pu$, respectivamente. No ponto de operação original, cerca de 62,38 kVA, a um fator de potência de 0,9519, estão sendo distribuídos pela Linha 1–2, localizada logo na saída da subestação da concessionária. Em conjunto, as máquinas síncronas adicionadas sustentarão uma redução de 50% no fluxo de potência ativa e um fator de potência de 0,9800 nessa mesma Linha 1–2 (ambos tendo o Barramento 1 como ponto de medição). Além disso, todas as máquinas estarão mantendo a exata mesma geração trifásica de potência e reativa.

A Tabela 5.23 descreve especificamente os modos de controle utilizados pelos dispositivos shunt ativos para a composição deste caso. Por sua vez, a Tabela 5.24 apresenta resultados selecionados, tanto para o sistema original quanto para o sistema modificado. De modo a satisfazer as condições operativas descritas no parágrafo anterior, foi obtido que cada uma das máquinas síncronas adicionadas ao alimentador deve estar gerando cerca de 0,4314 kW e 0,1958 kvar, totalizando 28,47 kW e 12,92 kvar. O fato dessa geração estar distribuída proporciona uma redução de aproximadamente 60% nas perdas de potência ativa ao longo do alimentador.

5.8 Desempenho Computacional

Uma análise de desempenho computacional rigorosa a respeito do método da incorporação holomórfica excede o escopo deste trabalho. De fato, é importante iniciar este subcapítulo ressaltando que a implementação de código realizada em ambiente MATLAB não seguiu as melhores práticas em termos de desempenho computacional para uma linguagem de programação interpretada. Inúmeros blocos de código foram escritos utilizando *for-loops* em detrimento de representações vetoriais e/ou matriciais (que fariam uso de rotinas efetivamente programadas em C ou FORTRAN), portanto, a menos que o intérprete do MATLAB tenha sido capaz de realizar com-

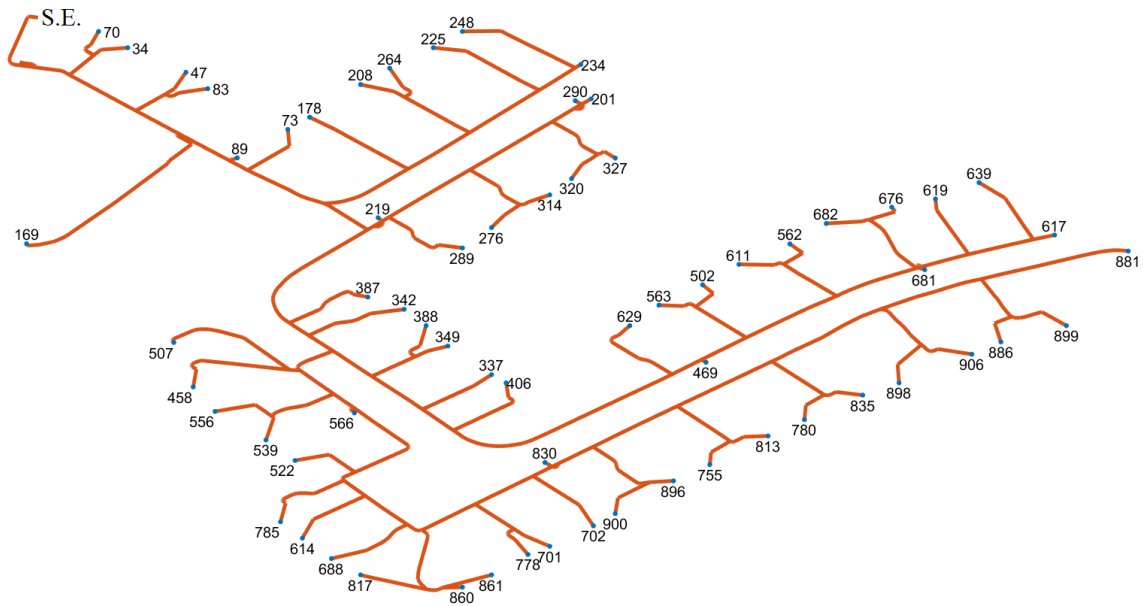


Figura 5.26: Dispositivos shunt ativos adicionados ao *IEEE European Low Voltage Test Feeder*: em azul, estão destacados os barramentos trifásicos que receberam adição de máquinas síncronas

Tabela 5.23: Dispositivos shunt ativos adicionados ao *IEEE European Low Voltage Test Feeder*

1 kVA, 0,416 kV, $R_0 = R_1 = R_2 = 0,00\%$, $X_0 = 4,00\%$, $X_1 = X_2 = 2,54\%$
Barramento 34;
<ul style="list-style-type: none"> · Tensão Interna Equilibrada · Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica, Remoto, Linha 1–2): 29,69 kW · Controle de Injeção de Potência Reativa (Trifásica, Fator de Potência, Remoto, Linha 1–2): 0,98
Barramentos 47, 70, 73, 83, 89, 169, 178, 201, 208, 219, 225, 234, 248, 264, 276, 289, 290, 314, 320, 327, 337, 342, 349, 387, 388, 406, 458, 469, 502, 507, 522, 539, 556, 562, 563, 566, 611, 614, 617, 619, 629, 639, 676, 681, 682, 688, 701, 702, 755, 778, 780, 785, 813, 817, 830, 835, 860, 861, 881, 886, 896, 898, 899, 900, 906;
<ul style="list-style-type: none"> · Tensão Interna Equilibrada · Controle de Injeção de Potência Ativa (Trifásica, Fator de Part.): 100% da Inj. do Bar. 34 · Controle de Injeção de Potência Reativa (Trifásica, Fator de Part.): 100% da Inj. do Bar. 34

Tabela 5.24: Resultados Seleccionados (*IEEE European Low Voltage Test Feeder*)

Original, Perda de Potência Ativa: 2,04 kW													
Subestação de Distribuição			Linha de Dist. 1-2			Tensão Complexa							
[kW]	[kvar]		[kW]	[kvar]		menor magnitude			maior desequilíbrio				
						[pu]	[°]		[pu]	[°]			
<i>A</i>	28,40	3,60	<i>A</i>	17,91	5,49	562	<i>A</i>	1,0231	-28,87	639	<i>A</i>	1,0282	-28,89
<i>B</i>	17,96	15,33	<i>B</i>	35,29	11,53		<i>B</i>	0,9993	-150,51		<i>B</i>	0,9945	-150,44
<i>C</i>	13,04	0,44	<i>C</i>	6,18	2,10		<i>C</i>	1,0609	89,45		<i>C</i>	1,0610	89,38
3ϕ	59,40	19,37	3ϕ	59,38	19,12		+	1,0277	-29,98		+	1,0278	-29,98

Modificado, Perda de Potência Ativa: 0,81 kW Geração Máquinas Síncronas: 0,431423 kW e 0,195810 kvar													
Subestação de Distribuição			Linha de Dist. 1-2			Tensão Complexa							
[kW]	[kvar]		[kW]	[kvar]		menor magnitude			maior desequilíbrio				
						[pu]	[°]		[pu]	[°]			
<i>A</i>	14,32	-2,39	<i>A</i>	10,13	-0,19	562	<i>A</i>	1,0192	-29,58	562	<i>A</i>	1,0192	-29,58
<i>B</i>	11,52	8,07	<i>B</i>	18,32	0,08		<i>B</i>	1,0313	-151,02		<i>B</i>	1,0313	-151,02
<i>C</i>	3,86	0,42	<i>C</i>	1,24	6,14		<i>C</i>	1,0604	90,54		<i>C</i>	1,0604	90,54
3ϕ	29,70	6,10	3ϕ	29,69	6,03		+	1,0369	-30,02		+	1,0369	-30,02

pilações *just-in-time* nesses blocos de código, existe uma parcela de custo computacional, possivelmente não desprezível, que poderia ter sido evitada. De qualquer modo, alguns aspectos pertinentes para este tópico estão brevemente discutidos a seguir, em um primeiro momento de forma qualitativa e posteriormente de forma quantitativa.

Conforme exemplificado no Capítulo 4, especificamente nas Tabelas 4.1 e 4.2, os coeficientes das séries de Taylor de ordem superior à zero são calculados através da solução de sucessivos sistemas lineares de forma $A \cdot x[n] = b$, onde $x[n]$ é um vetor coluna que representa os n -ésimos coeficientes das séries de Taylor. A matriz A depende somente de parâmetros conhecidos *a priori* e dos coeficientes de ordem zero, $x[0]$. Por consequência, é mantida constante independentemente do vetor $x[n]$ a ser calculado, podendo ser triangularizada uma única vez. Apenas o vetor coluna b deve ser atualizado para todo n e o seu custo computacional é dominado pela realização de manipulações que se assemelham à convoluções discretas dependentes dos coeficientes de ordem $n - 1$ e inferiores. Conseqüentemente, o número de operações necessárias para o cálculo de b aumenta a medida que n aumenta. E pela própria natureza do processo de convolução, não parece ser possível estabelecer relações triviais entre um dado vetor b e o seu anterior. Contudo, existem diversos algoritmos voltados para o cálculo de convoluções discretas (que reduzem a complexidade computacional em relação à uma implementação ingênua dos seus somatórios) e talvez os mesmos possam ser adaptados e empregados em algum nível. Nesse contexto,

é interessante pontuar o fato, amplamente documentado, que convoluções podem ser problemáticas sob o ponto de vista da estabilidade numérica caso compreendam termos de ordem de grandeza distintos. E essa exata situação se faz presente quando as séries de Taylor são divergentes.

Ainda conforme discutido no Capítulo 4, o cálculo dos respectivos aproximantes de Padé sucedem o cálculo das séries de Taylor. Na verdade, em tese, se as séries de Taylor obtidas forem de rápida convergência, por sorte, pode ser possível recuperar a solução do problema do fluxo de potência em $s = 1$ somente utilizando as mesmas. De qualquer forma, como regra geral, aproximantes de Padé apresentam uma taxa de convergência superior em relação às séries de Taylor, portanto, não há inconvenientes em admitir que os mesmos sempre serão necessários. Existem diversos algoritmos que se propõem a calcular essa classe de aproximante e alguns deles apresentam uma natureza recursiva [55]. Algoritmos recursivos permitem que a condição de $s = 1$ seja avaliada em truncamentos intermediários das séries, sem impor um custo computacional adicional ao cálculo dos aproximantes. Por exemplo, supondo que tenha-se estipulado que o número máximo de coeficientes a serem obtidos para as séries de Taylor seja trinta. Com um algoritmo recursivo, ao invés de apenas calcular os aproximantes de Padé após obtenção de todos os trigésimos coeficientes das séries, pode-se iniciar e atualizar o processo de cálculo dos aproximantes a cada seis coeficientes e, de posse desses valores intermediários, avaliar a condição de $s = 1$. Evidentemente, assim que uma determinada tolerância seja atingida, todos os processos de cálculo podem ser abortados e a solução pode ser retornada, ainda que os trigésimos coeficientes das séries de Taylor ainda não tenham sido calculados.

Posto que uma análise rigorosa acerca do desempenho computacional da incorporação holomórfica proposta excede o escopo deste trabalho, optou-se por uma implementação ingênua para o cálculo das operações que se assemelham à convoluções (de fato, não foi buscado a aplicação de nenhum algoritmo específico) e optou-se por um algoritmo não-recursivo para o cálculo dos aproximantes de Padé (o algoritmo implementado costuma ser referido como método matricial). Além disso, computação paralela não foi explorada em nenhum nível (exceto em possíveis funções *built-in* do próprio MATLAB).

Finalmente, abordando o desempenho computacional do método da incorporação holomórfica de forma quantitativa, a Tabela 5.25 sumariza os tempos de execução aferidos nas simulações de alguns problemas de fluxo de potencia trifásicos que foram objeto de avaliação anteriormente neste capítulo. Conforme pontuado, também anteriormente neste capítulo, as séries de Taylor foram obtidas até os seus trigésimos coeficientes, permitindo a obtenção de aproximantes de Padé cujos polinômios apresentam ordem quinze. Contudo, verificou-se posteriormente que, para os casos sumarizados na Tabela 5.25, as séries de Taylor poderiam ter sido obtidas até os

seus duodécimos coeficientes e mesmo assim as soluções manteriam uma qualidade satisfatória. Por esse motivo, a Tabela 5.25 também sumariza os tempos de execução para essas novas simulações.

A incorporação holomórfica proposta foi idealizada de forma que o vetor coluna $x[n]$ seja constituído somente pelas partes reais e imaginárias dos coeficientes das séries de Taylor das tensões complexas de cada nodo que compõe o sistema trifásico. Desse modo, um sistema trifásico de N barramentos, e por consequência $3 \cdot N$ nodos, ocasiona sistemas lineares de dimensão $2 \cdot 3 \cdot N = 6 \cdot N$. Essas informações, bem como o número de dispositivos série e os números de dispositivos shunt ativos e passivos, também estão sumarizadas na Tabela 5.25.

A partir dos tempos de execução sumarizados, é interessante notar que para o cálculo das matrizes de admitância, conforme esperado, sistemas trifásicos constituídos por um maior número de dispositivos série apresentam um maior custo computacional, sem exceções. Em números relativos, nos sistemas *13 Nodes*, *Comprehensive* e *123 Nodes*, cada dispositivo série contribuiu com um valor entre 0,80 e 1,00 ms para o tempo de execução total. De forma surpreendente, nos sistemas *North American* e *European*, uma margem entre 2,80 e 3,65 ms foi encontrada.

Por sua vez, para o cálculo dos aproximantes de Padé, verificou-se duas tendências intuitivas e novamente sem exceções: sistemas trifásicos constituídos por um maior número de nodos apresentam um maior custo computacional (em números absolutos), bem como aproximantes de maior ordem apresentam um maior custo computacional (em números absolutos e relativos). De fato, quanto maior o número de nodos, mais aproximantes devem ser calculados (cada nodo está associado à uma tensão complexa, traduzida em uma função algébrica, representada por uma série de Taylor e por um aproximante de Padé). Além disso, quanto maior a ordem dos aproximantes diagonais calculados, maior a dimensão das matrizes e o número de operações nos somatórios que compõem o chamado método matricial. Em números relativos, excluindo os tempos de execução do *13 Nodes* que se mostraram *outliers*, em média, cada aproximante de Padé [15/15] demandou 0,38 ms para ser calculado enquanto cada aproximante de Padé [6/6] demandou 0,14 ms. A Figura 5.27 reinterpreta em forma gráfica os tempos de execução aferidos para o cálculo dos aproximantes de Padé.

Por fim, para o cálculo das séries de Taylor, um suposto contrassenso pôde ser observado: sistemas trifásicos constituídos por um maior número de nodos (e que, portanto, estabelecem sistemas lineares de maiores dimensões) não apresentam, necessariamente, um maior custo computacional. É possível que este resultado contraintuitivo possa ser explicado pela composição de duas razões. Primeiro, a matriz de coeficientes dos sistemas lineares é triangularizada uma única vez e, segundo, os blocos de código responsáveis pelo cálculo dos vetores colunas b podem

Tabela 5.25: Tempos de Execução da Incorporação Holomórfica Proposta

—	Sistemas Trifásicos <i>IEEE</i>							
	<i>13 Nodes</i>	<i>Compre- hensive</i>	<i>123 Nodes</i>	<i>North American</i>	<i>European</i>	<i>13 Nodes (Modif.)</i>	<i>North A. (Modif.)</i>	<i>European (Modif.)</i>
(1)	15	79	129	390	907	15	390	907
(2)	9	36	85	104	55	9	104	55
(3)	1	3	1	1	1	4	21	67
(4)	12	72	129	1.315	906	12	1.305	906
(5)	45	237	387	1.170	2.721	45	1.170	2.721
(6)	90	474	774	2.340	5.442	90	2.340	5.442
Séries de Taylor [30] & Aproximantes de Padé [15/15]								
(7)	10	71	104	4.786	2.533	11	4.721	2.546
(8)	14	23	19	42	77	12	48	89
(9)	395	513	482	532	581	509	928	1.024
(10)	39	83	135	492	1.037	34	457	1.039
Séries de Taylor [12] & Aproximantes de Padé [6/6]								
(7)	8	71	84	4.774	2.551	7	4.763	2.541
(8)	6	22	11	44	70	6	50	77
(9)	103	117	114	135	159	100	255	317
(10)	24	40	46	146	312	23	162	440

- (1) Número de Barramentos Trifásicos (4) Número de Dispositivos Série
(2) Número de Dispositivos Shunt Passivos (5) Número de Nodos
(3) Número de Dispositivos Shunt Ativos (6) Dimensão dos Sistemas Lineares
(7) Tempo de Cálculo da Matriz de Admitância (em milissegundos)
(8) Tempo de Cálculo das Séries de Taylor, $n = 0$ (em milissegundos)
(9) Tempo de Cálculo das Séries de Taylor, $n > 0$ (em milissegundos)
(10) Tempo de Cálculo dos Aproximantes de Padé (em milissegundos)

Hardware: Six-Core Processor @ 3.5 GHz, 2 x 4GB DDR3 @ 667 MHz

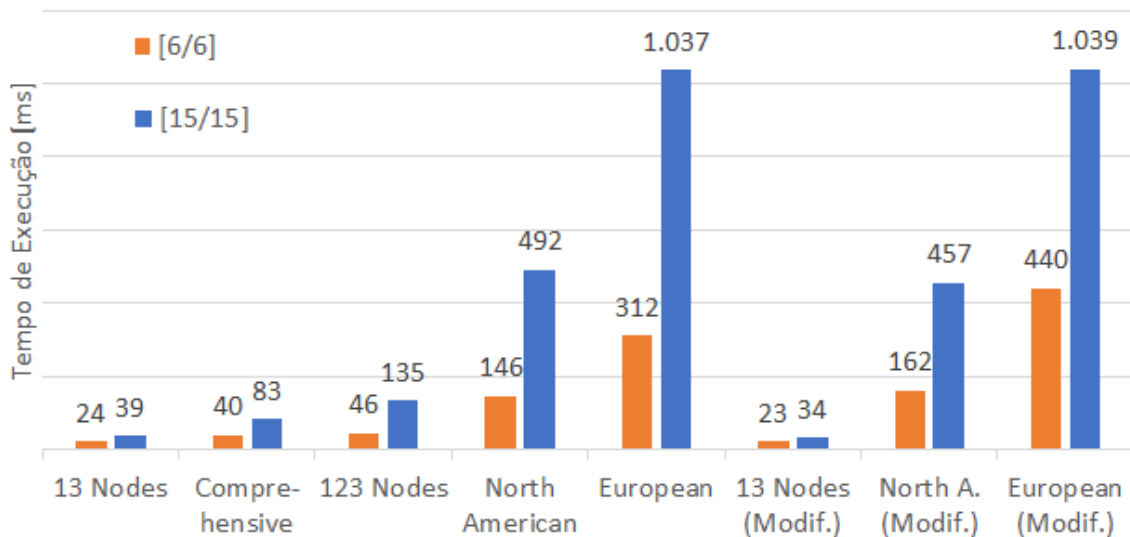


Figura 5.27: Tempos de Execução (Cálculo dos Aproximantes de Padé)

ter sido exageradamente penalizados pela utilização de *for-loops* em uma linguagem interpretada. Ambos os fatores contribuem para que o custo computacional referente ao cálculo das séries de Taylor seja amplamente dominado pelo cálculo das pseudo-convoluções necessárias para obtenção dos vetores b . E, como regra geral, no contexto da incorporação holomórfica proposta, dispositivos shunt passivos impõem pseudo-convoluções menos complexas do ponto de vista computacional quando comparados aos dispositivos shunt ativos. Além disso, barramentos trifásicos sem a presença de dispositivos shunt ativos ou passivos, sequer impõem pseudo-convoluções. Por consequência, o número de dispositivos shunt ativos, seguido do número de dispositivos shunt passivos, caracterizam melhor o tempo de execução esperado para um sistema trifásico do que efetivamente o número de nodos. De fato, comparando, por exemplo, as variações original e modificada do sistema *European*, o tempo de execução praticamente dobrou apenas com a adição de 66 máquinas síncronas. Outro exemplo, o sistema *13 Nodes* Modificado apresentou um tempo de execução maior que o sistema *123 Nodes*, mesmo sendo constituído por cerca de um décimo do número de barramentos.

Ainda no contexto do cálculo das séries de Taylor, verificou-se que um aumento no número de coeficientes a serem calculados, de [12] para [30], ocasionou uma multiplicação no tempo de execução por cerca de 4 vezes, em média, considerando todos os sistemas sumarizados na Tabela 5.25. Os tempos de execução aferidos para o cálculo das séries de Taylor estão rerepresentados em forma gráfica na Figura 5.28.

Conforme mencionado na Seção 5.1.2, optou-se por recriar o sistema-teste *Comprehensive* no OpenDSS e, portanto, o tempo de execução para resolução deste caso de fluxo de potência trifásico, neste programa de análise de sistemas de energia elétrica, pôde ser igualmente aferido. Por padrão, o OpenDSS emprega um método

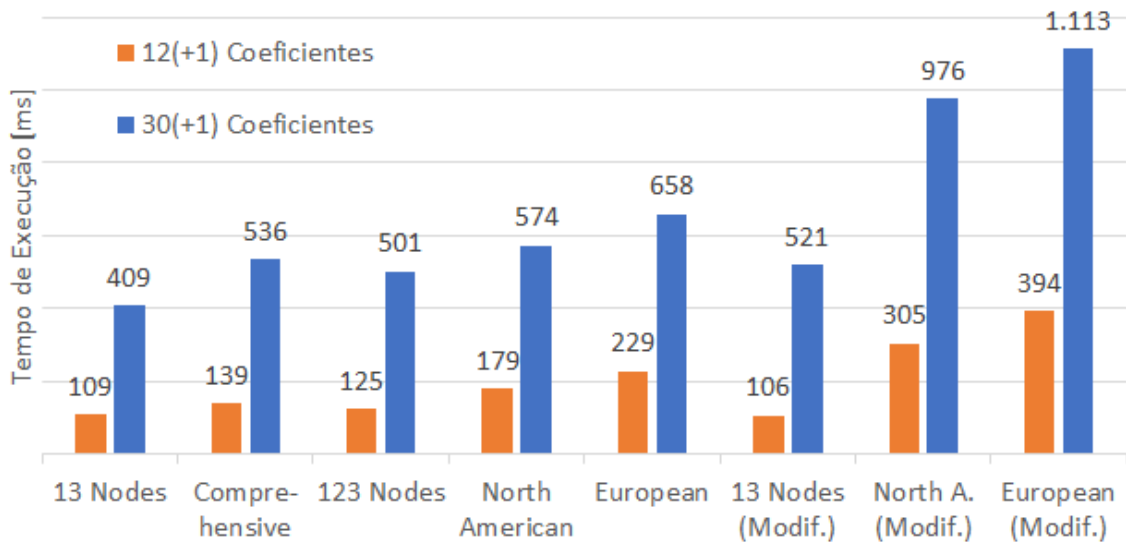


Figura 5.28: Tempos de Execução (Cálculo das Séries de Taylor)

iterativo *derivative-free* nas equações nodais de rede $I = I(V) = Y \cdot V$, onde $I(V)$ está sendo utilizado para indicar explicitamente que as injeções líquidas de corrente podem ser funções das tensões nodais. A fórmula de recorrência desse método para a n -ésima iteração consiste em $V_{n+1} = Y^{-1} \cdot I_n = Y^{-1} \cdot I(V_n)$. Ou seja, a partir de uma estimativa inicial para as tensões nodais, injeções líquidas de corrente são estimadas. De posse dessas injeções, uma nova estimativa para as tensões nodais pode ser obtida, e assim o processo iterativo continua até que a diferença entre V_{n+1} e V_n seja inferior a uma determinada tolerância. No mesmo *hardware* informado anteriormente, o tempo necessário para execução tão somente do comando *solve* manteve-se em cerca de 1,75 milissegundos. Sem uma inspeção cuidadosa ao código do programa não há como inferir o que exatamente está incluído nesse tempo de execução, porém, é razoável supor que essa medição não inclui o pré-processamento necessário para a leitura dos dados de entrada (existem comandos anteriores específicos para carregá-los na memória), nem nenhum tipo de pós-processamento envolvendo as tensões nodais obtidas como resultado (existem comandos posteriores específicos para, por exemplo, exportar em arquivos de texto .csv as próprias tensões nodais ou outros resultados secundários como as correntes circulantes e os fluxos de potência). A título de comparação, a implementação realizada para incorporação holomórfica proposta, somando desde o cálculo da matriz de admitância até o cálculo dos aproximantes de Padé, demandou 690 ms quando a ordem limite para o cálculo dos coeficientes das séries de Taylor estava arbitrada em trinta e 250 ms quando essa mesma ordem limite estava arbitrada em doze. Extrair desta comparação uma conclusão relevante a respeito das metodologias de solução empregadas não é uma tarefa trivial porque trata-se de uma contraposição entre uma implementação em linguagem interpretada de alto nível (MATLAB) e uma segunda implementação

em linguagem, que também pode ser considerada de alto nível, mas pelo menos é compilada (DELPHI), tornando-a naturalmente mais competitiva em termos de desempenho computacional. De fato, nesse contexto, uma diferença em ordens de magnitude não surpreenderia mesmo para metodologias de solução idênticas.

5.9 Considerações Finais

No início deste capítulo, pontuou-se que as constantes ω foram convenientemente escolhidas de modo que, na condição de $s = 0$, admitâncias equivalentes shunt tanto da matriz de admitância de barra quanto dos dispositivos shunt ativos são mantidas no sistema de equações, enquanto admitâncias equivalentes shunt dos dispositivos shunt passivos são anuladas. E, conforme discutido no Capítulo 4, o objetivo com a adição dessas constantes é deslocar prováveis polos das funções algébricas para tão distante da origem (o ponto de expansão das séries de Taylor) quanto possível. Como últimas simulações deste trabalho, exemplos numéricos que exploram diferentes valores para as constantes ω estão tratados a seguir.

O sistema *IEEE 4-Node Test Feeder*, cujo diagrama unifilar está apresentado na Figura 5.29, inclui um caso de operação em contingência caracterizado pela perda de um dos transformadores monofásicos que compõem o banco de transformadores trifásico (especificamente, perde-se o transformador monofásico associado à Fase *C*). Após eliminação dos Barramentos 2 e 3 por Redução de Kron, as matrizes de admitância equivalente série e shunt referentes ao Barramento 4 foram obtidas e estão apresentadas em (5.1) e (5.2). Desse modo, ter-se-á um sistema com particularidades análogas ao exemplo teórico discutido no Subcapítulo 4.1.

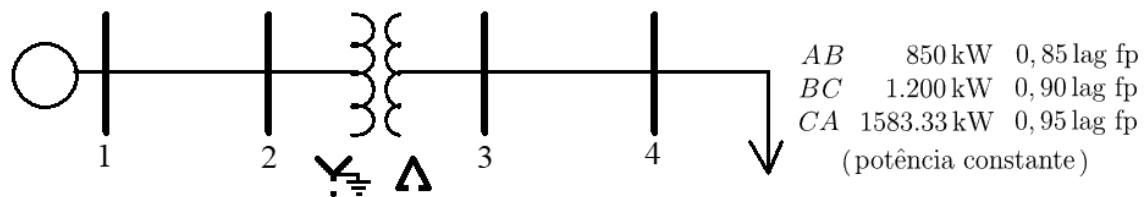


Figura 5.29: Diagrama Unifilar (*IEEE 4-Node Test Feeder*) [92]

$$\tilde{Y}_{44} = \begin{bmatrix} +79,99 - j 229,32 & +2,20 - j 39,71 & (-0,26 + j 4,27)e-05 \\ -77,79 + j 189,62 & +70,69 - j 180,33 & (+0,77 - j 1,56)e-06 \\ -2,20 + j 39,71 & -72,89 + j 220,04 & (+0,19 - j 4,11)e-05 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\hat{Y}_{44} = \begin{bmatrix} -33,81 + j 96,92 & -47,11 + j 149,18 & -1,27 + j 22,93 \\ +32,88 - j 80,14 & +15,03 - j 33,26 & -40,81 + j 104,11 \\ +0,93 - j 16,78 & +32,08 - j 115,92 & +42,08 - j 127,04 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

A Tabela 5.26 sumariza os primeiros sete coeficientes das séries de Taylor ob-

tidas para as tensões complexas das três fases do Barramento 4, admitindo $\omega = 0$ e $\omega = 1$. Claramente, as séries de Taylor associadas a imposição de constantes ω nulas são convergentes em $s = 1$ enquanto as associadas a constantes ω unitárias são divergentes. Nesse último contexto, mesmo coeficientes de sexta ordem já alcançam uma ordem de grandeza de 10^{+53} . Este resultado corrobora o entendimento de que os polos caracterizados por representarem uma condição de ressonância paralelo podem se tornar extremamente problemáticos para o problema do fluxo de potência trifásico, mesmo em condições operativas relativamente comuns. Portanto, uma generalização *ipsis litteris* da incorporação holomórfica canônica para o problema do fluxo de potência trifásico não parece ser possível. Como alternativa, a incorporação holomórfica canônica proposta neste trabalho adicionou constantes cujos valores utilizados aproximaram a incorporação canônica na direção da incorporação originalmente referida por mínima em [11].

Destaca-se que esses últimos resultados foram obtidos usando precisão estendida. Especificamente, foram empregados 120 dígitos em *variable precision arithmetic* com objetivo de tornar a obtenção das séries de Taylor menos suscetível à problemas de instabilidade numérica.

Por fim, é interessante notar que ao manter as admitâncias equivalentes shunt no problema do fluxo de potência descrito em $s = 0$, os coeficientes de ordem zero não assumem a solução na qual a tensão complexa do barramento trifásico de referência se propaga por toda a rede elétrica. De fato, quando constantes ω nulas foram impostas, os coeficientes de ordem zero das tensões de fase do Barramento 4 apresentaram a defasagem característica da conexão de transformador $Y_g - \Delta$, um atraso de trinta graus em relação ao barramento primário. Em contrapartida, quando constantes ω unitárias foram impostas, os coeficientes de ordem zero das tensões de fase do Barramento 4 apresentaram as mesmas tensões do barramento primário.

Nesse contexto, visto que linhas em alta tensão apresentam elevadas capacitâncias, a imposição de constantes ω nulas, ou ainda, a preservação das admitâncias equivalentes shunt no problema do fluxo de potência descrito em $s = 0$, pode produzir sobretensões severas nos coeficientes de ordem zero quando sistemas de transmissão compõem o objeto de análise. A título de ilustração, a Tabela 5.27 sumariza os primeiros sete coeficientes das séries de Taylor obtidas, admitindo $\omega = 0$ e $\omega = 1$, para as tensões complexas das três fases referentes ao oitavo barramento existente no Caso 1 do *WSCC 9-Bus System*. As séries de Taylor associadas a imposição de constantes ω nulas apresentam coeficientes de ordem zero cujas magnitude ultrapassam $1,28 pu$, enquanto as associadas a constantes ω unitárias sustentam as mesmas tensões do barramento trifásico de referência, $1,04 pu$ de magnitude. Diante deste resultado, pontua-se que pode ser interessante explorar valores distintos

para as constantes ω_k de acordo com os respectivos dispositivos série diretamente conectados aos barramentos. Por exemplo, associar a ausência de transformadores à imposição de $\omega_k = 1$ para o k -ésimo barramento trifásico. É possível ainda, explorar uma separação da matriz de admitância equivalente shunt em suas contribuições de linhas, transformadores e outros dispositivos efetivamente shunt. E, nesse caso, impor constantes ω_k diferentes para cada uma dessas contribuições em um mesmo barramento trifásico.

Tabela 5.26: Séries de Taylor do Barramento 4 (*IEEE 4-Node Test Feeder, Step-Down Open Grounded Wye – Delta*)

$\omega_k = \omega = 0$ para todo k :			
$n = 0$			
<i>A</i>	$1,0000\angle -30,00^\circ$	$+8,660e-01 - j5,000e-01$	-
<i>B</i>	$1,0000\angle -150,00^\circ$	$-8,660e-01 - j5,000e-01$	-
<i>C</i>	$1,0000\angle 90,00^\circ$	$+5,244e-08 + j1,000e+00$	-
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$			
<i>A</i>	$-2,572e-01 + j6,194e-03$	$-3,763e-02 + j4,115e-02$	$-1,012e-02 + j1,407e-02$
<i>B</i>	$+1,845e-02 + j9,730e-02$	$+1,725e-02 + j8,640e-03$	$+3,730e-03 + j2,734e-03$
<i>C</i>	$+2,301e-01 - j9,595e-02$	$+2,030e-02 - j4,761e-02$	$+6,254e-03 - j1,613e-02$
$n = 4$ $n = 5$ $n = 6$			
<i>A</i>	$-4,063e-03 + j6,588e-03$	$-1,918e-03 + j3,417e-03$	$-1,017e-03 + j1,923e-03$
<i>B</i>	$+1,466e-03 + j1,447e-03$	$+6,360e-04 + j7,584e-04$	$+3,048e-04 + j4,175e-04$
<i>C</i>	$+2,521e-03 - j7,709e-03$	$+1,236e-03 - j4,008e-03$	$+6,842e-04 - j2,248e-03$
$\omega_k = \omega = 1$ para todo k :			
$n = 0$			
<i>A</i>	$1,0000\angle 0,00^\circ$	$+1,000e+00 + j0,000e+00$	-
<i>B</i>	$1,0000\angle -120,00^\circ$	$-5,000e-01 - j8,660e-01$	-
<i>C</i>	$1,0000\angle 120,00^\circ$	$-5,000e-01 + j8,660e-01$	-
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$			
<i>A</i>	$-2,461e+00 + j1,728e+00$	$+3,144e+09 - j5,980e+09$	$-2,094e+18 + j1,317e+19$
<i>B</i>	$-3,146e+00 + j2,531e+00$	$+3,128e+09 - j5,991e+09$	$-2,058e+18 + j1,318e+19$
<i>C</i>	$-1,949e+07 + j1,125e+07$	$+2,925e+16 - j3,345e+16$	$-3,353e+25 + j8,105e+25$
$n = 4$ $n = 5$ $n = 6$			
<i>A</i>	$-4,368e+27 - j2,591e+28$	$+2,438e+37 + j4,554e+37$	$-7,391e+46 - j6,935e+46$
<i>B</i>	$-4,440e+27 - j2,591e+28$	$+2,451e+37 + j4,549e+37$	$-7,411e+46 - j6,918e+46$
<i>C</i>	$+1,167e+34 - j1,725e+35$	$+8,632e+43 + j3,287e+44$	$-3,667e+53 - j5,569e+53$

Tabela 5.27: Séries de Taylor do Barramento 8 (*WSCC 9-Bus System*, Caso 1)

$\omega_k = \omega = 0$ para todo k :			
$n = 0$			
<i>A</i>	$1,2836\angle -1,39^\circ$	$+1,283e+00 - j3,121e-02$	-
<i>B</i>	$1,2836\angle -121,39^\circ$	$-6,687e-01 - j1,096e+00$	-
<i>C</i>	$1,2836\angle 118,61^\circ$	$-6,146e-01 + j1,127e+00$	-
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$			
<i>A</i>	$-2,386e-01 + j7,023e-02$	$-7,579e-03 + j4,368e-03$	$-2,756e-03 + j7,324e-04$
<i>B</i>	$+1,470e-01 + j2,334e-01$	$+9,478e-03 + j2,215e-02$	$+3,603e-03 + j9,616e-03$
<i>C</i>	$+8,100e-02 - j2,252e-01$	$-1,759e-03 - j4,812e-03$	$-1,978e-03 - j1,287e-03$
$n = 4$ $n = 5$ $n = 6$			
<i>A</i>	$-1,023e-03 + j8,034e-05$	$-3,935e-04 - j4,160e-05$	$-1,610e-04 - j6,741e-05$
<i>B</i>	$+1,245e-03 + j4,574e-03$	$+5,260e-04 + j2,317e-03$	$+2,514e-04 + j1,246e-03$
<i>C</i>	$-1,435e-03 - j4,468e-05$	$-9,693e-04 + j2,240e-04$	$-6,117e-04 + j2,169e-04$
$\omega_k = \omega = 1$ para todo k :			
$n = 0$			
<i>A</i>	$1,0400\angle 0,00^\circ$	$+1,040e+00 + j1,561e-13$	-
<i>B</i>	$1,0400\angle -120,00^\circ$	$-5,200e-01 - j9,007e-01$	-
<i>C</i>	$1,0400\angle 120,00^\circ$	$-5,200e-01 + j9,007e-01$	-
$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$			
<i>A</i>	$-1,764e-03 + j5,291e-02$	$-4,658e-03 - j8,753e-03$	$-4,869e-04 + j8,893e-04$
<i>B</i>	$+4,744e-03 + j4,625e-02$	$+6,617e-03 + j2,421e-02$	$+1,280e-03 + j5,147e-03$
<i>C</i>	$-1,669e-02 - j5,566e-03$	$+1,641e-03 - j1,129e-03$	$-3,703e-03 + j9,710e-04$
$n = 4$ $n = 5$ $n = 6$			
<i>A</i>	$-3,588e-04 - j7,033e-04$	$-8,859e-05 - j1,793e-04$	$-4,746e-05 - j1,352e-04$
<i>B</i>	$+7,188e-04 + j2,442e-03$	$+2,056e-04 + j9,856e-04$	$+1,242e-04 + j4,848e-04$
<i>C</i>	$-1,244e-03 + j7,702e-04$	$-7,026e-04 + j3,625e-04$	$-3,074e-04 + j1,911e-04$

Capítulo 6

Conclusões

Apresentou-se neste trabalho uma generalização da incorporação holomórfica canônica de forma a acomodar o problema do fluxo de potência trifásico, sendo obtido êxito em sua validação através de sistemas elétricos de pequeno, médio e grande porte.

A incorporação holomórfica proposta apoiou-se em uma formulação específica do problema do fluxo de potência trifásico, também desenvolvida neste trabalho, inteiramente baseada nas equações nodais de rede em termos de admitâncias. É importante ressaltar a flexibilidade alcançada por esta formulação, sendo capaz de representar uma grande variedade de modos de controle próprios de dispositivos shunt ativos. De fato, algumas das condições operativas que podem ser impostas por essa formulação sequer possuem correspondência em malhas de controle que costumam ser encontradas na realidade. Contudo, tais modos de controle devem ser enxergados como ferramentas de análise complementares, que são capazes de endereçar questionamentos como qual a geração de potência reativa necessária em um determinado barramento para que seja atingido um determinado fator de potência em uma determinada linha, sendo o barramento, o fator de potência e a linha de interesse definidos *a priori*.

Em relação a incorporação holomórfica canônica propriamente dita, recuperando e expandindo resultados de [84], este trabalho demonstrou que a necessidade de separação da matriz de admitância de barra em equivalente série e equivalente shunt pode originar polos que, de acordo com os parâmetros da rede elétrica, dificultam imensamente a obtenção das séries de Taylor, mesmo no contexto do problema de fluxo de potência monofásico ou de sequência positiva, contrastando com uma afirmação presente em [11] de que “*additional singularities are harmless in the case of [the canonical embedding]*”. Além disso, demonstrou-se que no contexto específico do problema de fluxo de potência trifásico, esses polos, referidos como polos de ressonância paralelo, são problemáticos em situações relativamente comuns de sistemas de distribuição, por exemplo, transformadores de conexão estrela aterrado – delta

que estejam operando com pelo menos uma das fases em aberto.

Por fim, estão itemizadas sugestões de tópicos a serem investigados futuramente no contexto da incorporação holomórfica trifásica proposta:

- Avaliação de diferentes combinações de valores para as constantes ω ;
- Avaliação de diferentes problemas de fluxo de potência linearizados na composição da condição de $s = 0$;
- Adição de um modelo genérico de dispositivos série ativos na formulação do problema do fluxo de potência trifásico;
- Adição de novas equações para permitir a representação de equipamentos elétricos utilizando variáveis específicas dos seus respectivos modelos de regime permanente que não estão explicitamente acessíveis nos modelos genéricos (analogamente ao realizado para as máquinas de indução no contexto de uma operação com carga mecânica constante).

Referências Bibliográficas

- [1] JACOBSEN, J., LEWIS, O., TENNIS, B. “Approximations of Continuous Newton’s Method: an Extension of Cayley’s Problem”. In: *Sixth Mississippi State - UAB Conference on Differential Equations and Computational Simulations*, Starkville, Estados Unidos da América, maio 2005.
- [2] THORP, J., NAQAVI, S. “Load Flow Fractals”. In: *28th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Estados Unidos da América, dez. 1989.
- [3] THORP, J., NAQAVI, S. “More Load Flow Fractals”. In: *29th IEEE Conference on Decision and Control*, Honolulu, Estados Unidos da América, dez. 1990.
- [4] DENG, J.-J., CHIANG, H.-D. “Convergence Region of Newton Iterative Power Flow Method: Numerical Studies”, *Hindawi’s Journal of Applied Mathematics*, v. 2013, nov. 2013.
- [5] DENG, J.-J., CHIANG, H.-D., ZHAO, T.-Q. “Newton Method and Trajectory-Based Method for Solving Power Flow Problems: Nonlinear Studies”, *World Scientific’s International Journal of Bifurcation and Chaos*, v. 25, jun. 2015.
- [6] SCHNEIDER, K. P., MATHER, B. A., PAL, B. C., et al. “Analytic Considerations and Design Basis for the IEEE Distribution Test Feeders”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 33, n. 3, maio 2018.
- [7] SUN, L., JU, Y., YANG, L., et al. “Holomorphic Embedding Load Flow Modeling of the Three-phase Active Distribution Network”. In: *2018 International Conference on Power System Technology*, Guangzhou, China, nov. 2018.
- [8] CUTSEM, T. V., VOURNAS, C. “Components and Phenomena”. In: *Voltage Stability of Electric Power Systems*, 1 ed., Nova Iorque, Estados Unidos da América, Springer Science, 2008.

- [9] TRIAS, A. “The Holomorphic Embedding Load Flow method”. In: *2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, San Diego, Estados Unidos da América, jul. 2012.
- [10] TRIAS, A. “US7519506B2: System and method for monitoring and managing electrical power transmission and distribution networks”. <https://patents.google.com/patent/US7519506B2/en>, abr. 2009.
- [11] TRIAS, A. “Fundamentals of the Holomorphic Embedding Load-Flow Method”, *arXiv*, v. cs.SY, n. 1509.02421, set. 2015.
- [12] TRIAS, A. “The Holomorphic Embedding Load-flow Method (HELM) - Technology: Two-Bus LoadFlow Exact Developments”. <https://elequant.com/wp-content/uploads/Trias-2002-Two-bus-loadflow-exact-developments.pdf> in <http://elequant.com/technology/>. Acessado em 10-02-2022.
- [13] SUBRAMANIAN, M. K., FENG, Y., TYLAVSKY, D. “PV bus modeling in a holomorphically embedded power-flow formulation”. In: *2013 North American Power Symposium*, Manhattan, Estados Unidos da América, set. 2013.
- [14] SUBRAMANIAN, M. K. *Application of Holomorphic Embedding to the Power-Flow Problem*. Dissertação de M.Sc., Arizona State University, Arizona, Estados Unidos da América, 2014.
- [15] FENG, Y., TYLAVSKY, D. “A Novel Method to Converge to the Unstable Equilibrium Point for a Two-Bus System”. In: *2013 North American Power Symposium*, Manhattan, Estados Unidos da América, set. 2013.
- [16] FENG, Y. *Solving for the Low-Voltage/Large-Angle Power-Flow Solutions by Using the Holomorphic Embedding Method*. Tese de Ph.D., Arizona State University, Arizona, Estados Unidos da América, 2015.
- [17] TRIAS, A., MARÍN, J. L. “The Holomorphic Embedding Loadflow Method for DC Power Systems and Nonlinear DC Circuits”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, v. 63, n. 2, fev. 2016.
- [18] SAUTER, P. S., BRAUN, C. A., KLUWE, M., et al. “Comparison of the Holomorphic Embedding Load Flow Method with Established Power Flow Algorithms and a New Hybrid Approach”. In: *2017 Ninth Annual IEEE Green Technologies Conference (GreenTech)*, Denver, Estados Unidos da América, mar. 2017.

- [19] WALLACE, I., ROBERTS, D., GROTHEY, A., et al. “Alternative PV Bus Modelling with the Holomorphic Embedding Load Flow Method”, *arXiv*, v. math.OC, n. 1607.00163, jul. 2016.
- [20] WANG, B., LIU, C., SUN, K. “Multi-Stage Holomorphic Embedding Method for Calculating the Power-Voltage Curve”. In: *2018 IEEE Power & Energy Society General Meeting*, Portland, Estados Unidos da América, ago. 2018.
- [21] LIU, C., WANG, B., HU, F., et al. “Online Voltage Stability Assessment for Load Areas Based on the Holomorphic Embedding Method”. In: *2018 IEEE Power & Energy Society General Meeting*, Portland, Estados Unidos da América, ago. 2018.
- [22] U, B., SONAM, K., WAGH, S. R., et al. “Bifurcation Point Tracking in Generator Outage Scenario using Nested Holomorphic Embedding Power Flow Method”. In: *2019 North American Power Symposium*, Wichita, Estados Unidos da América, out. 2019.
- [23] MOHIT, F., SHRUTIKA, C., SONAM, K., et al. “Tracing Voltage Collapse Point for Non-uniform Loading Using Holomorphic Embedding”. In: *2019 9th International Conference on Power and Energy Systems*, Perth, Austrália, dez. 2019.
- [24] WU, D., WANG, B. “Holomorphic Embedding Based Continuation Method for Identifying Multiple Power Flow Solutions”, *IEEE Access*, v. 7, jun. 2019.
- [25] RAO, S., TYLAVSKY, D., VITTAL, V., et al. “Fast Weak-Bus and Bifurcation Point Determination using Holomorphic Embedding Method”. In: *2018 IEEE Power & Energy Society General Meeting*, Portland, Estados Unidos da América, ago. 2018.
- [26] LAI, Q., LIU, C., SUN, K. “A Network Decoupling Method for Voltage Stability Analysis Based on Holomorphic Embedding”, *arXiv*, v. eess.SY, n. 2003.12287, mar. 2020.
- [27] GAO, H., CHEN, J., DIAO, R., et al. “A HEM-Based Sensitivity Analysis Method for Fast Voltage Stability Assessment in Distribution Power Network”, *IEEE Access*, v. 9, jan. 2021.
- [28] LIU, C., WANG, B., XU, X., et al. “A Multi-Dimensional Holomorphic Embedding Method to Solve AC Power Flows”, *IEEE Access*, v. 5, set. 2017.

- [29] LIU, C., BAK, C. L., ZHU, Y., et al. “Analytical solutions for power flow equations based on the multivariate quotient-difference method”. In: *2019 IEEE Milan PowerTech*, Milão, Itália, jun. 2019.
- [30] CHIANG, H.-D., WANG, T., SHENG, H. “A Novel Fast and Flexible Holomorphic Embedding Power Flow Method”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 33, n. 3, maio 2018.
- [31] PAN, S., LI, Z., ZHENG, J. H., et al. “On Convergence Performance and its Common Domain of the Fast and Flexible Holomorphic Embedding Method for Power Flow Analysis”. In: *2020 IEEE Power & Energy Society General Meeting*, Montreal, Canadá, ago. 2020.
- [32] FREITAS, F. D., JR., A. C. S., FERNANDES, L. F. J., et al. “Restarted holomorphic embedding load-flow model based on low-order Padé approximant and estimated bus power injection”, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 112, nov. 2019.
- [33] TRIAS, A., MARÍN, J. L. “A Padé-Weierstrass technique for the rigorous enforcement of control limits in power flow studies”, *arXiv*, v. cs.SY, n. 1707.04064, jul. 2017.
- [34] RAO, S., TYLAVSKY, D. “Nonlinear network reduction for distribution networks using the holomorphic embedding method”. In: *2016 North American Power Symposium*, Denver, Estados Unidos da América, set. 2016.
- [35] ZHU, Y., TYLAVSKY, D., RAO, S. “Nonlinear Structure-Preserving Network Reduction Using Holomorphic Embedding”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 33, n. 2, mar. 2018.
- [36] HEIDARIFAR, M., ANDRIANESIS, P., CARAMANIS, M. “Efficient Load Flow Techniques Based on Holomorphic Embedding for Distribution Networks”. In: *2019 IEEE Power & Energy Society General Meeting*, Atlanta, Estados Unidos da América, ago. 2019.
- [37] SONAM, K., WAGH, S. R., SINGH, N. M. “Synchronized Operating Point Stability of Multimachine Power System using Holomorphic Embedding in Kuramoto Framework”. In: *2019 North American Power Symposium*, Wichita, Estados Unidos da América, out. 2019.
- [38] YAO, R., SUN, K., SHI, D., et al. “Voltage Stability Analysis of Power Systems With Induction Motors Based on Holomorphic Embedding”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 34, n. 2, mar. 2019.

- [39] YAO, R., LIU, Y., SUN, K., et al. “Efficient and Robust Dynamic Simulation of Power Systems With Holomorphic Embedding”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 35, n. 2, mar. 2020.
- [40] SALLES RAMOS, A. C., FREITAS, F. D. “Multibus System Unconstrained Economic Dispatch Problem Solution Via Holomorphic Embedding Method”. In: *2019 Workshop on Communication Networks and Power Systems*, Brasília, Brasil, out. 2019.
- [41] ZHAO, Y., LI, C., DING, T., et al. “Holomorphic Embedding Power Flow for AC/DC Hybrid Power Systems Using Bauer’s Eta Algorithm”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 36, n. 4, jul. 2021.
- [42] SUR, U., BISWAS, A., BERA, J. N., et al. “A modified holomorphic embedding method based hybrid AC-DC microgrid load flow”, *Electric Power Systems Research*, v. 182, maio 2021.
- [43] BASIRI-KEJANI, M., GHOLIPOUR, E. “Holomorphic Embedding Load-Flow Modeling of Thyristor-Based FACTS Controllers”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 32, n. 6, nov. 2017.
- [44] SINGH, P., TIWARI, R. “STATCOM Model Using Holomorphic Embedding”, *IEEE Access*, v. 7, mar. 2019.
- [45] SINGH, P., SENROY, N. “Steady-State models of STATCOM and UPFC using flexible holomorphic embedding”, *Electric Power Systems Research*, v. 199, out. 2021.
- [46] SINGH, P., SENROY, N. “Steady-state model of VSC based FACTS devices using flexible holomorphic embedding: (SSSC and IPFC)”, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 133, dez. 2021.
- [47] BAGHSORKHI, S. S., SUETIN, S. P. “Embedding AC Power Flow in the Complex Plane Part I: Modelling and Mathematical Foundation”, *arXiv*, v. cs.SY, n. 1604.03425, jul. 2016.
- [48] BAGHSORKHI, S. S., SUETIN, S. P. “Embedding AC Power Flow in the Complex Plane Part II: A Reliable Framework for Voltage Collapse Analysis”, *arXiv*, v. cs.SY, n. 1609.01211, set. 2016.
- [49] LI, S., TYLAVSKY, D., SHI, D., et al. “Implications of Stahl’s Theorems to Holomorphic Embedding Pt. 1: Theoretical Convergence”, *arXiv*, v. eess.SY, n. 2003.07478, mar. 2020.

- [50] DRONAMRAJU, A., LI, S., LI, Q., et al. “Implications of Stahl’s Theorems to Holomorphic Embedding Pt. 2: Numerical Convergence”, *arXiv*, v. eess.SY, n. 2003.07457, mar. 2020.
- [51] LI, S., DRONAMRAJU, A., TYLAVSKY, D. “Root Distribution in Padé Approximants and its Effect on Holomorphic Embedding Method Convergence”, *arXiv*, v. eess.SY, n. 2004.07619, abr. 2020.
- [52] WANG, T., CHIANG, H.-D. “On the Holomorphic and Conjugate Properties for Holomorphic Embedding Methods for Solving Power Flow Equations”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 35, n. 4, jul. 2020.
- [53] WANG, T., CHIANG, H.-D. “Theoretical Study of Non-Iterative Holomorphic Embedding Methods for Solving Nonlinear Power Flow Equations: Algebraic Property”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 36, n. 4, jul. 2021.
- [54] SARNARI, A. J., ŽIVANOVIĆ, R. “Robust padé approximation for the holomorphic embedding load flow”. In: *2016 Australasian Universities Power Engineering Conference*, Brisbane, Austrálie, set. 2016.
- [55] RAO, S., TYLAVSKY, D. “Theoretical convergence guarantees versus numerical convergence behavior of the holomorphically embedded power flow method”, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 95, fev. 2018.
- [56] TRIAS, A. “US8849614B2: System and Method for Monitoring and Managing Three-Phase Power Flows in Electrical Transmission and Distribution Networks”. <https://patents.google.com/patent/US8849614B2/en>, set. 2014.
- [57] KEIHAN ASL, D., MOHAMMADI, M., REZA SEIFI, A. “Holomorphic embedding load flow for unbalanced radial distribution networks with DFIG and tap-changer modelling”, *IET Generation, Transmission & Distribution*, v. 13, n. 19, set. 2019.
- [58] GANGWAR, P., KESHERWANI, S., CHAKRABARTI, S., et al. “Multiobjective Multiscenario Framework for RCS Placement in Unbalanced Distribution Systems Considering Uncertainty”, *IEEE Systems Journal*, maio 2021.
- [59] RAO, B. V., KUPZOG, F., KOZEK, M. “Three-Phase Unbalanced Optimal Power Flow Using Holomorphic Embedding Load Flow Method”, *Multi-disciplinary Digital Publishing Institute: Sustainability*, v. 11, mar. 2019.

- [60] SUR, U., BISWAS, A., BERA, J. N., et al. “Holomorphic Embedding Load Flow Modeling of DSTATCOM for Active Distribution Networks”. In: *2020 IEEE Calcutta Conference*, Kolkata, Índia, fev. 2020.
- [61] SUR, U., BISWAS, A., BERA, J. N., et al. “Holomorphic Embedding Power Flow Analysis of Hybrid-Tidal-Farm-Integrated Power Distribution System”, *IEEE Systems Journal*, mar. 2021.
- [62] SILVA, F. L. *Modelagem de transformadores trifásicos de distribuição para estudos de fluxo de potência*. Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.
- [63] PENIDO, D. R. R. *Uma metodologia para análise de sistemas elétricos a N condutores pelo Método De Injeção De Correntes*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2008.
- [64] CHEN, T.-H., CHEN, M.-S., INOUE, T., et al. “Three-Phase Cogenerator and Transformer Models for Distribution System Analysis”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 6, n. 4, out. 1991.
- [65] CHEN, T.-H., CHANG, J.-D. “Open wye-open delta and open delta-open delta transformer models for rigorous distribution system analysis”, *IEE Proceedings C (Generation, Transmission and Distribution)*, v. 139, n. 3, maio 1992.
- [66] CHEN, T.-H., CHANG, J.-D., CHANG, Y. “Models of grounded mid-tap open-wye and open-delta connected transformers for rigorous analysis of a distribution system”, *IEE Proceedings - Generation, Transmission and Distribution*, v. 143, n. 1, jan. 1996.
- [67] ZANETTA JR., L. C. “Propagação de Ondas em Linhas Polifásicas”. In: *Transitórios Eletromagnéticos em Sistemas de Potência*, 1 ed., cap. 7, São Paulo, Brasil, EdUSP - Editora da Universidade de São Paulo, 2003.
- [68] LI, J.-C., WU, Y.-P. “A distributed circuit model for three-phase transposed and untransposed transmission lines”, *Electric Power Systems Research*, v. 19, n. 3, out. 1990.
- [69] IEEE PES DSAS. *IEEE 4 Node Test Feeder*. Relatório técnico, IEEE Power Engineering Society Distribution System Analysis Subcommittee, set. 2006.
- [70] IEEE PES DSAS. *IEEE Wye-Delta Center Tapped Transformer Test Feeder*. Relatório técnico, IEEE Power Engineering Society Distribution System Analysis Subcommittee, nov. 2004.

- [71] GALLEGO, L. A., PADILHA-FELTRIN, A. “Voltage Regulator Modeling for the Three-Phase Power Flow in Distribution Networks”. In: *2008 IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exposition: Latin America*, Bogotá, Colômbia, ago. 2008.
- [72] DHARMAKEERTHI, C. H., MITHULANANTHAN, N., SAHA, T. K. “Impact of Electric Vehicle Fast Charging on Power System Voltage Stability”, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 57, maio 2014.
- [73] ANDERSON, P. M. “Sequence Impedance of Machines”. In: *Analysis of Faulted Power Systems*, 1 ed., cap. 6, Nova Iorque, Estados Unidos da América, John Wiley & Sons, 1995.
- [74] ARRILLAGA, J., ARNOLD, C. P. “Power System Stability - Advanced Component Modelling”. In: *Computer Analysis of Power Systems*, 1 ed., cap. 7, Chichester, Inglaterra, John Wiley & Sons, 1994.
- [75] DAS, J. C. “Sequence Impedances of Rotating Equipment and Static Load”. In: *Understanding Symmetrical Components for Power System Modeling*, 1 ed., cap. 4, Hoboken, Estados Unidos da América, John Wiley & Sons, 2017.
- [76] KUNDUR, P. “Equipment Characteristics and Modelling”. In: *Power System Stability and Control*, 1 ed., Nova Iorque, Estados Unidos da América, McGraw-Hill, 1994.
- [77] MARINHO, J. M. T. *Simulação em Sistemas de Energia Elétrica com Modelagem Flexível - Monofásica e Trifásica*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2008.
- [78] FREITAS, W., JÚNIOR, J. C. M. V., FRANÇA, A. M., et al. “Análise Comparativa entre Geradores Síncronos e Geradores de Indução com Rotor Tipo Gaiola de Esquilo para Aplicação em Geração Distribuída”, *Revista Controle & Automação*, v. 16, n. 3, jul. 2005.
- [79] CAVALIERE, C. A. C. *Análise e Modelagem de STATCOM Considerando Operação em Sistema Desbalanceado*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2008.
- [80] CASTRO, C. A. “Gerador Síncrono”. In: *Notas de Aula ET720 – Sistemas de Energia Elétrica I*, cap. 3, São Paulo, Brasil, Universidade Estadual de Campinas, 2013.

- [81] ACHA, E., FUERTE-ESQUIVEL, C. R., AMBRIZ-PEREZ, H., et al. “Modelling of FACTS Controllers”. In: *FACTS: Modelling and Simulation in Power Networks*, 1 ed., cap. 2, Chichester, Inglaterra, John Wiley & Sons, 2004.
- [82] ACHA, E., FUERTE-ESQUIVEL, C. R., AMBRIZ-PEREZ, H., et al. “Three-Phase Power Flow”. In: *FACTS: Modelling and Simulation in Power Networks*, 1 ed., cap. 6, Chichester, Inglaterra, John Wiley & Sons, 2004.
- [83] ACHA, E., FUERTE-ESQUIVEL, C. R., AMBRIZ-PEREZ, H., et al. “Power Flow Including FACTS Controllers”. In: *FACTS: Modelling and Simulation in Power Networks*, 1 ed., cap. 5, Chichester, Inglaterra, John Wiley & Sons, 2004.
- [84] SOUZA, A. L. *Resolução do problema do fluxo de potência pelo método da incorporação holomórfica*. Trabalho de conclusão de curso, UERJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2018.
- [85] ARRILLAGA, J., ARNOLD, C. P. “Three-Phase Load Flow”. In: *Computer Analysis of Power Systems*, 1 ed., cap. 3, Chichester, Inglaterra, John Wiley & Sons, 1994.
- [86] ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS. “Algebraic Function”. http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Algebraic_function&oldid=45136, . Acessado em 10-02-2022.
- [87] ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS. “Analytic Function”. http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Analytic_function&oldid=51940, . Acessado em 10-02-2022.
- [88] OLVER, P. J. *Complex Analysis and Conformal Mapping*. Nova Iorque, Estados Unidos da América, University of Minnesota, 2020.
- [89] MILIOTO, D. C. “An Algorithm for Determining the Radii of Convergence of Algebraic Power Series”, *arXiv*, v. math.AG, n. 1305.0489, maio 2013.
- [90] STAHL, H. “The convergence of Padé Approximants to functions with branch points”, *Journal of Approximation Theory*, v. 91, n. 2, nov. 1997.
- [91] STAHL, H. “Sets of minimal capacity and extremal domains”, *arXiv*, v. math.CA, n. 1205.3811, maio 2012.
- [92] IEEE PES DSAS. “IEEE Power Engineering Society Distribution System Analysis Subcommittee: Test Feeder Resources”. <https://cmte.ieee.org/pes-testfeeders/resources/>. Acessado em 10-02-2022.

- [93] DUGAN, R. C., MCDERMOTT, T. E. “An open source platform for collaborating on smart grid research”. In: *2011 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, Detroit, Estados Unidos da América, jul. 2011.
- [94] CHEN, B.-K., CHEN, M.-S., SHOULTS, R. R., et al. “Hybrid Three Phase Load Flow”, *IEEE Proceedings*, v. 137, n. 3, maio 1990.
- [95] ABDEL-AKHER, M., NOR, K. M., RASHID, A. H. A. “Improved Three-Phase Power-Flow Methods Using Sequence Components”, *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 20, n. 3, ago. 2005.
- [96] ANDERSON, P. M., FOUAD, A. A. “The Elementary Mathematical Model”. In: *Power System Control and Stability*, 2 ed., cap. 2, Nova Iorque, Estados Unidos da América, John Wiley & Sons, 2003.
- [97] MANZONI, A. *Desenvolvimento de um Sistema Computacional Orientado a Objetos para Sistemas Elétricos de Potência: aplicação a simulação rápida e análise da estabilidade de tensão*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2005.

Apêndice A

Blocos Auxiliares

Este apêndice apresenta os subvetores e as submatrizes que compõem as equações matriciais em bloco dispostas no Capítulo 3.

$$z_{km} = \begin{bmatrix} z_{km}^{(aa)} & z_{km}^{(ab)} & z_{km}^{(ac)} \\ z_{km}^{(ba)} & z_{km}^{(bb)} & z_{km}^{(bc)} \\ z_{km}^{(ca)} & z_{km}^{(bc)} & z_{km}^{(cc)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\alpha_{km}^{\phi} = \begin{bmatrix} \alpha_{km}^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{km}^{(b)} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{km}^{(c)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$y_{km} = \begin{bmatrix} y_{km}^{(aa)} & y_{km}^{(ab)} & y_{km}^{(ac)} \\ y_{km}^{(ba)} & y_{km}^{(bb)} & y_{km}^{(bc)} \\ y_{km}^{(ca)} & y_{km}^{(bc)} & y_{km}^{(cc)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\beta_{km}^{\phi} = \begin{bmatrix} \beta_{km}^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{km}^{(b)} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{km}^{(c)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$z_{km}^{\phi} = \begin{bmatrix} z_{km}^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & z_{km}^{(b)} & 0 \\ 0 & 0 & z_{km}^{(c)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\alpha_{km}^{\phi\phi} = \begin{bmatrix} \alpha_{km}^{(ab)} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{km}^{(bc)} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{km}^{(ca)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\hat{z}_{km}^{\phi} = \begin{bmatrix} \hat{z}_{km}^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{z}_{km}^{(b)} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{z}_{km}^{(c)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\beta_{km}^{\phi\phi} = \begin{bmatrix} \beta_{km}^{(ab)} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{km}^{(bc)} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{km}^{(ca)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\tilde{z}_{km}^{\phi} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_{km}^{(a)} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{z}_{km}^{(b)} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{z}_{km}^{(c)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$I_{km}^{\phi} = \begin{bmatrix} I_{km}^{(a)} \\ I_{km}^{(b)} \\ I_{km}^{(c)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$z_{km}^{\phi\phi} = \begin{bmatrix} z_{km}^{(ab)} & 0 & 0 \\ 0 & z_{km}^{(bc)} & 0 \\ 0 & 0 & z_{km}^{(ca)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$V_k^{\phi} = \begin{bmatrix} V_k^{(a)} \\ V_k^{(b)} \\ V_k^{(c)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

As submatrizes referentes, exclusivamente, à modelagem de transformadores de dois enrolamentos estão dispostas a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

As submatrizes referentes, exclusivamente, à modelagem de transformadores de dois enrolamentos com derivação central, quando o enrolamento em derivação encontra-se na fase A , estão dispostas a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

$$E = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

$$k = \frac{1}{z_{km}^{(a)}} \quad (\text{A.30})$$

As submatrizes referentes, exclusivamente, à modelagem de transformadores de dois enrolamentos com derivação central, quando o enrolamento em derivação

encontra-se na fase B , estão dispostas a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.42})$$

$$k = \frac{1}{\tilde{z}_{km}^{(b)}} \quad (\text{A.43})$$

As submatrizes referentes, exclusivamente, à modelagem de transformadores de dois enrolamentos com derivação central, quando o enrolamento em derivação encontra-se na fase C , estão dispostas a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.44})$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.46})$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.48})$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.49})$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.50})$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.51})$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.52})$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.53})$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.54})$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.55})$$

$$k = \frac{1}{\tilde{z}_{km}^{(c)}} \quad (\text{A.56})$$

As submatrizes referentes, exclusivamente, à modelagem de autotransformadores reguladores de tensão em conexão delta aberto, quando não há regulador entre as fases B e C , estão dispostas a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.57})$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.58})$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.59})$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.60})$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.61})$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.62})$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.63})$$

(Tipo-A)

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.64})$$

(Tipo-A)

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.65})$$

(Tipo-B)

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.66})$$

(Tipo-B)

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.67})$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.68})$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.70})$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.69})$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.71})$$

$$k = z_{km}^{(a)} \quad (\text{A.72})$$

As submatrizes referentes, exclusivamente, à modelagem de autotransformadores reguladores de tensão em conexão delta aberto, quando não há regulador entre as fases C e A , estão dispostas a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.73})$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.80})$$

(Tipo-A)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.74})$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.81})$$

(Tipo-B)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.75})$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.82})$$

(Tipo-B)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.76})$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.77})$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.83})$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.78})$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.84})$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.79})$$

(Tipo-A)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.85})$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.86})$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.87})$$

$$k = z_{km}^{(b)} \quad (\text{A.88})$$

As submatrizes referentes, exclusivamente, à modelagem de autotransformadores reguladores de tensão em conexão delta aberto, quando não há regulador entre as fases A e B , estão dispostas a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.89})$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.97})$$

(Tipo-B)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.90})$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.98})$$

(Tipo-B)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.91})$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.99})$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.92})$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.100})$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.93})$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.101})$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.94})$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.102})$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.95})$$

(Tipo-A)

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.103})$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.96})$$

(Tipo-A)

$$k = z_{km}^{(c)} \quad (\text{A.104})$$